บทที่ 2

ตัวสถิติและผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยครั้งนี้ต้องการศึกษาเปรียบเทียบความสามารถในการควบคุมความน่าจะเป็นของความผิดพลาดประเภทที่ 1 และอำนาจการทดสอบของวิธีประมาณพารามิเตอร์ในการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมระหว่างวิธีกำลังสองน้อยที่สุด วิธีตัวประมาณเอ็มที่ใช้เกณฑ์ความแกร่งของแรมเซย์ และ วิธีการแปลงข้อมูลเป็นลำดับ ภายใต้ลักษณะความคลาดเคลื่อนที่มีการแจกแจงแบบเบ้ ว่าวิธีการใดจะส่งผลให้การวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมมีประสิทธิภาพกว่ากัน ซึ่งในบทนี้จะกล่าวถึงวิธีการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมของแผนการทดลองแบบสุ่มตลอด (Analysis of Covariance of Completely Randomized Design) ตัวสถิติทดสอบที่ใช้และรายละเอียดของแต่ละวิธีการประมาณ รวมทั้งนำเสนอผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 ตัวสถิติที่ใช้ในการวิจัย

การวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมเป็นวิธีการหนึ่งที่ถูกนำมาใช้ในการทดสอบสมมติฐานเพื่อเปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างวิธีปฏิบัติ โดยนำหลักการของการวิเคราะห์ความแปรปรวนกับการวิเคราะห์ความถดถอยผสมผสานเข้าด้วยกัน เพื่อลดความแปรปรวนให้กับหน่วยทดลอง ซึ่งมีตัวแบบดังนี้

ตัวแบบของการวิเคราะห์ความแปรปรวนของแผนแบบการทดลองแบบสุ่มตลอด

$$(1) \qquad Y_{ij} = \mu + \tau_j + \varepsilon_{ij} \quad ; \quad i = 1,2,\ldots,n_j \quad j = 1,2,\ldots,p$$

ตัวแบบของการวิเคราะห์ความถดถอยเมื่อตัวแปรร่วมมีความสัมพันธ์เชิงเส้นกับตัวแปรตาม

$$(2) \qquad Y_{ij} = \mu + \sum_{k=1}^{q}\beta_k\left(x_{ijk} - \bar{x}_{..k}\right) + \varepsilon_{ij}$$

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า

$$Y_{ij} = \mu + \tau_j + \sum_{k=1}^{q} \beta_k \left(X_{ijk} - \bar{X}_{..k}\right) + \varepsilon_{ij} \quad ; \quad i = 1,2,\ldots,n_j$$

$$j = 1,2,\ldots,p$$

โดยที่	p	หมายถึง	จำนวนวิธีปฏิบัติ
	q	หมายถึง	จำนวนตัวแปรร่วม
	n_j	หมายถึง	ขนาดตัวอย่างในแต่ละวิธีปฏิบัติที่ j
	μ	หมายถึง	ค่าเฉลี่ยทั้งหมดของ y
	τ_j	หมายถึง	อิทธิพลของวิธีปฏิบัติที่ j
	β_k	หมายถึง	ค่าสัมประสิทธิ์การถดถอยของตัวแปรร่วมที่ k
	ε_{ij}	หมายถึง	ค่าความคลาดเคลื่อนของค่าสังเกตจากค่าเฉลี่ยที่ปรับแล้ว
	$\bar{X}_{..k}$	หมายถึง	ค่าเฉลี่ยของตัวแปรร่วมที่ k

ในการวิจัยครั้งนี้ใช้ตัวแบบและตัวสถิติทดสอบดังนี้คือ

ตัวแบบเต็มรูป (full model)

$$Y_{ij} = \mu + \tau_j + \sum_{k=1}^{q} \beta_k \left(X_{ijk} - \bar{X}_{..k}\right) + \varepsilon_{ij}$$

ตัวแบบลดรูป (reduce model)

$$Y_{ij} = \mu + \sum_{k=1}^{q} \beta_k \left(X_{ijk} - \bar{X}_{..k}\right) + \varepsilon_{ij}$$

ในการทดสอบ

สมมติฐานว่าง $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_p$

เทียบกับ H_1 : มีวิธีปฏิบัติอย่างน้อยที่สุด 2 วิธีปฏิบัติที่ต่างกัน เมื่อ $\mu_j = \mu + \tau_j$

ตัวสถิติทดสอบที่ใช้ คือ

$$F = \frac{(res_t - res_w)/(p-1)}{(res_w)/(N-p-q)}$$

เมื่อ res_t หมายถึง ผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อนทั้งหมด (ตัวแบบลดรูป)

res_w หมายถึง ผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อนภายใน (ตัวแบบเต็มรูป)

