บทที่ 5
การประยุกต์ข้อมูลกับการแจกแจงไวบูลล์

5.1 กล่าวนำ

จากประสบการณ์ของผู้ศึกษาเกี่ยวกับการแจกแจงไวบูลล์หลาย ๆ ท่าน พบว่าการแจกแจงไวบูลล์จะให้ความน่าจะเป็นที่เหมาะสม ในการใช้อธิบายสำหรับการทดสอบอายุการใช้งาน การทดสอบความทนทานของอุปกรณ์ต่าง ๆ ตัวอย่างของข้อมูลที่นำมาประยุกต์ใช้กับการแจกแจงไวบูลล์ เช่น การวิเคราะห์เกี่ยวกับเวลาที่เกิดการขัดข้อง การชำรุดของส่วนประกอบเครื่องอิเล็กทรอนิกส์ การแตกของลูกปืนที่ใช้กับล้อรถ อุปกรณ์กำเนิดแสง (photoconductive cells) มอเตอร์ คอนเดนเซอร์ และใช้สำหรับการศึกษาเกี่ยวกับขนาดและความแข็งแรงของวัตถุที่กำลังแตกหรือหักโดยเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว เช่นศึกษาการแจกแจงของขนาดของขี้เถ้าที่เกิดจากการเผาไหม้ไม่สมบูรณ์ของเชื้อเพลิง สำหรับตัวอย่างในการศึกษาครั้งนี้เป็นตัวอย่างการประยุกต์ข้อมูล 3 ลักษณะ คือ

1. การทดสอบอายุการใช้งานของอุปกรณ์เมื่ออุปกรณ์ผลิตใหม่ ยังไม่ได้ทดสอบการใช้งานขั้นต้นมาก่อน จึงมีเวลาเริ่มต้นในการใช้งานหรือเวลาที่เป็นไปได้น้อยที่สุดที่อุปกรณ์จะเกิดการขัดข้องเป็นศูนย์ ($\gamma = 0$)

2. การทดสอบอายุการใช้งานของอุปกรณ์เมื่ออุปกรณ์ผลิตใหม่ผ่านการทดสอบการใช้งานขั้นต้นมาก่อนว่าสามารถใช้งานได้ จึงมีเวลาเริ่มต้นในการใช้งานหรือเวลาที่เป็นไปได้น้อยที่สุดที่อุปกรณ์จะเกิดการขัดข้องมากกว่าศูนย์ ($\gamma > 0$) ซึ่งจะเรียกว่าการทดสอบความทนทานของอุปกรณ์

3. การศึกษาเกี่ยวกับการแจกแจงขนาดของวัตถุที่แตกหรือหักโดยเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว โดยจะศึกษาจากข้อมูลขนาดของวัตถุที่เกิดการแตกหรือหัก

5.2 ประยุกต์การแจกแจงไวบูลล์ เมื่อ $\gamma = 0$

จากข้อมูลตัวอย่างการทดสอบอายุการใช้งานของอุปกรณ์ประเภทหนึ่ง โดยสุ่มตัวอย่างจากอุปกรณ์ที่ผลิตออกมาใหม่ จำนวน 100 หน่วย เพื่อใช้ทดสอบอายุการใช้งานนาน 500 ชั่วโมง พบว่ามีอุปกรณ์ที่เกิดการขัดข้องขณะที่ทดสอบจำนวน 15 หน่วย ได้เวลาที่อุปกรณ์เกิดการขัดข้องทั้ง 15 หน่วย ดังนี้

6, 21, 38, 50, 84, 95, 107, 130, 169, 205, 260, 270, 375, 440 และ 480 ชั่วโมง ตามลำดับ

เนื่องจากข้อมูลเวลาที่อุปกรณ์เกิดการขัดข้อง 15 หน่วยได้จากอุปกรณ์ที่ผลิตออกมาใหม่ยังไม่ได้ผ่านการทดสอบการใช้งานขั้นต้นมาก่อน ดังนั้นเวลาที่เป็นไปได้น้อยที่สุดที่อุปกรณ์จะขัดข้องในการใช้งานจึงเท่ากับศูนย์ ทำให้พารามิเตอร์ $\gamma = 0$ ข้อมูลดังกล่าวจึงเป็นการทดสอบอายุการใช้งานด้วยการแจกแจงไวบูลล์ที่มี 2 พารามิเตอร์ α และ β

5.2.1 การฟิตฟังก์ชันกับข้อมูล

การประยุกต์การแจกแจงไวบูลล์ ในการทดสอบความเชื่อถือได้ เราจะต้องทราบฟังก์ชันความหนาแน่น f(x) , ฟังก์ชันอัตราการขัดข้อง h(x) ก่อน แต่การที่จะทราบฟังก์ชันดังกล่าว จะต้องทราบค่าพารามิเตอร์ α และ β ซึ่งจะประมาณพารามิเตอร์ α และ β โดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด และการอธิบายด้วยกราฟความสัมพันธ์ของคู่ลำดับ (X_i , Y_i)

จากสมการเชิงเส้น $\ln\left[\ln\left(\frac{1}{1-F(x_i)}\right)\right] = -\beta \ln\alpha + \beta \ln x_i$

จะได้ $Y_i = \ln\left[\ln\left(\frac{1}{1-F(x_i)}\right)\right]$

$X_i = \ln x_i$

โดยที่ $F(x_i)$ ประมาณจาก

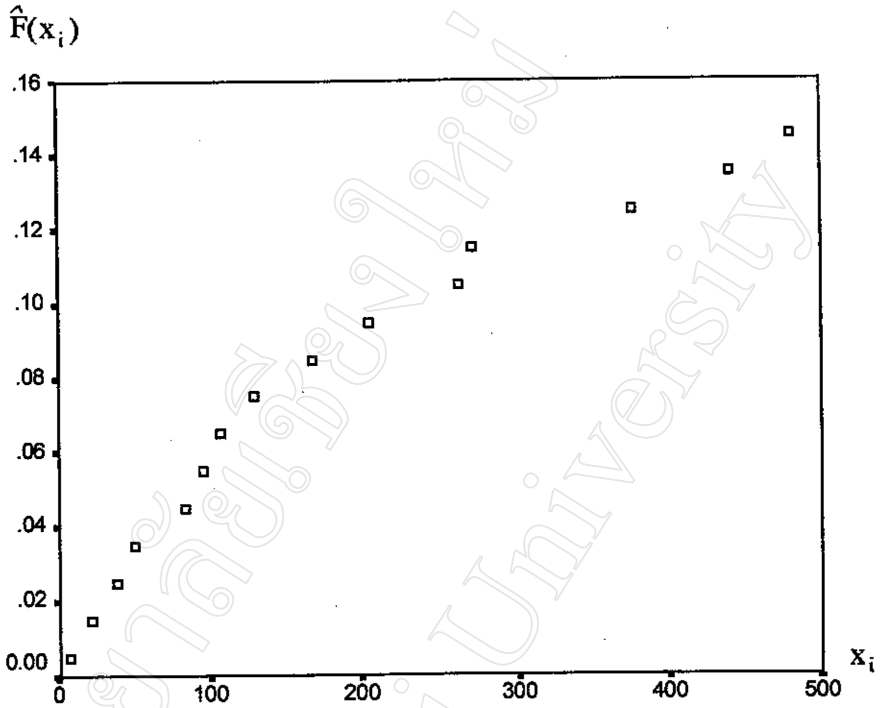
$$\hat{F}(x_i) = \frac{i-0.5}{n}$$

จะได้ตารางแสดง $\hat{F}(x_i)$, x_i , X_i และ Y_i ดังนี้

ตารางที่ 5.1 แสดงค่า x_i , ค่าประมาณ $\hat{F}(x_i)$, X_i และ Y_i

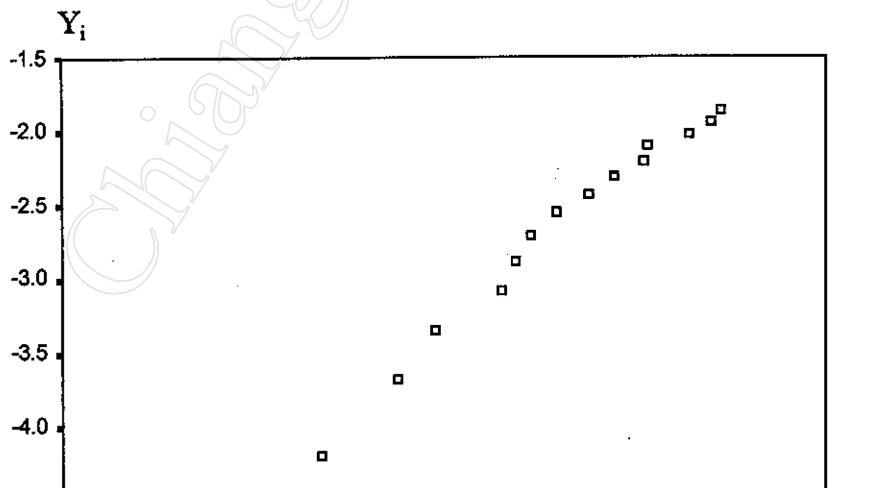
i	$\hat{F}(x_i)$	x_i	X_i	Y_i
1	0.005	6	1.792	-5.296
2	0.015	21	3.045	-4.192
3	0.025	38	3.638	-3.676
4	0.035	50	3.912	-3.335
5	0.045	84	4.431	-3.078
6	0.055	95	4.554	-2.875
7	0.065	107	4.673	-2.700
8	0.075	130	4.868	-2.552
9	0.085	169	5.130	-2.421
10	0.095	205	5.323	-2.304
11	0.105	260	5.561	-2.199
12	0.115	270	5.598	-2.102
13	0.125	375	5.927	-2.013
14	0.135	440	6.087	-1.931
15	0.145	480	6.174	-1.854

เมื่อนำคู่ลำดับ (x_i , $\hat{F}(x_i)$) ไปพล็อตกราฟ จะพบว่าแต่ละจุดที่พล็อตได้มีแนวโน้มเป็นเส้นตรง ดังแสดงในรูปที่ 5.1



รูปที่ 5.1 แสดงกราฟความสัมพันธ์ของคู่ลำดับ $(x_i, \hat{F}(x_i))$

ในทำนองเดียวกันเมื่อนำคู่ลำดับ (X_i , Y_i) ไปพล็อตจะได้กราฟมีลักษณะเป็นเส้นตรงเช่นกัน ดังรูปที่ 5.2



รูปที่ 5.2 แสดงกราฟความสัมพันธ์ของคู่ลำดับ (X_i , Y_i)

จากกราฟแนวโน้มแสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรอิสระ ($X_i = \ln x_i$) กับตัวแปรตาม $\left(Y_i = \ln\left[\ln\left(\frac{1}{1-F(x_i)}\right)\right]\right)$ มีแนวโน้มเป็นเส้นตรง แสดงว่าการฟิตการแจกแจงไวบูลล์ ให้แก่ข้อมูลเหมาะสม ผลการวิเคราะห์ข้อมูลดังตารางวิเคราะห์ข้อมูล 5.2.1 ในภาคผนวก ข จะได้ $(-\hat{\beta}\ln\hat{\alpha}) = -6.515$ และ $\hat{\beta} = 0.781$

จากสมการเชิงเส้น $\hat{Y}_i = (-\hat{\beta}\ln\hat{\alpha}) + \hat{\beta}X_i$

$$\text{หรือ} \quad \ln\left[\ln\left(\frac{1}{1-\hat{F}(x_i)}\right)\right] = -\hat{\beta}\ln\hat{\alpha} + \hat{\beta}\ln x_i$$

ผลจากการคำนวณสมการที่ได้คือ

$$\hat{Y}_i = -6.515 + 0.781X_i$$

สมการที่ได้ พบว่า X_i และ Y_i มีความสัมพันธ์เชิงเส้นตรง มีค่าความสัมพันธ์ (R) เท่ากับ 0.992 ซึ่งถือว่ามีความสัมพันธ์กันสูง

5.2.2 การทดสอบพารามิเตอร์

เนื่องจากพารามิเตอร์ของการแจกแจงไวบูลล์ กำหนดค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงไวบูลล์ α และ β เป็นค่าคงที่ โดยที่ $\alpha > 0$ และ $\beta > 0$ ดังนั้นเราจะต้องตรวจสอบก่อนว่า ($-\beta\ln\alpha$) และ β เท่ากับศูนย์หรือไม่ โดยจะทดสอบพารามิเตอร์ β ก่อน เพราะในการทดสอบ α จะนำตัวประมาณ $\hat{\beta}$ ของพารามิเตอร์ β ไปใช้ในการคำนวณ เพื่อทดสอบพารามิเตอร์ α ด้วย

(1) ทดสอบสมมติฐาน $\beta \le 0$

สมมติฐาน

$H_0 : \beta \le 0$

$H_1 : \beta > 0$

ที่ระดับนัยสำคัญ $\alpha = 0.05$ จากการวิเคราะห์ข้อมูลดังตารางวิเคราะห์ข้อมูล 5.2.1 ในภาคผนวก ข. จะได้ $t = 28.967$ และให้ค่าความน่าจะเป็นเท่ากับ 0.000 ซึ่ง $0.000 < 0.05$ จึง Reject H_0 จึงสรุปได้ว่า $\beta > 0$

(2) ทดสอบ $(-\beta \ln \alpha) = 0$ หรือ ทดสอบว่า $\alpha = 1$

สมมติฐาน

$$H_0 : (-\beta \ln \alpha) = 0$$

$$H_1 : (-\beta \ln \alpha) \neq 0$$

ที่ระดับนัยสำคัญ $\alpha = 0.05$ สถิติที่ใช้ทดสอบ t ผลจากการประมวลผลข้อมูลดังตารางวิเคราะห์ข้อมูลตาราง 5.2.1 ในภาคผนวก ข. จะได้ $t = -49.755$ ซึ่งให้ค่าความน่าจะเป็นเท่ากับ 0.000 และ $0.000 < 0.05$ จึง reject H_0 ผลการทดสอบสรุปได้ว่า $(-\beta \ln \alpha) \neq 0$ หรือ $\alpha \neq 1$

ดังนั้นพารามิเตอร์ α และ β ของการแจกแจงไวบูลล์ ประมาณได้เป็น

$$\hat{\beta} = 0.781$$

และ $(-\hat{\beta} \ln \hat{\alpha}) = -6.515$

จะได้ $$\ln \hat{\alpha} = \frac{-6.515}{-.781}$$

$$= 8.342$$

ดังนั้น $$\hat{\alpha} = e^{8.342}$$

$$= 4196.474$$

5.2.3 การประมาณค่าพารามิเตอร์แบบช่วง

นอกจากการประมาณค่าแบบจุดของพารามิเตอร์ α และ β จะได้ตัวประมาณ $\hat{\alpha} = 4196.474$ และ $\hat{\beta} = 0.781$ ยังสามารถประมาณช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ α และ β ได้ดังนี้

