บทที่ 3
การแจกแจงไวบูลล์
(The Weibull Distribution)

3.1 กล่าวนำ

ในการศึกษาเกี่ยวกับตัวแปรสุ่มแบบ nonnegative ที่เกิดขึ้นในการประยุกต์ใช้เกี่ยวกับอายุการใช้งาน ระยะเวลาการรอคอย ระยะเวลาของฝึกปฏิบัติ เวลาของการเดินทาง (traveling times) และช่วงระยะเวลาการระบาดของโรค แต่ตัวอย่างที่ใช้กันโดยทั่วไปของตัวแปรสุ่ม nonnegative เป็นการศึกษาเกี่ยวกับความคงทนถาวรของวัตถุ เครื่องมืออุปกรณ์ต่าง ๆ ขนาดของอนุภาคเล็ก ๆ ความเข้มข้นหรือความรุนแรงของสารกัมมันตรังสี ค่าเสียหายจากอุบัติเหตุในโรงงานอุตสาหกรรม แม้ว่าการแจกแจงเอ็กซ์โปเนนเชียล หรือการแจกแจงแกมมา มีความเหมาะสมที่จะใช้ในการศึกษาตัวแปรสุ่มเหล่านี้ แต่ก็ไม่มีความเหมาะสมที่จะใช้อธิบายด้วยการแจกแจงเอ็กซ์โปเนนเชียล เนื่องจากมีข้อจำกัดที่ว่าการแจกแจงเอ็กซ์โปเนนเชียล มีข้อสมมติว่าอัตราการขัดข้อง มีค่าคงที่ค่าหนึ่ง แต่ความเป็นจริงแล้วอัตราการขัดข้องอาจมีค่าเพิ่มขึ้น หรือมีค่าลดลง เนื่องจากในการปฏิบัติจะพบว่าการขัดข้องที่เกิดขึ้น จะเกิดขึ้นช้า ๆ อย่างค่อยเป็นค่อยไป โดยใช้เวลานาน โดยเฉพาะอย่างยิ่งความขัดข้องเกี่ยวกับอุปกรณ์ที่ไม่เกี่ยวข้องกับอิเล็กทรอนิกส์ (noneletronic parts) ซึ่งจะแสดงอัตราความขัดข้องเพิ่มขึ้น ขณะใช้งานไปนาน ๆ เนื่องจากการเสื่อมสภาพหรือสึกกร่อน ดังนั้นจึงมีกลุ่มการแจกแจงที่จะอธิบายปรากฏการณ์ของตัวแปรสุ่มเหล่านี้ได้อย่างเหมาะสม ก็คือการแจกแจงไวบูลล์ ตามชื่อของ Waloddi Weibull นักฟิสิกส์ ชาวสวีเดน ที่ได้ศึกษาเกี่ยวกับการแจกแจงนี้ในปี 1951

การแจกแจงไวบูลล์ ได้เป็นที่รู้จักกันอย่างแพร่หลาย โดยที่พารามิเตอร์ของประชากรส่วนใหญ่เป็นกลุ่มของการแจกแจงความขัดข้อง (failure distributions) ประโยชน์ของการแจกแจงไวบูลล์ที่มีต่อเหตุการณ์ที่ผิดพลาด นั้นมีมากมาย ตัวอย่างเช่น การแจกแจงไวบูลล์เคยใช้อธิบายเกี่ยวกับการเสื่อมสภาพของหลอดสุญญากาศ (vacuum-tube failure) โดย Kao ในปี 1958 และการแตกของลูกปืน (bull-bearing failure) โดย Lieblein and Zelen ในปี 1951

ในบทที่ 3 นี้จะเป็นการนำเสนอทฤษฎีและนิยามเกี่ยวกับที่มาของรูปแบบการแจกแจงไวบูลล์ ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น สถิติพรรณนาของการแจกแจงไวบูลล์ เช่น ค่าเฉลี่ย ความแปรปรวน มัธยฐาน และฐานนิยม และแสดงความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงไวบูลล์กับการแจกแจงเอ็กซ์โปเนนเชียล สำหรับการอนุมานการแจกแจงไวบูลล์ เช่นการประมาณค่าพารามิเตอร์ การทดสอบสมมติฐานจะนำเสนอต่อไปในบทที่ 4

3.2 ที่มาของรูปแบบการแจกแจงไวบูลล์

รูปแบบของการแจกแจงไวบูลล์ สามารถหาได้ทั้งรูปแบบที่มาจากแนวความคิดเกี่ยวกับอัตราความขัดข้อง และรูปแบบที่หาได้จากการแจกแจงแอสซิมโทติก ของสถิติลำดับที่น้อยที่สุด (the asymptotic distribution of the smallest order statistic) ซึ่งเป็นฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นที่มีลักษณะเฉพาะ รูปแบบของการแจกแจงไวบูลล์ ในกรณีนี้ได้แสดงให้ทราบแล้วในเรื่อง the distribution of the smallest values ของทฤษฎีค่าที่สุด ซึ่งเรียกว่า type III asymptotic distribultion of the smallest extreme value มีรูปแบบของฟังก์ชันการแจกแจงเป็น

$$F_{x(1)}(x) \;=\; 1-\exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right] \quad \gamma \le x < \infty \;\; ; \;\; \alpha > 0, \beta > 0$$

สำหรับการแจกแจงไวบูลล์ที่มีรูปแบบจากการประยุกต์ใช้อัตราการขัดข้องพิจารณาได้ดังนี้

ถ้าให้อัตราการขัดข้อง h(x) เป็นฟังก์ชันกำลัง (power function) ของตัวแปรสุ่ม X แล้วฟังก์ชันอัตราการขัดข้อง กำหนดโดย

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta-1} & ; \;\; & x \ge \gamma, \gamma \ge 0, \alpha > 0, \beta > 0 \\ &= 0 & ; \;\; & x < \gamma \end{aligned}$$

จากสมการแสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันความหนาแน่น f(x) , ฟังก์ชันอัตราการขัดข้อง h(x) และฟังก์ชันความเชื่อถือได้ R(x) ที่ได้นำเสนอไปแล้วในบทที่ 2 จะได้ว่า

$$R(x) = \exp\left[-\int_{\gamma}^{x} h(x)\,dx\right]$$

$$= \exp\left[-\int_{\gamma}^{x} \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta-1} dx\right]$$

$$= \exp\left[-\frac{\beta}{\alpha}\int_{\gamma}^{x} \left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta-1} dx\right]$$

$$= \exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\Big|_{\gamma}^{x}\right]$$

$$\therefore\ R(x) = \exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right]$$

จาก $f(x) = h(x)\,R(x)$

ดังนั้น $f(x) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta-1}\exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right]$

เนื่องจาก $R(x) = 1-F(x)$

จะได้ $F(x) = 1-R(x)$

$$= 1-\exp\left[-\int_{\gamma}^{x} h(x)\,dx\right]$$

$$= 1-\exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right] \quad ; \quad x \ge \gamma, \gamma \ge 0, \alpha > 0, \beta > 0$$

จะเห็นว่าการแจกแจงไวบูลล์ที่ได้จากแนวคิดเกี่ยวกับอัตราการขัดข้อง จะได้ฟังก์ชันการแจกแจง F(x) รูปแบบเช่นเดียวกับฟังก์ชันการแจกแจง $F_{x(1)}(x)$ ของการแจกแจงแอสซิมโทติกของค่าที่น้อยที่สุด รูปแบบที่ III

