บทที่ 4
การอนุมานสำหรับการแจกแจงไวบูลล์

4.1 กล่าวนำ

ในบทนี้เป็นการศึกษาเกี่ยวกับการอนุมานสำหรับการแจกแจงไวบูลล์ โดยแสดงวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ ทั้งการประมาณค่าแบบจุด การประมาณค่าแบบช่วง และการทดสอบสมมติฐาน ซึ่งเมื่อทราบพารามิเตอร์และการทดสอบต่าง ๆ เกี่ยวกับพารามิเตอร์ของการแจกแจง ก็สามารถจะทราบฟังก์ชันอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการแจกแจงไวบูลล์ได้ ซึ่งจะทำให้สามารถสรุปผลจากข้อมูลของตัวอย่างที่เก็บรวบรวมมาใช้ในการสรุปผล สำหรับข้อมูลที่มีการแจกแจงไวบูลล์ได้

ในการศึกษาสถิติพรรณนาของตัวแปรสุ่มแต่ละการแจกแจง ส่วนใหญ่จะพบว่าค่าเฉลี่ย ความแปรปรวน มัธยฐาน และฐานนิยม ของการแจกแจงนั้นสามารถหาได้โดยตรงจากข้อมูลตัวอย่างที่เก็บรวบรวมมา เช่น พารามิเตอร์ λ ของการแจกแจงปัวซองก็เป็นค่าเฉลี่ยของจำนวนครั้งที่จะเกิดเหตุการณ์ใดเหตุการณ์หนึ่งในช่วงเวลา 0 ถึง t พารามิเตอร์ θ ของการแจกแจงเอ็กซ์โปเนนเชียลก็เป็นค่าเฉลี่ยของเวลา พารามิเตอร์ μ และ σ^2 ของการแจกแจงปกติก็หมายถึงค่าเฉลี่ย และความแปรปรวนของตัวแปรสุ่มเช่นเดียวกัน ซึ่งเราสามารถประมาณจากข้อมูลตัวอย่างได้โดยตรง เพราะถ้าประมาณค่าพารามิเตอร์เหล่านี้ได้ ก็จะทำให้ทราบค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงนั้นด้วย แต่ในการหาค่าเฉลี่ย ความแปรปรวน มัธยฐาน และฐานนิยมของการแจกแจงไวบูลล์ ซึ่งแสดงไว้ในบทที่ 3 จะพบว่า เราไม่สามารถประมาณได้จากข้อมูลที่เก็บรวบรวมมาได้โดยตรง แต่จะขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ α, β และ γ ซึ่งจะต้องประมาณพารามิเตอร์ทั้ง 3 พารามิเตอร์ดังกล่าวเสียก่อน จึงจะทำให้ประมาณค่าเฉลี่ย ความแปรปรวน มัธยฐาน และฐานนิยมของการแจกแจงไวบูลล์ได้ แต่เนื่องจากการแจกแจงไวบูลล์มีพารามิเตอร์ที่ต้องประมาณค่า 3 พารามิเตอร์ การที่จะประมาณค่าพารามิเตอร์ใดพารามิเตอร์หนึ่ง จะต้องทราบพารามิเตอร์อีก 2 ตัวที่เหลือก่อน ซึ่งเราไม่สามารถที่จะประมาณพร้อม ๆ กันได้ และเป็นวิธีการประมาณพารามิเตอร์ที่เป็นวิธีการแก้สมการที่ยุ่งยากในการประมาณ

ดังนั้นในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงไวบูลล์ จึงนิยมใช้วิธีการทางกราฟ และวิธีกำลังสองน้อยที่สุด หรือการวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย ซึ่งจะประมาณค่าพารามิเตอร์ 2 แบบ คือ

1. การประมาณค่าแบบจุด (point estimation)
   - 1.1. การประมาณค่าพารามิเตอร์แบบจุด เมื่อการแจกแจงไวบูลล์มี 2 พารามิเตอร์ α และ β เมื่อ $\gamma = 0$
   - 1.2 การประมาณค่าพารามิเตอร์แบบจุด เมื่อการแจกแจงไวบูลล์มี 3 พารามิเตอร์ α , β และ γ เมื่อ $\gamma > 0$
2. การประมาณค่าแบบช่วง (interval estimation)
   - 2.1 การประมาณค่าพารามิเตอร์แบบช่วง เมื่อการแจกแจงไวบูลล์มี 2 พารามิเตอร์ α และ β เมื่อ $\gamma = 0$
   - 2.2 การประมาณค่าพารามิเตอร์แบบช่วง เมื่อการแจกแจงไวบูลล์มี 3 พารามิเตอร์ α , β และ $\gamma > 0$

ส่วนการทดสอบสมมติฐาน ส่วนใหญ่จะทดสอบพารามิเตอร์ α , β ซึ่งประมาณได้จากการประมาณพารามิเตอร์ โดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด ดังนั้น การทดสอบสมมติฐานพารามิเตอร์ก็จะอาศัยหลักการทดสอบสมมติฐาน เช่นเดียวกันกับการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย ซึ่งจะได้แสดงให้ทราบต่อไป

4.1.1 การประมาณพารามิเตอร์โดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด

ก่อนที่จะศึกษาการประมาณพารามิเตอร์ของการแจกแจงไวบูลล์ จะกล่าวถึงการประมาณพารามิเตอร์ โดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด ซึ่งจะนำไปใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงไวบูลล์ต่อไป โดยที่การประมาณพารามิเตอร์ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดเป็นเทคนิคหนึ่งสำหรับหาค่าตัวประมาณของสมการเชิงเส้น $\hat{Y} = a + bX_i$ ให้มีคุณสมบัติตามต้องการ กล่าวคือ เป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียง (unbiased estimator) และเป็นตัวประมาณที่มีความแปรปรวนน้อยที่สุด

ทั้งนี้เพราะว่าเส้นการถดถอยที่คาดคะเนได้จากวิธีกำลังสองน้อยที่สุดจะมีคุณสมบัติดังนี้

1. $\sum_{i=1}^{n} e_i = 0$

2. $\sum_{i=1}^{n} e_i^2$ มีค่าน้อยที่สุด

3. เส้นการถดถอยจะผ่านจุดตัดของ $\overline{X}$ และ $\overline{Y}$ เมื่อ

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \quad \text{และ} \quad \overline{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}$$

วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ หรือค่า a และ b โดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดสรุปได้ดังนี้

ขั้นที่ 1 สร้างสมการจากแบบหุ่น $Y_i = a + bX_i + e_i$ และจากคุณสมบัติของวิธีกำลังสองน้อยที่สุดคือ Σe_i^2 มีค่าน้อยที่สุด ได้ดังนี้

จาก $Y_i = a + bX_i + e_i$

$$e_i = Y_i - a - bX_i$$

$$e_i^2 = (Y_i - a - bX_i)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - a - bX_i)^2 \quad \text{ซึ่งมีค่าน้อยที่สุด}$$

เมื่อหาอนุพันธ์ (differentiate) ค่า $\sum_{i=1}^{n} e_i^2$ เทียบกับ a และ b ตามลำดับจะได้สมการเป็น

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n} e_i^2}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n}(Y_i - a - bX_i) \quad \text{-------------------------} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n} e_i^2}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n}(Y_i - a - bX_i)X_i \quad \text{-------------------------} \quad (2)$$