(1) ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ α

ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% สามารถประมาณช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ α ได้จาก

$$\exp\left[\ln \hat{\alpha} - t_{0.975,13} \cdot \frac{S_{(-\hat{\beta}\ln\hat{\alpha})}}{\hat{\beta}}\right] \leq \alpha \leq \exp\left[\ln \hat{\alpha} + t_{0.975,13} \cdot \frac{S_{(-\hat{\beta}\ln\hat{\alpha})}}{\hat{\beta}}\right]$$

จากการประมวลผลข้อมูลดังตารางวิเคราะห์ข้อมูล 5.2.1 ในภาคผนวก ข. จะได้ $S_{(-\hat{\beta}\ln\hat{\alpha})} = 0.131$ และจากตารางการแจกแจงที ตาราง 2 ในภาคผนวก ก. จะได้ $t_{0.975,\,13} = 2.16$

ดังนั้น $$\exp\left[\ln 4196.474 - (2.16)\cdot\frac{(0.131)}{0.781}\right] \le \alpha \le \exp\left[\ln 4196.474 + (2.16)\cdot\frac{(0.131)}{0.781}\right]$$

$$\exp[8.342 - 0.362] \le \alpha \le \exp[8.342 + 0.362]$$

$$\exp(7.980) \le \alpha \le \exp(8.704)$$

$$2921.931 \le \alpha \le 6026.972$$

นั่นคือช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์ α เท่ากับ $2921.931 \le \alpha \le 6026.972$

(2) ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β

จากการประมวลผลข้อมูลดังตารางวิเคราะห์ข้อมูล 5.2.1 ในภาคผนวก ข. จะได้ $S_{\hat{\beta}} = 0.027$ และจากตารางการแจกแจงที ตาราง 2 ในภาคผนวก ก. จะได้ $t_{0.975,\,13} = 2.16$ ดังนั้นที่ระดับความเชื่อมั่น 95% ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β ดังนี้

$$\hat{\beta} - t_{0.975,13}\cdot S_{\hat{\beta}} \le \beta \le \hat{\beta} + t_{0.975,13}\cdot S_{\hat{\beta}}$$

$$0.781 - (2.16)(0.027) \le \beta \le 0.781 + (2.16)(0.027)$$

$$0.723 \le \beta \le 0.839$$

นั่นคือช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์ β เท่ากับ $0.723 \le \beta \le 0.839$

5.2.4 ฟังก์ชันความหนาแน่นที่ประมาณได้

เมื่อทราบค่าประมาณของพารามิเตอร์ $\hat{\alpha}$ = 4196.474 และ $\hat{\beta}$ = 0.781 แล้วจะได้ฟังก์ชันต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องดังนี้

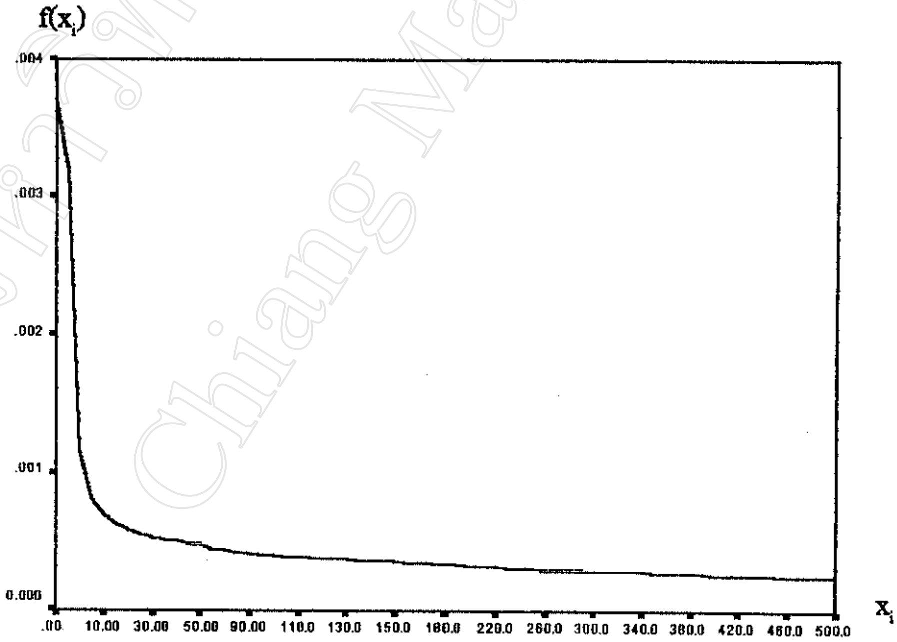
(1) ฟังก์ความหนาแน่นน่าจะเป็น f(x)

$$f(x) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right] , \quad x > 0$$

$$f(x) = \frac{0.781}{4196.474}\left(\frac{x}{4196.474}\right)^{0.781-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{4196.474}\right)^{0.781}\right]$$

$$\therefore \quad f(x) = 0.00116x^{-0.219} \exp\left[-0.00148x^{0.781}\right] , \quad x > 0$$

จากฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น $f(x_i)$ และ x_i ซึ่งแสดงข้อมูลดังตารางที่ 5.2 เมื่อนำมาพล็อตกราฟของคู่ลำดับ $(x_i , f(x_i))$ จะได้กราฟดังรูปที่ 5.3



รูปที่ 5.3 กราฟแสดงฟังก์ชัน ความหนาแน่นน่าจะเป็น ของการแจกแจงไวบูลล์ ด้วยพารามิเตอร์ α = 4196.474 , β = 0.781 และ $\gamma = 0$

(2) ฟังก์ชันอัตราการขัดข้อง ประมาณได้จากฟังก์ชัน

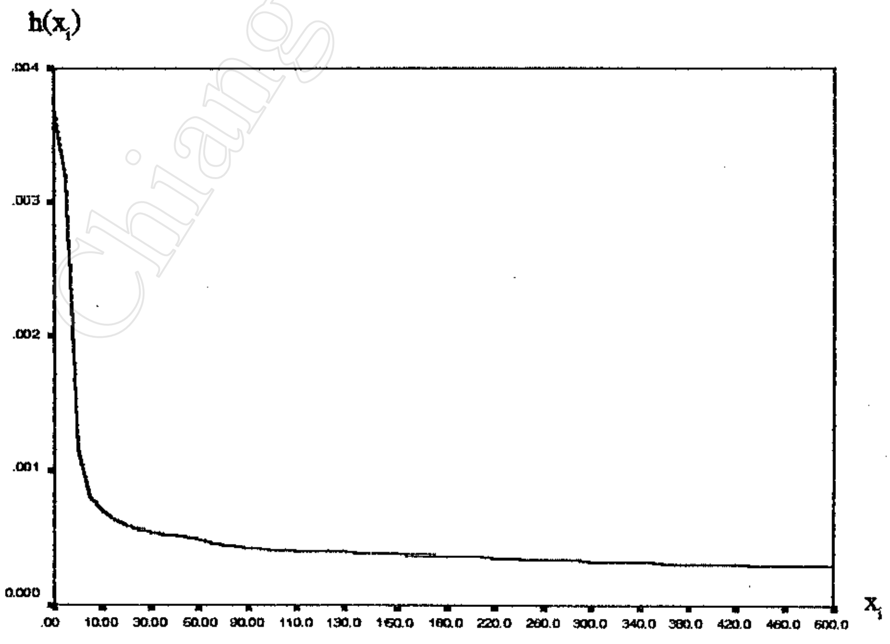
$$h(x) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1}, \quad x > 0$$

$$= \frac{0.781}{4196.474}\left(\frac{x}{4196.474}\right)^{-0.219}$$

$$\therefore \quad h(x) = 0.00116x^{-0.219}, \quad x > 0$$

เนื่องจาก $\hat{\beta} < 1$ จึงทำให้ฟังก์ชันอัตราการขัดข้องเป็นฟังก์ชันลด ซึ่งหมายความว่า ถ้าเครื่องมืออุปกรณ์ นั้นถูกใช้งานไป หลังจาก 1 ชั่วโมง $(x = 1)$ แล้ว อัตราการขัดข้องเท่ากับ $(0.00116)(1)^{-0.219} = 0.00116$ หน่วยต่อชั่วโมง และหลังจากใช้งานไปแล้ว 500 ชั่วโมง จนกระทั่งเกิดการขัดข้อง จะได้อัตราการขัดข้องลดลงเท่ากับ $(0.00116)(500)^{-0.219} = 0.000297$ หน่วยต่อชั่วโมง

จากฟังก์ชันอัตราการขัดข้อง $h(x_i)$ และ x_i ซึ่งแสดงข้อมูลดังตารางในตารางที่ 5.2 เมื่อนำมาพล็อตกราฟของคู่ลำดับ $(x_i, h(x_i))$ จะได้กราฟดังรูปที่ 5.4



รูปที่ 5.4 กราฟแสดงความสัมพันธ์เวลา x_i กับฟังก์ชันอัตราการขัดข้อง $h(x_i)$

(3) ฟังก์ชันความเชื่อถือได้

ในทำนองเดียวกันเมื่อเราต้องการทดสอบอายุการใช้งานของอุปกรณ์ หรือหาความเชื่อถือได้ของอุปกรณ์ จะประมาณได้จาก

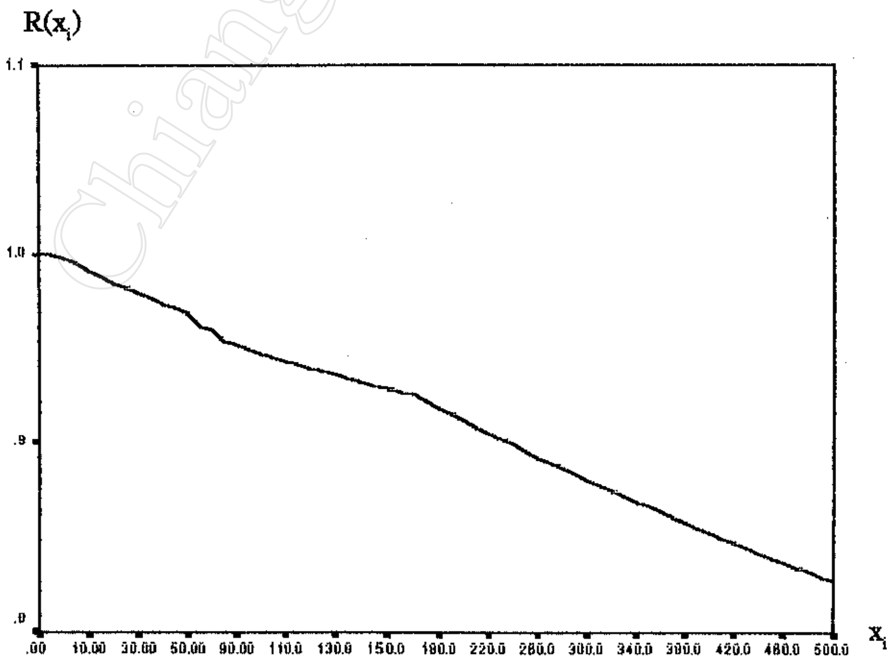
$$R(x) = \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right] \;,\; x > 0$$

$$= \exp\left[-\left(\frac{x}{4196.474}\right)^{0.781}\right]$$

$$\therefore\; \hat{R}(x) = \exp(-0.00148x^{0.781}) \;,\; x > 0$$

จากฟังก์ชันความเชื่อถือได้ที่ประมาณได้ จะได้ว่า ถ้าอุปกรณ์นั้นถูกใช้งานไปแล้วหลังจาก 1 ชั่วโมง ความเชื่อถือได้ของอุปกรณ์หลังจากใช้งานไป 1 ชั่วโมง เท่ากับ $\exp(-0.00148(1)^{0.781}) = 0.998$ นั่นคือ ความน่าจะเป็นที่อุปกรณ์จะใช้งานได้เป็นปกติในเวลา 1 ชั่วโมงมีค่าเท่ากับ 0.998 และถ้าหากใช้งานไปแล้ว 500 ชั่วโมง ความเชื่อถือได้ของอุปกรณ์ก็จะลดลงด้วยความน่าจะเป็น $\exp(-0.00148(500)^{0.781}) = 0.722$

จากฟังก์ชันความเชื่อถือได้ $R(x_i)$ และ x_i ซึ่งแสดงในตารางข้อมูลในตารางที่ 5.2 เมื่อนำมาพล็อตกราฟของคู่ลำดับ $(x_i, R(x_i))$ จะได้กราฟดังรูปที่ 5.5



รูปที่ 5.5 กราฟแสดงความสัมพันธ์เวลา x_i กับฟังก์ชันความเชื่อถือได้ $R(x_i)$

ตารางที่ 5.2 แสดงค่า x_i , $f(x_i)$, $h(x_i)$ และ $R(x_i)$ ซึ่งได้ค่าดังนี้

i	x_i	$f(x_i)$	$h(x_i)$	$R(x_i)$
1	6.00	0.0007788	0.0007835	0.9940201
2	21.00	0.0005861	0.0005955	0.9841710
3	38.00	0.0005099	0.0005230	0.9749632
4	50.00	0.0004772	0.0004925	0.9690719
5	84.00	0.0004194	0.0004396	0.9539814
6	95.00	0.0004063	0.0004279	0.9494583
7	107.00	0.0003938	0.0004169	0.9446764
8	130.00	0.0003739	0.0003995	0.9358875
9	169.00	0.0003477	0.0003772	0.9218911
10	205.00	0.0003289	0.0003616	0.9097665
11	260.00	0.0003063	0.0003432	0.8923865
12	270.00	0.0003027	0.0003404	0.8893523
13	375.00	0.0002722	0.0003168	0.8593677
14	440.00	0.0002576	0.0003059	0.8422226
15	480.00	0.0002497	0.0003001	0.8321144

5.2.5 การประมาณค่าวัดต่าง ๆ ของการแจกแจงที่ประมาณ

เมื่อทราบตัวประมาณพารามิเตอร์ $\hat{\alpha} = 4196.474$ และ $\hat{\beta} = 0.781$ สามารถหาค่าเฉลี่ย มัธยฐาน ฐานนิยม และความแปรปรวนของฟังก์ชันเวลาที่อุปกรณ์เกิดการขัดข้อง f(x) ได้ดังนี้

