บทที่ 5

บทสรุป

จากการศึกษาผลคูณไอดีลของเรสิดิวบนพีชคณิต BCK ในบทที่ 3 เราสรุปได้ดังนี้

5.1 คุณสมบัติของไอดีลในพีชคณิต BCK

5.1.1 เมื่อกำหนดให้ $\underline{X} = (X\,;\,*\,,\,0)$ เป็นพีชคณิต BCK และ $A \subseteq X$ เป็นไอดีลบน $\underline{X}$ จะได้ว่า A มีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

1) ถ้า $a_1\,,\,a_2 \in A$ แล้ว $a_1 * a_2\,,\; a_2 * a_1 \in A$

2) ถ้า $a \in A$ และ $x \in X$ แล้ว $a * x \in A$

3) ถ้า $a \in A$ และ $x \in X$ แล้ว $x * (x * a) \in A$

5.1.2 เมื่อกำหนดให้ $\underline{X} = (X\,;\,*\,,\,0)$ เป็นพีชคณิต BCK ที่มีขอบเขต และ A เป็นไอดีลบน $\underline{X}$ จะได้ว่า $1 \in A$ ก็ต่อเมื่อ $A = X$

5.2 คุณสมบัติต่างๆ ของเรสิดิวคลาส $(X|_{\sim A}\,;\,*\,,\,[0]_{\sim A})$

5.2.1 ถ้า $\underline{X} = (X\,;\,*\,,\,0)$ เป็นพีชคณิต BCK และ $A \subseteq X$ เป็นไอดีลบน $\underline{X}$ แล้ว $\sim_A$ เป็นความสัมพันธ์สมภาคบน $\underline{X}$ ที่กำหนดโดย A

5.2.2 เมื่อกำหนดให้ $\underline{X} = (X\,;\,*\,,\,0)$ เป็น อิมพลิเคทีฟ พีชคณิต BCK และ θ เป็นความสัมพันธ์สมภาคบน $\underline{X}$ จะได้ว่า $(x,y) \in \theta$ ก็ต่อเมื่อ $(x * y\,,\, y * x) \in \theta$ สำหรับทุก $x, y \in X$

5.2.3 เมื่อกำหนดให้ $\underline{X} = (X\,;\,*\,,\,0)$ เป็นพีชคณิต BCK และ $A \subseteq X$ เป็นไอดีลบน $\underline{X}$ นิยามการดำเนินการ $*$ บน $X|_{\sim A}$ โดย $[x]_{\sim A} * [y]_{\sim A} = [x * y]_{\sim A}$ จะได้ว่า $(X|_{\sim A}\,;\,*\,,\,[0]_{\sim A})$ เป็นพีชคณิต BCK

5.2.4 เมื่อกำหนดให้ $\underline{X} = (X;\ *,\ 0)$ เป็นพีชคณิต BCK และ $A \subseteq X$ เป็นไอดีลบน $\underline{X}$ ดังนั้น $[0]_{\sim A} = A$

5.2.5 เมื่อกำหนดให้ $\underline{X} = (X;\ *,\ 0)$ เป็นพีชคณิต BCK และ $A \subseteq X$ เป็นไอดีลบน $\underline{X}$ ดังนั้น $A = \{0\}$ ก็ต่อเมื่อ $[x]_{\sim A} = \{x\}$ สำหรับทุก $x \in X$

5.3 คุณสมบัติของเรสิดิวคลาส $(X|_\theta\ ;\ *, [0]_\theta)$ เมื่อ θ เป็นความสัมพันธ์สมภาค

5.3.1 เมื่อกำหนดให้ $\underline{X} = (X;\ *, 0)$ เป็นคอมมิวเททีฟ พีชคณิต BCK และ θ เป็นความสัมพันธ์สมภาคบน $\underline{X}$ กำหนดการดำเนินการ $*$ บน $X|_\theta$ โดย $[x]_\theta * [y]_\theta = [x * y]_\theta$ จะได้ว่า $(X|_\theta\ ;\ *,\ [0]_\theta)$ เป็นพีชคณิต BCK

5.3.2 เมื่อกำหนดให้ $\underline{X} = (X;\ *,\ 0)$ เป็นคอมมิวเททีฟ พีชคณิต BCK และ θ เป็นความสัมพันธ์สมภาค บน $\underline{X}$ จะได้ว่า $(X|_\theta\ ;\ *, [0]_\theta)$ เป็นคอมมิวเททีฟ พีชคณิต BCK

5.4 คุณสมบัติของเรสิดิวคลาส $(X|_{\sim A}\ ;\ \cdot,\ [0]_{\sim A})$ เมื่อ $\cdot$ แตกต่างจาก $*$