ให้สมการ (1) และสมการ (2) เท่ากับศูนย์ (ตามหลักการของการหาจุดต่ำสุดของฟังก์ชัน) นั่นคือ

$$-2\sum_{i=1}^{n}(Y_i - a - bX_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - a - bX_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i - na - b\sum_{i=1}^{n} X_i = 0$$

ดังนั้น $$na + b\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} Y_i \quad \text{.......................} \quad (3)$$

และ $$-2\sum_{i=1}^{n}(Y_i - a - bX_i)X_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - a - bX_i)X_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_iX_i - a\sum_{i=1}^{n} X_i - b\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 0$$

ดังนั้น $$a\sum_{i=1}^{n} X_i + b\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i \quad \text{...............} \quad (4)$$

ขั้นที่ 2 คำนวณหาค่า a, b โดยวิธีพีชคณิต ดังนี้

คูณสมการ (3) ด้วย $\sum_{i=1}^{n} X_i$ จะได้

$$na\sum_{i=1}^{n} X_i + b\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) \quad \text{..........} \quad (5)$$

คูณสมการ (4) ด้วย n จะได้

$$na\sum_{i=1}^{n} X_i + nb\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = n\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i \quad \text{......................} \quad (6)$$

นำสมการ (6) ลบด้วยสมการ (5) จะได้เป็น

$$nb\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - b\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2 = n\sum_{i=1}^{n}X_iY_i - \left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}Y_i\right)$$

$$b\left[n\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2\right] = n\sum_{i=1}^{n}X_iY_i - \left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}Y_i\right)$$

$$b = \frac{n\sum_{i=1}^{n}X_iY_i - \sum_{i=1}^{n}X_i\sum_{i=1}^{n}Y_i}{n\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2}$$

จากสมการ (3) ;

$$na + b\sum_{i=1}^{n}X_i = \sum_{i=1}^{n}Y_i$$

นำ n หารตลอดจะได้

$$a + \frac{b\sum_{i=1}^{n}X_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}Y_i}{n}$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n}Y_i}{n} - \frac{b\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}$$

$$\therefore \quad a = \overline{Y} - b\overline{X}$$

ดังนั้นสมการเชิงเส้นเมื่อทราบตัวประมาณ a และ b คือ

$$\hat{Y} = a + bX_i$$

4.1.2 ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของการประมาณ

การนำเส้นถดถอยไปคาดคะเนค่า Y ในอนาคตจะถูกต้องนั้น จะขึ้นอยู่กับข้อมูลที่เก็บรวบรวมมาได้ว่า จะอยู่ใกล้เส้นถดถอยที่ได้มากน้อยเพียงใด กล่าวคือ ถ้าข้อมูลอยู่ห่างจากเส้นถดถอยมาก การคาดคะเน $\hat{Y}$ จะมีโอกาสที่จะแตกต่างไปจาก Y ที่แท้จริงมาก แต่ถ้าค่าของข้อมูลอยู่ใกล้เส้นถดถอยหรืออยู่บนเส้นถดถอย ก็แสดงว่าการคาดคะเน $\hat{Y}$ จะมีโอกาสถูกต้องตรงกับ Y ที่แท้จริงมากที่สุด ซึ่งความแตกต่างระหว่าง Y กับ $\hat{Y}$ ก็คือค่าของ e ซึ่งจะได้ดังนี้

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

$$e_i^2 = (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

จะได้ $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{d.f.} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-2}$ ซึ่งเรียกว่า ความแปรปรวนของการประมาณ (variance of estimate) และ

$\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{d.f.}} = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-2}}$ ซึ่งเรียกว่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของการประมาณ (standard error of estimate)

ให้ $S_{Y.X}^2$ เป็นความแปรปรวนของการประมาณของค่า Y บนค่า X

และ $S_{Y.X}$ เป็นความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของการประมาณของค่า Y บนค่า X

ดังนั้นสรุปได้ว่า

$$S_{Y.X}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-2}$$

$$S_{Y.X} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-2}}$$

4.1.3 ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของตัวประมาณ

ในการศึกษาการถดถอย กรณีข้อมูลเป็นเพียงตัวอย่างที่เก็บรวบรวมมาทางสถิติถือว่าการถดถอยที่ศึกษาเป็นเพียงตัวประมาณเท่านั้น นั่นคือ สมการ $\hat{Y}_i = a + bX_i$ ซึ่งเป็นสมการที่ได้จากข้อมูลตัวอย่างจะเป็นตัวประมาณ สมการที่แท้จริง คือสมการ $Y_i = A + BX_i$ ซึ่งเป็นสมการถดถอยของข้อมูลทั้งหมดจากข้อมูลประชากรที่แท้จริง โดยที่ค่า A และ B เป็นตัวพารามิเตอร์ที่ได้จากข้อมูลประชากร ส่วนค่า a และ b ตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของ A และ B ตามลำดับ ในทางสถิติทั้งค่า a และ b ย่อมมีได้หลายค่าแตกต่างกันไป แล้วแต่ข้อมูลตัวอย่างที่สุ่มมาศึกษา ทำให้ได้สมการของการประมาณหลายสมการ เมื่อทำการศึกษาถึงการแจกแจงของค่า a และ b พบว่า

ก. ไม่ว่าจะสุ่มตัวอย่างขนาดใดก็ตาม ค่าเฉลี่ยของตัวประมาณจะเท่ากับค่าพารามิเตอร์ นั่นคือ

$$E(a) = A$$

$$E(b) = B$$

ข. ในการสุ่มตัวอย่างที่มีขนาดตัวอย่างแตกต่างกันย่อมได้ความแปรปรวนของตัวประมาณไม่เท่ากัน โดยที่สมการถดถอยจากตัวอย่างที่มีขนาดใหญ่ค่าความแปรปรวนของตัวประมาณ จะน้อยกว่าความแปรปรวนของตัวประมาณของสมการถดถอยที่ได้จากการสุ่มตัวอย่างขนาดเล็ก

สมการถดถอยที่คำนวณจากข้อมูลตัวอย่าง มีค่าความแปรปรวนของ a และ b น้อย แสดงว่าสมการถดถอยที่ได้จะเป็นตัวแทนประชากรที่ดีมีแนวโน้มที่ใกล้เคียงกับประชากรมาก ดังนั้นในการศึกษาจึงมีการศึกษาความแปรปรวน หรือความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของตัวประมาณด้วยดังนี้

1. ความแปรปรวนและความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของค่า b

ให้ σ_b แทนความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน (standard error) ของค่า b

และให้ σ_b^2 แทนความแปรปรวนของ b ตามหลักสถิติจะได้ว่า

$$\sigma_b^2 = \frac{\sigma_{Y.X}^2}{\Sigma(X_i - \bar{X})^2}$$

แต่ถ้าไม่ทราบ $\sigma^2_{Y.X}$ จะใช้ค่า $S^2_{Y.X}$ เป็นตัวประมาณของ $\sigma^2_{Y.X}$ แทน และให้ S^2_b เป็นตัวประมาณ σ^2_b ดังนั้น S_b จึงเป็นตัวประมาณของ σ_b จะได้

$$S^2_b = \frac{S^2_{Y.X}}{\Sigma(X_i - \overline{X})^2}$$

$$\text{และ} \quad S_b = \frac{S_{Y.X}}{\sqrt{\Sigma(X_i - \overline{X})^2}}$$

ค่า S^2_b หรือ S_b จะเป็นค่าสถิติที่สำคัญค่าหนึ่ง เพราะเป็นค่าที่ใช้เป็นหลักประกันว่าสมการ $\hat{Y}_i = a + bX_i$ นั้นจะเป็นตัวแทนที่ดีของสมการถดถอย $Y_i = A + BX_i$ ได้มากน้อยเพียงใด กล่าวคือถ้า S_b มีค่าน้อยเส้นการถดถอยตัวอย่างย่อมมีแนวโน้มใกล้เคียงกับเส้นการถดถอยของประชากร นั่นคือสมการถดถอย $\hat{Y}_i = a + bX_i$ ที่มีค่า S_b น้อยจะเป็นสมการคาดคะเนที่ดีของประชากรนั้น

2. ความแปรปรวนและความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของ a

ให้ σ_a แทนความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของ a

σ^2_a แทนความแปรปรวนของ a

ตามหลักการของทฤษฎีสถิติจะได้ σ^2_a ดังนี้

$$\sigma^2_a = \frac{\sigma^2_{Y.X}}{n} + \sigma^2_{Y.X} \cdot \frac{\overline{X}^2}{\Sigma(X_i - \overline{X})^2}$$

$$= \sigma^2_{Y.X}\left[\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\Sigma(X_i - \overline{X})^2}\right]$$

ถ้าไม่ทราบค่า $\sigma^2_{Y.X}$ จะใช้ $S^2_{Y.X}$ ซึ่งเป็นตัวประมาณของ $\sigma^2_{Y.X}$ แทน และใช้ S^2_a เป็นตัวประมาณ σ^2_a จะได้ S_a เป็นตัวประมาณของ σ_a

$$\text{ดังนั้น} \quad S^2_a = S^2_{Y.X}\left[\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\Sigma(X_i - \overline{X})^2}\right]$$

$$\text{และ} \quad S_a = S_{Y.X}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\Sigma(X_i - \overline{X})^2}}$$

ค่า S_a^2 หรือ S_a เป็นค่าที่ชี้ให้เห็นว่าค่า a นั้นจะอยู่ห่างจาก A มากน้อยเพียงใด กล่าวคือถ้า S_a^2 มีค่าน้อย ก็แสดงว่าค่า a จะมีการกระจายเข้าใกล้เคียงกับค่า A มาก ค่า a ก็จะเป็นตัวประมาณที่ดีของ A ในทางตรงกันข้ามถ้า S_a^2 มีค่ามากแสดงว่า a มีการกระจายห่างจาก A มาก ก็จะเป็นตัวประมาณของ A ที่ไม่ดีนัก อย่างไรก็ตามโดยทั่ว ๆ ไปสมการการถดถอยตัวอย่างที่มีค่า S_b ต่ำจะมีค่า S_a ต่ำไปด้วย

4.1.4 ช่วงความเชื่อมั่นของตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ ของสมการถดถอย

ก. ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ A

เมื่อ a เป็นตัวประมาณของพารามิเตอร์ A โดยมีความคลาดเคลื่อนมาตรฐานเท่ากับ S_a โดยที่ $S_a = S_{Y.X}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{\overline{X}^2}{\Sigma(X_i-\overline{X})^2}}$ จะได้ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ A ที่ระดับความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ ดังนี้

$$a-t_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),n-2}\cdot S_a \le A \le a+t_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),n-2}\cdot S_a$$

หรือ $$A = a \pm t_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),n-2}\cdot S_a$$

ข. ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ B

เมื่อ b เป็นตัวประมาณของพารามิเตอร์ B โดยมีความคลาดเคลื่อนมาตรฐานเท่ากับ S_b โดยที่ $S_b = \frac{S_{Y.X}}{\sqrt{\Sigma(X_i-\overline{X})^2}}$ จะได้ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ B ที่ระดับความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ ดังนี้

$$b-t_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),n-2}\cdot S_b \le B \le b+t_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),n-2}\cdot S_b$$

หรือ $$B = b \pm t_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),n-2}\cdot S_b$$

4.2 การประมาณค่าพารามิเตอร์แบบจุด

ในการทดสอบอายุการใช้งานของเครื่องมือ อุปกรณ์ การสุ่มตัวอย่างอุปกรณ์ที่เราต้องการทดสอบนั้น เมื่อสุ่มจากอุปกรณ์ที่ผลิตออกมาใหม่ ยังไม่ได้ตรวจสอบเลยว่าใช้งานได้หรือไม่ได้ หรืออุปกรณ์ที่เก็บไว้นาน ๆ ในคลังสินค้าซึ่งยังไม่ได้นำออกมาจำหน่าย จะถือว่าหน่วยตัวอย่างที่สุ่มมาทดสอบนั้นอาจจะชำรุดหรือขัดข้องตั้งแต่เริ่มต้นใช้งานได้ จะทำให้พารามิเตอร์ γ ซึ่งเป็นพารามิเตอร์ที่แสดงตำแหน่ง มีค่าเท่ากับ 0 $(\gamma = 0)$ หรือค่าที่เป็นไปได้น้อยที่สุดของตัวแปรสุ่ม X มีค่าเท่ากับ 0 เนื่องจากเวลาใช้งานของอุปกรณ์จะเริ่มต้นตั้งแต่ $x = 0$ ในกรณีนี้จะมีพารามิเตอร์ที่จะประมาณ 2 พารามิเตอร์ ก็คือ α และ β แต่ถ้าหากว่าในการทดสอบอายุการใช้งานของอุปกรณ์ เราทราบว่าหน่วยตัวอย่างอุปกรณ์ที่สุ่มมานั้นใช้งานได้ แต่อยากทราบว่าใช้งานได้นานเท่าใด หรืออายุการใช้งานจำนวนกี่ชั่วโมง จะถือว่าเวลาที่อุปกรณ์จะเกิดการขัดข้องนั้นมีค่ามากกว่า 0 เพราะมีการทดสอบก่อนว่าอุปกรณ์นั้นใช้งานได้ การทดสอบอายุการใช้งานของอุปกรณ์ที่มีลักษณะเช่นนี้จะเรียกว่าการทดสอบความทนทานของอุปกรณ์ จะทำให้พารามิเตอร์ γ มีค่ามากกว่า 0 $(\gamma > 0)$ ในกรณีนี้จะต้องประมาณพารามิเตอร์ทั้ง 3 พารามิเตอร์ α, β และ γ

ดังนั้นในการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบจุดของการแจกแจงไวบูลล์ จะมี 2 กรณี คือ

ก. การประมาณค่าพารามิเตอร์ 2 พารามิเตอร์ α, β เมื่อ $\gamma = 0$

ข. การประมาณค่าพารามิเตอร์ 3 พารามิเตอร์ α, β และ γ เมื่อ $\gamma > 0$

ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 กรณี จะใช้วิธีการอธิบายด้วยกราฟ และการประมาณค่าโดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด ซึ่งจะได้นำเสนอดังต่อไปนี้