3.3 ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงไวบูลล์

นิยาม 3.1 ถ้าตัวแรสุ่ม X มีการแจกแจงไวบูลล์แล้วฟังก์ชันความน่าจะเป็น f(x) ของตัวแปรสุ่ม X คือ

$$f(x) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right] \quad ; \quad x \geq \gamma$$

$$= 0 \quad ; \quad x < \gamma$$

สำหรับ α , β และ γ เป็นค่าคงที่ เมื่อ $\alpha > 0$, $\beta > 0$ และ $\gamma \geq 0$ ซึ่งเป็นพารามิเตอร์ของการแจกแจงไวบูลล์ โดยที่

1. พารามิเตอร์ γ เป็นพารามิเตอร์แสดงตำแหน่ง (location parameter) ซึ่งค่า γ เป็นค่าที่บอกให้ทราบว่าเป็นค่าที่เป็นไปได้น้อยที่สุดของตัวแปรสุ่ม X

2. พารามิเตอร์ α เป็นพารามิเตอร์แสดงสเกลหรือขนาด (scale parameter) ของฟังก์ชันความหนาแน่น ซึ่ง $\frac{1}{\alpha}$ จะแสดงหน้าที่เช่นเดียวกับพารามิเตอร์ r สำหรับกลุ่มการแจกแจงแกมมา

3. พารามิเตอร์ β เป็นพารามิเตอร์แสดงรูปร่าง (shape parameter) ของฟังก์ชันความหนาแน่น

เนื่องจากนิยามของฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง กำหนดว่า ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง แล้ว f(x) จะเป็นฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X ก็ต่อเมื่อสอดคล้องกับคุณสมบัติต่อไปนี้

ก. $f(x) \geq 0$

ข. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

เพื่อแสดงว่าฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงไวบูลล์มีคุณสมบัติดังกล่าวจริง พิจารณาได้ดังนี้

จากนิยามฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงไวบูลล์ ดังนิยาม 3.1 จะพบว่าพารามิเตอร์ γ ซึ่งเป็นค่าที่เป็นไปได้น้อยที่สุดของตัวแปรสุ่ม X มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ ($\gamma \geq 0$) จึงทำให้ f(x) มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ด้วยก็แสดงว่า $f(x) \geq 0$

สำหรับการแสดงว่า $\int_{\gamma}^{\infty} f(x)dx = 1$ พิสูจน์ได้ดังนี้

$$\int_{\gamma}^{\infty} f(x)dx = \int_{\gamma}^{\infty} \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right]dx$$

ให้ $$u = -\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}$$

$$du = -\beta\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta-1} d\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)$$

$$= -\beta\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right)dx$$

$$\therefore \quad dx = -\frac{du}{\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta-1}}$$

ดังนั้น $$\int_{\gamma}^{\infty} f(x)dx = \int_{\gamma}^{\infty} \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{u}\left[\frac{-du}{\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta-1}}\right]$$

$$= -\int_{\gamma}^{\infty} e^{u}du$$

$$= -e^{u}\Big|_{\gamma}^{\infty}$$

$$= -\exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right]\Big|_{\gamma}^{\infty}$$

$$= -e^{-\infty} - (-e^{0})$$

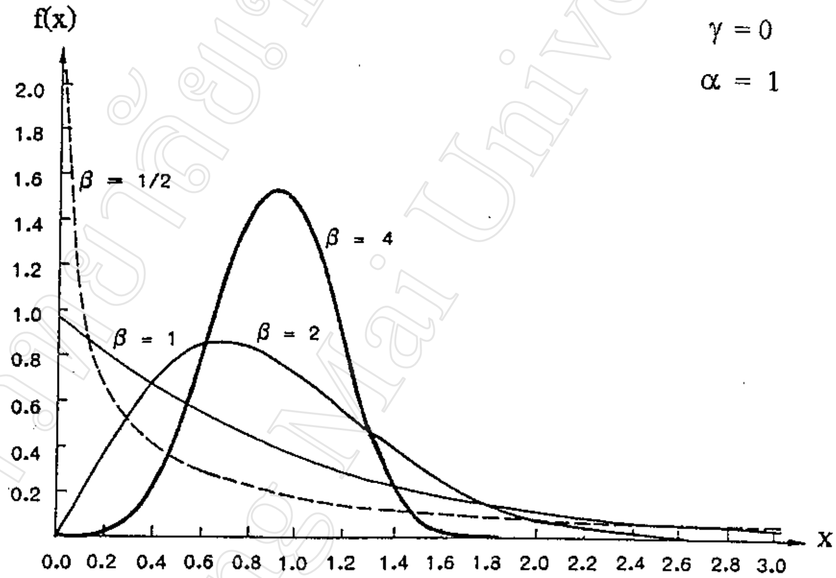
$$= -\frac{1}{e^{\infty}} + 1$$

$$= 1 - 0$$

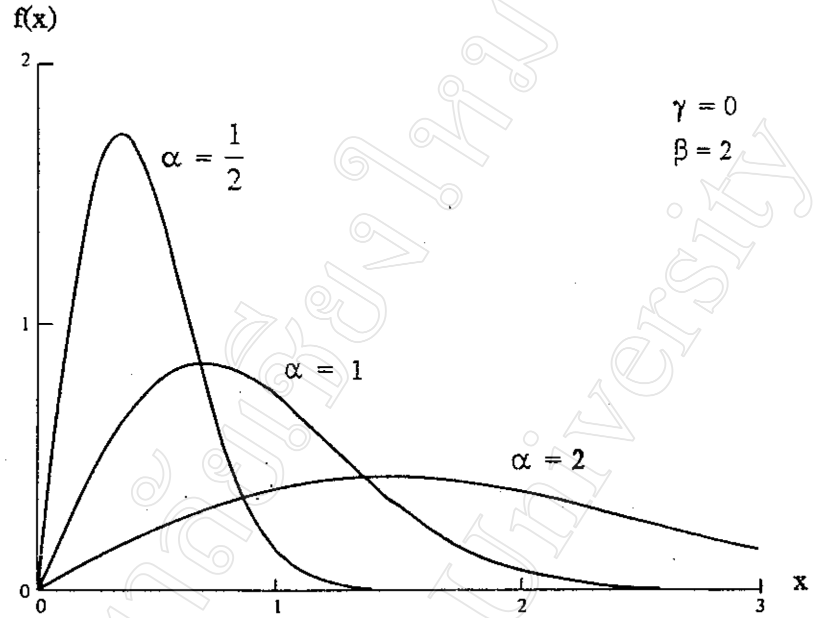
$$= 1$$

ดังนั้นสรุปได้ว่าฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงไวบูลล์ สอดคล้องกับคุณสมบัติที่ว่า $f(x) \geq 0$ และ $\int_{\gamma}^{\infty} f(x)dx = 1$

