บทที่ 6
สรุปผลและข้อเสนอแนะ

6.1 สรุปผล

ในการค้นคว้าอิสระครั้งนี้เป็นการศึกษาการแจกแจงไวบูลล์ ทั้งสถิติเชิงพรรณนาและเชิงอนุมาน จากการศึกษาพบว่ารูปแบบฟังก์ชันการแจกแจงไวบูลล์มีที่มา 2 แบบด้วยกันคือ แบบที่หนึ่ง เป็นรูปแบบของการแจกแจงแอสซิมโทติกของสถิติลำดับที่น้อยที่สุด ซึ่งเป็นการแจกแจงที่ใช้ศึกษาเกี่ยวกับการแตก หักหรือการสึกกร่อนของวัตถุ อุปกรณ์ จะเรียกทฤษฎีนี้ว่าทฤษฎีค่าที่สุด แบบที่สอง เป็นรูปแบบที่ได้จากแนวความคิดเกี่ยวกับอัตราการขัดข้อง ซึ่งเป็นการศึกษาเกี่ยวกับการทดสอบอายุการใช้งาน ความทนทานของอุปกรณ์ เครื่องมือ เครื่องใช้ต่าง ๆ ซึ่งเรียกว่าการทดสอบความเชื่อถือได้ โดยทั่วไปแล้วในการทดสอบดังกล่าวจะใช้การแจกแจงเอ็กซ์โปเนนเชียลในการอธิบาย แต่จะมีข้อสมมติว่าในการใช้งานของอุปกรณ์นั้นจะแสดงอัตราการขัดข้องคงที่ในการใช้งาน แต่ในความเป็นจริงแล้วขณะที่ใช้งาน อุปกรณ์อาจเกิดอัตราการขัดข้องเพิ่มขึ้น ลดลง หรือคงที่ก็ได้ ในกรณีที่อัตราการขัดข้องไม่คงที่ จะใช้การแจกแจงเอ็กซ์โปเนนเชียลในการอธิบายจึงไม่เหมาะสม ดังนั้นการแจกแจงไวบูลล์จึงเป็นฟังก์ชันที่เหมาะสมในการอธิบายการแจกแจงเวลาที่อุปกรณ์เกิดการขัดข้องขณะใช้งาน เมื่ออุปกรณ์แสดงอัตราการขัดข้องเพิ่มขึ้น ลดลง หรือคงที่ ซึ่งจะเห็นว่าการแจกแจงไวบูลล์รูปแบบที่ได้จากแนวความคิดเกี่ยวกับอัตราการขัดข้องจะได้ฟังก์ชันการแจกแจง $F(x)$ มีรูปแบบเดียวกันกับฟังก์ชันการแจกแจง $F_{(1)}(x)$ ของการแจกแจงแอสซิมโทติกของสถิติลำดับที่น้อยที่สุดรูปแบบที่ III

สำหรับฟังก์ชันความหนาแน่นที่เกี่ยวข้องกับการแจกแจงไวบูลล์ ได้แก่ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น ฟังก์ชันอัตราการขัดข้อง ฟังก์ชันความเชื่อถือได้ และฟังก์ชันการรอดชีพ ในการประมาณฟังก์ชันความหนาแน่นที่เกี่ยวข้องทั้ง 4 ฟังก์ชันจะต้องทราบพารามิเตอร์ของการแจกแจงไวบูลล์ก่อน ซึ่งการแจกแจงไวบูลล์มีพารามิเตอร์ 3 พารามิเตอร์ก็คือ พารามิเตอร์ α, β และ γ โดยที่ α เป็นพารามิเตอร์แสดงสเกลหรือขนาดของฟังก์ชัน , β เป็นพารามิเตอร์แสดงรูปร่างของฟังก์ชัน และ γ จะเป็นพารามิเตอร์แสดงตำแหน่งหรือเป็นค่าที่เป็นไปได้น้อยที่สุดของตัวแปรสุ่มของการแจกแจง และยังพบว่า

1. พารามิเตอร์ β มากกว่าหนึ่ง ($\beta>1$) จะทำให้อัตราการขัดข้องเพิ่มขึ้นจะได้ฟังก์ชันอัตราการขัดข้องเป็นฟังก์ชันเพิ่ม

2 พารามิเตอร์ β น้อยกว่าหนึ่ง($\beta<1$) จะทำให้อัตราการขัดข้องลดลงจะได้ฟังก์ชันอัตราการขัดข้องเป็นฟังก์ชันลด