4.2.1 การประมาณค่าพารามิเตอร์แบบจุดกรณีพารามิเตอร์ $\gamma = 0$

ในการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดนี้ มีพื้นฐานบนความจริงที่ว่าฟังก์ชันความเชื่อถือได้ที่สัมพันธ์กับการแจกแจงไวบูลล์สามารถเปลี่ยนให้อยู่ในรูปฟังก์ชันเชิงเส้น (linear function) ได้

$$\text{จาก} \quad f(x) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right] \quad ; \quad x \geq 0, \alpha > 0, \beta > 0$$

$$\text{และ} \quad F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}$$

จะได้ $R(x) = 1-F(x)$

$$= 1-\left(1-e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}\right)$$

$$= e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}$$

$$\therefore \quad R(x) = e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}$$

เมื่อใส่ logarithm ทั้ง 2 ข้าง จะได้

$$\ln R(x) = \ln e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}$$

เนื่องจาก $\ln\frac{1}{R(x)} = \ln 1 - \ln R(x)$

เมื่อแทนค่า $\ln R(x) = \ln e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}$ จะได้

$$\ln\frac{1}{R(x)} = \ln 1 - \ln R(x)$$

$$= \ln 1 - \ln e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}$$

$$= 0-\left(-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right)$$

ดังนั้น $\ln\frac{1}{R(x)} = \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}$

ใส่ logarithm อีกครั้ง (double - logarithm transformation)

จะได้ $\ln\left(\ln\frac{1}{R(x)}\right) = \ln\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}$

$$= \ln x^{\beta} - \ln \alpha^{\beta}$$

$$= -\beta \ln \alpha + \beta \ln x$$

หรือ $\ln\left(\ln\frac{1}{R(x)}\right) = \ln\frac{1}{\alpha^{\beta}} + \beta \ln x$

จากสมการจะพบว่าทางด้านขวามือของสมการเชิงเส้นในรูป $\ln x$ เมื่อเทียบกับสมการเชิงเส้น $Y_i = A + BX_i$ จะได้ว่า

$$Y_i = \ln\left(\ln\frac{1}{R(x)}\right) \text{ และ}$$

$$X_i = \ln x_i$$

สำหรับค่าคงตัว A, B จะได้

$$A = \ln\frac{1}{\alpha^{\beta}} \quad \text{หรือ} \quad A = -\beta \ln \alpha$$

และ $B = \beta$

ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ α และ β เราต้องประมาณเกี่ยวกับความสัมพันธ์ $R(x_i)$ สำหรับค่า x_i ต่าง ๆ และวิธีที่ใช้กันเสมอก็คือ การทดสอบอายุการใช้งานของ อุปกรณ์ เมื่ออุปกรณ์ ดังกล่าวเกิดการขัดข้องจำนวน n หน่วย และค่าสังเกตเวลาที่อุปกรณ์ชำรุดหรือขัดข้องขณะที่ทดสอบ

ถ้าเครื่องมืออุปกรณ์หน่วยที่ i ชำรุดหรือขัดข้อง ณ เวลา x_i

เราจะประมาณ $R(x_i) = 1 - F(x_i)$

โดยใช้ตัวประมาณ $\hat{F}(x_i) = \frac{i - 0.5}{n}$

แต่ก่อนที่จะประมาณค่าพารามิเตอร์ α และ β โดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดจะต้องตรวจสอบก่อนว่าข้อมูลซึ่งเป็นค่าสังเกตของเวลาที่อุปกรณ์เกิดการข้อง เหมาะสมที่จะประมาณด้วยสมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย หรือไม่ ด้วยการพล็อตจุดที่มีพิกัด (X_i , Y_i) โดยให้แกนนอนเป็น X_i และแกนตั้งเป็น Y_i เมื่อ

$$X_i = \ln x_i$$

และ $$Y_i = \ln\left[\ln\left(\frac{1}{R(x_i)}\right)\right]$$ หรือ

$$Y_i = \ln\left[\ln\left(\frac{1}{1-\hat{F}(x_i)}\right)\right]$$

ถ้าแต่ละจุดตกอยู่ใกล้เส้นตรง หรือกราฟที่ได้มีแนวโน้มเป็นเส้นตรงก็แสดงว่าสามารถที่จะประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดได้ และแสดงว่าการแจกแจงพื้นฐานของเวลาที่อุปกรณ์เกิดการขัดข้องมีรูปแบบไวบูลล์

ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ จะได้ตัวประมาณของพารามิเตอร์ β เป็น $\hat{\beta}$ และตัวประมาณของพารามิเตอร์ α เป็น $\hat{\alpha}$ ซึ่งจะประมาณได้จาก

$$\hat{\beta} = \frac{n\Sigma X_i Y_i - \Sigma X_i \Sigma Y_i}{n\Sigma X_i^2 - \left(\Sigma X_i\right)^2}$$

และ $$(-\hat{\beta}\ln\hat{\alpha}) = \frac{\Sigma Y_i}{n} - \hat{\beta}\frac{\Sigma X_i}{n}$$

$$= \overline{Y} - \hat{\beta}\overline{X}$$

จะได้ $$-\hat{\beta}\ln\hat{\alpha} = \overline{Y} - \hat{\beta}\,\overline{X}$$

$$\ln\hat{\alpha} = -\left[\frac{\overline{Y} - \hat{\beta}\,\overline{X}}{\hat{\beta}}\right]$$

$$\hat{\alpha} = \exp\left[-\left(\frac{\overline{Y} - \hat{\beta}\,\overline{X}}{\hat{\beta}}\right)\right]$$

เมื่อประมาณค่าพารามิเตอร์ α และ β ได้เราก็จะสามารถประมาณฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น ค่าเฉลี่ย ความแปรปรวน มัธยฐาน ฐานนิยม ของการแจกแจงไวบูลล์ สามารถหาฟังก์ชันอัตราการขัดข้องและฟังก์ชันความเชื่อถือได้ เพื่อใช้ทดสอบอายุการใช้งานของเครื่องมือ อุปกรณ์ กรณีการแจกแจงไวบูลล์ มี 2 พารามิเตอร์ α และ β ได้