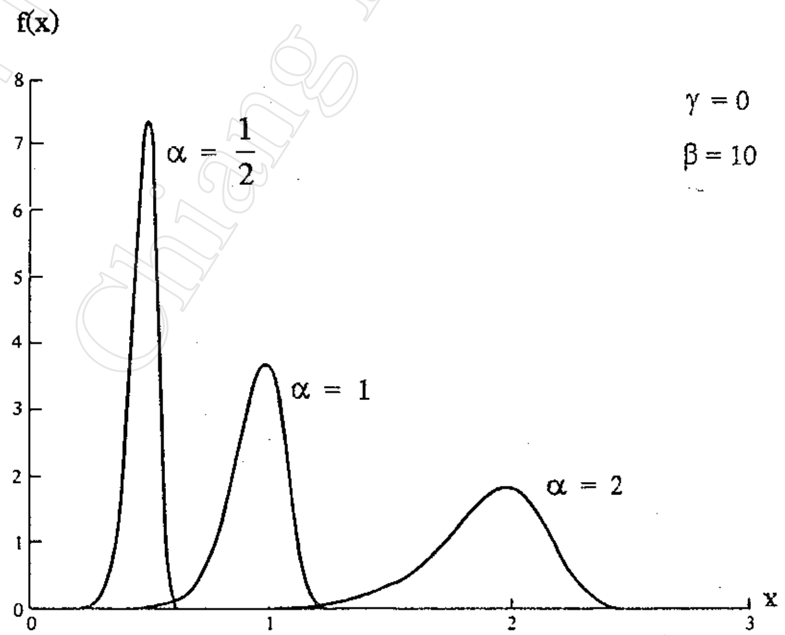
ความสำคัญหรือบทบาทของพารามิเตอร์ α , β และ γ นั้นจะแสดงกราฟของฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น $f(x)$ เมื่อกำหนด α, β, γ ดังรูปที่ 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 และรูปที่ 3.5 ซึ่งจะพบว่ากราฟมีลักษณะแตกต่างกันขึ้นอยู่กับค่าของ α, β และ γ



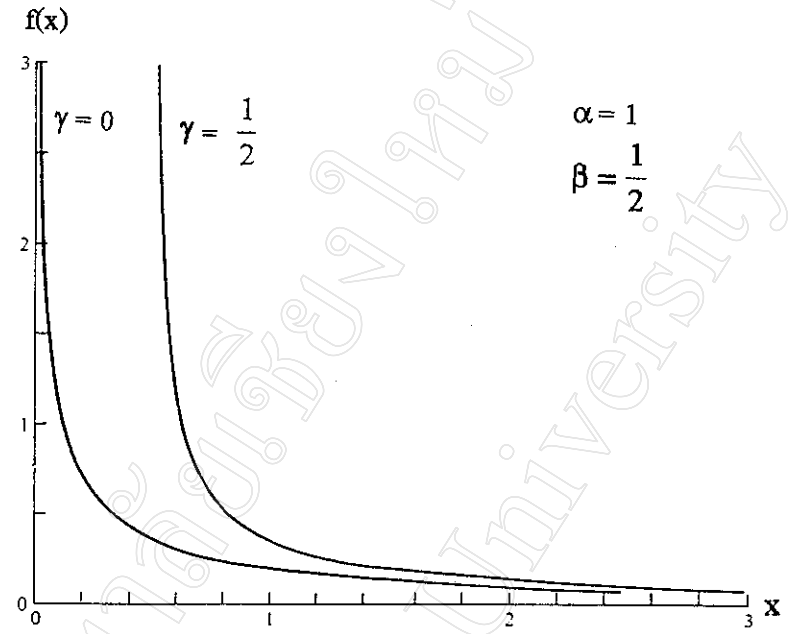
รูปที่ 3.1 แสดงฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงไวบูลล์ด้วยพารามิเตอร์ $\gamma = 0, \alpha = 1$ และ $\beta = \frac{1}{2}$, 1, 2, 4



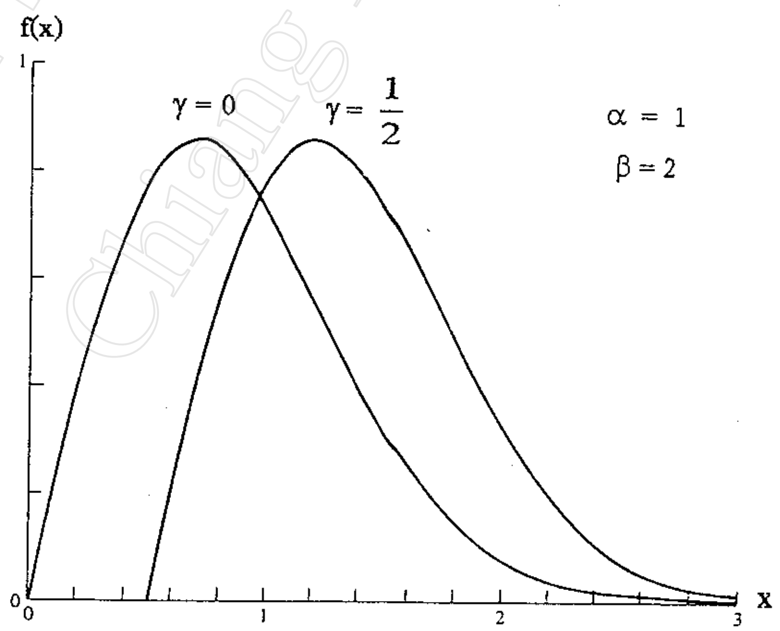
รูปที่ 3.2 แสดงฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงไวบูลล์ด้วยพารามิเตอร์ $\gamma = 0$, $\alpha = \frac{1}{2}$, 1, 2 และ $\beta = 2$



รูปที่ 3.3 แสดงฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงไวบูลล์ด้วยพารามิเตอร์ $\gamma = 0$, $\alpha = \frac{1}{2}$, 1, 2 และ $\beta = 10$



รูปที่ 3.4 แสดงฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงไวบูลล์ด้วยพารามิเตอร์ $\gamma = 0, \frac{1}{2}$, $\alpha = 1$ และ $\beta = \frac{1}{2}$



รูปที่ 3.5 แสดงฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงไวบูลล์ด้วยพารามิเตอร์ $\gamma = 0, \frac{1}{2}$, $\alpha = 1$ และ $\beta = 2$

3.4 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของการแจกแจงไวบูลล์

ทฤษฎี 3.1 ถ้าตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงไวบูลล์ด้วยฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น f(x) แล้วฟังก์ชันการแจกแจงสะสม (the cumulative distribution function) ของการแจกแจงไวบูลล์ คือ

$$F(x) = 1-\exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right] \quad ; \quad x \geq \gamma$$

$$= 0 \quad ; \quad x < \gamma$$

พิสูจน์ จาก $f(x) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right] \quad ; \quad x \geq \gamma$

$$= 0 \quad ; \quad x < \gamma$$

จากนิยามของฟังก์ชันการแจกแจงสะสม

$$F(x) = \int_{-\alpha}^{x} f(x)\,dx$$

จะได้ $F(x) = \int_{\gamma}^{x} \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right] dx$

ให้ $u = -\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}$

$$du = -\beta\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta-1} d\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)$$

$$du = -\beta\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right)dx$$

หรือ $dx = -\dfrac{du}{\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta-1}}$

ดังนั้น $$F(x) = \int_{\gamma}^{x} \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{u} \left(- \frac{du}{\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta-1}} \right)$$

$$= -\int_{\gamma}^{x} e^{u} du$$

$$= -e^{u}\Big|_{\gamma}^{x}$$

$$= -\exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right]\Big|_{\gamma}^{x}$$

$$= -\exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right] - (-\exp 0)$$

$$= -\exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right] + 1$$

$$= 1 - \exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right]$$

ในการแสดงการหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมนี้ เป็นการแสดงให้เห็นว่าการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ได้จากนิยาม $F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ เมื่อทราบฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น $f(x)$ ซึ่งจะได้ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมที่มีรูปแบบเช่นเดียวกับรูปแบบของฟังก์ชันการแจกแจงแอสซิมโทติกของสถิติลำดับที่น้อยที่สุดรูปแบบที่ III

ข้อสังเกต เนื่องจากฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น $f(x)$ มีค่าเป็น 0 เมื่อ $x < \gamma$ จึงทำให้ $F(x) = 0$ เมื่อ $x < \gamma$ เช่นเดียวกัน

3.5 ฟังก์ชันการรอดชีพ (The Survival Function)