N หมายถึง ขนาดตัวอย่างทั้งหมดซึ่งเท่ากับ $\sum_{j=1}^{p} n_j$

จะปฏิเสธสมมติฐานเมื่อ ค่าสถิติทดสอบ $F > F_\alpha$ (p-1, n-p-q)

จากตัวแบบเต็มรูป

$$Y_{ij} = \mu + \tau_j + \sum_{k=1}^{q} \beta_k (X_{ijk} - \overline{X}_{..k}) + \varepsilon_{ij}$$

เราสามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการถดถอย โดยสร้างตัวแปรหุ่น (dummy) เพื่อแสดงอิทธิพลของวิธีปฏิบัติได้ดังนี้

$$D_{i1} = \begin{cases} 1 & \text{, ถ้าเป็นวิธีปฏิบัติที่ 1} \\ 0 & \text{, อื่นๆ} \end{cases}$$

$$D_{i2} = \begin{cases} 1 & \text{, ถ้าเป็นวิธีปฏิบัติที่ 2} \\ 0 & \text{, อื่นๆ} \end{cases}$$

$$D_{ip-1} = \begin{cases} 1 & \text{, ถ้าเป็นวิธีปฏิบัติที่ p-1} \\ 0 & \text{, อื่นๆ} \end{cases}$$

จะได้ตัวแบบเต็มรูปใหม่ ดังนี้

$$Y_{ij} = \mu + \tau_1 D_{i1} + \tau_2 D_{i2} + \ldots + \tau_{p-1} D_{ip-1} + \sum_{k=1}^{q} \beta_k \left(X_{ijk} - \bar{X}_{..k} \right) + \varepsilon_{ij}$$

เขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์จะได้

$$\underset{\sim}{Y} = \underset{\sim}{X}\,\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}$$

เมื่อ $\underset{\sim}{Y}$ คือ เวกเตอร์ของค่าสังเกตหรือตัวแปรตามที่มีขนาด $n \times 1$

$\underset{\sim}{X}$ คือ เมทริกซ์ของตัวแปรอิสระที่มีขนาด $n \times (p+q)$

$\underset{\sim}{\beta}$ คือ เวกเตอร์ของสัมประสิทธิ์ความถดถอยที่มีขนาด $(p+q) \times 1$

$\underset{\sim}{\varepsilon}$ คือ เวกเตอร์ของค่าความคลาดเคลื่อนที่มีขนาด $n \times 1$

$$\underset{\sim}{Y} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{Y}_1 \\ \underset{\sim}{Y}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underset{\sim}{Y}_p \end{bmatrix} \begin{array}{l} n_1 \\ n_2 \\ . \\ . \\ . \\ n_p \end{array}$$

$$
\underset{\sim}{X} = \begin{array}{c}
\begin{bmatrix}
\underset{\sim}{1} & \underset{\sim}{1} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \cdots & (\underset{\sim 11}{x} - \bar{x}_{..1}\underset{\sim}{1}) & (\underset{\sim 12}{x} - \bar{x}_{..2}\underset{\sim}{1}) & \cdots & (\underset{\sim 1q}{x} - \bar{x}_{..q}\underset{\sim}{1}) \\
\underset{\sim}{1} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{1} & \underset{\sim}{0} & \cdots & (\underset{\sim 21}{x} - \bar{x}_{..1}\underset{\sim}{1}) & (\underset{\sim 22}{x} - \bar{x}_{..2}\underset{\sim}{1}) & \cdots & (\underset{\sim 2q}{x} - \bar{x}_{..q}\underset{\sim}{1}) \\
\underset{\sim}{1} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{1} & \cdots & (\underset{\sim 31}{x} - \bar{x}_{..1}\underset{\sim}{1}) & (\underset{\sim 32}{x} - \bar{x}_{..2}\underset{\sim}{1}) & \cdots & (\underset{\sim 3q}{x} - \bar{x}_{..q}\underset{\sim}{1}) \\
. & . & & & & & & & \\
. & . & & & & & & & \\
. & . & & & & & & & \\
\underset{\sim}{1} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \cdots & (\underset{\sim p1}{x} - \bar{x}_{..1}\underset{\sim}{1}) & (\underset{\sim p2}{x} - \bar{x}_{..2}\underset{\sim}{1}) & \cdots & (\underset{\sim pq}{x} - \bar{x}_{..q}\underset{\sim}{1})
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ . \\ . \\ . \\ n_p \end{array}
$$

$$
\underset{\sim}{\beta} = \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ . \\ . \\ \tau_{p-1} \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ . \\ . \\ \beta_q \end{bmatrix}
$$

$$
\underset{\sim}{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \underset{\sim 1}{\varepsilon} \\ \underset{\sim 2}{\varepsilon} \\ . \\ . \\ . \\ \underset{\sim p}{\varepsilon} \end{bmatrix}
\begin{array}{l} n_1 \\ n_2 \\ . \\ . \\ . \\ n_p \end{array}
$$