4.2.2 การประมาณค่าพารามิเตอร์แบบจุดกรณีพารามิเตอร์ $\gamma > 0$

ตามที่ได้กล่าวไว้แล้วว่า ในการทดสอบอายุการใช้งานของเครื่องมืออุปกรณ์นั้น ถ้าหากเราตรวจสอบก่อนว่าอุปกรณ์นั้นใช้งานได้หรือไม่ แล้วนำเฉพาะอุปกรณ์ที่ใช้งานได้มาทดสอบอายุการใช้งาน หรือบางครั้งจะเรียกว่าการทดสอบความทนทานของเครื่องมืออุปกรณ์ เมื่ออุปกรณ์สามารถใช้งานได้ก็แสดงว่าเวลาที่อุปกรณ์จะเกิดการชำรุดหรือขัดข้อง จึงไม่ได้เกิดขึ้นเมื่อเริ่มต้นใช้งาน $(x = 0)$ แต่จะเกิดขึ้นหลังจากการใช้งานผ่านไป ซึ่งเวลาที่อุปกรณ์เกิดการชำรุดหรือขัดข้องครั้งแรกจึงมากกว่า 0 ทำให้พารามิเตอร์ γ ซึ่งเป็นค่าที่เป็นไปได้น้อยที่สุดของตัวแปรสุ่ม X มีค่ามากกว่า 0 $(\gamma > 0)$ ในการประมาณพารามิเตอร์ จึงประมาณพารามิเตอร์ทั้ง 3 พารามิเตอร์ โดยวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ก็ยังนิยมใช้การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด หรือใช้การถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายประกอบกับการอธิบายด้วยกราฟ เช่นเดียวกับกรณีการแจกแจงไวบูลล์ที่มี 2 พารามิเตอร์ แต่การประมาณพารามิเตอร์ดังกล่าวสามารถประมาณพารามิเตอร์ได้เพียง 2 พารามิเตอร์ α และ β และการที่จะประมาณพารามิเตอร์ α และ β ได้นั้นจะต้องทราบค่าพารามิเตอร์ γ เสียก่อน จึงจะประมาณพารามิเตอร์ α และ β ได้ ปัญหาก็คือจะประมาณพารามิเตอร์ γ ได้อย่างไร Dubey (1966) จึงได้เสนอวิธีแก้ปัญหานี้โดยให้ $x_{(1)}$ ซึ่งเป็นค่าสังเกตของเวลาที่อุปกรณ์เกิดการขัดข้องที่มีค่าน้อยที่สุดขณะทดสอบเป็นตัวประมาณของ γ นั่นคือ $\hat{\gamma} = x_{(1)}$ จะทำให้ประมาณค่าพารามิเตอร์ α และ β ได้ ด้วยการลบ $\hat{\gamma} = x_{(1)}$ ออกจากค่าสังเกตหรือข้อมูลแต่ละตัว หลังจากนั้นก็จะดำเนินการประมาณพารามิเตอร์ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด เมื่อได้ค่าประมาณ $\hat{\alpha}$ และ $\hat{\beta}$ ก็จะนำค่าประมาณทั้ง 2 ค่าไปประมาณค่าพารามิเตอร์ γ ซ้ำอีกครั้งหนึ่งโดยคำนวณจาก

$$\gamma^* = x_{(1)} - \frac{\hat{\alpha}\Gamma\left(1+\frac{1}{\hat{\beta}}\right)}{n^{\frac{1}{\hat{\beta}}}}$$

โดยสามารถประมาณค่าพารามิเตอร์ α และ β เมื่อกำหนด $\hat{\gamma} = x_{(1)}$ โดยอาศัยความสัมพันธ์ของการแจกแจงไวบูลล์กับฟังก์ชันความเชื่อถือได้ ซึ่งสามารถเปลี่ยนให้อยู่ในรูป linear function ดังนี้

จากฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงไวบูลล์เมื่อมี 3 พารามิเตอร์

$$f(x) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right] \quad ; \quad x \geq \gamma \quad , \quad \alpha > 0 \quad , \quad \beta > 0$$

และจาก $F(x) = 1-\exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right]$

จะได้ $R(x) = 1-F(x)$

$$= 1-\left(1-\exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right]\right)$$

$$\therefore \quad R(x) = \exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right]$$

เมื่อใส่ logarithm ทั้ง 2 ข้างจะได้

$$\ln R(x) = \ln \exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right]$$

$$\ln R(x) = -\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}$$

$$-\ln R(x) = \left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}$$

เนื่องจาก $\ln R(x) = \ln R(x)^{-1}$

หรือ $-\ln R(x) = \ln \frac{1}{R(x)}$

ในทำนองเดียวกันกับการประมาณพารามิเตอร์กรณี $\gamma = 0$ โดยใช้ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันความเชื่อถือได้กับการแจกแจงไวบูลล์สามารถเปลี่ยนให้อยู่ในรูปฟังก์ชันเชิงเส้น ดังนั้นจะได้

$$\ln \frac{1}{R(x)} = \left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}$$

เมื่อใส่ logarithm ทั้ง 2 ข้างอีกครั้งจะได้

$$\ln\left[\ln \frac{1}{R(x)}\right] = \ln(x-\gamma)^{\beta} - \ln \alpha^{\beta}$$

$$\ln\left[\ln \frac{1}{R(x)}\right] = -\beta \ln \alpha + \ln (x-\gamma)^{\beta}$$

$$\ln\left[\ln \frac{1}{R(x)}\right] = -\beta \ln \alpha + \beta \ln (x-\gamma)$$

หรือ $$\ln\left[\ln \frac{1}{R(x)}\right] = \ln \frac{1}{\alpha^{\beta}} + \beta \ln (x-\gamma)$$

จากสมการจะพบว่าทางด้านขวามือของสมการอยู่ในรูปของ $\ln(x-\gamma)$ เมื่อเทียบกับสมการเชิงเส้น $Y_i = A + BX_i$ จะได้

$$Y_i = \ln\left(\ln \frac{1}{R(x_i)}\right)$$ และ

$$X_i = \ln (x_i - \gamma)$$

ส่วนค่าคงที่ A, B จะได้

$$A = \ln \frac{1}{\alpha^{\beta}}$$ หรือ $$A = -\beta \ln \alpha$$

และ $B = \beta$

ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ α และ β ต้องประมาณค่าฟังก์ชัน $R(x_i)$ สำหรับเวลาที่อุปกรณ์เกิดการขัดข้อง x_i ในการทดสอบอายุการใช้งานของอุปกรณ์จนกระทั่งเกิดการขัดข้อง N หน่วย ถ้าอุปกรณ์ หน่วยที่ i เกิดการขัดข้อง ณ เวลา x_i เราจะประมาณ $R(x_i)$ จาก

$$R(x_i) = 1 - F(x_i)$$

โดยใช้ตัวประมาณ $\hat{F}(x_i) = \dfrac{i}{n+1}$ เมื่อ $n = N - 1$

ซึ่งตัวประมาณ $\hat{F}(x_i)$ นี้จะใช้ตัวประมาณแตกต่างจากการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงไวบูลล์ที่มี 2 พารามิเตอร์ กรณี $\gamma = 0$ ซึ่งใช้ตัวประมาณ $\hat{F}(x_i) = \dfrac{i-0.5}{n}$

การที่กำหนด $n = N - 1$ ก็เนื่องจากการที่ $\hat{\gamma} = x_{(1)}$ เป็นตัวประมาณของพารามิเตอร์ γ จึงทำให้ได้ $x_i - \hat{\gamma} = 0$ เพราะทั้ง $x_{(1)}$ และ $\hat{\gamma}$ เป็นค่าเดียวกัน จึงไม่นำมาใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ จะทำให้ได้ $x_i - \hat{\gamma}$ เหลือเพียง N - 1 ค่า ดังนั้นตัวประมาณของ $R(x_i)$ ได้จาก

$$\begin{aligned}\hat{R}(x_i) &= 1 - \hat{F}(x_i) \\ &= 1 - \frac{i}{n+1} \\ &= \frac{(n+1)-i}{n+1}\end{aligned}$$

จะได้ $$\frac{1}{\hat{R}(x_i)} = \frac{n+1}{n+1-i}$$

ดังนั้น $$\ln\left(\ln\frac{1}{\hat{R}(x_i)}\right) = \ln\left(\ln\left(\frac{n+1}{n+1-i}\right)\right)$$

สำหรับการประมาณค่าพารามิเตอร์ก็จะทำเช่นเดียวกันกรณีการแจกแจงไวบูลล์ที่มี 2 พารามิเตอร์ กรณี $\gamma = 0$ โดยการพล็อตกราฟของพิกัด (X_i , Y_i) ถ้าแต่ละจุดอยู่ใกล้เส้นตรงหรือกราฟมีแนวโน้มเป็นเส้นตรงก็แสดงว่าการแจกแจงพื้นฐานของเวลาที่อุปกรณ์เกิดการขัดข้องมีการแจกแจงไวบูลล์ หรือการฟิตการแจกแจงไวบูลล์ให้กับข้อมูลเหมาะสม ซึ่งสามารถประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงโดยการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดได้