(1) ค่าเฉลี่ย อายุการใช้งานของอุปกรณ์สามารถหาได้ดังนี้

จาก $$\hat{\mu} = \hat{\alpha}\Gamma\left(1+\frac{1}{\hat{\beta}}\right)$$

$$= 4196.474\Gamma\left(1+\frac{1}{0.781}\right)$$

$$= 4196.474\Gamma(1+1.28)$$

จากตารางฟังก์ชันแกมมาตารางที่ 1 ในภาคผนวก ก. จะได้

$$\Gamma(1+1.28) = 1.28\Gamma(1.28) = 1.28(0.90072) = 1.1529$$

ดังนั้นค่าเฉลี่ยของอายุการใช้งานของอุปกรณ์ ประมาณจาก

$$\hat{\mu} = 4196.474\ (1.1529)$$

$$\approx 4838.11$$

นั่นคืออุปกรณ์จะมีอายุการใช้งานโดยเฉลี่ยประมาณ 4838 ชั่วโมง

(2) **มัธยฐาน** อายุการใช้งานของอุปกรณ์สามารถหาได้ดังนี้

จาก

$$\begin{aligned} Med(X) &= \hat{\alpha}(\ln 2)^{\frac{1}{\hat{\beta}}} \\ &= 4196.474(\ln 2)^{\frac{1}{0.781}} \\ &\approx 2624.66 \text{ ชั่วโมง} \end{aligned}$$

ดังนั้นแสดงว่า มัธยฐานอายุการใช้งานของอุปกรณ์ประมาณ 2625 ชั่วโมง

(3) **ฐานนิยม** อายุการใช้งานของอุปกรณ์ สามารถหาได้ดังนี้

เนื่องจาก $\hat{\beta} = 0.781$ ซึ่งมีค่าน้อยกว่าหนึ่ง $(\beta < 1)$ จะได้ Mode(X) = 0 เพราะถ้า $\hat{\beta} \le 1$ ฐานนิยมจะขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ γ เมื่อ $\gamma = 0$ จึงเท่ากับว่าฐานนิยมมีค่าเท่ากับ 0 เมื่อพิจารณาจากกราฟของฟังก์ชันความหนาแน่น รูปที่ 5.3 จะเห็นว่าเวลาเริ่มต้นใช้งาน $(x = 0)$ จะให้ค่าของพารามิเตอร์ γ เท่ากับ 0 กราฟของฟังก์ชันความหนาแน่นจึงให้จุดสูงสุด ทำให้ฐานนิยมมีค่าเท่ากับ 0

(4) ความแปรปรวน อายุการใช้งานของอุปกรณ์ สามารถหาได้ดังนี้

$$\text{จาก} \quad \hat{\sigma}^2 = \hat{\alpha}^2\left\{\Gamma\left(1+\frac{2}{\hat{\beta}}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\hat{\beta}}\right)\right\}$$

$$\hat{\sigma}^2 = (4196.474)^2\left\{\Gamma\left(1+\frac{2}{0.781}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{0.781}\right)\right\}$$

$$= (4196.474)^2\left\{\Gamma(1+2.56)-\Gamma^2(1+1.28)\right\}$$

$$= (4196.474)^2\left\{2.56\Gamma(2.56)-(1.28\Gamma(1.28))^2\right\}$$

$$= (4196.474)^2\left\{2.56(1.56\Gamma(1.56))-(1.28\Gamma(1.28))^2\right\}$$

$$= (4196.474)^2\left\{2.56(1.56(0.88964))-(1.28(0.90072))^2\right\}$$

$$\therefore \quad \hat{\sigma}^2 = 39159142.92$$

$$\text{จะได้} \quad \hat{\sigma} = 6257.73$$

จากการศึกษาเกี่ยวกับค่าเฉลี่ย มัธยฐาน ฐานนิยม และความแปรปรวนของเวลาที่อุปกรณ์ขัดข้องขณะทดสอบพบว่า อายุการใช้งานโดยเฉลี่ยจะมากกว่ามัธยฐานของอายุการใช้งานของอุปกรณ์ แต่จะมีความแปรปรวนสูงมาก แสดงว่าเวลาที่อุปกรณ์ขัดข้องขณะใช้งานมีความแตกต่างกันมาก เพราะในการทดสอบอายุการใช้งานอุปกรณ์ ไม่ทราบว่าอุปกรณ์จะเกิดการขัดข้องหรือชำรุดเมื่อใด จึงทำให้เวลาที่อุปกรณ์จะขัดข้องขณะใช้งานแตกต่างกันมาก โดยเฉพาะอุปกรณ์ที่มีคุณภาพจะต้องใช้เวลานานจึงจะเกิดการขัดข้องในการใช้งาน จึงทำให้ค่าเฉลี่ย และความแปรปรวนมีค่ามากตามไปด้วย

5.3 การประยุกต์การแจกแจงไวบูลล์ เมื่อ $\gamma > 0$

จากข้อมูลตัวอย่างการทดสอบอายุการใช้งานของมอเตอร์เครื่องทำความเย็นยี่ห้อหนึ่ง โดยสุ่มตัวอย่างมอเตอร์ดังกล่าวจำนวนหนึ่ง จากมอเตอร์ที่ผ่านการทดสอบการใช้งานขั้นต้นแล้วว่าสามารถใช้งานได้ ทำการทดสอบอายุการใช้งานของมอเตอร์ตามเวลาที่กำหนด พบว่ามีมอเตอร์จำนวน 20 ตัว เกิดการขัดข้อง ขณะทดสอบ และบันทึกเวลาที่มอเตอร์ขัดข้อง เป็นดังนี้

104.3	158.7	193.7	201.3	206.2	227.8	249.1	307.8	311.5	329.6
358.5	364.3	370.4	380.5	394.6	426.2	434.1	552.6	594.0	691.5

(หน่วย : ชั่วโมง)

5.3.1 การฟิตฟังก์ชันลับข้อมูล

ในการทดสอบพบว่า มอเตอร์ที่สุ่มมาทดสอบได้ผ่านการทดสอบการใช้งานขั้นต้นมาก่อนว่าใช้งานได้ ทำให้เวลาเริ่มต้นใช้งานของมอเตอร์มากกว่า 0 พารามิเตอร์ γ จึงมีค่ามากกว่า 0 ($\gamma > 0$) ดังนั้นข้อมูลค่าสังเกตเวลาที่มอเตอร์เกิดขัดข้อง จึงเหมาะสมที่จะศึกษาด้วยการแจกแจงไวบูลล์ที่มี 3 พารามิเตอร์ α , β และ γ แต่ก่อนที่จะทราบคุณลักษณะต่าง ๆ ของข้อมูล จะต้องประมาณพารามิเตอร์ α , β และ γ ที่ได้จากข้อมูล โดยประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด ซึ่งจะใช้วิธีการอธิบายด้วยกราฟและการวิเคราะห์การถดถอย

เนื่องจากเวลาที่น้อยที่สุด ที่มอเตอร์เกิดการขัดข้องเท่ากับ 104.3 ชั่วโมง จึงกำหนดให้ตัวประมาณ $\hat{\gamma}$ ของพารามิเตอร์ γ เท่ากับ 104.3

ดังนั้น $\hat{\gamma} = 104.3$

จากสมการเชิงเส้น

$$Y_i = -\beta\ln\alpha + \beta\ln X_i$$

เมื่อ $$Y_i = \ln\left[\ln\left(\frac{1}{\hat{R}(x_i)}\right)\right] \; ; \; \hat{R}(x_i) = \frac{n+1}{n+1-i}$$

หรือ $$Y_i = \ln\left[\ln\left(\frac{1}{1-\hat{F}(x_i)}\right)\right] \; ; \; \hat{F}(x_i) = \frac{i}{n+1}$$

และ $$X_i = \ln(x_i - \hat{\gamma})$$

โดยที่ $$n = 20-1$$

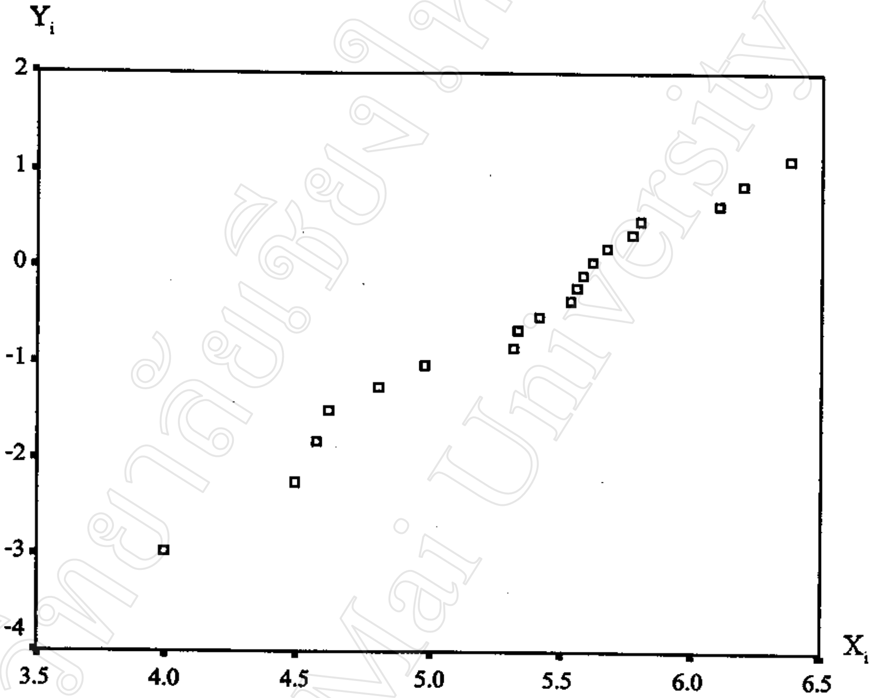
$$= 19$$

นำข้อมูลที่ได้คำนวณค่า X_i และ Y_i ได้ดังนี้

ตารางที่ 5.3 แสดงค่า x_i , $x_i - \hat{\gamma}$, $\hat{R}(x_i)$, $\ln\left(\frac{1}{\hat{R}(x_i)}\right)$, X_i และ Y_i

i	x_i	x_i - 104.3	$\hat{R}(x_i)$	$\ln\left(\frac{1}{\hat{R}(x_i)}\right)$	X_i	Y_i
1	104.30	0.00	-	-	-	-
2	158.70	54.40	1.0526	0.0513	3.9964	-2.97
3	193.70	89.40	1.1111	0.1054	4.4931	-2.25
4	201.30	97.00	1.1765	0.1625	4.5747	-1.82
5	206.20	101.90	1.2500	0.2231	4.6240	-1.50
6	227.80	123.50	1.3333	0.2877	4.8162	-1.25
7	249.10	144.80	1.4286	0.3567	4.9754	-1.03
8	307.80	203.50	1.5385	0.4308	5.3157	- 0.84
9	311.50	207.20	1.6667	0.5108	5.3337	- 0.67
10	329.60	225.30	1.8182	0.5978	5.4174	- 0.51
11	358.50	254.20	2.0000	0.6931	5.5381	- 0.37
12	364.30	260.00	2.2222	0.7985	5.5607	- 0.23
13	370.40	266.10	2.5000	0.9163	5.5839	- 0.09
14	380.50	276.20	2.8571	1.0498	5.6211	0.05
15	394.60	290.30	3.3333	1.2040	5.6709	0.19
16	426.20	321.90	4.0000	1.3863	5.7742	0.33
17	434.10	329.80	5.0000	1.6094	5.7985	0.48
18	552.60	448.30	6.6667	1.8971	6.1055	0.64
19	594.00	489.70	10.000	2.3026	6.1938	0.83
20	691.50	587.20	20.000	2.9957	6.3754	1.10

จากข้อมูล X_i และ Y_i ในตาราง 5.3 เมื่อนำคู่ลำดับ (X_i , Y_i) ไปพล็อตกราฟจะได้กราฟ ดังรูปที่ 5.6



รูปที่ 5.6 กราฟแสดงความสัมพันธ์ของ X_i และ Y_i

จะเห็นว่ากราฟแสดงความสัมพันธ์ X_i กับ Y_i มีแนวโน้มเป็นเส้นตรง แสดงว่าการฟิตการแจกแจงไวบูลล์ให้แก่ข้อมูลเหมาะสม และจากผลการวิเคราะห์ข้อมูลดังตาราง 5.3.1 ในภาคผนวก ข. จะได้

$$-\hat{\beta}\ln\hat{\alpha} = -9.633$$

และ $$\hat{\beta} = 1.701$$

จากรูปแบบสมการเชิงเส้น $\hat{Y}_i = -\hat{\beta}\ln\hat{\alpha}+\hat{\beta}X_i$

จะได้สมการ $\hat{Y}_i = -9.633 + 1.701X_i$

5.3.2 การทดสอบพารามิเตอร์

เนื่องจากนิยามของการแจกแจงไวบูลล์ กำหนดให้พารามิเตอร์ α , β และ γ เป็นค่าคงที่ $\alpha > 0$, $\beta > 0$ โดยที่ $\gamma \geq 0$ สำหรับพารามิเตอร์ γ จากข้อมูลจะพบว่า $\gamma > 0$ ดังนั้นจะทดสอบว่า α และ β มากกว่าศูนย์หรือไม่ โดยการทดสอบสมมติฐาน ดังนี้

(1) ทดสอบ $\beta \leq 0$

สมมติฐาน

$$H_0 : \beta \leq 0$$

$$H_1 : \beta > 0$$

ที่ระดับนัยสำคัญ $\alpha = 0.05$ จากการวิเคราะห์ข้อมูลดังตาราง 5.3.1 ในภาคผนวก ข. จะได้ $t = 26.989$ ซึ่งให้ความน่าจะเป็นเท่ากับ 0.000 และ $0.000 < 0.05$ จึงปฏิเสธสมมติฐาน H_0 สรุปได้ว่า $\beta > 0$

(2) ทดสอบ $-\beta \ln\alpha = 0$ หรือทดสอบ $\alpha = 1$

สมมติฐาน

$$H_0 : (-\beta \ln\alpha) = 0$$

$$H_1 : (-\beta \ln\alpha) \neq 0$$

ที่ระดับนัยสำคัญ $\alpha = 0.05$ สถิติที่ใช้ทดสอบ t ผลจากการวิเคราะห์ข้อมูลดังตาราง 5.3.1 ในภาคผนวก ข จะได้ $t = -28.349$ ซึ่งให้ค่าความน่าจะเป็นเท่ากับ 0.000 และ $0.000 < 0.05$ จึงปฏิเสธสมมติฐาน H_0 สรุปได้ว่า $(-\beta \ln\alpha) \neq 0$ แสดงว่า $\alpha \neq 1$