5.4.1 เมื่อกำหนดให้ $\underline{X} = (X;\ *,\ 0)$ เป็นพีชคณิต BCK ที่มีเงื่อนไข (S) จะได้ว่า $(X; \circ,\ 0)$ ก็ต่อเมื่อ $X = \{0\}$

5.4.2 เมื่อกำหนดให้ $\underline{X} = (X;\ *,\ 0)$ เป็นพีชคณิต BCK ที่มีเงื่อนไข (S) ดังนั้น

1. ถ้า $x \circ y = c$ แล้ว $z * c = 0$

   เมื่อ $z \in \{0, x, y, x * y, y * x, c * x, c * y\}$

2. $x \circ y = y \circ x$ สำหรับทุก $x, y \in X$

3. ถ้า $x \circ y = 0$ แล้ว $x = y$

4. $(x \circ y) \circ z = (x \circ z) \circ y$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

5. $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

5.4.3 เมื่อกำหนดให้ $\underline{X} = (X;\ *,\ 0)$ เป็น โพซิทีฟอิมพลิเคทีฟ พีชคณิต BCK ที่มีเงื่อนไข(S) และ $A \subseteq X$ เป็นไอดีลบน $\underline{X}$ จะได้ว่า $[0]_{\sim A}$ เป็นสมาชิกเอกลักษณ์ของ $(\ X|_{\sim A}\ ;\ \circ\ ,\ [0]_{\sim A}\ )$

5.4.4 เมื่อกำหนดให้ $\underline{X} = (X;*,\ 0)$ เป็น โพซิทีฟอิมพลิเคทีฟ พีชคณิต BCK ที่มีเงื่อนไข (S) และ $A \subseteq X$ เป็นไอดีลบน $\underline{X}$ จะได้ว่า $(\ X|_{\sim A}\ ;\circ\ ,\ [0]_{\sim A}\ )$ เป็นโมนอยด์

5.4.5 เมื่อกำหนดให้ $\underline{X} = (X;\ *,\ 0)$ เป็น โพซิทีฟอิมพลิเคทีฟ พีชคณิต BCK ที่มีเงื่อนไข (S) และ $A \subseteq X$ เป็นไอดีลบน $\underline{X}$ จะได้ว่า $(\ X|_{\sim A}\ ;\ \circ\ ,[0]_{\sim A}\ )$ เป็นกึ่งแลตทิซ

5.4.6 เมื่อกำหนดให้ $\underline{X} = (X;\ *,\ 0)$ เป็นพีชคณิต BCK และ $0 \neq r \in X$ กำหนดการดำเนินการ Δ_r บน X โดย $x\ \Delta_r\ y = (x * r) * y$ สำหรับทุก $x, y \in X$ จะได้ว่า $(X;\ \Delta_r\ ,\ 0)$ สอดคล้องกับคุณสมบัติดังต่อไปนี้

1) $(x\ \Delta_r\ (x\ \Delta_r\ y))\ \Delta_r\ y = 0$ BCK 2

2) $x\ \Delta_r\ x = 0$ BCK 3

3) $0\ \Delta_r\ x = 0$ BCK 4

4) $(x\ \Delta_r\ y)\ \Delta_r\ z = (x\ \Delta_r\ z)\ \Delta_r\ y$ BCK 7

5) $(x\ \Delta_r\ y)\ \Delta_r\ x = 0$ BCK 8

6) $x\ \Delta_r\ (x\ \Delta_r\ (x\ \Delta_r\ y)) = x\ \Delta_r\ y$ BCK 9

5.4.7 เมื่อกำหนดให้ $\underline{X} = (X;\ *,\ 0)$ เป็นโพซิทีฟอิมพลิเคทีฟ พีชคณิต BCK และ $0 \neq r \in X$ จะได้ว่า $(X;\ \Delta_r\ ,\ 0)$ จะสอดคล้องกับคุณสมบัติดังต่อไปนี้

$((x\ \Delta_r\ y)\ \Delta_r\ (\ x\ \Delta_r\ z))\ \Delta_r\ (z\ \Delta_r\ y) = 0$ BCK 1 สำหรับทุก $x, y, z \in X$

5.4.8 เมื่อกำหนดให้ $\underline{X} = (X;\ *,\ 0)$ เป็น โพซิทีฟอิมพลิเคทีฟ พีชคณิต BCK , $A \subseteq X$ และ $0 \neq r \in A$ จะได้ว่า A เป็นไอดีลบน $\underline{X}$ ก็ต่อเมื่อ A เป็นไอดีลบน $(X;\ \Delta_r\ ,\ 0)$

5.4.9 เมื่อกำหนดให้ $\underline{X} = (X;\ *\ ,\ 0)$ เป็นพีชคณิต BCK และ $0 \neq r \in X$