จากการประมาณค่าพารามิเตอร์จะได้

$$\hat{\beta} = \frac{n\Sigma X_i Y_i - \Sigma X_i \Sigma Y_i}{n\Sigma X_i^2 - (\Sigma X_i)^2}$$

และ $$-\hat{\beta}\ln\hat{\alpha} = \overline{Y} - \hat{\beta}\,\overline{X}$$

$$\ln\hat{\alpha} = -\left[\frac{\overline{Y} - \hat{\beta}\,\overline{X}}{\hat{\beta}}\right]$$

$$\therefore \quad \hat{\alpha} = \exp\left[-\left(\frac{\overline{Y} - \hat{\beta}\,\overline{X}}{\hat{\beta}}\right)\right]$$

เมื่อได้ตัวประมาณ $\hat{\alpha}$ และ $\hat{\beta}$ แล้วต่อไปจะต้องคำนวณหาตัวประมาณของ γ ซ้ำอีกครั้ง โดยคำนวณจาก

$$\gamma^* = x_{(1)} - \frac{\hat{\alpha}\Gamma\left(1 + \frac{1}{\hat{\beta}}\right)}{n^{\frac{1}{\hat{\beta}}}}$$

จากการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงไวบูลล์ จะได้ $\hat{\alpha}$ เป็นตัวประมาณของพารามิเตอร์ α , $\hat{\beta}$ เป็นตัวประมาณของพารามิเตอร์ β และ γ^* เป็นตัวประมาณของพารามิเตอร์ γ หรือในกรณีที่ $x_{(1)}$ มีค่ามากกว่าศูนย์เพียงเล็กน้อย จะใช้ $\hat{\gamma} = x_{(1)}$ เป็นตัวประมาณของพารามิเตอร์ γ เลยก็ได้ โดยไม่ต้องคำนวณหาตัวประมาณ γ^* ซ้ำอีก

4.3 การประมาณค่าพารามิเตอร์แบบช่วงของการแจกแจงไวบูลล์

จากการประมาณพารามิเตอร์แบบจุดของการแจกแจงไวบูลล์ ซึ่งจะประมาณค่าโดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด ในการประมาณค่าช่วงก็จะใช้วิธีการดังกล่าวเช่นกัน แต่จะประมาณค่าช่วงเฉพาะพารามิเตอร์ α และ β ตามรูปแบบของการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย จะทำให้ได้ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ α และ β ดังต่อไปนี้

4.3.1 การประมาณค่าพารามิเตอร์แบบช่วงกรณีพารามิเตอร์ $\gamma = 0$

จากสมการเชิงเส้น

$$\ln\left(\ln\frac{1}{\hat{R}(x_i)}\right) = -\hat{\beta}\ln\hat{\alpha} + \hat{\beta}\ln x_i$$

จะได้ช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ ของพารามิเตอร์ α และ β ดังนี้

1.1 ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ α

เมื่อ $\hat{\alpha}$ เป็นตัวประมาณของพารามิเตอร์ α จะได้ช่วงความเชื่อมั่นของ α ที่ระดับความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ ดังนี้

$$(-\hat{\beta}\ln\hat{\alpha}) - t_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),\,n-2} \cdot S_{(-\hat{\beta}\ln\hat{\alpha})} \le (-\beta\ln\alpha) \le (-\hat{\beta}\ln\hat{\alpha}) + t_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),\,n-2} \cdot S_{(-\hat{\beta}\ln\hat{\alpha})}$$

เนื่องจากไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ β จึงใช้ตัวประมาณ $\hat{\beta}$ จะได้

$$\frac{(\hat{\beta}\ln\hat{\alpha}) + t_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),\,n-2} \cdot S_{(-\hat{\beta}\ln\hat{\alpha})}}{\hat{\beta}} \ge \ln\alpha \ge \frac{(\hat{\beta}\ln\hat{\alpha}) - t_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),\,n-2} \cdot S_{(-\hat{\beta}\ln\hat{\alpha})}}{\hat{\beta}}$$

$$\ln\hat{\alpha} - t_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),\,n-2} \cdot \frac{S_{(-\hat{\beta}\ln\hat{\alpha})}}{\hat{\beta}} \le \ln\alpha \le \ln\hat{\alpha} + t_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),\,n-2} \cdot \frac{S_{(-\hat{\beta}\ln\hat{\alpha})}}{\hat{\beta}}$$

$$\exp\left[\ln\hat{\alpha} - t_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),\,n-2} \cdot \frac{S_{(-\hat{\beta}\ln\hat{\alpha})}}{\hat{\beta}}\right] \le \alpha \le \exp\left[\ln\hat{\alpha} + t_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),\,n-2} \cdot \frac{S_{(-\hat{\beta}\ln\hat{\alpha})}}{\hat{\beta}}\right]$$

ดังนั้นช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ ของพารามิเตอร์ α เท่ากับ

$$\alpha = \exp\left[\ln\hat{\alpha} \pm t_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),\,n-2} \cdot \frac{S_{(-\hat{\beta}\ln\hat{\alpha})}}{\hat{\beta}}\right]$$

เมื่อ $S_{(-\hat{\beta}\ln\hat{\alpha})} = S_{\left(\ln\frac{1}{\hat{\alpha}^{\hat{\beta}}}\right)}$

$$= S_{Y.X}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{\overline{X}^2}{\Sigma(X_i-\overline{X})^2}}$$

และ $S_{Y.X} = \sqrt{\frac{\Sigma(Y_i-\hat{Y})^2}{n-2}}$

โดยที่ $\hat{Y} = -\hat{\beta}\ln\hat{\alpha}+\hat{\beta}\ln x_i$ และ $Y_i = \ln\left(\ln\frac{1}{\hat{R}(x_i)}\right)$

1.2 ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β

เมื่อ $\hat{\beta}$ เป็นตัวประมาณของพารามิเตอร์ β ที่ระดับความเชื่อมั่น (1 - α)100% จะได้ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β ดังนี้

$$\hat{\beta}-t_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),n-2}\cdot S_{\hat{\beta}} \le \beta \le \hat{\beta}+t_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),n-2}\cdot S_{\hat{\beta}}$$

โดยที่ $S_{\hat{\beta}} = \frac{S_{Y.X}}{\sqrt{\Sigma(X_i-\overline{X})^2}}$

4.3.2 การประมาณค่าพารามิเตอร์แบบช่วง กรณีพารามิเตอร์ $\gamma > 0$

ในการประมาณช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ α และ β กรณีที่ $\gamma > 0$ จะมีวิธีการเช่นเดียวกับกรณีที่พารามิเตอร์ $\gamma = 0$ เพียงแต่ตัวประมาณของ X_i และ Y_i แตกต่างกันเท่านั้น โดยที่

$$X_i = \ln(x_i-\hat{\gamma}) \quad \text{เมื่อ} \quad \hat{\gamma} = x_{(1)}$$

และ $Y_i = \ln\left(\ln\frac{1}{\hat{R}(x_i)}\right)$

โดยที่ $R(x_i)$ ประมาณจาก $\hat{R}(x_i) = 1-\hat{F}(x_i)$ และ $\hat{F}(x_i) = \frac{i}{n+1}$