3. พารามิเตอร์ β เท่ากับหนึ่ง($\beta=1$) จะทำให้อัตราการขัดข้องคงที่ จะได้ฟังก์ชันอัตราการขัดข้องและฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงไวบูลล์เป็นฟังก์ชันเดียวกันกับฟังก์ชันอัตราการขัดข้องและฟังก์ชันความหน่าแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงเอ็กซ์โปเนนเชียล

ดังนั้นการแจกแจงเอ็กซ์โปเนนเชียลจึงเป็นกรณีเฉพาะของการแจกแจงไวบูลล์เมื่อ β เท่ากับหนึ่ง และ γ เท่ากับศูนย์

ในการประมาณพารามิเตอร์ของการแจกแจงนั้นจะใช้การประมาณพารามิเตอร์ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด หรือวิธีการของการวิเคราะห์ถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย พร้อมทั้งการอธิบายด้วยกราฟประกอบ วิธีการทางกราฟนี้จะเป็นการตรวจสอบการฟิตฟังก์ชันกับข้อมูล ถ้ากราฟที่ได้มีแนวโน้มเป็นเส้นตรงแสดงว่าข้อมูลเหมาะสมที่จะวิเคราะห์ด้วยการแจกแจงไวบูลล์และสามารถประมาณพารามิเตอร์ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด การประมาณพารามิเตอร์การแจกแจงไวบูลล์นี้จะประมาณทั้งการประมาณพารามิเตอร์แบบจุดและประมาณช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ α และ β ส่วนพารามิเตอร์ γ นั้นจะใช้ค่าที่เป็นไปได้ที่น้อยที่สุดของตัวแปรสุ่มที่ศึกษาเป็นตัวประมาณของพารามิเตอร์ γ

สำหรับการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับพารามิเตอร์นั้นพารามิเตอร์ที่ทดสอบก็คือ α และ β โดยจะใช้หลักการเช่นเดียวกับการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับพารามิเตอร์ของสมการถดถอยอย่างง่าย

ในการวิเคราะห์สถิติเชิงพรรณนาสำหรับการแจกแจงไวบูลล์ พบว่าสามารถประมาณค่าเฉลี่ย มัธยฐาน ฐานนิยม และความแปรปรวน เพื่ออธิบายถึงอายุการใช้งานโดยเฉลี่ย มัธยฐานอายุการใช้งาน ฐานนิยมของอายุการใช้งานและความแปรปรวนของเวลาที่อุปกรณ์เกิดการขัดข้อง ซึ่งจะประมาณค่าเหล่านี้ได้เมื่อทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงเช่นเดียวกับการประมาณฟังก์ชันความหนาแน่น

ในการประยุกต์ข้อมูลกับการแจกแจงไวบูลล์ พบว่าการแจกแจงไวบูลล์จะให้ความน่าจะเป็นที่เหมาะสม ในการใช้อธิบายสำหรับการทดสอบอายุการใช้งาน การทดสอบความทนทานของอุปกรณ์ และการวิเคราะห์เกี่ยวกับขนาด และความแข็งแรงของวัตถุ จากการประยุกต์ข้อมูลตัวอย่างทั้งสามลักษณะจะเห็นว่า