กำหนดการดำเนินการ ${}_k\Delta_r$ บน X โดย

$$x\ {}_k\Delta_r\ y = ((\ldots(((x * r) * y) * r) * y)\ldots) * r) * y \quad \text{สำหรับทุก } x, y \in X \text{ เมื่อ } k = 1,2,3 \ldots$$

r (k ครั้ง)

จะได้คุณสมบัติดังต่อไปนี้

1) $(x\ {}_k\Delta_r\ (x\ {}_k\Delta_r\ y))\ {}_k\Delta_r\ y = 0$ BCK 2

2) $x\ {}_k\Delta_r\ x = 0$ BCK 3

3) $0\ {}_k\Delta_r\ x = 0$ BCK 4

4) $(x\ {}_k\Delta_r\ y)\ {}_k\Delta_r\ z = (x\ {}_k\Delta_r\ z)\ {}_k\Delta_r\ y$ BCK 7

5) $(x\ {}_k\Delta_r\ y)\ {}_k\Delta_r\ x = 0$ BCK 8

5.4.10 ถ้า $\underline{X} = (X;\ *\ ,\ 0)$ เป็น โพซิทีฟอิมพลิเคทีฟ พีชคณิต BCK แล้ว

$x\ {}_k\Delta_r\ y = x\ \Delta_r\ y$ สำหรับทุก k = 1,2,3 .....

5.4.11 เมื่อกำหนดให้ $\underline{X} = (X;\ *\ ,\ 0)$ เป็น โพซิทีฟอิมพลิเคทีฟ พีชคณิต BCK ,

$A \subseteq X$ และ $0 \neq r \in A$ จะได้ว่า

A เป็น ไอดีลบน $\underline{X}$ ก็ต่อเมื่อ A เป็นไอดีลบน $(X;\ {}_k\Delta_r\ , 0)$ สำหรับทุก k = 1,2,3.......

5.5 ($X|_{\sim A}$; $\cdot$, $[0]_{\sim A}$) เป็นพีชคณิต BCK เมื่อ $\cdot$ แตกต่างจาก $*$

5.5.1 เมื่อกำหนดให้ $\underline{X} = (X;*\ ,\ 0)$ เป็นโพซิทีฟอิมพลิเคทีฟ พีชคณิต BCK ที่มีเงื่อนไข(S) และ $A \subseteq X$ เป็นไอดีลบน $\underline{X}$ จะได้ว่า ($X|_{\sim A}$; $\circ$, $[0]_{\sim A}$) เป็นพีชคณิต BCK ก็ต่อเมื่อ $A = X$

5.5.2 เมื่อกำหนดให้ $\underline{X} = (X;\ *\ ,\ 0)$ เป็น โพซิทีฟอิมพลิเคทีฟ พีชคณิต BCK , $A \subseteq X$ เป็นไอดีลบน $\underline{X}$ และ $0 \neq r \in A$ จะได้ว่า ($X|_{\sim A}$; Δ_r , $[0]_{\sim A}$) เป็น โพซิทีฟอิมพลิเคทีฟ พีชคณิต BCK

5.6 ความเกี่ยวข้องกันระหว่าง $(X|_{\sim A} ; *, [0]_{\sim A})$ กับ $(X|_{\sim A} ; \circ, [0]_{\sim A})$

5.6.1 เมื่อกำหนดให้ $\underline{X}, \underline{Y}$ เป็นพีชคณิต BCK และ $A \subseteq Y$ เป็นไอดีลบน $\underline{Y}$ ถ้า $\psi : X \rightarrow Y$ เป็นฟังก์ชันถ่ายแบบ แล้ว จะมีฟังก์ชันถ่ายแบบ $f: X|_{\sim\psi^{-1}(A)} \rightarrow Y|_{\sim A}$ เพียงฟังก์ชันเดียวที่สอดคล้องกับ $\pi^{l}\psi = f\pi$ เมื่อ $\pi : X \rightarrow X|_{\sim\psi^{-1}(A)}$ และ $\pi^{l} : Y \rightarrow Y|_{\sim A}$

5.6.2 เมื่อกำหนดให้ $\underline{X} = (X ; *, 0)$ เป็นพีชคณิต BCK ที่มีเงื่อนไข (S) และ $A \subseteq X$ เป็นไอดีลบน $\underline{X}$ ถ้า $\psi : (X|_{\sim A} ; *, [0]_{\sim A}) \rightarrow (X|_{\sim A} ; \circ, [0]_{\sim A})$ เป็นฟังก์ชันถ่ายแบบ แล้ว จะมี ฟังก์ชันถ่ายแบบ $f: (X ; *, 0) \rightarrow (X|_{\sim A} ; \circ, [0]_{\sim A})$ เพียงฟังก์ชันเดียวที่สอดคล้องกับ $f = \psi\pi$ เมื่อ $\pi : (X ; *) \rightarrow (X|_{\sim A} ; *)$