ในการทดสอบอายุการใช้งานของเครื่องมืออุปกรณ์ พบว่า ความน่าจะเป็นที่อุปกรณ์จะเกิดการขัดข้องระหว่างเวลา 0 ถึงเวลา x เท่ากับ F(x) แต่ถ้าอยากทราบว่า อายุการใช้งานของอุปกรณ์หลังจากใช้งานผ่านไปแล้ว เวลา x หน่วย มีค่าเท่าใดนั้น จะดูได้จากความน่าจะเป็นที่อุปกรณ์จะเกิดการขัดข้อง หลังจากใช้งานผ่านไปแล้วเวลา x หน่วย มีค่ามากน้อยเพียงใด ถ้าความน่าจะเป็นดังกล่าวมีค่ามากแสดงว่าโอกาสที่อุปกรณ์จะชำรุดหลังจากใช้งานไปแล้วเวลา x หน่วย มีค่ามากด้วย แสดงว่าอายุการใช้งานที่เหลือก็จะน้อย แต่ถ้าความน่าจะเป็นที่อุปกรณ์จะเกิดการขัดข้องหลังจากใช้งานไปแล้วเวลา x หน่วย มีค่าน้อย ก็แสดงว่าอายุการใช้งานที่เหลือจะมาก ซึ่งความน่าจะเป็นที่อุปกรณ์จะขัดข้องหรือใช้งานได้หลังจากใช้งานไปแล้วเวลา x หน่วย เรียกว่า ฟังก์ชันการรอดชีพ จะเขียนแทนด้วย $\bar{F}(x)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันเดียวกันกับฟังก์ชันความเชื่อถือได้ โดยได้นำเสนอไปแล้วในบทที่ 2

ทฤษฎี 3.2 ถ้าตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงไวบูลล์ ด้วยฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น f(x) ฟังก์ชันการแจกแจงสะสม F(x) แล้วฟังก์ชันการรอดชีพของการแจกแจงไวบูลล์มีรูปแบบเป็น ดังนี้

$$\bar{F}(x) = \exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right] \qquad ; \qquad x \geq \gamma$$

$$= 1 \qquad ; \qquad x < \gamma$$

พิสูจน์ เนื่องจาก $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$

ดังนั้น
$$\bar{F}(x) = 1 - \left\{1 - \exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right]\right\}$$

$$= \exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right] \quad ; \quad x \geq \gamma$$

และ
$$\bar{F}(x) = 1 - 0$$

$$= 1 \quad ; \quad x < \gamma$$

โดยปกติแล้วการใช้ฟังก์ชันการรอดชีพ จะสะดวกกว่าการใช้ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมในการหาความน่าจะเป็น ตัวอย่างเช่น

กำหนดให้ X มีการแจกแจงไวบูลล์ ด้วยพารามิเตอร์ α, β และ γ และ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
P\{a \le X \le b\} &= P\{a < X \le b\} = P\{a \le X < b\} \\
&= P\{a < X < b\} \\
&= \bar{F}(a) - \bar{F}(b) \\
&= \exp\left[-\left(\frac{a-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right] - \exp\left[-\left(\frac{b-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right]
\end{aligned}
$$

3.6 ความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงไวบูลล์และการแจกแจงเอ็กซ์โปเนนเชียล

สำหรับความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงไวบูลล์กับการแจกแจงเอ็กซ์โปเนนเชียลที่สำคัญมี 2 ประการ คือ

1. ถ้าตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงไวบูลล์ด้วยพารามิเตอร์ α, β, γ แล้ว ตัวแปรสุ่ม $Y = \left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}$ จะมีการแจกแจงเอ็กซ์โปเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $\lambda = 1$

2. ถ้าตัวแปรสุ่ม Y มีการแจกแจงเอ็กซ์โปเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $\lambda = 1$ แล้ว ตัวแปรสุ่ม $X = \alpha Y^{\frac{1}{\beta}} + \gamma$ มีการแจกแจงไวบูลล์ด้วยพารามิเตอร์ α, β และ γ

เพื่อตรวจสอบว่าความสัมพันธ์ทั้ง 2 ข้อ ดังกล่าวว่าเป็นจริง จะแสดงการพิสูจน์ได้ดังนี้

ถ้าให้ตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงไวบูลล์ด้วยพารามิเตอร์ α, β, γ แล้วตัวแปรสุ่ม $Y = \left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}$ จะพบว่า

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P\{Y \le y\} \\
&= P\left\{\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta} \le y\right\} \\
&= P\left\{x \le \alpha y^{\frac{1}{\beta}} + \gamma\right\} \\
&= F_x\left\{\alpha y^{\frac{1}{\beta}} + \gamma\right\} \\
&= 1-\exp\left[-\left(\frac{\alpha y^{\frac{1}{\beta}} + \gamma - \gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right] \\
&= 1-\exp(-y)
\end{aligned}
$$

เมื่อ $y \ge 0$ (การเปลี่ยนตัวแปรสุ่ม X เป็นตัวแปรสุ่ม Y เป็น monotone increasing เพราะว่า $\alpha, \beta > \gamma$)

ในทำนองเดียวกัน เมื่อ $x < \gamma$ จะทำให้

$F_Y(y) = 0$ สำหรับ $y < 0$

เนื่องจาก $P(x < \gamma) = 0$

ซึ่ง $Y = \left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}$ ไม่สามารถเป็นลบได้

ด้วยเหตุนี้ จึงทำให้ $F_Y(y) = 0$ สำหรับ $y < 0$

$$
\text{ดังนั้น}\quad F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-y} & ; \; y \ge 0 \\ 0 & ; \; y < 0 \end{cases}
$$

ซึ่ง $F_Y(y)$ ที่ได้จะเป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมของการแจกแจงเอ็กซ์โปเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $\lambda = 1$ เนื่องจากฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มจะเป็นตัวกำหนดการแจกแจง โดยมีฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นดังนี้

$$f_Y(y) = e^{-y} \quad ; \quad y \geq 0$$

$$= 0 \quad ; \quad y < 0$$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงเอ็กซ์โปเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $\lambda = 1$ นั่นเอง

ในทางตรงกันข้าม ถ้า Y มีการแจกแจงเอ็กซ์โปเนนเชียล ด้วยพารามิเตอร์ $\lambda = 1$ แล้ว Y จะมีฟังก์ชันการแจกแจงสะสม

$$F_Y(y) = 1 - e^{-y} \quad ; \quad y \geq 0$$

$$= 0 \quad ; \quad y < 0$$

จะได้ว่า $X = \alpha Y^{\frac{1}{\beta}} + \gamma$ มีค่ามากกว่า γ เสมอ เพราะว่า

$$P(Y \geq 0) = 1$$

ดังนั้นฟังก์ชันการแจกแจงสะสม $F(x)$ ของตัวแปรสุ่ม X เท่ากับ 0 เมื่อ $x < \gamma$ และสำหรับกรณี $x \geq \gamma$ จะได้ว่า

$$F(x) = P\{X \leq x\}$$

$$= P\left\{\alpha Y^{\frac{1}{\beta}} + \gamma \leq x\right\}$$

$$= P\left\{Y \leq \left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right\}$$

$$= F_Y\left[\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right]$$

$$= 1 - \exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right]$$

ซึ่ง F(x) ที่ได้ก็เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X เมื่อ X มีการแจกแจงไวบูลล์ด้วยพารามิเตอร์ α, β และ γ

จากความสัมพันธ์ของการแจกแจงไวบูลล์กับการแจกแจงเอ็กซ์โปเนนเชียลที่ได้กล่าวไปแล้ว จะนำความสัมพันธ์ดังกล่าวแสดงการหาค่าเฉลี่ย และความแปรปรวนของการแจกแจงไวบูลล์ดังต่อไปนี้