การประยุกต์ข้อมูลกับการแจกแจงไวบูลล์ในกรณีที่หนึ่ง เมื่อพารามิเตอร์ γ เท่ากับศูนย์ ซึ่งเป็นการทดสอบอายุการใช้งานของอุปกรณ์ที่ผลิตใหม่ยังไม่ได้ทดสอบการใช้งานขั้นต้นมาก่อน จึงมีเวลาเริ่มต้นในการใช้งานหรือเวลาที่เป็นไปได้น้อยที่สุดที่อุปกรณ์จะขัดข้องขณะเริ่มต้นใช้งานเท่ากับศูนย์ เมื่อพิจารณาจากฟังก์ชันอัตราการขัดข้องของอุปกรณ์จะพบว่าเมื่อเริ่มต้นใช้งานความน่าจะเป็นที่อุปกรณ์เกิดการขัดข้องจะมีค่ามาก แต่หลังจากที่ใช้งานไปแล้วความน่าจะเป็นที่อุปกรณ์เกิดการขัดข้องจะลดลงเรื่อย ๆ จนค่อนข้างจะคงที่เมื่อใช้ไปเป็นเวลานานนั่นคือฟังก์ชันอัตราการขัดข้องของอุปกรณ์เป็นฟังก์ชันลด ซึ่งจะสอดคล้องกับค่าประมาณ β ซึ่งมีค่าน้อยกว่าหนึ่ง จึงทำให้เป็นฟังก์ชันลด เมื่อพิจารณาจากฟังก์ชันความเชื่อถือได้จะพบว่าเมื่อเริ่มใช้งานอุปกรณ์จะมีความเชื่อถือได้สูง นั่นคือความน่าจะเป็นที่อุปกรณ์จะใช้งานได้เป็นปกติเมื่อเริ่มใช้งานจะมาก แต่หลังจากใช้งานไปนาน ๆ ความเชื่อถือได้ของอุปกรณ์ก็จะลดลง และจากการประมาณค่าวัดต่าง ๆ ของการแจกแจงที่ประมาณจะได้อายุการใช้งานโดยเฉลี่ยจะสูง เนื่องจากเวลาที่อุปกรณ์ขัดข้องขณะใช้งานนั้นไม่แน่นอน เพราะไม่ทราบว่าอุปกรณ์จะขัดข้อง หรือชำรุดเมื่อใดยิ่งถ้าเป็นอุปกรณ์ที่มีคุณภาพ มีการควบคุมการผลิตที่ดี จะทำให้เวลาที่อุปกรณ์จะเกิดการขัดข้องแตกต่างกันมาก นาน ๆ ครั้งอุปกรณ์จะเกิดขัดข้องขณะใช้งาน จึงทำให้อายุการใช้งานโดยเฉลี่ยสูงส่วนค่ามัธยฐานจะมีค่าน้อยกว่าค่าเฉลี่ย ดังนั้นถ้าหากเวลาที่อุปกรณ์เกิดการขัดข้องขณะใช้งานแตกต่างกันมาก ๆ จึงควรใช้มัธยฐานอายุการใช้งานประมาณอายุการใช้งานของอุปกรณ์ ผลจากอายุการใช้งานที่แตกต่างกันมากจึงทำให้ความแปรปรวนและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของเวลาที่อุปกรณ์เกิดการขัดข้องขณะใช้งานสูงตามไปด้วย ซึ่งถ้าเป็นเช่นนี้ก็จะส่งผลดีต่อบริษัทก็คืออุปกรณ์ที่ผลิตได้คุณภาพและมาตรฐานตามกำหนด

สำหรับตัวอย่างการประยุกต์ข้อมูลในกรณีที่สอง เมื่อพารามิเตอร์ γ มากกว่าศูนย์ คือการทดสอบความทนทานของอุปกรณ์ หรือการทดสอบอายุการใช้งานของอุปกรณ์เมื่ออุปกรณ์ที่ผลิตผ่านการทดสอบการใช้งานขั้นต้นมาก่อนว่าสามารถใช้งานได้จึงมีเวลาเริ่มต้นใช้งานหรือเวลาที่เป็นไปได้น้อยที่สุดที่อุปกรณ์จะเกิดการขัดข้องมากกว่าศูนย์ ในการประมาณเพารามิเตอร์จึงประมาณเพารามิเตอร์ 3 พารามิเตอร์ โดยให้ตัวประมาณ $\hat{\gamma} = x_{(1)}$ เป็นตัวประมาณพารามิเตอร์

เริ่มต้นของ γ เมื่อทราบตัวประมาณพารามิเตอร์ α และ β ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด เนื่องจากเวลาที่เป็นไปได้น้อยที่สุดที่มอเตอร์เกิดการขัดข้องขณะทดสอบมีค่าห่างจากศูนย์มากจึงทำการประมาณพารามิเตอร์ γ ซ้ำอีกครั้งด้วยตัวประมาณ γ^*