ดังนั้นค่าประมาณของพารามิเตอร์ α และ β ประมาณได้ดังนี้

$$\hat{\beta} = 1.701$$

และ $$-\hat{\beta}\ln\hat{\alpha} = -9.633$$

จะได้ $$\ln\hat{\alpha} = \frac{9.633}{\hat{\beta}}$$

$$\ln\hat{\alpha} = 5.663$$

ดังนั้น $$\hat{\alpha} = e^{5.663}$$

$$= 288.011$$

เมื่อทราบค่าประมาณ $\hat{\alpha} = 288.011$ และ $\hat{\beta} = 1.701$ แล้วจะประมาณพารามิเตอร์ γ ซ้ำอีกครั้งโดยคำนวณจาก

$$\gamma^* = x_{(1)} - \frac{\hat{\alpha}\Gamma\left(1+\frac{1}{\hat{\beta}}\right)}{n^{\frac{1}{\hat{\beta}}}}$$

$$= 104.3 - \frac{(288.011)\Gamma\left(1+\frac{1}{1.701}\right)}{(19)^{\frac{1}{1.701}}}$$

$$= 104.3 - \frac{(288.011)\Gamma(1.59)}{5.646}$$

จากตาราง ฟังก์ชันแกมมาในภาคผนวก ก. จะได้ $\Gamma(1.59) = 0.89243$

$$\therefore \gamma^* = 104.3 - 45.524$$

$$= 58.776$$

นั่นคือ ค่าประมาณของเวลาที่น้อยที่สุดที่มอเตอร์จะขัดข้องในการใช้งานเท่ากับ 58.776 ชั่วโมง

5.3.3 การประมาณค่าพารามิเตอร์แบบช่วง

เมื่อทราบค่าประมาณพารามิเตอร์ $\hat{\alpha} = 288.011$, $\hat{\beta} = 1.701$ และ $\gamma^* = 58.776$ แล้ว สามารถหาช่วงความเชื่อมั่นพารามิเตอร์ α และ β ได้ดังนี้

(1) ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ α

จากการประมวลผลข้อมูลดังตารางวิเคราะห์ข้อมูล 5.3.1 ในภาคผนวก ข. จะได้ $S_{(-\hat{\beta}\ln\hat{\alpha})} = 0.340$ และจากตารางการแจกแจงที ตาราง 2 ในภาคผนวก ก. จะได้ $t_{0.975,\,17} = 2.110$ ดังนั้นที่ระดับความเชื่อมั่น 95% จะได้ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ α ดังนี้

$$\exp\left[\ln 288.011-(2.110)\frac{(0.340)}{1.701}\right]\le\alpha\le\exp\left[\ln 288.011+(2.110)\frac{(0.340)}{1.701}\right]$$

$$\exp[5.663-0.422]\le\alpha\le\exp[5.663+0.422]$$

$$\exp(5.241)\le\alpha\le\exp(6.085)$$

$$188.859\le\alpha\le 439.219$$

นั่นคือช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์ α เท่ากับ $188.859\le\alpha\le 439.219$

(2) ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β

จากการประมวลผลข้อมูลดังตารางวิเคราะห์ข้อมูล 5.3.1 ในภาคผนวก ข. จะได้ $S_{\hat{\beta}}=0.063$ และจากตารางการแจกแจงที ตาราง 2 ในภาคผนวก ก. จะได้ $t_{0.975,\,17}\ =\ 2.110$ ดังนั้น ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% จะได้ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β ดังนี้

$$\hat{\beta}-t_{0.975,17}\cdot S_{\hat{\beta}}\le\beta\le\hat{\beta}+t_{0.975,17}\cdot S_{\hat{\beta}}$$

$$1.701-(2.110)(0.063)\le\beta\le 1.701-(2.110)(0.063)$$

$$1.701-0.133\le\beta\le 1.701+0.133$$

$$1.568\le\beta\le 1.834$$

นั่นคือ ช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์ β เท่ากับ $1.568\le\beta\le 1.834$

5.3.4 ฟังก์ชันความหนาแน่นที่ประมาณได้

เมื่อทราบตัวประมาณ $\gamma^*=58.776$, $\hat{\alpha}\ =\ 288.011$ และ $\hat{\beta}\ =\ 1.701$ จะหาฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น ฟังก์ชันอัตราการขัดข้อง และฟังก์ชันความเชื่อถือได้ดังนี้

ก. ฟังก์ชันอัตราการขัดข้อง

$$h(x) = \frac{\hat{\beta}}{\hat{\alpha}}\left(\frac{x-\gamma^*}{\hat{\alpha}}\right)^{\hat{\beta}-1}$$

$$= \frac{1.701}{288.011}\left(\frac{x-58.776}{288.011}\right)^{1.701-1}$$

$$= 0.00011149(x-58.776)^{0.701}$$

$$\therefore\ h(x) = 0.00011149(x-58.776)^{0.701}, \quad x>0$$

ข. ฟังก์ชันความเชื่อถือได้

$$R(x) = \exp\left[\left(\frac{x-\gamma^*}{\hat{\alpha}}\right)^{\hat{\beta}}\right]$$

$$= \exp\left[-\left(\frac{x-58.776}{288.011}\right)^{1.701}\right]$$

$$\therefore\ R(x) = \exp\left[-(0.0000655)(x-58.776)^{1.701}\right], \quad x>0$$

ค. ฟังก์ชันความหนาน่าจะเป็น

$$f(x) = h(x)R(x)$$

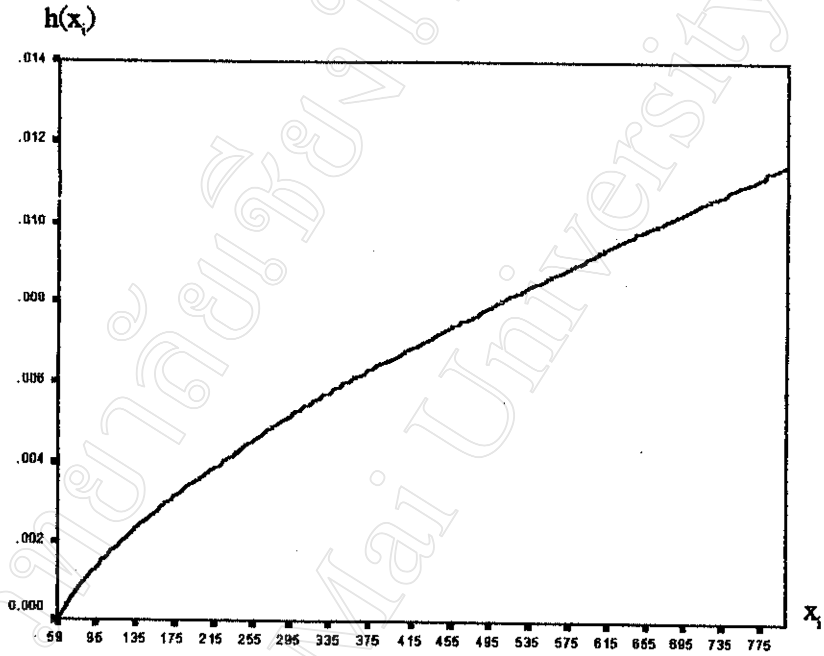
$$\therefore\ f(x) = 0.00011149(x-58.776)^{0.701}\exp\left[-(0.0000655)(x-58.776)^{1.701}\right], \quad x>0$$

ฟังก์ชันทั้ง 3 ฟังก์ชันเมื่อนำมาคำนวณหาค่าของฟังก์ชันความหนาแน่นเวลาที่มอเตอร์เกิดการขัดข้องได้ดังตารางที่ 5.4

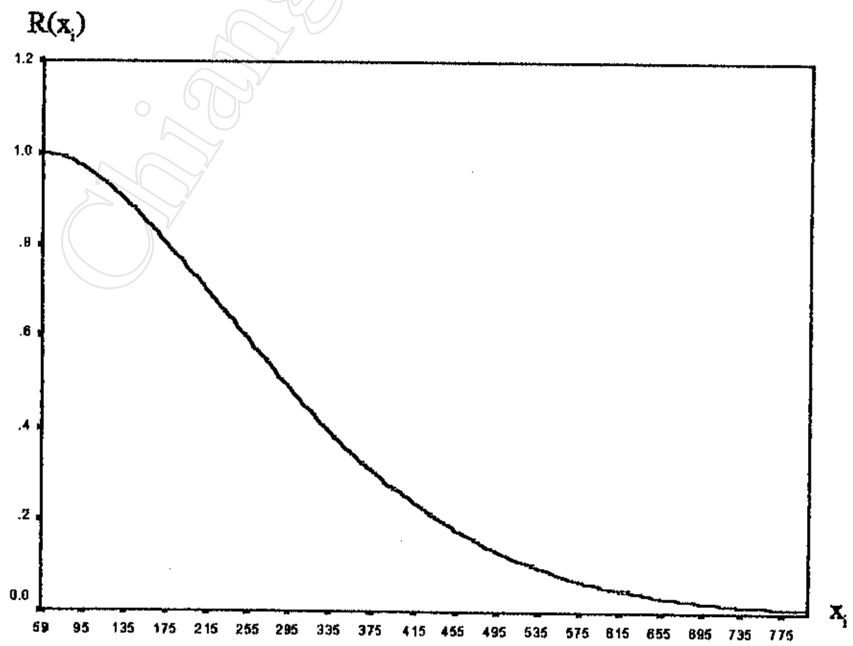
ตารางที่ 5.4 แสดงค่า x_i , $h(x_i)$, $R(x_i)$ และ $f(x_i)$ ดังนี้

i	x_i	$h(x_i)$	$R(x_i)$	$f(x_i)$
1	104.30	0.0016	0.9576	0.0016
2	158.70	0.0028	0.8478	0.0024
3	193.70	0.0035	0.7595	0.0026
4	201.30	0.0036	0.7393	0.0027
5	206.20	0.0037	0.7262	0.0027
6	227.80	0.0041	0.6679	0.0027
7	249.10	0.0044	0.6102	0.0027
8	307.80	0.0053	0.4583	0.0024
9	311.50	0.0054	0.4493	0.0024
10	329.60	0.0057	0.4066	0.0023
11	358.50	0.0061	0.3432	0.0021
12	364.30	0.0062	0.3313	0.0020
13	370.40	0.0062	0.3190	0.0020
14	380.50	0.0064	0.2993	0.0019
15	394.60	0.0066	0.2732	0.0018
16	426.20	0.0070	0.2204	0.0015
17	434.10	0.0071	0.2085	0.0015
18	552.60	0.0086	0.0821	0.0007
19	594.00	0.0091	0.0568	0.0005
20	691.50	0.0103	0.0221	0.0002

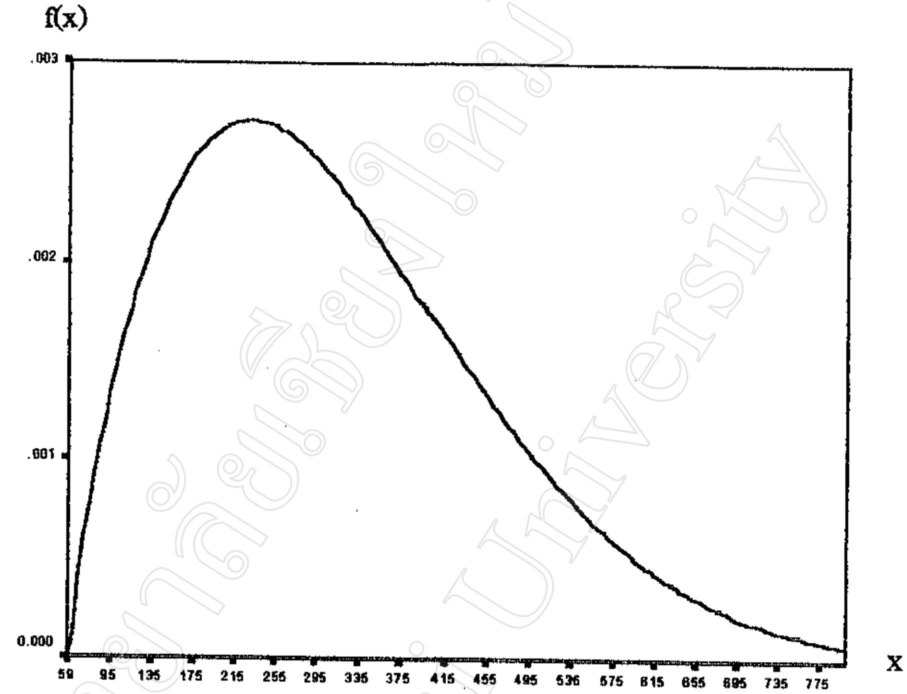
นำค่าของฟังก์ชันอัตราการขัดข้อง h(x) ฟังก์ชันความเชื่อถือได้ R(x) ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น f(x) และ x_i ในตารางที่ 5.4 พล็อตกราฟของคู่ลำดับ $(x_i, h(x_i))$, $(x_i, R(x_i))$ และ $(x_i, f(x_i))$ จะได้กราฟดังรูป



รูปที่ 5.7 กราฟแสดงความสัมพันธ์เวลา x_i กับฟังก์ชันอัตราการขัดข้อง $h(x_i)$



รูปที่ 5.8 กราฟแสดงความสัมพันธ์เวลา x_i กับฟังก์ชันความเชื่อถือได้ $R(x_i)$



รูปที่ 5.9 กราฟแสดงฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงด้วยพารามิเตอร์ $\gamma = 58.776$, $\alpha = 288.011$ และ $\beta = 1.701$

จากตารางที่ 5.4 ซึ่งแสดงค่าของฟังก์ชัน h(x) , R(x) และ f(x) ณ เวลาที่มอเตอร์เกิดการขัดข้อง และกราฟแสดงความสัมพันธ์ของทั้ง 3 ฟังก์ชันกับเวลาจะพบว่า

ฟังก์ชันอัตราการขัดข้องเป็นฟังก์ชันเพิ่ม เนื่องจาก $\beta > 1$ จึงทำให้เมื่อเวลาเพิ่มขึ้นความน่าจะเป็นที่มอเตอร์จะขัดข้องจะเพิ่มขึ้นด้วย เช่น เมื่อมอเตอร์ใช้งานไปแล้ว 364.30 ชั่วโมง อัตราการขัดข้องเท่ากับ 0.0062 หน่วยต่อชั่วโมง และถ้าใช้งานไปเวลา 691.50 ชั่วโมง อัตราการขัดข้องของมอเตอร์ ก็จะเพิ่มขึ้นเป็น 0.0103 หน่วยต่อชั่วโมง