ตัวแบบลดรูปคือ

$$Y_{ij} = \mu + \sum_{k=1}^{q} \beta_k \left(X_{ijk} - \overline{X}_{..k} \right) + \varepsilon_{ij}$$

เมื่อเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์จะได้

$$\underset{\sim}{Y} = \underset{\sim}{X}\,\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}$$

เมื่อ $\underset{\sim}{Y}$ คือ เวกเตอร์ของค่าสังเกตหรือตัวแปรตามที่มีขนาด $n \times 1$

$\underset{\sim}{X}$ คือ เมทริกซ์ของตัวแปรอิสระที่มีขนาด $n \times (q+1)$

$\underset{\sim}{\beta}$ คือ เวกเตอร์ของสัมประสิทธิ์ความถดถอยที่มีขนาด $(q+1) \times 1$

$\underset{\sim}{\varepsilon}$ คือ เวกเตอร์ของค่าความคลาดเคลื่อนที่มีขนาด $n \times 1$

$$\underset{\sim}{Y} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \underset{\sim}{Y}_1 \\ \underset{\sim}{Y}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underset{\sim}{Y}_p \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ n_p \end{array}$$

$$\underset{\sim}{X} = \left[\begin{array}{ccccc} \underset{\sim}{1} & (\underset{\sim}{X}_{11} - \overline{X}_{..1}\underset{\sim}{1}) & (\underset{\sim}{X}_{12} - \overline{X}_{..2}\underset{\sim}{1}) & \cdots & (\underset{\sim}{X}_{1q} - \overline{X}_{..q}\underset{\sim}{1}) \\ \underset{\sim}{1} & (\underset{\sim}{X}_{21} - \overline{X}_{..1}\underset{\sim}{1}) & (\underset{\sim}{X}_{22} - \overline{X}_{..2}\underset{\sim}{1}) & \cdots & (\underset{\sim}{X}_{2q} - \overline{X}_{..q}\underset{\sim}{1}) \\ \underset{\sim}{1} & (\underset{\sim}{X}_{31} - \overline{X}_{..1}\underset{\sim}{1}) & (\underset{\sim}{X}_{32} - \overline{X}_{..2}\underset{\sim}{1}) & \cdots & (\underset{\sim}{X}_{3q} - \overline{X}_{..q}\underset{\sim}{1}) \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \underset{\sim}{1} & (\underset{\sim}{X}_{p1} - \overline{X}_{..1}\underset{\sim}{1}) & (\underset{\sim}{X}_{p2} - \overline{X}_{..2}\underset{\sim}{1} & \cdots & (\underset{\sim}{X}_{pq} - \overline{X}_{..q}\underset{\sim}{1}) \end{array} \right] \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ n_p \end{array}$$

$$\underset{\sim}{\beta} = \begin{bmatrix} \mu \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_q \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \underset{\sim 1}{\varepsilon} \\ \underset{\sim 2}{\varepsilon} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underset{\sim p}{\varepsilon} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ n_p \end{array}$$

ตารางที่ 2.1 แสดงข้อมูลของการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมของแผนการทดลองแบบสุ่มตลอด

วิธีปฏิบัติที่ 1				วิธีปฏิบัติที่ 2				วิธีปฏิบัติที่ 3			
Y	X_1	X_2 …	X_q	Y	X_1	X_2 …	X_q	Y	X_1	X_2 …	X_q
Y_{11}	X_{111}	X_{112} …	X_{11q}	Y_{12}	X_{121}	X_{122} …	X_{12q}	Y_{13}	X_{131}	X_{132} …	X_{13q}
Y_{21}	X_{211}	X_{212} …	X_{21q}	Y_{22}	X_{221}	X_{222} …	X_{22q}	Y_{23}	X_{231}	X_{232} …	X_{23q}
Y_{31}	X_{311}	X_{312} …	X_{31q}	Y_{32}	X_{321}	X_{322} …	X_{32q}	Y_{33}	X_{331}	X_{332} …	X_{33q}
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Y_{n1}	X_{n11}	X_{n12} …	X_{n1q}	Y_{n2}	X_{n21}	X_{n22} …	X_{n2q}	Y_{n3}	X_{n31}	X_{n32} …	X_{n3q}