จากตัวอย่างการประยุกต์ข้อมูลการทดสอบอายุการใช้งานของมอเตอร์ พบว่าฟังก์ชันอัตราการขัดข้องของมอเตอร์เป็นฟังก์ชันเพิ่ม เนื่องจากพารามิเตอร์ β มีค่ามากกว่าหนึ่ง นั่นก็คือเมื่อเริ่มต้นใช้งานอัตราการขัดข้องของมอเตอร์จะต่ำหรือความน่าจะเป็นที่มอเตอร์จะเกิดการขัดข้องเมื่อเริ่มใช้งานจะน้อยเนื่องจากมอเตอร์ที่นำมาทดสอบได้ผ่านการทดสอบการใช้งานขั้นต้นมาก่อนการทดสอบ แต่เมื่อใช้งานไปนาน ๆ ความน่าจะเป็นที่มอเตอร์จะเกิดการขัดข้องขณะใช้งานเพิ่มมากขึ้นเรื่อย ๆ ขณะเดียวกันเมื่อพิจารณาจากฟังก์ชันความเชื่อถือได้จะพบว่าเมื่อเริ่มใช้งานอุปกรณ์จะมีความเชื่อถือได้สูง นั่นคือความน่าจะเป็นที่อุปกรณ์จะใช้งานได้เป็นปกติเมื่อเริ่มใช้งานจะมาก แต่หลังจากใช้งานไปนาน ๆ ความเชื่อถือได้ของอุปกรณ์ก็จะลดลง เพราะเมื่อมอเตอร์ถูกใช้งานไปนาน ๆ อัตราการขัดข้องจะเพิ่มขึ้นจึงทำให้ความเชื่อถือได้ของอายุการใช้งานมอเตอร์ลดลง และจากการประมาณค่าวัดต่าง ๆ ของการแจกแจงที่ประมาณจะได้ทั้งค่าเฉลี่ย มัธยฐาน และฐานนิยมมีค่าแตกต่างกันมาก แต่เป็นที่น่าสังเกตว่าอายุการใช้งานโดยเฉลี่ยของมอเตอร์น้อย สาเหตุนี้อาจจะเป็นผลเนื่องมาจากเวลาที่กำหนดในการทดสอบน้อย ถ้าเป็นอุปกรณ์ขนาดใหญ่ควรจะใช้เวลาทดสอบเป็นเวลานาน หรืออาจจะเป็นไปได้ว่าในการสุ่มอุปกรณ์มาทดสอบได้มอเตอร์ที่คุณภาพต่ำมาทดสอบ ผลจากอายุการใช้งานที่แตกต่างกันมากจึงทำให้ความแปรปรวนและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของเวลาที่อุปกรณ์เกิดการขัดข้องขณะใช้งานสูงตามไปด้วย เมื่ออายุการใช้งานโดยเฉลี่ยต่ำ แต่ความแปรปรวนมีค่ามาก แสดงมอเตอร์ที่บริษัทนี้ผลิตมีคุณภาพต่ำ ดังนั้นบริษัทผู้ผลิตควรปรับปรุงคุณภาพสินค้าและวิธีการผลิตให้มอเตอร์ได้มาตรฐานมากยิ่งขึ้น

ส่วนในกรณีที่สามเป็นการประยุกต์การแจกแจงไวบูลล์กับข้อมูลที่ไม่ใช่เวลา โดยศึกษาเกี่ยวกับขนาดขี้เถ้าโลหะที่ปนกับน้ำมันดิบซึ่งมีขนาดขี้เถ้าที่เป็นไปได้ที่เล็กที่สุดที่ปนอยู่กับน้ำมันดิบมากกว่าศูนย์ แต่ไม่แตกต่างจากศูนย์มากนัก ในการประมาณพารามิเตอร์จึงประมาณพารามิเตอร์ 3 พารามิเตอร์ โดยให้ตัวประมาณ $\hat{\gamma} = x_{(1)}$ เป็นตัวประมาณพารามิเตอร์เริ่มต้นของ γ จึงไม่ประมาณพารามิเตอร์ γ^* ซ้ำอีก เมื่อทราบตัวประมาณพารามิเตอร์ α และ β ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด ในการศึกษาขนาดขี้เถ้าโลหะนี้เป็นการศึกษาเกี่ยวกับตัวแปรสุ่มที่ไม่เกี่ยวข้อง