ฟังก์ชันความเชื่อถือได้เป็นฟังก์ชันลด เพราะว่าเมื่อมอเตอร์ถูกใช้งานนาน ๆ อัตราการขัดข้องก็จะเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ จึงทำให้ความเชื่อถือได้ของอายุการใช้งานมอเตอร์ลดลง เช่น ถ้ามอเตอร์ถูกใช้งานไปแล้วหลังจาก 104.30 ชั่วโมง ความเชื่อถือได้เท่ากับ 0.9576 นั่นคือความน่าจะเป็นที่มอเตอร์ถูกใช้งานได้เป็นปกติภายในเวลา 104.30 ชั่วโมง มีค่าเท่ากับ 0.9576 และถ้าหากมอเตอร์ใช้งานไปแล้ว 691.50 ชั่วโมง ความเชื่อถือได้ของอายุการใช้งานมอเตอร์ก็จะลดลงด้วยความน่าจะเป็น เท่ากับ 0.0221

5.3.5 การประมาณค่าวัดต่าง ๆ ของการแจกแจงที่ประมาณ

เมื่อพิจารณาค่าของฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น และกราฟของฟังก์ชัน จะเห็นว่าช่วงเริ่มต้นใช้งานกราฟของฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นที่มอเตอร์จะขัดข้อง มีรูปร่างสูงขึ้นเรื่อย ๆ แต่พอใช้งานไปได้ระยะหนึ่งก็จะลดลง เมื่ออายุการใช้งานเพิ่มขึ้นกราฟก็จะลู่เข้าสู่แกน X ซึ่งสามารถหาค่าเฉลี่ย มัธยฐาน ฐานนิยมและความแปรปรวนของฟังก์ชันเวลาที่มอเตอร์ขัดข้อง f(x) ได้ดังนี้

(1) ค่าเฉลี่ยอายุการใช้งานของมอเตอร์เท่ากับ

$$\hat{\mu} = \hat{\alpha}\Gamma\left(1+\frac{1}{\hat{\beta}}\right)+\gamma^*$$

$$= (288.011)\Gamma\left(1+\frac{1}{1.701}\right)+58.776$$

$$= (288.011)\Gamma(1.59)+58.776$$

$$= (288.011)(0.89243)+58.776$$

$$\approx 315.805 \text{ ชั่วโมง}$$

ดังนั้นแสดงว่ามอเตอร์มีอายุการใช้งานโดยเฉลี่ยประมาณ 315.805 ชั่วโมง

(2) มัธยฐานอายุการใช้งานของมอเตอร์เท่ากับ

$$\mathrm{Med}(X) = \hat{\alpha}(\ln 2)^{\frac{1}{\hat{\beta}}}+\gamma^*$$

$$= (288.011)[\ln 2]^{\frac{1}{1.701}}+58.776$$

$$\approx 291 \text{ ชั่วโมง}$$

ดังนั้นเวลามัธยฐานของอายุการใช้งานของมอเตอร์ ประมาณ 291 ชั่วโมง

(3) ฐานนิยมอายุการใช้งานของมอเตอร์เท่ากับ

เนื่องจาก $\beta > 1$ กราฟของฟังก์ชันความหนาแน่น จึงให้ค่าสูงสุด ฐานนิยม จึงหาได้จาก

$$\text{Mode}(X) = \hat{\alpha}\left[\frac{\hat{\beta}-1}{\hat{\beta}}\right]^{\frac{1}{\hat{\beta}}} + \gamma^*$$

$$= (288.011)\left[\frac{1.701-1}{1.701}\right]^{\frac{1}{1.701}} + 58.776$$

$$\approx 229.809 \text{ ชั่วโมง}$$

ดังนั้นเวลาที่มอเตอร์เกิดการขัดข้องส่วนใหญ่มีอายุการใช้งานประมาณ 229.809 ชั่วโมง

จะพบว่าค่าเฉลี่ย มัธยฐาน และฐานนิยมของเวลาที่มอเตอร์เกิดการขัดข้องขณะใช้งานมีค่าแตกต่างกันมากโดยเวลาที่มอเตอร์ขัดข้องโดยเฉลี่ยมีค่ามากที่สุด แต่ก็ยังถือว่ามอเตอร์มีอายุเฉลี่ยในการใช้งานน้อย อาจเนื่องมาจากสุ่มได้มอเตอร์ที่คุณภาพต่ำมาทดสอบ ดังนั้น บริษัทผู้ผลิตจึงควรควบคุมการผลิตและคุณภาพมอเตอร์ให้อายุการใช้งานมากยิ่งขึ้น

(4) ความแปรปรวนของเวลาที่มอเตอร์ขัดข้องหาได้ดังนี้

จาก $$\hat{\sigma}^2 = \hat{\alpha}^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\hat{\beta}}\right) - \Gamma^2\left(1+\frac{1}{\hat{\beta}}\right)\right]$$

$$= (288.011)^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{1.701}\right) - \Gamma^2\left(1+\frac{1}{1.701}\right)\right]$$

$$= (288.011)^2\left[\Gamma(2.17) - \Gamma^2(1.59)\right]$$

$$= (288.011)^2\left[(1.084) - (0.796)\right]$$

$$= 23889.6968$$

ดังนั้น $\hat{\sigma} = 154.56$

เมื่อศึกษาถึงความแปรปรวนและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของเวลาที่มอเตอร์ขัดข้อง จะเห็นว่ามีค่าสูงมากแสดงว่าเวลาที่มอเตอร์ขัดข้องแตกต่างกันมากหรือข้อมูลเวลาที่มอเตอร์ขัดข้องมีการกระจายมาก

5.4 การประยุกต์การแจกแจงไวบูลล์กับข้อมูลที่ไม่ใช่เวลา

ดังได้กล่าวไปแล้วว่า การแจกแจงไวบูลล์ส่วนใหญ่จะนิยมใช้ในการศึกษาข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับเวลา ซึ่งใช้อธิบายสำหรับการทดสอบอายุการใช้งานการทดสอบความทนทานของอุปกรณ์ต่าง ๆ ตามที่ได้เสนอไปแล้ว การแจกแจงไวบูลล์ยังสามารถนำไปประยุกต์สำหรับข้อมูลที่ไม่ใช่เวลาด้วย เช่นการศึกษาเกี่ยวกับขนาดและความแข็งแรงของวัตถุที่แตก หรือหักโดยการเปลี่ยนแปลงจากรวดเร็ว การศึกษาความรุนแรงของสารกัมมันตรังสี ในการประยุกต์กับข้อมูลที่ไม่ใช่เวลาก็จะมีวิธีการเช่นเดียวกับการการประยุกต์ข้อมูลเวลา เมื่อ $\gamma > 0$

ดังตัวอย่างข้อมูลของบริษัทผลิตเชื้อเพลิงแห่งหนึ่งได้ทำการศึกษาความบริสุทธิ์ของเชื้อเพลิง ซึ่งต้องการทราบว่าโลหะบริสุทธิ์ที่ปนอยู่กับน้ำมันดิบนั้น เมื่อนำน้ำมันดิบมากลั่นเป็นน้ำมันเชื้อเพลิงแล้วสามารถจะแยกโลหะนั้นได้ แต่ต้องทราบขนาดของขี้เถ้าที่เกิดจากการเผาไหม้ไม่สมบูรณ์ของโลหะบริสุทธิ์ที่ปนอยู่กับเชื้อเพลิง ซึ่งมีลักษณะเป็นของแข็งที่มีอนุภาคเล็ก ๆ ซึ่งนำออกมาจากกากของเชื้อเพลิงที่นำมากลั่นเป็นน้ำมัน จึงเก็บตัวอย่างขนาดของขี้เถ้าดังกล่าวมา 211 หน่วย (หน่วย : 20-micron) ข้อมูลดังตารางที่ 5.5 เนื่องจากข้อมูลมีจำนวนมาก เพื่อความสะดวกและประหยัดจึงแสดงข้อมูลและค่าประมาณที่เกี่ยวข้องในการฟิตฟังก์ชันกับข้อมูลไว้ในตารางที่ 5.5 ด้วย เมื่อ i แทนข้อมูลหน่วยที่ i และ x_i แทนข้อมูลขนาดของขี้เถ้าโลหะที่ปนอยู่กับน้ำมันดิบ บริษัทต้องการทราบว่าข้อมูลขนาดของขี้เถ้าโลหะบริสุทธิ์ดังกล่าวมีการแจกแจงแบบใด เมื่อพิจารณาจากข้อมูลพบว่าขนาดขี้เถ้าเกิดจากโลหะบริสุทธิ์ซึ่งเป็นของแข็ง เมื่อได้รับความร้อนจากการเผาไหม้เชื้อเพลิงจึงแตกออกเป็นโลหะขนาดเล็ก ซึ่งเป็นขนาดที่เล็กมาก จึงถือว่าเป็นการศึกษาเกี่ยวกับค่าที่น้อยที่สุดโดยสมมติให้ข้อมูลขนาดโลหะบริสุทธิ์มีการแจกแจงไวบูลล์

5.4.1 การฟิตฟังก์ชันกับข้อมูล

ในการศึกษาครั้งนี้ให้ข้อมูลการแจกแจงไวบูลล์ ซึ่งจะต้องประมาณพารามิเตอร์ α , β และ γ เมื่อทราบพารามิเตอร์ของการแจกแจงแล้วขั้นตอนต่อไปก็คือต้องตรวจสอบว่าข้อมูลขนาดของโลหะบริสุทธิ์นั้นมีการแจกแจงไวบูลล์จริงหรือไม่ โดยการเปรียบเทียบความถี่ของข้อมูลขนาดโลหะบริสุทธิ์ที่สังเกตได้ กับความถี่ทางทฤษฎีว่าสอดคล้องกันหรือไม่ ถ้าความถี่ของข้อมูลที่เก็บรวบรวมได้กับความถี่ทางทฤษฎีสอดคล้องกัน ก็ถือว่าข้อมูลดังกล่าวมีการแจกแจงไวบูลล์จริง จึงจะศึกษาคุณสมบัติอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการแจกแจงต่อไป

ก่อนที่จะประมาณพารามิเตอร์ α และ β จะให้ขนาดของขี้เถ้าของโลหะที่น้อยที่สุดเป็นตัวประมาณพารามิเตอร์ γ นั่นคือให้ตัวประมาณ $\hat{\gamma} = 1.50$ เพื่อหาตัวประมาณ $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ ของพารามิเตอร์ α , β ซึ่งจะได้ค่าต่าง ๆ ที่จะใช้ในการประมาณพารามิเตอร์ ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดดังตารางที่ 5.5

จากสมการเชิงเส้น

$$\ln\left(\ln\frac{1}{R(x_i)}\right) = -\beta\ln\alpha + \beta\ln(x_i - \gamma)$$

$$Y_i = -\beta\ln\alpha + \beta X_i$$

เมื่อ $$Y_i = \ln\left(\ln\frac{1}{R(x_i)}\right)$$

$$X_i = \ln(x_i - \gamma)$$

โดย $\hat{R}(x_i)$ ประมาณได้จาก $\hat{R}(x_i) = \frac{n+1}{n+1-i}$

และ $n = 211\text{-}1 = 210$

ตารางที่ 5.5 แสดงค่า x_i , $x_i - 1.50$, $\frac{1}{\hat{R}(x_i)}$, $\ln\left(\frac{1}{\hat{R}(x_i)}\right)$, X_i และ Y_i

i	x_i (20-micron)	x_i - 1.50	$\frac{1}{\hat{R}(x_i)}$	$\ln\left(\frac{1}{\hat{R}(x_i)}\right)$	X_i	Y_i
1	1.50	-	-	-	-	-
2	1.86	.36	1.005	0.005	-1.022	-5.349
3	2.37	.87	1.010	0.010	-0.139	-4.654
4	2.58	1.08	1.014	0.014	0.077	-4.246
5	2.63	1.13	1.019	0.019	0.122	-3.956
6	2.68	1.18	1.024	0.024	0.166	-3.730
7	2.72	1.22	1.029	0.029	0.199	-3.546
8	2.75	1.25	1.034	0.034	0.223	-3.389
9	2.86	1.36	1.039	0.039	0.307	-3.253
10	2.94	1.44	1.045	0.044	0.365	-3.133
11	3.01	1.51	1.050	0.049	0.412	-3.025
12	3.35	1.85	1.055	0.054	0.615	-2.927
13	3.44	1.94	1.060	0.059	0.663	-2.838
14	3.47	1.97	1.066	0.064	0.678	-2.755
15	3.53	2.03	1.071	0.069	0.708	-2.679
16	3.55	2.05	1.077	0.074	0.718	-2.067
17	3.56	2.06	1.082	0.079	0.723	-2.540
18	3.59	2.09	1.088	0.084	0.737	-2.477
19	3.59	2.09	1.093	0.089	0.737	-2.417
20	4.01	2.51	1.099	0.094	0.920	-2.361
21	4.04	2.54	1.105	0.100	0.932	-2.307

ตารางที่ 5.5 แสดงค่า x_i , $x_i - 1.50$, $\frac{1}{\hat{R}(x_i)}$, $\ln\left(\frac{1}{\hat{R}(x_i)}\right)$, X_i และ Y_i (ต่อ)

i	x_i (20-micron)	x_i - 1.50	$\frac{1}{\hat{R}(x_i)}$	$\ln\left(\frac{1}{\hat{R}(x_i)}\right)$	X_i	Y_i
22	4.05	2.55	1.111	0.105	0.936	-2.255
23	4.09	2.59	1.116	0.110	0.952	-2.206
24	4.13	2.63	1.122	0.115	0.967	-2.159
25	4.17	2.67	1.128	0.121	0.982	-2.114
26	4.17	2.67	1.134	0.126	0.982	-2.071
27	4.21	2.71	1.141	0.132	0.997	-2.029
28	4.23	2.73	1.147	0.137	1.004	-1.988
29	4.25	2.75	1.153	0.142	1.012	-1.949
30	4.32	2.82	1.159	0.148	1.037	-1.912
31	4.34	2.84	1.166	0.153	1.044	-1.875
32	4.37	2.87	1.172	0.159	1.054	-1.839
33	4.42	2.92	1.179	0.164	1.072	-1.805
34	4.47	2.97	1.185	0.170	1.089	-1.772
35	4.52	3.02	1.192	0.176	1.105	-1.739
36	4.55	3.05	1.199	0.181	1.115	-1.707
37	4.56	3.06	1.206	0.187	1.118	-1.676
38	4.57	3.07	1.213	0.193	1.122	-1.646
39	4.59	3.09	1.220	0.199	1.128	-1.617
40	5.00	3.50	1.227	0.204	1.253	-1.588
41	5.04	3.54	1.234	0.210	1.264	-1.560
42	5.05	3.55	1.241	0.216	1.267	-1.532
43	5.05	3.55	1.249	0.222	1.267	-1.505
44	5.07	3.57	1.256	0.228	1.273	-1.479
45	5.12	3.62	1.263	0.234	1.286	-1.453
46	5.16	3.66	1.271	0.240	1.297	-1.428
47	5.18	3.68	1.279	0.246	1.303	-1.403