3.7 สถิติพรรณนาสำหรับการแจกแจงไวบูลล์ กรณีมี 3 พารามิเตอร์

3.7.1 ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงไวบูลล์ กรณีมี 3 พารามิเตอร์

ทฤษฎี 3.3 ถ้าให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงไวบูลล์ ด้วยพารามิเตอร์ α, β, γ แล้วค่าเฉลี่ย (mean) และความแปรปรวน (variance) ของการแจกแจงไวบูลล์ กำหนดโดย

$$\mu = \alpha\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)+\gamma$$

และ
$$\sigma^2 = \alpha^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right]$$

เมื่อฟังก์ชันแกมมา $\Gamma(r) = (r-1)\Gamma(r-1)$

หรือ $\Gamma(r+1) = (r)\Gamma(r)$

ในการแสดงการหาค่าเฉลี่ย และความแปรปรวนของการแจกแจงไวบูลล์กรณีมี 3 พารามิเตอร์ α , β และ γ โดยอาศัยนิยามของการหาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนนั้นจะยุ่งยาก ดังนั้นวิธีที่นิยมใช้ก็คือใช้ความสัมพันธ์ของการแจกแจงไวบูลล์กับการแจกแจงเอ็กซ์โปเนนเชียล ดังได้กล่าวไปแล้ว โดยแสดงการพิสูจน์ได้ดังนี้

$$\mu_X = E\left(\alpha Y^{\frac{1}{\beta}}+\gamma\right)$$

$$= E(\alpha Y^{\frac{1}{\beta}})+E(\gamma)$$

$$= \alpha E\left(Y^{\frac{1}{\beta}}\right)+\gamma$$

$$\text{และ} \quad E(X^2) = E\left(\alpha Y^{\frac{1}{\beta}} + \gamma\right)^2$$

$$= E\left[\alpha^2 Y^{\frac{2}{\beta}} + 2\alpha Y^{\frac{1}{\beta}}\gamma + \gamma^2\right]$$

$$= E\left(\alpha^2 Y^{\frac{2}{\beta}}\right) + E\left(2\alpha Y^{\frac{1}{\beta}}\gamma\right) + E(\gamma^2)$$

$$= \alpha^2 E\left(Y^{\frac{2}{\beta}}\right) + 2\alpha\gamma E\left(Y^{\frac{1}{\beta}}\right) + \gamma^2$$

แต่ถ้า Y มีการแจกแจงเอ็กซ์โปเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ λ และ r เป็นค่าคงที่ โดยที่ $r > 0$ แล้วจะได้ว่า

$$E(Y^r) = \int_0^\infty y^r f(y)dy$$

$$= \int_0^\infty y^r \lambda e^{-\lambda y}dy$$

ให้ $u = \lambda y$

จะได้ $du = \lambda dy$

หรือ $dy = \frac{du}{\lambda}$

ดังนั้น
$$E(Y^r) = \int_0^\infty (y^r\lambda)e^{-\lambda y}dy$$

$$= \int_0^\infty \frac{(y\lambda)^r}{\lambda^{r-1}}e^{-\lambda y}dy$$

$$= \int_0^\infty \frac{u^r}{\lambda^{r-1}}e^{-u}\frac{du}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{\lambda^r}\int_0^\infty u^r e^{-u}du$$

เนื่องจากฟังก์ชันแกมมา $\Gamma(r) = \int_0^\infty u^{r-1}e^{-u}du$

ดังนั้น $\Gamma(r+1) = \int_0^\infty u^r e^{-u}du$

ทำให้ $E(Y^r) = \frac{1}{\lambda^r}\int_0^\infty u^r e^{-u}du$

$$= \frac{1}{\lambda^r}\Gamma(r+1)$$

ถ้า $\lambda = 1$ จะได้

$$E(Y^r) = \Gamma(r+1)$$

$\therefore$ จะได้ $\mu_X = \alpha E(Y^{\frac{1}{\beta}}) + \gamma$

$$= \alpha\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)+\gamma$$

และ $E(X^2) = \alpha^2 E(Y^{\frac{2}{\beta}}) + 2\alpha\gamma E(Y^{\frac{1}{\beta}}) + \gamma^2$

$$= \alpha^2\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)+2\alpha\gamma\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)+\gamma^2$$

เนื่องจาก $\sigma_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$

$$= \left[\alpha^2\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)+2\alpha\gamma\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)+\gamma^2\right]-\left[\alpha\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)+\gamma\right]^2$$

$$= \alpha^2\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)+2\alpha\gamma\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)+\gamma^2-\alpha^2\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\beta}\right)$$

$$-2\alpha\gamma\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)-\gamma^2$$

$$= \alpha^2\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)-\alpha^2\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\beta}\right)$$

$$= \alpha^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right]$$

ดังนั้นสรุปได้ว่า ถ้า X มีการแจกแจงไวบูลล์ด้วยพารามิเตอร์ α, β และ γ

แล้ว $$\mu = \alpha\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)+\gamma$$

และ $$\sigma^2 = \alpha^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right]$$

ซึ่งเราจะพบว่าค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่ม X ที่มีการแจกแจงไวบูลล์จะขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ α, β และ γ ส่วนค่าของความแปรปรวนไม่ได้ขึ้นอยู่กับ γ แต่จะขึ้นอยู่กับ α และ β เท่านั้น ซึ่งจากการพิจารณากราฟของฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น f(x) ในรูปที่ 3.1-3.5 จะเห็นว่า γ จะแสดงตำแหน่งเริ่มต้นของกราฟเท่านั้น ไม่มีผลกระทบต่อขนาดหรือลักษณะของกราฟของฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น f(x) แต่อย่างใด

3.7.2 มัธยฐาน (Median) ของการแจกแจงไวบูลล์ กรณีมี 3 พารามิเตอร์

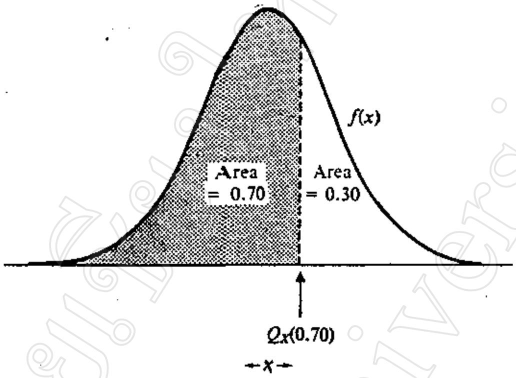
ให้ p เป็นสัดส่วนที่คงที่ โดยที่ $0 < p < 1$ ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง จะพบว่าค่า $X = x^*$ ซึ่งพื้นที่ใต้โค้งฟังก์ชันหนาแน่นน่าจะเป็น f(x) ของ X ที่อยู่ทางซ้ายของ x^* เท่ากับ p ดังรูปที่ 3.6 ที่จุด x^* นี้เรียกว่า ควอไทล์ที่ p (pth quantile) ซึ่งแทนด้วย $Q_X(p)$ มีรูปแบบที่หาได้ดังนี้