2.2 วิธีการประมาณพารามิเตอร์

2.2.1 **วิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Ordinary Least Square Method)**

จากสมการ

$$\underset{\sim}{Y} = \underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}$$

เมื่อ $\underset{\sim}{\varepsilon} \sim N_n(\underset{\sim}{0}, \sigma^2 I_n)$ จะได้ว่าตัวประมาณกำลังสองน้อยที่สุดของ $\underset{\sim}{\beta}$ คือ $\underset{\sim}{\hat{\beta}}$ ซึ่งทำให้ผลรวมกำลังสองของความคลาดเคลื่อน (Sum Square Error) หรือ SSE มีค่าน้อยที่สุด

$$\begin{aligned}
SSE &= \underset{\sim}{\hat{\varepsilon}}'\underset{\sim}{\hat{\varepsilon}} \\
&= (\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\hat{\beta}})'(\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\hat{\beta}}) \\
&= (\underset{\sim}{Y}' - \underset{\sim}{\hat{\beta}}'\underset{\sim}{X}')(\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\hat{\beta}}) \\
&= \underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{\hat{\beta}}'\underset{\sim}{X}' - \underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{\hat{\beta}}'\underset{\sim}{X}' + \underset{\sim}{\hat{\beta}}'\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\hat{\beta}} \\
&= \underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y} - 2\underset{\sim}{\hat{\beta}}'\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{Y} + \underset{\sim}{\hat{\beta}}'\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\hat{\beta}}
\end{aligned}$$

และการหาค่าน้อยที่สุดของผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อนทำได้โดยการหาอนุพันธ์ (differentiate) เทียบกับ $\underset{\sim}{\hat{\beta}_i}$ แล้วกำหนดให้เท่ากับ 0

$$\frac{\partial SSE}{\partial \underset{\sim}{\hat{\beta}}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial SSE}{\partial \underset{\sim}{\hat{\beta}_1}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dfrac{\partial SSE}{\partial \underset{\sim}{\hat{\beta}_p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} = \underset{\sim}{0}$$

$$-2\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{Y} + 2\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}\hat{\underset{\sim}{\beta}} = 0$$

$$(\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X})\hat{\underset{\sim}{\beta}} = \underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{Y}$$

ดังนั้น

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}} = (\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X})^{-1}\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{Y}$$

2.2.2 **วิธีตัวประมาณเอ็ม (M-Estimation Method)**

ปี ค.ศ. 1964 P.J. Huber ได้ศึกษาฟังก์ชันความคลาดเคลื่อนซึ่งเรียกว่าตัวประมาณชนิดเอ็ม (M-Estimation Method) ซึ่งตัวประมาณนี้จะประมาณพารามิเตอร์ของค่าน้อยที่สุดของ $\sum_{i=1}^{n}\rho(\varepsilon_i/s)$ เมื่อ ε_i เป็นค่าความคลาดเคลื่อนของค่าสังเกตที่ i และ s เป็นตัวประมาณของการกระจายตัวอย่าง

$$(1) \qquad \min_{\underset{\sim}{\beta}} \sum_{i=1}^{n}\rho(\varepsilon_i/s) = \min_{\underset{\sim}{\beta}} \sum_{i=1}^{n}\rho\left|(Y_i - \underset{\sim}{X}_i'\underset{\sim}{\beta})/s\right| \qquad , X_i = \underset{\sim}{X}_i'$$

เมื่อ s เป็นตัวประมาณที่แกร่งของสเกล ซึ่งนิยมใช้มัธยฐานของค่าสัมบูรณ์ของความเบี่ยงเบน (Median Absolute Deviation) และทำการปรับด้วยค่าคงที่ 0.6745 ซึ่งจะทำให้ s เป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียง เมื่อ n มีขนาดใหญ่และการแจกแจงของความคลาดเคลื่อนเป็นแบบปกติ ดังนั้น s เขียนได้เป็น

$$s = \frac{\text{median}\left|\varepsilon_i - \text{median}(\varepsilon_i)\right|}{0.6745}$$

จากสมการ (1) หาอนุพันธ์ของ ρ เทียบกับ β_j แล้วกำหนดให้เท่ากับ 0 โดย $\psi = \rho'$

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{n} x_{ij}\psi\left|(Y_i - \underset{\sim}{X}_i'\underset{\sim}{\beta})/s\right| = 0 \qquad , \quad j = 1,2,\ldots,m$$