ตารางที่ 5.5 แสดงค่า x_i , $x_i - 1.50$, $\frac{1}{\hat{R}(x_i)}$, $\ln\left(\frac{1}{\hat{R}(x_i)}\right)$, X_i และ Y_i **(ต่อ)**

i	x_i (20-micron)	x_i - 1.50	$\frac{1}{\hat{R}(x_i)}$	$\ln\left(\frac{1}{\hat{R}(x_i)}\right)$	X_i	Y_i
48	5.22	3.72	1.287	0.252	1.314	-1.378
49	5.25	3.75	1.294	0.258	1.322	-1.354
50	5.26	3.76	1.302	0.264	1.324	-1.331
51	5.31	3.81	1.311	0.270	1.338	-1.308
52	5.37	3.87	1.319	0.277	1.353	-1.285
53	5.41	3.91	1.327	0.283	1.364	-1.262
54	5.43	3.93	1.335	0.289	1.369	-1.240
55	5.47	3.97	1.344	0.296	1.379	-1.219
56	5.49	3.99	1.353	0.302	1.384	-1.197
57	5.52	4.02	1.361	0.0308	1.391	-1.176
58	5.57	4.07	1.370	0.315	1.404	-1.155
59	5.64	4.14	1.379	0.321	1.421	-1.135
60	5.65	4.15	1.388	0.328	1.423	-1.115
61	5.69	4.19	1.397	0.335	1.433	1.095
62	5.70	4.20	1.407	0.341	1.435	-1.075
63	5.71	4.21	1.416	0.348	1.437	-1.056
64	5.75	4.25	1.426	0.355	1.447	-1.037
65	5.77	4.27	1.435	0.361	1.452	-1.018
66	5.82	4.32	1.445	0.368	1.463	-0.999
67	5.86	4.36	1.455	0.375	1.472	-0.980
68	5.88	4.38	1.465	0.382	1.477	-0.962
69	5.91	4.41	1.476	0.389	1.484	-0.944
70	5.95	4.45	1.486	0.396	1.493	-0.926
71	5.98	4.48	1.496	0.403	1.500	-0.909
72	6.01	4.51	1.507	0.410	1.506	-0.891
73	6.07	4.57	1.518	0.417	1.520	0-874

ตารางที่ 5.5 แสดงค่า x_i , $x_i - 1.50$, $\frac{1}{\hat{R}(x_i)}$, $\ln\left(\frac{1}{\hat{R}(x_i)}\right)$, X_i และ Y_i **(ต่อ)**

i	x_i (20-micron)	x_i - 1.50	$\frac{1}{\hat{R}(x_i)}$	$\ln\left(\frac{1}{\hat{R}(x_i)}\right)$	X_i	Y_i
74	6.13	4.63	1.529	0.425	1.533	-0.857
75	6.16	4.66	1.540	0.432	1.539	-0.840
76	6.18	4.68	1.551	0.439	1.543	-0.823
77	6.23	4.73	1.563	0.447	1.554	-0.806
78	6.27	4.77	1.575	0.454	1.562	-0.790
79	6.34	4.84	1.586	0.462	1.577	-0.773
80	6.36	4.86	1.598	0.469	1.581	-0.757
81	6.39	4.89	1.611	0.477	1.587	-0.741
82	6.43	4.93	1.623	0.484	1.595	-0.725
83	6.44	4.94	1.636	0.492	1.597	-0.709
84	6.46	4.96	1.648	0.500	1.601	-0.693
85	6.48	4.98	1.661	0.508	1.605	-0.678
86	6.52	5.02	1.675	0.516	1.613	0.662
87	6.54	5.04	1.688	0.524	1.617	-0.647
88	6.55	5.05	1.702	0.532	1.619	-0.632
89	6.56	5.06	1.715	0.540	1621	-0.617
90	6.58	5.08	1.730	0.548	1.625	-0.602
91	6.58	5.08	1.744	0.556	1.625	-0.587
92	6.60	5.10	1.758	0.564	1.629	-0.572
93	6.63	5.13	1.773	0.573	1.635	-0.557
94	6.64	5.14	1.788	0.581	1.637	-0.543
95	6.67	5.17	1.803	0.590	1.643	-0.528
96	6.69	5.19	1.819	0.598	1.647	-0.514
97	6.72	5.22	1.835	0.607	1.652	-0.499
98	6.73	5.23	1.851	0.616	1.654	-0.485

ตัวอย่างที่ 5.5 แสดงค่า x_i , $x_i - 1.50$, $\frac{1}{\hat{R}(x_i)}$, $\ln\left(\frac{1}{\hat{R}(x_i)}\right)$, X_i และ Y_i **(ต่อ)**

i	x_i (20-micron)	x_i - 1.50	$\frac{1}{\hat{R}(x_i)}$	$\ln\left(\frac{1}{\hat{R}(x_i)}\right)$	X_i	Y_i
99	6.75	5.25	1.867	0.624	1.658	-0.557
100	6.77	5.27	1.884	0.633	1.662	-0.543
101	6.79	5.29	1.901	0.642	1.666	-0.528
102	6.80	5.30	1.918	0.651	1.668	-0.514
103	6.81	5.31	1.936	0.661	1.670	-0.499
104	6.83	5.33	1.954	0.670	1.673	-0.485
105	6.84	5.34	1.972	0.679	1.675	-0.471
106	6.84	5.34	1.991	0.688	1.675	-0.457
107	6.85	5.35	2.010	0.698	1.677	-0.443
108	6.85	5.35	2.029	0.707	1.677	-0.429
109	6.88	5.38	2.049	0.717	1.683	-0.415
110	6.93	5.43	2.069	0.727	1.692	-0.401
111	6.96	5.46	2.089	0.737	1.697	-0.387
112	6.97	5.47	2.110	0.747	1.699	-0.373
113	6.99	5.49	2.131	0.757	1.703	-0.360
114	7.05	5.55	2.153	0.767	1.714	-0.346
115	7.07	5.57	2.175	0.777	1.717	-0.332
116	7.13	5.63	2.198	0.788	1.728	-0.239
117	7.15	5.65	2.221	0.798	1.732	-0.226
118	7.21	5.71	2.245	0.809	1.742	-0.212
119	7.26	5.76	2.269	0.819	1.751	-0.199
120	7.28	5.78	2.293	0.830	1.754	-0.186
121	7.34	5.84	2.319	0.841	1.765	-0.173
122	7.37	5.87	2.344	0.852	1.770	-0.160
123	7.42	5.92	2.371	0.863	1.778	-0.147
124	7.46	5.96	2.398	0.875	1.785	-0.134

ตารางที่ 5.5 แสดงค่า x_i , $x_i - 1.50$, $\frac{1}{\hat{R}(x_i)}$, $\ln\left(\frac{1}{\hat{R}(x_i)}\right)$, X_i และ Y_i **(ต่อ)**

i	x_i (20-micron)	x_i - 1.50	$\frac{1}{\hat{R}(x_i)}$	$\ln\left(\frac{1}{\hat{R}(x_i)}\right)$	X_i	Y_i
125	7.46	5.96	2.425	0.886	1.785	-0.121
126	7.48	5.89	2.453	0.898	1.788	-0.108
127	7.52	6.02	2.482	0.909	1.795	-0.095
128	7.56	6.06	2.512	0.921	1.802	-0.082
129	7.57	6.07	2.542	0.933	1.803	-0.069
130	7.60	6.10	2.573	0.945	1.808	-0.056
131	7.61	6.11	2.605	0.957	1.810	-0.044
132	7.67	6.17	2.638	0.970	1.820	-0.031
133	7.68	6.18	2.671	0.982	1.821	-0.018
134	7.72	6.22	2.705	0.995	1.828	-0.005
135	7.73	6.23	2.740	1.008	1.829	0.008
136	7.78	6.28	2.776	1.021	1.837	0.021
137	7.81	6.31	2.813	1.034	1.842	0.034
138	7.85	6.35	2.851	1.048	1.848	0.047
139	7.89	6.39	2.890	1.061	1.855	0.060
140	7.94	6.44	2.931	1.075	1.863	0.072
141	7.95	6.45	2.972	1.089	1.864	0.085
142	7.98	6.48	3.014	1.103	1.869	0.098
143	8.06	6.56	3.058	1.118	1.881	0.111
144	8.07	6.57	3.103	1.132	1.883	0.124
145	8.12	6.62	3.149	1.147	1.890	0.137
146	8.15	6.65	3.197	1.162	1.895	0.260
147	8.22	6.72	3.246	1.177	1.905	0.163
148	8.36	6.86	3.297	1.193	1.926	0.176
149	8.42	6.92	3.349	1.209	1.934	0.190
150	8.47	6.97	3.403	1.225	1.942	0.203

ตารางที่ 5.5 แสดงค่า x_i , $x_i - 1.50$, $\frac{1}{\hat{R}(x_i)}$, $\ln\left(\frac{1}{\hat{R}(x_i)}\right)$, X_i และ Y_i **(ต่อ)**

i	x_i (20-micron)	x_i - 1.50	$\frac{1}{\hat{R}(x_i)}$	$\ln\left(\frac{1}{\hat{R}(x_i)}\right)$	X_i	Y_i
151	8.52	7.02	3.459	1.241	1.949	0.216
152	8.56	7.06	3.517	1.258	1.954	0.229
153	8.62	7.12	3.576	1.274	1.963	0.242
154	8.67	7.17	3.638	1.291	1.970	0.256
155	8.69	7.19	3.702	1.309	1.973	0.269
156	8.71	7.21	3.768	1.327	1.975	0.283
157	8.76	7.26	3.836	1.345	1.982	0.296
158	8.78	7.28	3.907	1.363	1.985	0.310
159	8.80	7.30	3.981	1.382	1.988	0.323
160	8.86	7.36	4.058	1.401	1.996	0.337
161	8.89	7.39	4.137	1.420	2.000	0.351
162	8.94	7.44	4.220	1.440	2.007	0.365
163	8.97	7.47	4.306	1.460	2.011	0.378
164	9.00	7.50	4.396	1.481	2.015	0.392
165	9.05	7.55	4.489	1.502	2.022	0.407
166	9.10	7.60	4.597	1.523	2.028	0.421
167	9.16	7.66	4.689	1.545	2.036	0.435
168	9.23	7.73	4.795	1.568	2.045	0.450
169	9.29	7.79	4.907	1.591	2.053	0.464
170	9.34	7.84	5.024	1.614	2.059	0.479
171	9.37	7.87	5.146	1.638	2.063	0.494
172	9.41	7.91	5.275	1.663	2.068	0.509
173	9.45	7.95	5.410	1.688	2.073	0.524
174	9.45	7.95	5.553	1.714	2.073	0.539
175	9.48	7.98	5.703	1.741	2.077	0.554
176	9.56	8.06	5.861	1.768	2.087	0.570

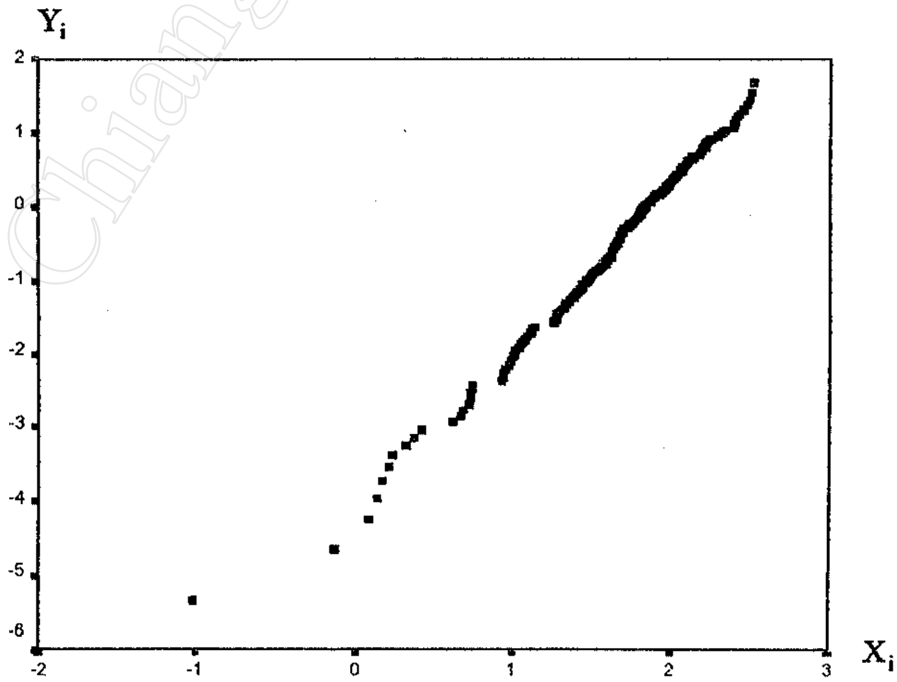
ตารางที่ 5.5 แสดงค่า x_i , $x_i - 1.50$, $\frac{1}{\hat{R}(x_i)}$, $\ln\left(\frac{1}{\hat{R}(x_i)}\right)$, X_i และ Y_i **(ต่อ)**

i	x_i (20-micron)	x_i-1.56	$\frac{1}{\hat{R}(x_i)}$	$\ln\left(\frac{1}{\hat{R}(x_i)}\right)$	X_i	Y_i
177	9.62	8.12	6.029	1.797	2.094	0.586
178	9.67	8.17	6.206	1.825	2.100	0.602
179	9.68	8.18	6.394	1.855	2.102	0.618
180	9.75	8.25	6.594	1.886	2.110	0.635
181	9.87	8.37	6.806	1.918	2.125	0.651
182	9.93	8.43	7.033	1.951	2.132	0.668
183	10.04	8.54	7.276	1.985	2.145	0.685
184	10.29	8.79	7.536	2.020	2.174	0.703
185	10.36	8.86	7.815	2.056	2.182	0.721
186	10.39	8.89	8.115	2.094	2.185	0.739
187	10.44	8.94	8.440	2.133	2.191	0.758
188	10.47	8.97	8.792	2.174	2.194	0.776
189	10.58	9.08	9.174	2.216	2.206	0.796
190	10.64	9.14	9.591	2.261	2.213	0.816
191	10.68	9.18	10.048	2.307	2.217	0.836
192	10.73	9.23	10.550	2.356	2.222	0.857
193	10.81	9.31	11.105	2.407	2.231	0.879
194	10.86	9.36	11.722	2.461	2.236	0.901
195	11.05	9.55	12.412	2.519	2.257	0.924
196	11.37	9.87	13.188	2.579	2.289	0.948
197	11.43	9.93	14.067	2.644	2.296	0.972
198	11.63	10.13	15.071	2.713	2.316	0.998
199	11.76	10.26	16.231	2.787	2.328	1.025
200	11.94	10.44	17.583	2.867	2.346	1.053
201	12.37	10.87	19.182	2.954	2.386	1.083
202	12.40	10.90	21.100	3.049	2.389	1.115