จาก $F(x) = P\{X \le x\}$

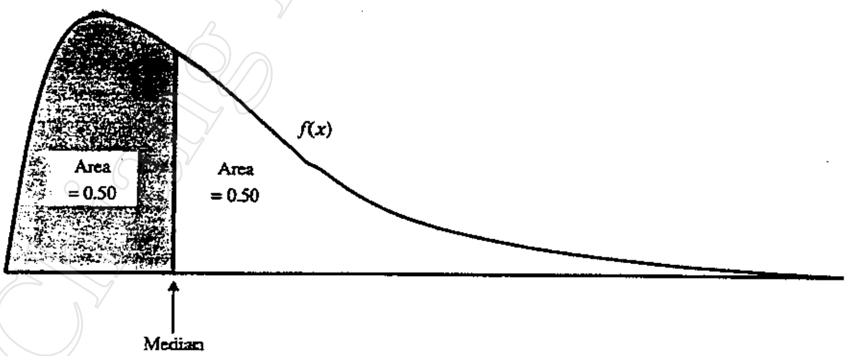
จะได้ $P\{X \le Q_X(p)\} = p$

ดังนั้น $F(Q_X(p)) = p$

โดยที่ $F(x) = P\{X \le x\}$ เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X



รูปที่ 3.6 กราฟฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง X ซึ่งแสดงควอไทล์ที่ 0.70 หรือ $Q_X(0.70)$



รูปที่ 3.7 กราฟฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น f(x) ของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง X ซึ่งแสดงมัธยฐาน หรือ Med(X) จะให้พื้นที่ 2 ส่วนเท่า ๆ กัน

ดังนั้นมัธยฐาน ก็คือค่าของ x* ที่เป็นพื้นที่ใต้โค้งฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น f(x) ด้านซ้ายมือของ x* เป็น $\frac{1}{2}$ หรือมัธยฐานเป็นค่าที่อยู่ตรงกลางจะแบ่งครึ่งของพื้นที่ใต้โค้งของฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น f(x) ออกเป็น 2 ส่วนเท่ากัน ด้านซ้ายมือของมัธยฐาน 50% และด้านขวามือมัธยฐาน 50% เช่นกัน ซึ่งจะได้ว่า ควอไทล์ที่ p = 0.5 ของ X ก็คือมัธยฐานของ X ดังรูปที่ 3.7

นั่นคือ $Q_X(0.5) = \mathrm{Med}(X)$

ทฤษฎี 3.4 ถ้าตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงไวบูลล์ด้วยพารามิเตอร์ไวบูลล์ด้วยพารามิเตอร์ α, β และ γ แล้วจะได้

$$Q_X(p) = \alpha\left[\ln\left(\frac{1}{1-p}\right)\right]^{\frac{1}{\beta}} + \gamma$$

และ $$\mathrm{Med}(X) = \alpha[\ln 2]^{\frac{1}{\beta}} + \gamma$$

พิสูจน์ ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงไวบูลล์ด้วยพารามิเตอร์ α, β และ γ

จาก $$F(x) = 1-\exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right]$$

ให้ $F(x) = p$

จะได้ $$1-\exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right] = p$$

$$\exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right] = 1-p$$

$$\ln\exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right] = \ln(1-p)$$

$$-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta} \ln \exp = \ln(1-p)$$

$$-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta} = \ln(1-p)$$

$$\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta} = -\ln(1-p)$$

$$\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta} = \ln 1-\ln(1-p)$$

$$\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta} = \ln\left(\frac{1}{1-p}\right)$$

$$\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right) = \left[\ln\left(\frac{1}{1-p}\right)\right]^{\frac{1}{\beta}}$$

$$x = \alpha\left[\ln\left(\frac{1}{1-p}\right)\right]^{\frac{1}{\beta}}+\gamma$$

$$\therefore\ x = Q_X(p) = \alpha\left[\ln\left(\frac{1}{1-p}\right)\right]^{\frac{1}{\beta}}+\gamma$$

เมื่อเราได้ $Q_X(p)$ แล้วจะได้มัธยฐาน ดังนี้

$$\begin{aligned} \mathrm{Med}(X) &= Q_X(0.5) \\ &= \alpha\left[\ln\left(\frac{1}{1-0.5}\right)\right]^{\frac{1}{\beta}}+\gamma \\ &= \alpha[\ln 2]^{\frac{1}{\beta}}+\gamma \end{aligned}$$

สรุปได้ว่า ถ้าตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงไวบูลล์ด้วยพารามิเตอร์ α, β และ γ แล้วจะได้

$$Q_X(p) = \alpha\left[\ln\left(\frac{1}{1-p}\right)\right]^{\frac{1}{\beta}} + \gamma$$

และ $$\mathrm{Med}(X) = \alpha[\ln 2]^{\frac{1}{\beta}} + \gamma$$

จากการแสดงการหามัธยฐานดังที่ได้เสนอไปแล้วนั้น เรายังสามารถแสดงการหามัธยฐานจากนิยามได้อีกวิธีหนึ่งก็คือ

ถ้า f(x) เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นของตัวแปรสุ่ม X แล้ว m จะเป็นมัธยฐานของการแจกแจงตัวแปรสุ่ม X ก็ต่อเมื่อ

$$\int_{-\infty}^{m} f(x)dx = \frac{1}{2}$$

ดังนั้นถ้า $f(x) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right]$ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงไวบูลล์ด้วยพารามิเตอร์ α, β และ γ แล้ว

$$\int_{\gamma}^{m} f(x)dx = \frac{1}{2}$$

แต่ $$\int_{\gamma}^{m} f(x)dx = \int_{\gamma}^{m} \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right] dx$$

ให้ $$u = \left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}$$

$$du = \beta\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta-1} \frac{dx}{\alpha}$$

$$du = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta-1} dx$$

หรือ $$dx = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\alpha}{x-\gamma}\right)^{\beta-1} du$$

ดังนั้น $$\int_{\gamma}^{m} f(x)dx = \int_{\gamma}^{m} \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp[-u]\cdot\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\alpha}{x-\gamma}\right)^{\beta-1} du$$

$$= \int_{\gamma}^{m} e^{-u}du$$

$$= -e^{-u}\Big|_{\gamma}^{m}$$

$$= -\exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right]\Big|_{\gamma}^{m}$$

$$= -\exp\left[-\left(\frac{m-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right]+\exp\left[-\left(\frac{\gamma-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right]$$

$$= -\exp\left[-\left(\frac{m-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right]+1$$

เนื่องจาก $$\int_{\gamma}^{m} f(x)dx = \frac{1}{2}$$

จะได้ $$1-\exp\left[-\left(\frac{m-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right] = \frac{1}{2}$$

$$-\exp\left[-\left(\frac{m-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right] = -\frac{1}{2}$$

$$\exp\left[-\left(\frac{m-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right] = \frac{1}{2}$$

$$\ln \exp\left[-\left(\frac{m-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right] = \ln\frac{1}{2}$$

$$-\left(\frac{m-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta} = \ln\frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{m-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta} = -\ln\frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{m-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta} = \ln 1-\ln\frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{m-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta} = \ln 2$$

$$\frac{m-\gamma}{\alpha} = (\ln 2)^{\frac{1}{\beta}}$$

$$m = \alpha(\ln 2)^{\frac{1}{\beta}}+\gamma$$

$$\therefore \quad \mathrm{Med}(X) = m = \alpha(\ln 2)^{\frac{1}{\beta}}+\gamma$$

นั่นคือ มัธยฐานของการแจกแจงไวบูลล์ ด้วยพารามิเตอร์ α β และ γ กำหนดโดย

$$\mathrm{Med}(X) = \alpha(\ln 2)^{\frac{1}{\beta}}+\gamma$$

3.7.3 ฐานนิยม (Mode) ของการแจกแจงไวบูลล์ กรณีมี 3 พารามิเตอร์

ทฤษฎี 3.5 ถ้ากำหนดให้ f(x) เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X ที่มีการแจกแจงไวบูลล์ด้วยพารามิเตอร์ α , β และ γ แล้วฐานนิยมของการแจกแจงตัวแปรสุ่ม X กำหนดดังนี้