กับเวลา ดังนั้นเมื่อประมาณพารามิเตอร์และทดสอบสมมติฐานพารามิเตอร์แล้วจะต้องทดสอบความเหมาะสมของฟังก์ชันว่าฟิตกับข้อมูลหรือไม่ โดยการเปรียบเทียบความถี่ที่ได้จากค่าสังเกตและความถี่คาดหวังทางทฤษฎีสอดคล้องกันหรือไม่ ในการทดสอบจะสร้างตารางแจกแจงความถี่ของขนาดขี้เถ้าโลหะตามกำหนด เพื่อหาความน่าจะเป็นที่ขี้เถ้าจะมีขนาดตามช่วงที่กำหนด โดยความน่าจะเป็นนี้จะหาจากฟังก์ชันการรอดชีพ เมื่อทราบความน่าจะเป็นที่ขี้เถ้าโลหะจะมีขนาดตามช่วงที่กำหนดแล้วสามารถหาความถี่คาดหวังทางทฤษฎีได้จากการนำความน่าจะเป็นที่ได้คูณกับจำนวนความถี่ทั้งหมด ในการตรวจสอบความสอดคล้องของความถี่จากค่าสังเกตกับความถี่ในทางทฤษฎีนั้น ถ้าความถี่จากค่าสังเกตกับความถี่คาดหวังในทางทฤษฎีไม่แตกต่างกัน หรือแตกต่างกันเล็กน้อย ก็แสดงว่าความถี่ที่ได้จากค่าสังเกตและความถี่คาดหวังทางทฤษฎีสอดคล้องกัน ซึ่งจะมีวิธีการทดสอบด้วยกันสองวิธีคือ การเปรียบความถี่จากค่าสังเกตกับความถี่คาดหวังในทางทฤษฎีจากกราฟ และการทดสอบด้วยไคสแควร์ ซึ่งจากข้อมูลขนาดของขี้เถ้าโลหะทั้งการเปรียบเทียบความถี่จากค่าสังเกตกับความถี่คาดหวังในทางทฤษฎีจากกราฟ และการทดสอบด้วยไคสแควร์ พบว่าความถี่ที่ได้จากค่าสังเกตและความถี่คาดหวังทางทฤษฎีสอดคล้องกัน แสดงว่าการฟิตฟังก์ชันการแจกแจงไวบูลล์ให้แก่ข้อมูลค่อนข้างเหมาะสม

6.2 ข้อเสนอแนะ

1. ในการประมาณพารามิเตอร์การแจกแจงไวบูลล์ ผู้วิจัยได้เสนอเฉพาะวิธีการประมาณพารามิเตอร์ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดซึ่งเป็นวิธีที่นิยมใช้เป็นส่วนใหญ่ แต่ยังมีวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์อีกหลายวิธีการ ซึ่งไม่สามารถจะนำมาศึกษาได้ทั้งหมด หากผู้อ่านมีความสนใจที่จะค้นคว้าเพิ่ม ผู้วิจัยขอเสนอวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยวิธี maximum likelihood (Harter and Moore ,1967) เพื่อเปรียบเทียบกับการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดนี้ ซึ่งเป็นแนวทางให้ผู้สนใจศึกษาต่อจากผู้วิจัยก็จะเป็นประโยชน์มากยิ่งขึ้นในการศึกษาการแจกแจงไวบูลล์

2. ในการประยุกต์ข้อมูลครั้งนี้เป็นตัวอย่างที่สมมติขึ้นเพื่อประกอบการศึกษาซึ่งจะทำให้เข้าใจคุณลักษณะต่าง ๆ ของการแจกแจงไวบูลล์ ซึ่งการสรุปผลอาจคลาดเคลื่อนจากความเป็นจริงบ้าง ดังนั้นหากผู้อ่านมีความสนใจที่จะค้นคว้าเพื่อให้มีความเหมาะสมกับข้อมูลการทดสอบจริงจะทำให้การสรุปผลถูกต้องและน่าเชื่อถือมากขึ้น

3. ในการประยุกต์ข้อมูลกับการแจกแจงไวบูลล์นอกจากจะใช้ในการศึกษาความเชื่อถือได้หรือการทดสอบอายุการใช้งานของอุปกรณ์ การทดสอบความทนทานของวัตถุ การศึกษาการแจกแจงขนาดของวัตถุที่แตก หรือหัก อย่างกะทันหัน ดังข้อมูลตัวอย่างที่นำเสนอในการศึกษาครั้งนี้แล้วการแจกแจงไวบูลล์ยังนำไปประยุกต์เกี่ยวกับช่วงระยะเวลาการระบาดของโรค ระยะเวลาของการฝึกปฏิบัติ การศึกษาความรุนแรงของสารกัมมันตรังสี ซึ่งผู้สนใจที่ต้องการนำไปศึกษาต่อจากผู้วิจัยก็จะเป็นประโยชน์มากขึ้นในการประยุกต์ข้อมูลกับการแจกแจงไวบูลล์ให้เป็นที่รู้จักแพร่หลายยิ่งขึ้น

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Chiang Mai University