ตารางที่ 5.5 แสดงค่า x_i , $x_i - 1.50$, $\frac{1}{\hat{R}(x_i)}$, $\ln\left(\frac{1}{\hat{R}(x_i)}\right)$, X_i และ Y_i **(ต่อ)**

i	x_i (20-micron)	x_i-1.56	$\frac{1}{\hat{R}(x_i)}$	$\ln\left(\frac{1}{\hat{R}(x_i)}\right)$	X_i	Y_i
203	12.53	11.03	23.444	3.155	2.401	1.149
204	12.61	11.11	26.375	3.272	2.408	1.186
205	12.67	11.17	30.143	3.406	2.413	1.226
206	12.87	11.37	35.167	3.560	2.431	1.270
207	13.18	11.68	42.200	3.742	2.458	1.320
208	13.39	11.89	52.750	3.966	2.476	1.378
209	13.54	12.04	70.333	4.253	2.488	1.448
210	13.67	12.17	105.500	4.659	2.499	1.539
211	13.95	12.42	211.000	5.352	2.519	1.677

นำข้อมูล X_i และ Y_i จากตารางที่ 5.5 มาพล็อตกราฟจะได้กราฟแสดงความสัมพันธ์ของ X_i กับ Y_i มีแนวโน้มเป็นตรง แสดงว่าการฟิตการแจกแจงไวบูลล์ให้แก่ข้อมูลเหมาะสม ดังรูปที่ 5.10



รูปที่ 5.10 กราฟแสดงความสัมพันธ์ของ X_i และ Y_i

จากผลการวิเคราะห์ข้อมูลดังตาราง 5.4.1 ในภาคผนวก ข.

จะได้ $-\hat{\beta}\ln\hat{\alpha} = -4.190$

และ $\hat{\beta} = 2.245$

ดังนั้นจะได้สมการแสดงความสัมพันธ์ X_i กับ Y_i เป็น

$$Y_i = -4.190 + 2.245X_i$$

5.4.2 การทดสอบพารามิเตอร์

เนื่องจากการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับพารามิเตอร์ α และ β เราจะไม่ทดสอบโดยตรง แต่จะทดสอบจากการทดสอบสมมติฐานความสัมพันธ์เชิงเส้นจากสมการ $Y_i = -4.190 + 2.245X_i$ เช่นเดียวกับกรณี $\gamma = 0$ และ $\gamma > 0$ โดยการทดสอบสมมติฐานดังนี้

1. ทดสอบ $\beta = 0$

สมมติฐาน

$$H_0 : \beta \leq 0$$

$$H_0 : \beta > 0$$

ที่ระดับนัยสำคัญ $\alpha = 0.05$ จากผลการวิเคราะห์ข้อมูลดังตาราง 5.4.1 ในภาคผนวก ข. จะได้ $t = 145.317$ ซึ่งให้ค่าความน่าจะเป็นเท่ากับ 0.000 และ $0.000 < 0.05$ จึงปฏิเสธสมมติฐาน H_0 สรุปได้ว่า $\beta > 0$

2. ทดสอบ $(-\beta \ln \alpha) = 0$

สมมติฐาน

$$H_0 = (-\beta \ln \alpha) = 0$$

$$H_1 = (-\beta \ln \alpha) \neq 0$$

ที่ระดับนัยสำคัญ $\alpha = 0.05$ สถิติที่ใช้ทดสอบ t ผลจากการวิเคราะห์ข้อมูลดังตาราง 5.4.1 ในภาคผนวก ข จะได้ $t = -159.138$ ซึ่งให้ค่าความน่าจะเป็นเท่ากับ 0.000 และ $0.000 < 0.05$ จึงปฏิเสธสมมติฐาน H_0 สรุปได้ว่า $(-\beta \ln \alpha) \neq 0$ แสดงว่า $\alpha \neq 1$

ดังนั้นจะได้ตัวประมาณ $\hat{\alpha}$ และ $\hat{\beta}$ ของพารามิเตอร์ α และ β เป็นดังนี้

$$\hat{\beta} = 2.245$$

และ $$-\hat{\beta}\ln\hat{\alpha} = -4.190$$

$$\ln\hat{\alpha} = \frac{4.190}{2.245}$$

$$\hat{\alpha} = e^{1.866}$$

$$\therefore \quad \hat{\alpha} = 6.465$$

ส่วนตัวประมาณ $\hat{\gamma}$ ของพารามิเตอร์ γ จะไม่คำนวณซ้ำอีก เนื่องจากขนาดของขี้เถ้ากากโลหะที่มีขนาดเล็กที่สุดเท่ากับ 1.5 (หน่วย 20-micron) ซึ่งมีค่าน้อย จึงให้ตัวประมาณ $\hat{\gamma}$ มีค่าเท่ากับ 1.50 ดังนั้นจะได้ตัวประมาณของพารามิเตอร์ $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ และ $\hat{\gamma}$ ดังนี้

$$\hat{\alpha} = 6.465$$

$$\hat{\beta} = 2.245$$

และ $\hat{\gamma} = 1.50$

5.4.3 ฟังก์ชันที่ประมาณได้

เมื่อทราบตัวประมาณพารามิเตอร์ทั้ง 3 พารามิเตอร์ แล้วจะได้ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น ฟังก์ชันการแจกแจงสะสม และฟังก์ชันอัตราการรอดชีพ ดังนี้

(ก) ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น

$$f(x) = \frac{\hat{\beta}}{\hat{\alpha}}\left(\frac{x-\hat{\gamma}}{\hat{\alpha}}\right)^{\hat{\beta}-1} \exp\left[-\left(\frac{x-\hat{\gamma}}{\hat{\alpha}}\right)^{\hat{\beta}}\right]$$

$$= \frac{2.245}{6.465}\left(\frac{x-1.50}{6.465}\right)^{2.245-1} \exp\left[-\left(\frac{x-1.50}{6.465}\right)^{2.245}\right]$$

$$\therefore \; f(x) = 3.546(x-1.50)^{1.245} \exp\left[-(0.015)(x-1.50)^{2.245}\right] \; ; \; x > 0$$

ข. ฟังก์ชันการแจกแจงสะสม

$$F(x) = 1-\exp\left[-\left(\frac{x-\hat{\gamma}}{\hat{\alpha}}\right)^{\hat{\beta}}\right]$$

$$F(x) = 1-\exp\left[-(0.015)(x-1.50)^{2.245}\right] \; ; \; x > 0$$

ค. ฟังก์ชันอัตราการรอดชีพ

$$\bar{F}(x) = \exp\left[-\left(\frac{x-\hat{\gamma}}{\hat{\alpha}}\right)^{\hat{\beta}}\right]$$

$$\therefore \; \bar{F}(x) = \exp\left[-(0.015)(x-1.50)^{2.245}\right] \; ; \; x > 0$$

5.4.4 การทดสอบความเหมาะสมของฟังก์ชันที่ฟิตให้ข้อมูล

โดยทั่วไปแล้ว การแจกแจงไวบูลล์จะใช้ในการศึกษาตัวแปรสุ่มเวลาเป็นส่วนใหญ่ ดังนั้นในกรณีที่จะนำไปประยุกต์กับข้อมูลอื่นที่ไม่ใช่เวลา หลังจากประมาณค่าพารามิเตอร์และทราบค่าของตัวประมาณ จะต้องตรวจสอบก่อนว่าการฟิตการแจกแจงไวบูลล์ให้กับข้อมูลดังกล่าวเหมาะสมหรือไม่ โดยการทดสอบความเหมาะสมของฟังก์ชันที่ฟิตให้ข้อมูล มีวิธีการทดสอบดังนี้

(1) วิธีการหาความน่าจะเป็น

ถ้าต้องการทราบว่าข้อมูลขนาดของขี้เถ้ากากโลหะ ซึ่งเป็นความถี่จากการสังเกตกับความถี่ทางทฤษฎีสอดคล้องกันหรือไม่ ก็สามารถหาได้สร้างตารางแจกแจงความถี่ของขนาดขี้เถ้า จากตารางที่ 5.5 เพื่อหาความถี่จากค่าสังเกต และการหาความน่าจะเป็นที่ขี้เถ้าจะมีขนาดตามที่กำหนดหาได้จากฟังก์ชันการรอดชีพ เช่นความน่าจะเป็นที่ขี้เถ้าโลหะจะมีขนาดระหว่าง 1.5 ถึง 2.5 (20-micron) หาได้ดังนี้

$$\text{จาก}\quad P(a \le x \le b) = \exp\left[-\left(\frac{a-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right] - \exp\left[-\left(\frac{b-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right]$$

$$= \exp\left[-(0.015)(a-1.50)^{2.245}\right] - \exp\left[-(0.015)(b-1.50)^{2.245}\right]$$

$$\therefore\quad P(1.5 \le x \le 2.5) = \exp\left[-0.015(1.50-1.50)^{2.245}\right] - \exp\left[-0.015(2.5-1.50)^{2.245}\right]$$

$$= 1 - 0.9850$$

$$= 0.0150$$

แสดงว่าความน่าจะเป็นที่ขี้เถ้าโลหะจะมีขนาด 1.5 ถึง 2.5 (หน่วย : 20-micron) เท่ากับ 0.0150

สำหรับการหาความน่าจะเป็นที่ขี้เถ้าโลหะจะมีขนาดอื่น ๆ ตามที่กำหนด แสดงได้ดังตารางแจกแจงความถี่ ตาราง 5.6 ดังนี้

ตารางที่ 5.6 แสดงความถี่จากค่าสังเกตและความน่าจะเป็นที่ขี้เถ้าจะมีขนาดตามที่กำหนดในช่วง a ถึง b หรือ $P(a \leq x \leq b)$

ขนาดขี้เถ้าโลหะ (x_i)	ความถี่จากค่าสังเกต (O_i)	$\overline{F}(a)$	$\overline{F}(b)$	$P(a \leq x \leq b)$
1.50 - 2.50	3	1.0000	0.9850	0.0150
2.50 - 3.50	11	0.9850	0.9307	0.0543
3.50 - 4.50	20	0.9307	0.8366	0.0941
4.50 - 5.50	22	0.8366	0.7115	0.1251
5.50 - 6.50	29	0.7115	0.5703	0.1412
6.50 - 7.50	41	0.5703	0.4293	0.1410
7.50 - 8.50	24	0.4293	0.3026	0.1269
8.50 -9.50	25	0.3026	0.1992	0.1034
9.50 - 10.50	13	0.1992	0.1223	0.0796
10.50 -11.50	9	0.1223	0.0698	0.0525
11.50 - 12.50	5	0.0698	0.0370	0.0328
12.50 - 13.50	6	0.0370	0.0182	0.0188
> 13.50	3	0.0182	0.0000	0.0182
รวม	211			

(2) การหาความถี่คาดหวัง

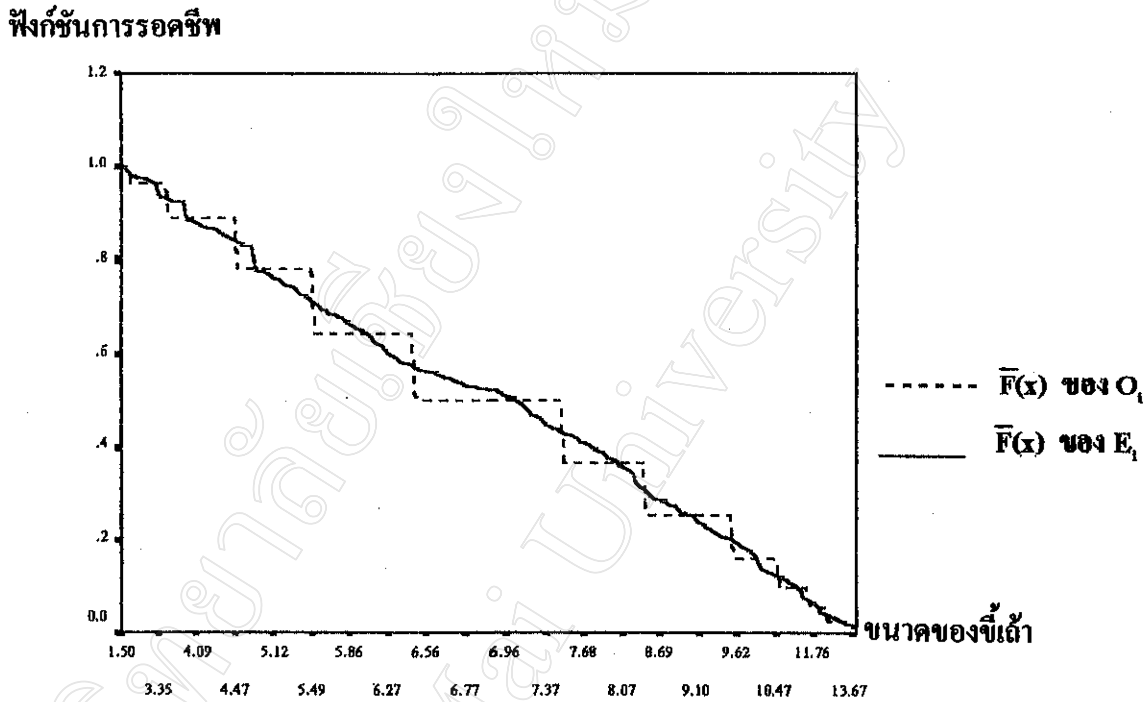
เมื่อทราบความน่าจะเป็นที่ขี้เถ้าจะมีขนาดตามช่วงที่กำหนด จะนำความน่าจะเป็นดังกล่าวไปคำนวณหาความถี่ในทางทฤษฎี โดยการนำความน่าจะเป็นคูณกับผลรวมความถี่จากค่าสังเกตทั้งหมด หรือความถี่ในทางทฤษฎีหาได้จาก $E_i = NP(a \leq x \leq b)$ เช่นความถี่ในทางทฤษฎีที่ขี้เถ้ามีขนาดในช่วง 1.5 ถึง 2.5 (หน่วย : 20-micron) เท่ากับ 211(0.0150) = 3.165 ส่วนความถี่ในทางทฤษฎีในช่วงอื่น ๆ จะหาได้ดังตาราง 5.7 ต่อไปนี้