1. เมื่อ $\beta > 1$

$$\text{Mode}(X) = \alpha\left(\frac{\beta-1}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}} + \gamma$$

2. เมื่อ $\beta \le 1$

$$\text{Mode}(X) = \gamma \text{ ; โดยไม่คำนึงถึงค่าของพารามิเตอร์ } \alpha$$

พิสูจน์ เนื่องจาก X เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง ถ้า X เท่ากับ C เป็นค่าที่ทำให้ฟังก์ชันความหนาแน่นมีค่าสูงสุดแล้ว C จะเป็นฐานนิยมของตัวแปรสุ่ม X การพิจารณาค่าดังกล่าวกระทำได้โดยการหาค่าสูงสุดของฟังก์ชัน

จากกราฟรูปที่ 3.1-3.5 จะพบว่า รูปร่างของกราฟจะขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ β โดยที่ $\beta \le 1$ กราฟจะให้ค่าสูงสุดขึ้นอยู่กับค่าของพารามิเตอร์ γ แต่ถ้า $\beta > 1$ แล้ว ฐานนิยมจะเป็นค่าของ X ที่ทำให้ฟังก์ชันมีค่าสูงสุด จะทำให้

$$f'(x) = 0$$

$$\text{จาก } f(x) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right] \quad ; \quad x \ge \gamma$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta-1} \frac{d}{dx}\exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right] + \\ &\quad \exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right] \frac{d}{dx}\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta-1} \\ &= \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right]\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta-1} + \\ &\quad \exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right]\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)(\beta-1)\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta-2}\left(\frac{1}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

$$= \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{2(\beta-1)} \exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right] +$$

$$\left(\frac{\beta}{\alpha^2}\right)(\beta-1)\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta-2} \exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right]$$

$$= \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right]\left\{\left(\frac{-\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta-1} +\right.$$

$$\left.\left(\frac{\beta-1}{\alpha}\right)\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{-1}\right\}$$

เนื่องจาก $f'(x) = 0$

ดังนั้นจะได้

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right]\left\{\left(\frac{-\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta-1} + \left(\frac{\beta-1}{\alpha}\right)\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{-1}\right\} = 0$$

$$\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta-1} + \left(\frac{\beta-1}{\alpha}\right)\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{-1} = 0$$

$$\left(\frac{\beta-1}{\alpha}\right)\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{-1} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta-1}$$

$$\frac{\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{-1}}{\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta-1}} = \frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}{\left(\frac{\beta-1}{\alpha}\right)}$$

$$\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{-1-\beta+1} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\beta-1}\right)$$

$$\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{-\beta} = \frac{\beta}{\beta-1}$$

$$\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta} = \frac{\beta-1}{\beta}$$

$$\frac{x-\gamma}{\alpha} = \left(\frac{\beta-1}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

$$x = \alpha\left(\frac{\beta-1}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}} + \gamma$$

นั่นคือ ฐานนิยมของตัวแปรสุ่ม X ซึ่งมีการแจกแจงไวบูลล์ด้วยพารามิเตอร์ α, β และ γ เมื่อ $\beta > 1$ คือ

$$\text{Mode}(X) = \alpha\left(\frac{\beta-1}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}} + \gamma$$

แต่โดยทั่วไปแล้วในการประยุกต์ใช้ตัวแบบไวบูลล์ในการทดสอบความทนทานของสภาพทางกายภาพของวัตถุ ซึ่งเกิดขึ้นโดยสมบูรณ์ตามธรรมชาติ ซึ่งก็คือการทดสอบอายุการใช้งานของอุปกรณ์เครื่องมือ เครื่องใช้ต่าง ๆ หรือในทางด้านวิศวกรรมศาสตร์ จะเรียกว่า การทดสอบความเชื่อถือได้ ในการทดสอบอายุการใช้งานของเครื่องมือ อุปกรณ์นั้น เวลาใช้งานส่วนใหญ่จะเริ่มต้นตั้งแต่ $x = 0$ ซึ่งจะทำให้ค่าที่เป็นไปได้ที่น้อยที่สุดของตัวแปรสุ่ม X หรือพารามิเตอร์ γ มีค่าเท่ากับ 0 ดังนั้นเมื่อ $\gamma = 0$ จะได้การแจกแจงไวบูลล์ที่มีพารามิเตอร์ 2 ตัว คือ α, β ซึ่งจะนิยามฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงไวบูลล์ด้วยพารามิเตอร์ α, β ดังนี้

นิยาม 3.2 ถ้าตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงไวบูลล์ด้วยพารามิเตอร์ α และ β แล้วฟังก์ชันความหนาแน่นจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X คือ

$$f(x) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1}\exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right] \quad ; \quad x \geq 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0$$

$$= 0 \quad ; \quad x < 0$$

กราฟรูปที่ 3.1 จะแสดงลักษณะของกราฟของฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น f(x) ของการแจกแจงไวบูลล์ ด้วยพารามิเตอร์ $\gamma = 0$, $\alpha = 1$ และ $\beta = \frac{1}{2}$, 1, 2, 4 จะพบว่า เมื่อ $\gamma = 0$ จุดเริ่มต้นหรือตำแหน่งเริ่มต้นของ X จะอยู่ที่ $x = 0$ แสดงว่าลักษณะรูปร่างของฟังก์ชันความหนาแน่นจะขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ α, β เท่านั้น

3.8 สถิติพรรณนาสำหรับการแจกแจงไวบูลล์ กรณีมี 2 พารามิเตอร์

3.8.1 ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงไวบูลล์ กรณีมี 2 พารามิเตอร์

ทฤษฎี 3.6 ถ้าให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงไวบูลล์ด้วยพารามิเตอร์ 2 ตัว คือ พารามิเตอร์ α และ β แล้ว ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวน กำหนดโดย

$$\mu = \alpha\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)$$

และ

$$\sigma^2 = \alpha^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right]$$

เมื่อฟังก์ชันแกมมา $\Gamma(r) = \int_0^\infty u^{r-1}e^{-u}du$

$$\Gamma(r) = (r-1)\Gamma(r-1)$$

และ $\Gamma\left(1+\frac{1}{r}\right) = \int_0^\infty u^{\frac{1}{r}}e^{-u}du$

$$\Gamma(r+1) = (r)\Gamma(r)$$

ในการแสดงการหาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงไวบูลล์ กรณีมีพารามิเตอร์ 2 ตัว สามารถแสดงการพิสูจน์โดยวิธีใช้ความสัมพันธ์ของการแจกแจงไวบูลล์กับการแจกแจงเอ็กซ์โปเนนเชียล เช่นเดียวกับกรณีมี 3 พารามิเตอร์ โดยกำหนดให้ $\gamma = 0$ นอกจากนี้ยังสามารถหาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนจากนิยามได้โดยตรงอีก ซึ่งจะแสดงให้ทราบดังต่อไปนี้

พิสูจน์ ค่าเฉลี่ย

จากนิยาม $$E(X) = \int_0^\infty x f(x)dx$$

$$= \int_0^\infty x\left\{\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1}\exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right]\right\}dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{x}{\alpha}\left\{\beta\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1}\exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right]\right\}dx$$

$$= \int_0^\infty \beta\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right]dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