ดังนั้นจากสมการเชิงเส้น

$$\hat{Y} = -\hat{\beta}\ln\hat{\alpha} + \beta\ln(x_i - \hat{\gamma})$$

จะได้ช่วงความเชื่อมั่นของ α และ β ดังนี้

ก. ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ α

ในการหาช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ α กรณี $\gamma > 0$ ก็จะประมาณเช่นเดียวกันกับช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ α เมื่อ $\gamma = 0$ ดังนั้นที่ระดับความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ จะได้ช่วงความเชื่อมั่นของ α เท่ากับ

$$\alpha = \exp\left[\ln\hat{\alpha} \pm t_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),\, n-2} \cdot \frac{S_{(-\hat{\beta}\ln\hat{\alpha})}}{\hat{\beta}}\right]$$

$$\text{โดยที่ } S_{(-\hat{\beta}\ln\hat{\alpha})} = S_{Y.X}\left[\frac{1}{n} + \frac{(\overline{x-\hat{\gamma}})^2}{\Sigma\left[(x_i-\hat{\gamma})-(\overline{x-\hat{\gamma}})\right]^2}\right]$$

ข. ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β

ทำนองเดียวกันการประมาณช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β เมื่อ $\gamma > 0$ จะได้ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β เช่นเดียวกับกรณีที่ $\gamma = 0$ แต่จะต่างกันตรงที่ค่า $S_{\hat{\beta}}$ ที่ใช้ในการประมาณช่วงความเชื่อมั่นแตกต่างกัน ดังนั้นที่ระดับความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ จะได้ช่วงความเชื่อมั่นของ β เท่ากับ

$$\beta = \hat{\beta} \pm t_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),\, n-2} \cdot S_{\hat{\beta}}$$

$$\text{โดยที่ } S_{\hat{\beta}} = \frac{S_{Y.X}}{\sqrt{\Sigma\left[(x_i-\hat{\gamma})-(\overline{x-\hat{\gamma}})\right]^2}}$$

4.4 การทดสอบสมมติฐาน

การทดสอบสมมติฐาน พารามิเตอร์ที่นิยามทดสอบก็คือ α และ β ในการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับพารามิเตอร์จะใช้หลักการทดสอบเช่นเดียวกับการทดสอบสมมติฐานพารามิเตอร์ของสมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย ซึ่งมีวิธีการทดสอบดังนี้

4.4.1 การทดสอบพารามิเตอร์ β

การทดสอบพารามิเตอร์ β จะแยกทดสอบเป็น 2 กรณี คือ

ก. การทดสอบว่า $\beta \leq 0$ หรือไม่ เพราะจากนิยามของฟังก์ชันความหนาแน่นว่าจะเป็นของการแจกแจงไวบูลล์ ได้กำหนด $\beta > 0$ ดังนั้น ในการทดสอบ จึงเป็นการทดสอบหางเดียว ถ้าทดสอบแล้ว $\beta \leq 0$ แสดงว่าพารามิเตอร์ β ไม่ตรงตามนิยาม ข้อมูลที่ได้จึงไม่เหมาะที่จะประยุกต์ด้วยตัวแบบไวบูลล์ แต่เมื่อทดสอบแล้ว $\beta > 0$ แสดงว่าข้อมูลซึ่งเป็นเวลาที่อุปกรณ์เกิดการขัดข้อง เหมาะสมที่จะทำการศึกษาด้วยตัวแบบไวบูลล์ เนื่องจากได้ข้อกำหนด $\beta > 0$ ตรงตามนิยามของฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น ซึ่งการทดสอบพารามิเตอร์ $\beta \leq 0$ มีดังนี้

สมมติฐาน

$H_0 : \beta \leq 0$

$H_1 : \beta > 0$

กำหนดอาณาเขตวิกฤตที่ระดับนัยสำคัญ α

$$t_{cal} > t_{\alpha, df=n-2}$$

สถิติที่ใช้ในการทดสอบ

$$t_{cal} = \frac{\hat{\beta}}{S_{\hat{\beta}}}$$

การสรุปผลการทดสอบสมมติฐาน

ถ้า t_{cal} ตกอยู่ในอาณาเขตวิกฤต ($t_{cal} > t_{\alpha,n-2}$) หรือค่า P-value $< \alpha$ จะปฏิเสธสมมติ H_0 และยอมรับสมมติฐาน H_1 นั่นคือ $\beta > 0$ แต่ถ้าหาก $t_{cal} < t_{\alpha,n-2}$ หรือ P-value $> \alpha$ จะยอมรับสมมติฐาน H_0 ซึ่งสรุปได้ว่า $\beta \leq 0$

ข. การทดสอบว่า $\beta = \beta_0$

ในการทดสอบกรณีนี้ต้องการทราบว่า β มีค่าเท่ากับค่าใดค่าหนึ่งที่สนใจหรือไม่ ในกรณีที่ทดสอบแล้วทราบว่า $\beta > 0$ ถ้าอยากทราบว่า β เท่ากับค่าหนึ่ง ๆ อย่างเฉพาะเจาะจงไป การทดสอบมีขั้นตอนดังนี้

สมมติฐาน

$$H_0 : \beta = \beta_0$$

$$H_1 : \beta \neq \beta_0$$

อาณาเขตวิกฤตที่ระดับนัยสำคัญ α

$$t_{cal} > t_{\frac{\alpha}{2}, n-2} \quad \text{และ} \quad t_{cal} < -t_{\frac{\alpha}{2}, n-2}$$

สถิติที่ใช้ในการทดสอบ

$$t_{cal} = \frac{\hat{\beta} - \beta_0}{S_{\hat{\beta}}}$$

การสรุปผลการทดสอบสมมติฐาน

ถ้า t_{cal} ตกอยู่ในอาณาเขตวิกฤต ($t_{cal} > t_{\frac{\alpha}{2}, n-2}$ และ $t_{cal} < -t_{\frac{\alpha}{2}, n-2}$) หรือ P-value < α จะปฏิเสธสมมติฐาน H_0 ยอมรับสมมติฐาน H_1 นั่นคือ $\beta \neq \beta_0$ แต่ถ้าหาก t_{cal} ตกอยู่นอกอาณาเขตวิกฤต ($-t_{\frac{\alpha}{2}, n-2} \leq t_{cal} \leq t_{\frac{\alpha}{2}, n-2}$) จะยอมรับสมมติฐาน H_0 สรุปได้ว่า $\beta = \beta_0$

โดยทั่วไปแล้วการทดสอบว่า $\beta = \beta_0$ ไม่ค่อยนิยมทดสอบเพราะเมื่อทดสอบแล้วผลสรุปที่ได้จะเป็นอย่างไร ก็ยังถือว่า $\beta > 0$ อยู่ดี จึงนิยมทดสอบว่า $\beta \leq 0$ เป็นส่วนใหญ่

4.4.2 การทดสอบพารามิเตอร์ α

การทดสอบพารามิเตอร์ α นั้น จะทดสอบหลังจากการทดสอบพารามิเตอร์ β แล้วเสร็จ เพราะในการทดสอบ α จะนำตัวประมาณ $\hat{\beta}$ ของ β ไปใช้ในการทดสอบพารามิเตอร์ α ด้วย แต่ก่อนที่จะทำการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับพารามิเตอร์ให้ศึกษารูปแบบของฟังก์ชันตัวประมาณดังนี้