จากศึกษา พีชคณิตอนุพัทธ์อย่างอ่อน ที่มาจากพีชคณิต BCK ในบทที่ 4 สามารถสรุปได้ดังนี้

เมื่อกำหนดให้ $\underline{X} = (X ; *, 0)$ เป็น พีชคณิต BCK และ $Y_2 = \{x, y\}$ นิยาม ไบนารี่ BCK-โพลิโนเมียล บน $\underline{X}$ โดย

1) x , y เป็น ไบนารี่ BCK-โพลิโนเมียล

2) c เป็น ไบนารี่ BCK-โพลิโนเมียล สำหรับทุก $c \in X$

3) ถ้า p_1, p_2 เป็น ไบนารี่ BCK-โพลิโนเมียล แล้ว $p_1 * p_2$ เป็น ไบนารี่ BCK-โพลิโนเมียล

เมื่อ $*$ เป็นแค่ สัญลักษณ์การดำเนินการไบนารี่ และ ให้ $P(Y_2)$ เป็นเซตของไบนารี่ BCK-โพลิโนเมียลทั้งหมด โดยมีการกำหนดฟังก์ชัน $\sigma : \{*, 0\} \rightarrow P(Y_2)$ โดยที่ $\sigma(0) = 0$ จะถูกเรียกว่า BCK-ไฮเพอร์สับสทิทิวชันอ่อน

จากการกำหนดนิยามขึ้นมาทำให้ได้ว่า

5.7 เมื่อกำหนดให้ $\underline{X} = (X ; *, 0)$ เป็น พีชคณิต BCK และ $0 \neq r \in X$ นิยาม ไบนารี่ BCK-โพลิโนเมียล ของรูปแบบ $p_k(x,y)$ โดยวิธีอุปนัยทางคณิตสาสตร์ ดังต่อไปนี้

1) $p_1(x,y) = (x * r) * y$

2) ถ้า $p_k(x,y)$ ถูกกำหนดมาแล้ว จะได้ว่า $p_{k+1}(x,y) = (p_k(x,y) * r) * y$

ให้ $P_r\ (Y_2) = \{\ p_k(x,y)\ /\ k \in N^+\ \}$ จะได้ว่า สำหรับ $p(x,y)$ ใน $P_r(Y_2)$ จะสอดคล้องคุณสมบัติดังต่อไปนี้

1. $p(p(x,p(x,y)),y) = 0$ BCK 2
2. $p(x,x) = 0$ BCK 3
3. $p(0,x) = 0$ BCK 4
4. $p(p(x,y),z) = p(p(x,z),y)$ BCK 7
5. $p(p(x,y),x) = 0$ BCK 8 เมื่อ $p(x,y) \in P_r(Y_2)$

5.8 ถ้ากำหนดให้ $\underline{X} = (\ X\ ;\ *\ ,0\ )$ เป็น โพซิทีฟอิมพลิเคทีฟ พีชคณิต BCK แล้ว $p_k(x,y) = p_1(x,y)$ สำหรับทุก $k \in N^+$

5.9 ถ้ากำหนดให้ $\underline{X} = (\ X\ ;\ *\ ,0\ )$ เป็น โพซิทีฟอิมพลิเคทีฟ พีชคณิต BCK แล้ว p_1 จะสอดคล้อง $p_1(p_1(p_1(x,y),p_1(x,z)),p_1(z,y)) = 0$ BCK 1

ต่อมากำหนดให้เรียก $\sigma\left[\ \underline{X}\ \right] = (\ X;\ \sigma(*)\ ,\ 0\ )$ ว่า พีชคณิตอนุพัทธ์อย่างอ่อน ของ $\underline{X}$ โดย σ ซึ่งจากกำหนด จะได้ว่า

5.10 ถ้ากำหนดให้ $\underline{X} = (\ X\ ;\ *\ ,0\ )$ เป็น โพซิทีฟอิมพลิเคทีฟ พีชคณิต BCK แล้ว พีชคณิตอนุพัทธ์อย่างอ่อน $\sigma_{p_k}\left[\ \underline{X}\ \right] = (\ X;\ p_k(x,y)\ ,\ 0\ )$ จะสอดคล้องกับ BCK 1 , 2 , 3 , 4 , 7 และ BCK 8 เมื่อ $\sigma_{p_k}(*) = p_k(x,y)$

5.11 กำหนดให้ $\underline{X} = (\ X\ ;\ *\ ,\ 0\ )$ เป็นโพซิทีฟอิมพลิเคทีฟ พีชคณิต BCK , $\phi \neq A \subseteq X$ และ $0 \neq r \in A$ ดังนั้น A เป็น ไอดีลบน $\underline{X}$ ก็ต่อเมื่อ A เป็น ไอดีลบน พีชคณิตอนุพัทธ์อย่างอ่อน $\sigma_{p_1}\left[\ \underline{X}\ \right]$