ให้ $$u = \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}$$

จะได้ $$x = \alpha u^{\frac{1}{\beta}}$$

$$dx = \frac{\alpha}{\beta}u^{\frac{1}{\beta}-1}du$$

แทน u และ dx ในสมการ (1) จะได้

$$E(X) = \int_0^\infty \beta u e^{-u} \cdot \frac{\alpha}{\beta}u^{\frac{1}{\beta}-1}du$$

$$= \int_0^\infty \alpha e^{-u}u^{\left(1+\frac{1}{\beta}-1\right)}du$$

$$= \int_0^\infty \alpha e^{-u}u^{\frac{1}{\beta}}du$$

$$= \alpha\int_0^\infty u^{\frac{1}{\beta}}e^{-u}du$$

จากนิยามของฟังก์ชันแกมมา $\Gamma(r) = \int_0^\infty u^{r-1}e^{-u}du$

$$\text{หรือ } \Gamma\left(1+\frac{1}{r}\right) = \int_0^\infty u^{\frac{1}{r}}e^{-u}du$$

ดังนั้นจะได้

$$\mu = E(X) = \alpha\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)$$

พิสูจน์ ความแปรปรวน

$$\text{จาก } \sigma^2 = E(X^2)-[E(X)]^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2 f(x)dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{x^2}{\alpha^2}\cdot\alpha^2\left\{\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1}\exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right]\right\}dx$$

$$= \int_0^\infty \alpha\beta\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1}\exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right]dx$$

$$= \int_0^\infty \alpha\beta\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta+1}\exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right]dx \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

ให้ $u = \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}$

จะได้ $x = \alpha u^{\frac{1}{\beta}}$

$$dx = \frac{\alpha}{\beta}u^{\frac{1}{\beta}-1}du$$

เมื่อแทน x , u และ dx ในสมการ (3) จะได้

$$E(X^2) = \int_0^\infty \alpha\beta\left[\frac{\alpha u^{\frac{1}{\beta}}}{\alpha}\right]^{\beta+1} e^{-u}\cdot\frac{\alpha}{\beta}u^{\frac{1}{\beta}-1}du$$

$$= \int_0^\infty \alpha^2 u^{\frac{1}{\beta}(\beta+1)+\left(\frac{1}{\beta}-1\right)} e^{-u}du$$

$$= \int_0^\infty \alpha^2 u^{\frac{2}{\beta}} e^{-u}du$$

$$= \alpha^2\int_0^\infty u^{\frac{2}{\beta}} e^{-u}du$$

$$= \alpha^2\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)$$

เมื่อแทน E(X) และ $E(X^2)$ ลงในสมการ (2) จะได้

$$\sigma^2 = \alpha^2\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)-\left\{\alpha\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right\}^2$$

$$= \alpha^2\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)-\alpha^2\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\beta}\right)$$

$$= \alpha^2\left\{\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right\}$$

นั่นคือ ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงไวบูลล์ กรณีมี 2 พารามิเตอร์ α และ β คือ

$$\mu = \alpha\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)$$

$$\sigma^2 = \alpha^2\left\{\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right\}$$

3.8.2 มัธยฐานและฐานนิยมของการแจกแจงไวบูลล์ กรณีมี 2 พารามิเตอร์

สำหรับมัธยฐาน และฐานนิยม ของตัวแปรสุ่ม X ที่มีการแจกแจงไวบูลล์ ซึ่งมี 2 พารามิเตอร์ α และ β มีวิธีพิสูจน์เช่นเดียวกับกรณีมี 3 พารามิเตอร์ เพียงแต่กำหนดให้ $\gamma = 0$ ดังนั้นจะได้

$$\mathrm{Med}(X) = \alpha(\ln 2)^{\frac{1}{\beta}}$$

และ $\mathrm{Mode}(X) = \alpha\left(\frac{\beta-1}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}$ เมื่อ $\beta > 1$ ส่วนในกรณี $\beta \le 1$ จะได้ $\mathrm{Mode}(X) = 0$ เนื่องจากกรณี $\beta \le 1$ ฐานนิยมจะขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ γ เมื่อ $\gamma = 0$ จึงทำให้ฐานนิยม มีค่าเท่ากับ 0

จากฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงไวบูลล์

$$f(x) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta-1}\exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right] \; ; \; x \ge \gamma, \alpha > 0, \beta > 0$$

ถ้ากำหนดให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบไวบูลล์ ด้วยพารามิเตอร์ $\gamma = 0$ และ $\beta = 1$ จะได้ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นสำหรับตัวแปรสุ่ม X คือ

$$f(x) = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{1-1}\exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha}e^{-\frac{x}{\alpha}} \quad ; \; x \ge 0, \alpha > 0$$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น สำหรับตัวแปรสุ่มเอ็กซ์โปเนนเชียล เมื่อ $\lambda = \frac{1}{\alpha}$ นั่นคือ การแจกแจงเอ็กซ์โปเนนเชียลเป็นกรณีเฉพาะของการแจกแจงไวบูลล์ เมื่อ $\beta = 1$ ซึ่งจะได้ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนดังนี้

$$\mu = \alpha\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)$$

$$= \alpha\Gamma(1+1)$$

$$= \alpha\Gamma(2)$$

$$= \alpha$$

และ $$\sigma^2 = \alpha^2\left\{\Gamma(1+2)-\Gamma^2(1+1)\right\}$$

$$= \alpha^2\left\{\Gamma(3)-\Gamma^2(2)\right\}$$

$$= \alpha^2\{2-1\}$$

$$= \alpha^2$$

เราจะพบว่า การแจกแจงเอ็กซ์โปเนนเชียลเป็นกรณีเฉพาะของทั้งการแจกแจงแกมมา และการแจกแจงไวบูลล์ โดยที่

1. การแจกแจงเอ็กซ์โปเนนเชียลเป็นกรณีเฉพาะของการแจกแจงแกมมาด้วยพารามิเตอร์ $r = 1$ และ λ จะได้ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad ; \; x \geq 0 \, , \lambda > 0$$

2. การแจกแจงเอ็กซ์โปเนนเชียลเป็นกรณีเฉพาะของการแจกแจงไวบูลล์ด้วยพารามิเตอร์ $\gamma = 0$, $\beta = 1$ และ α จะได้ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น

$$f(x) = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{x}{\alpha}} \quad ; \; x \geq 0 \, , \alpha > 0$$

อย่างไรก็ตามการแจกแจงไวบูลล์ก็ไม่ได้เป็นการแจกแจงแกมมา เมื่อการแจกแจงไวบูลล์มีพารามิเตอร์ α, $\gamma \neq 0$ และ $\beta \neq 1$ และการแจกแจงแกมมาก็ไม่ได้เป็นการแจกแจงไวบูลล์ เมื่อการแจกแจงแกมมามีพารามิเตอร์ λ และ $r \neq 1$ เช่นเดียวกัน

จะเห็นว่าในการศึกษาการแจกแจงไวบูลล์นั้น เมื่อเราทราบฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจง จะทำให้สามารถหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสม ฟังก์ชันการรอดชีพ สถิติพรรณนาของการแจกแจงไวบูลล์เช่น ค่าเฉลี่ย ความแปรปรวน มัธยฐาน และฐานนิยม นอกจากนี้ยังสามารถใช้หาฟังก์ชันอัตราการขัดข้อง และฟังก์ชันความเชื่อถือได้ แต่การที่จะสร้างฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงได้นั้น จะต้องทราบพารามิเตอร์ α, β และ γ ของการแจกแจงก่อน วิธีที่จะได้มาซึ่งพารามิเตอร์เหล่านั้นก็คือ การประมาณค่าพารามิเตอร์ ซึ่งเป็นการอนุมานสำหรับการแจกแจงไวบูลล์ เป็นการศึกษาเกี่ยวกับการประมาณค่าและการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับพารามิเตอร์ ซึ่งจะแสดงในบทที่ 4 ต่อไป