ตารางที่ 5.7 แสดงความถี่จากค่าสังเกต และความถี่ในทางทฤษฎีของขนาดขี้เถ้าโลหะ

ขนาดขี้เถ้าโลหะ (x_i)	ความถี่จากค่าสังเกต (O_i)	ความถี่ในทางทฤษฎี ($\hat{\alpha} = 6.465, \hat{\beta} = 2.245, \hat{\gamma} = 1.50$) E_i
1.50 - 2.50	3	3.1650
2.50 - 3.50	11	11.4573
3.50 - 4.50	20	19.8551
4.50 - 5.50	22	26.3961
5.50 - 6.50	29	29.7932
6.50 - 7.50	41	29.7510
7.50 - 8.50	24	26.7337
8.50 -9.50	25	21.8174
9.50 - 10.50	13	16.2259
10.50 -11.50	9	11.0775
11.50 - 12.50	5	6.9208
12.50 - 13.50	6	3.9668
> 13.50	3	3.8402
รวม	211	211

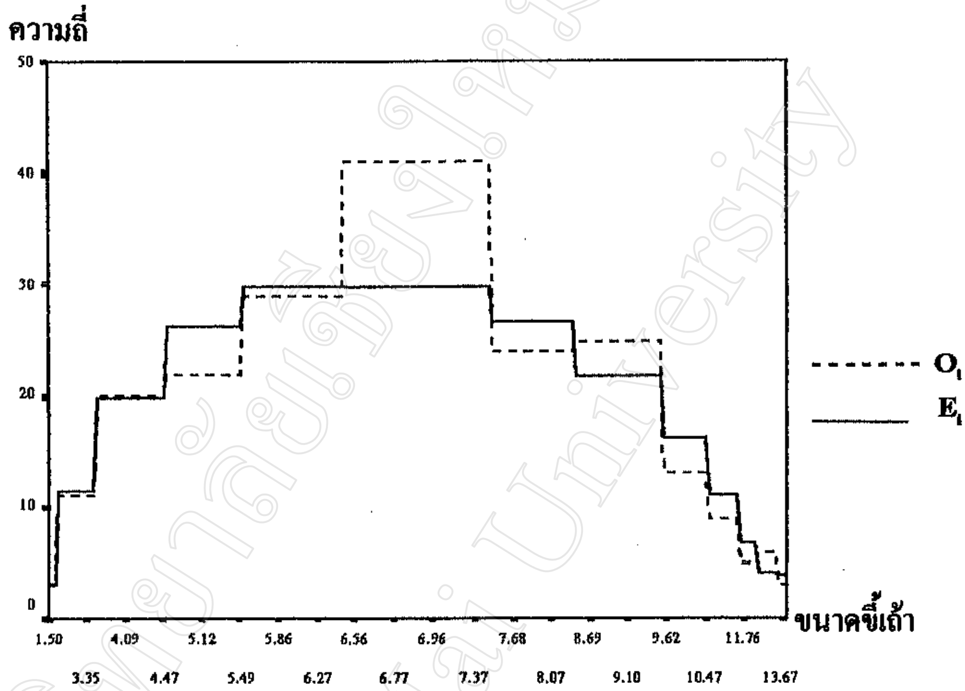
(3) การตรวจสอบโดยใช้กราฟ

เพื่อตรวจสอบว่าข้อมูลเหมาะสมกับการแจกแจงไวบูลล์หรือไม่ โดยดูจากความสอดคล้องของความถี่จากค่าสังเกตกับความถี่ในทางทฤษฎี ถ้าความถี่จากค่าสังเกตกับความถี่ในทางทฤษฎีไม่แตกต่างกันหรือแตกต่างกันเพียงเล็กน้อย ก็แสดงว่าความถี่จากค่าสังเกตสอดคล้องกับความถี่ในทางทฤษฎี แสดงได้ดังรูป 5.11 และรูปที่ 5.12 ซึ่งเป็นกราฟแสดงการเปรียบเทียบความถี่จากค่าสังเกตกับความถี่ในทางทฤษีเมื่อ $\hat{\alpha} = 6.465, \hat{\beta} = 2.245$ และ $\hat{\gamma} = 1.50$



รูปที่ 5.11 แสดงการเปรียบเทียบฟังก์ชันการรอดชีพของความถี่จากค่าสังเกต และความถี่ในทางทฤษฎี เมื่อ $\hat{\alpha} = 6.465, \hat{\beta} = 2.245$ และ $\hat{\gamma} = 1.50$

จากรูปที่ 5.11 จะพบว่ากราฟแสดงสัดส่วนการรอดชีพของความถี่จากค่าสังเกตและความถี่ในทางทฤษฎีมีแนวโน้มไปในทางเดียวกัน และแตกต่างกันเพียงเล็กน้อย แสดงว่าความถี่จากค่าสังเกตสอดคล้องกับความถี่ในทางทฤษฎี ดังนั้น แสดงว่าการฟิตการแจกแจงไวบูลล์ให้แก่ข้อมูลค่อนข้างเหมาะสม



รูปที่ 5.12 แสดงการเปรียบเทียบ ความถี่จากค่าสังเกต และความถี่คาดหวังในทางทฤษฎี เมื่อขี้เถ้ามีขนาด x_i (20-micron)

ในทำนองเดียวกัน เมื่อพิจารณาจากกราฟแสดงการเปรียบเทียบความถี่จากค่าสังเกต และความถี่คาดหวัง เมื่อขี้เถ้าโลหะมีขนาดต่าง ๆ จะพบว่ากราฟมีแนวโน้มไปในทางเดียวกัน และแตกต่างกันเพียงเล็กน้อยบางช่วงเท่านั้น แสดงว่าการฟิตการแจกแจงไวบูลล์ให้ข้อมูลค่อนข้างเหมาะสมเช่นเดียวกับกราฟแสดงฟังก์ชันการรอดชีพในรูปที่ 5.11

(4) การทดสอบภาวะรูปดีโดยใช้การทดสอบแบบไคสแควร์

นอกจากจะทดสอบการฟิตการแจกแจงไวบูลล์ให้กับข้อมูลจากการอธิบายด้วยกราฟแล้ว ยังสามารถทดสอบการแจกแจงด้วยไคสแควร์ประยุกต์ เช่นเดียวกับการทดสอบการแจกแจงปกติ การแจกแจงปัวซอง และการแจกแจงอื่น ๆ ซึ่งแสดงการทดสอบได้ดังนี้

ก. สมมติฐาน :

H_0 : การฟิตการแจกแจงไวบูลล์ให้กับข้อมูลเหมาะสม

H_1 : การฟิตการแจกแจงไวบูลล์ให้กับข้อมูลไม่เหมาะสม

ข. คำนวณค่าสถิติ $\chi^2_{cal} \;=\; \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$

จากตารางที่ 5.6 และตารางที่ 5.7 ได้แสดงการหาความน่าจะเป็นและความถี่ในทางทฤษฎี เมื่อ $\hat{\alpha} = 6.465, \hat{\beta} = 2.245$ และ $\hat{\gamma} = 1.50$ ไว้แล้ว ดังนั้นสามารถหา χ^2_{cal} ได้ดังนี้

x_i	O_i	$P(a \le x \le b)$	$E_i = NP(a \le x \le b)$	$\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$
1.50 - 2.50	3 14	0.0150	3.1650 14.6223	0.0265
2.50 - 3.50	11	0.0543	11.4573	
3.50 - 4.50	20	0.0941	19.8551	0.0011
4.50 - 5.50	22	0.1251	26.3961	0.7321
5.50 - 6.50	29	0.1412	29.7932	0.0211
6.50 - 7.50	41	0.1410	29.7510	4.2533
7.50 - 8.50	24	0.1269	26.7339	0.2796
8.50 -9.50	25	0.1034	21.8174	0.4643
9.50 - 10.50	13	0.0796	16.2259	0.6413
10.50 -11.50	9	0.0525	11.0775	0.3896
11.50 - 12.50	5	0.0328	6.9208	0.5331
12.50 - 13.50	6 9	0.0188	3.9668 7.8070	0.1826
> 13.50	3	0.0182	3.8402	
รวม	211	1.0000	211	7.5243

ดังนั้น $\chi^2_{cal} = 7.5243$

ค. การหาดีกรีความเป็นอิสระ เพื่อหาอาณาเขตวิกฤต เมื่อระดับนัยสำคัญ $\alpha = 0.05$ จากตารางคำนวณ χ^2_{cal} ข้างต้นจะเห็นว่าความถี่คาดหวังของข้อมูลกลุ่มแรกน้อยกว่า 5 จึงรวมกับกลุ่มที่สองเป็น 14.6223 และความถี่คาดหวังของข้อมูลสองกลุ่มสุดท้ายน้อยกว่า 5 ดังนั้นจึงต้องนำความถี่คาดหวังของสองกลุ่มสุดท้ายรวมกันเป็น 7.8070 ทำให้กลุ่มของข้อมูลเหลือเพียง 11 กลุ่ม นั่นคือ $k = 11$ และในกรณีนี้ต้องประมาณพารามิเตอร์ α , β และ γ จากค่าสังเกตทำให้เสียดีกรีความเป็นอิสระไป 3

$$\text{ดังนั้น} \quad d.f. = 11 - 3 - 1$$
$$= 7$$

จากตารางไคสแควร์ดังตารางที่ 3 ในภาคผนวก ก ที่ระดับนัยสำคัญ $\alpha = 0.05$ และ $d.f. = 7$ จะได้

$$\chi^2_{0.95,7} = 14.1$$

ง. เนื่องจาก $\chi^2_{cal} = 7.5243 < \chi^2_{0.95,7} = 14.1$ จึงยอมรับสมมติฐาน H_0 แสดงว่าการฟิตการแจกแจงไวบูลล์ให้แก่ข้อมูลนั้นค่อนข้างเหมาะสมที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

5.4.5 การประมาณค่าวัดต่าง ๆ ของการแจกแจงที่ประมาณ

เมื่อทราบว่าข้อมูลขนาดของขี้เถ้าโลหะสอดคล้องกับการแจกแจงไวบูลล์ด้วยตัวประมาณพารามิเตอร์ $\hat{\gamma} = 1.50, \hat{\alpha} = 6.465$ และ $\hat{\beta} = 2.245$ สามารถประมาณค่าวัดต่าง ๆ สำหรับข้อมูลขนาดของขี้เถ้าโลหะดังนี้

(1) ค่าเฉลี่ยของขนาดขี้เถ้าโลหะ

$$\text{จาก} \quad \hat{\mu} = \hat{\alpha}\Gamma\left(1+\frac{1}{\hat{\beta}}\right)+\hat{\gamma}$$

$$= 6.465\Gamma\left(1+\frac{1}{2.245}\right)+1.50$$

$$= 6.465\Gamma(1.45)+1.50$$

จากตารางฟังก์ชันแกมมา ตาราง 1 ในภาคผนวก ก. จะได้ $\Gamma(1.45) = 0.88565$

ดังนั้น $\hat{\mu} = 6.465(0.88565) + 1.50$

$= 7.226$

นั่นคือขนาดขี้เถ้าโลหะที่ปนอยู่กับน้ำมันดิบโดยเฉลี่ยประมาณ 7.226 (หน่วย : 20-micron)

(2) มัธยฐานของขนาดขี้เถ้าโลหะ

$$\text{จาก} \quad \mathbf{Med(x)} = \hat{\alpha}(\ln 2)^{\frac{1}{\hat{\beta}}} + \hat{\gamma}$$

$$= (6.465)(\ln 2)^{\frac{1}{2.245}} + 1.50$$

$$= 6.991$$

ดังนั้นมัธยฐานของขนาดขี้เถ้าโลหะที่ปนกับน้ำมันดิบเท่ากับ 6.991 (หน่วย : 20-micron)

(3) ฐานนิยมของขนาดขี้เถ้าโลหะ

$$\text{จาก} \quad \mathbf{Mode(x)} = \hat{\alpha}\left[\frac{\hat{\beta}-1}{\hat{\beta}}\right]^{\frac{1}{\hat{\beta}}} + \hat{\gamma}$$

$$= (6.465)\left[\frac{2.245-1}{2.245}\right]^{\frac{1}{2.245}} + 1.50$$

$$= 6.472$$

ดังนั้นจะได้ฐานนิยมของขนาดขี้เถ้าโลหะที่ปนอยู่กับน้ำมันดิบเท่ากับ 6.472 (20-micron)

(4) ความแปรปรวนของขนาดขี้เถ้าโลหะ

$$\text{จาก } \hat{\sigma}^2 = \hat{\alpha}^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\hat{\beta}}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\hat{\beta}}\right)\right]$$

$$= (6.465)^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{2.245}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{2}{2.245}\right)\right]$$

$$= (6.465)^2\left[\Gamma(1+0.89)-\Gamma^2(1+0.45)\right]$$

$$= (6.465)^2\left[\Gamma(1.89)-\Gamma^2(1.45)\right]$$

จากตารางฟังก์ชันแกมมา ตาราง 1 ในภาคผนวก ก. จะได้ $\Gamma(1.45) = 0.88565$ และ $\Gamma(1.89) = 0.99171$

$$\therefore \hat{\sigma}^2 = (6.465)^2\left[(0.99171)-(0.88565)^2\right]$$

$$= (41.796)\left[(0.99171)-(0.78437)\right]$$

$$= 41.796(0.20734)$$

$$= 8.666$$

$$\text{ดังนั้น } \hat{\sigma} = 2.9438$$

นั่นคือ ความแปรปรวนของขนาดขี้เถ้าโลหะเท่ากับ 8.66 (หน่วย : 20-micron)^2 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 2.9438 (หน่วย : 20-micron) แสดงว่าขี้เถ้าโลหะที่ปนกับน้ำมันดิบมีขนาดไม่แตกต่างกัน หรือมีขนาดใกล้เคียงกัน

จะเห็นว่าทั้งค่าเฉลี่ย มัธยฐาน และฐานนิยมมีค่าไม่แตกต่างกันมากนัก ซึ่งขี้เถ้าโลหะที่ปนอยู่กับน้ำมันดิบมีขนาดโดยเฉลี่ย 7.226 (หน่วย : 20-micron) และมีความแปรปรวนเท่ากับ 8.666 (หน่วย : 20-micron)^2 แสดงว่าขี้เถ้าส่วนใหญ่มีขนาดใกล้เคียงกัน