จากสมการเชิงเส้น

$$\ln\left(\ln \frac{1}{\hat{R}(x_i)}\right) = -\hat{\beta}\ln\hat{\alpha} + \hat{\beta}\ln(x_i)\,;\ \gamma = 0$$

และ
$$\ln\left(\ln \frac{1}{\hat{R}(x_i)}\right) = -\hat{\beta}\ln\hat{\alpha} + \hat{\beta}\ln(x_i - \hat{\gamma})\,;\ \gamma > 0$$

จากสมการจะได้จุดตัดแกน y (y-intercept) ซึ่งเท่ากับ $-\hat{\beta}\ln\hat{\alpha}$ มีความเป็นไปได้ 2 กรณี คือ

1. $-\hat{\beta}\ln\hat{\alpha} = 0$

จะได้
$$\begin{aligned} \ln\hat{\alpha} &= 0 \\ \hat{\alpha} &= e^{0} \\ \hat{\alpha} &= 1 \end{aligned}$$

2. $-\hat{\beta}\ln\hat{\alpha} \neq 0$ สมมติให้เท่ากับค่าคงที่ c ใด ๆ

จะได้
$$\begin{aligned} -\hat{\beta}\ln\hat{\alpha} &= c \\ \ln\hat{\alpha} &= -\frac{c}{\hat{\beta}} \\ \hat{\alpha} &= e^{-\frac{c}{\hat{\beta}}} \end{aligned}$$

ดังนั้น $\hat{\alpha} > 0$ เสมอไม่ว่า $\frac{-c}{\beta} > 0$ หรือ $\frac{-c}{\beta} < 0$ ก็ตามจากค่า $\hat{\alpha}$ ที่ได้จากทั้ง 2 กรณีจะพบว่า $\hat{\alpha}$ จะมีค่ามากกว่า 0 ทั้ง 2 กรณี ดังนั้นในการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับพารามิเตอร์ จะไม่ทดสอบ $\alpha = 0$ และไม่ทดสอบสมมติฐาน α โดยตรง แต่จะทดสอบจุดตัดแกน y แทนโดยทดสอบว่า $-\beta\ln\alpha = 0$ หรือไม่ ซึ่งมีความหมายเดียวกันกับการทดสอบว่า $\alpha = 1$ หรือไม่ แต่ถ้าทดสอบแล้วสรุปได้ว่า $-\beta\ln\alpha \neq 0$ ก็แสดงว่า $\alpha \neq 1$

ทำนองเดียวกัน ถ้าทดสอบสมมติฐาน $-\beta \ln \alpha = c$ แล้วสรุปได้ว่า $-\beta \ln \alpha = c$ ก็แสดงว่า $\alpha = e^{-\frac{c}{\beta}}$ หรือ α มีค่าเท่ากับค่าคงที่ค่าใดค่าหนึ่ง แต่ถ้าหากทดสอบแล้วสรุปได้ว่า $-\beta \ln \alpha \neq c$ ที่กำหนด ก็แสดงว่า $\alpha \neq e^{-\frac{c}{\beta}}$ หรือ α มีค่าเท่ากับค่าอื่น ซึ่งมีวิธีทดสอบดังนี้

ก. การทดสอบ $(-\beta \ln \alpha) = 0$

สมมติฐาน

$H_0 : (-\beta \ln \alpha) = 0$

$H_1 : (-\beta \ln \alpha) \neq 0$

อาณาเขตวิกฤต ที่ระดับนัยสำคัญ α

$t_{cal} > t_{\frac{\alpha}{2},n-2}$ และ $t_{cal} < -t_{\frac{\alpha}{2},n-2}$

สถิติที่ใช้ทดสอบ

$$t_{cal} = \frac{(-\hat{\beta} \ln \hat{\alpha})}{S_{(-\hat{\beta} \ln \hat{\alpha})}}$$

การสรุปผลการทดสอบ ;

ถ้า t_{cal} ตกอยู่ในอาณาเขตวิกฤต ($t_{cal} > t_{\frac{\alpha}{2},n-2}$ หรือ $t_{cal} < -t_{\frac{\alpha}{2},n-2}$) จะปฏิเสธสมมติฐาน H_0 แต่ยอมรับสมมติฐาน H_1 นั่นคือ $(-\beta \ln \alpha) \neq 0$ ซึ่งจะทำให้ $\alpha \neq 1$ แต่ถ้า t_{cal} ตกอยู่นอกอาณาเขตวิกฤต ($-t_{\frac{\alpha}{2},n-2} \leq t_{cal} \leq t_{\frac{\alpha}{2},n-2}$) จะยอมรับสมมติฐาน H_0 สรุปได้ว่า $(-\beta \ln \alpha) = 0$ นั่นคือ $\alpha = 1$

ข. การทดสอบ $(-\beta \ln \alpha) = c$

โดยทั่วไปในกรณีนี้จะไม่นิยมทดสอบ เพราะถึงแม้ว่าทดสอบแล้วผลสรุปจะเป็นอย่างไรก็ตาม ก็ยังถือว่าค่า $\alpha \neq 0$ อยู่ดี กล่าวคือไม่ว่าค่า c จะมีค่ามากกว่า 0 หรือน้อยกว่า 0 ก็จะได้ค่า $\alpha > 0$

นอกจากเราจะรู้แล้วว่า $(-\beta \ln \alpha)$ ไม่เท่ากับศูนย์หรือ α ไม่เท่ากับหนึ่งแน่นอน และต้องการอยากทราบว่า $(-\beta \ln \alpha)$ หรือ α ควรจะเท่ากับค่าหนึ่ง ๆ อย่างเฉพาะเจาะจงไป การทดสอบก็มีขั้นตอนดังนี้

สมมติฐาน

$$H_0 : (-\beta \ln \alpha) = c$$

$$H_1 : (-\beta \ln \alpha) \neq c$$

อาณาเขตวิกฤต ที่ระดับนัยสำคัญ α

$$t_{cal} > t_{\frac{\alpha}{2},n-2} \text{ และ } t_{cal} < -t_{\frac{\alpha}{2},n-2}$$

สถิติที่ใช้ทดสอบ

$$t_{cal} = \frac{(-\hat{\beta} \ln \hat{\alpha}) - c}{S_{(-\hat{\beta} \ln \hat{\alpha})}}$$

การสรุปผลการทดสอบ

ถ้า t_{cal} ตกอยู่ในอาณาเขตวิกฤต $(t_{cal} > t_{\frac{\alpha}{2},n-2}$ หรือ $t_{cal} < -t_{\frac{\alpha}{2},n-2})$ จะปฏิเสธสมมติฐาน H_0 ยอมรับสมมติฐาน H_1 นั่นคือ $(-\beta \ln \alpha) \neq c$ หรือ $\alpha \neq e^{-\frac{c}{\beta}}$ แต่ถ้าหาก t_{cal} ตกอยู่นอกอาณาเขตวิกฤต $(-t_{\frac{\alpha}{2},n-2} \leq t_{cal} \leq t_{\frac{\alpha}{2},n-2})$ จะยอมรับสมมติฐาน H_0 สรุปได้ว่า $(-\beta \ln \alpha) = c$ หรือ $\alpha = e^{-\frac{c}{\beta}}$