โดยที่ $m = p+q-1$ ในกรณีของตัวแบบเต็มรูป

$m = q$ ในกรณีของตัวแบบลดรูป

วิธีการที่ใช้ประมาณค่าสัมประสิทธิ์การถดถอยส่วนใหญ่จะใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดชนิดถ่วงน้ำหนักซ้ำ (Iteratively Reweighted Least Square) จากสมการ (2) สามารถเขียนสมการ m สมการได้ดังนี้

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij}\psi\left[\left(Y_i - \underset{\sim}{X_i'}\underset{\sim}{\beta}\right)\Big/ s\right] = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_{ij}\psi\left[\left(Y_i - \underset{\sim}{X_i'}\underset{\sim}{\beta}\right)\Big/ s\right].\left(Y_i - \underset{\sim}{X_i'}\underset{\sim}{\beta}\right)\Big/ s}{\left(Y_i - \underset{\sim}{X_i'}\underset{\sim}{\beta}\right)\Big/ s} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij}W_{i0}\left(Y_i - \underset{\sim}{X_i'}\underset{\sim}{\beta}\right) = 0 \quad , \quad j = 1,2,\ldots,m$$

$$W_{i0} = \begin{cases} \dfrac{\psi_i\left|\left(Y_i - \underset{\sim}{X_i'}\underset{\sim}{\hat{\beta}}\right)\Big/ s\right|}{\left(Y_i - \underset{\sim}{X_i'}\underset{\sim}{\hat{\beta}}\right)\Big/ s} & , Y_i \neq \underset{\sim}{X_i'}\underset{\sim}{\hat{\beta}} \\ 1 & , Y_i = \underset{\sim}{X_i'}\underset{\sim}{\hat{\beta}} \end{cases}$$

และเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้เป็น

$$\underset{\sim}{X'}\,W_0\,\underset{\sim}{X}\,\underset{\sim}{\hat{\beta}} \quad = \quad \underset{\sim}{X'}\,W_0\,\underset{\sim}{Y}$$

เมื่อ W เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ และมีสมาชิกตามเส้นทแยงเป็น $W_{10}, W_{20}, \ldots, W_{n0}$

$$W = \begin{bmatrix} W_{10} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & W_{20} & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ 0 & 0 & \cdots & W_{n0} \end{bmatrix}$$

ในการประมาณที่แกร่งจำเป็นอย่างยิ่งต้องเลือกค่าเริ่มต้นของ β_j อย่างระมัดระวัง ซึ่งการใช้ $\hat{\beta}_j$ จากวิธีกำลังสองน้อยที่สุดจะให้ผลดี ในที่นี้จึงใช้ $\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{OLS}$ มาคำนวณค่า W_i เมื่อได้ค่า W_i แล้วก็นำไปหาค่า $\hat{\underset{\sim}{\beta}}_j$ ใหม่โดยจะกระทำซ้ำๆ จนกระทั่งได้ค่า $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$ ที่ค่อนข้างคงที่ ดังนั้นตัวประมาณ $\hat{\underset{\sim}{\beta}}_m$ จึงหาได้จากสมการ

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}}_m = (\underset{\sim}{X}' W \underset{\sim}{X})^{-1} \underset{\sim}{X}' W \underset{\sim}{Y}$$

จากการศึกษาของ ปราณี รัตนัง (พ.ศ. 2530) ในเรื่องการประมาณสัมประสิทธิ์การถดถอยพหุ เมื่อความผิดพลาดมีการแจกแจงแบบเบ้ เช่น ลอกนอร์มอล แกมมาและไวบูลล์ ได้ว่าวิธีกำลังสองน้อยที่สุดและวิธีตัวประมาณเอ็มสามารถใช้ในการประมาณค่าสัมประสิทธิ์การถดถอยพหุได้ใกล้เคียงกัน และจากการศึกษาของ กรรณิการ์ อุโฆษกุล (พ.ศ. 2535) ในเรื่องของการเปรียบเทียบวิธีการประมาณพารามิเตอร์ในการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมเมื่อความผิดพลาดมีการแจกแจงแบบหางยาว พบว่าตัวประมาณเอ็มที่ใช้ความแกร่งของแรมเซย์ และตัวประมาณสเกลความคลาดเคลื่อนแบบ MAD มีประสิทธิภาพการวิเคราะห์ดีกว่าวิธีกำลังสองน้อยที่สุด ดังนั้นจึงเป็นที่สงสัยว่าในการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมเมื่อความคลาดเคลื่อนมีการแจกแจงแบบเบ้ ตัวประมาณเอ็มจะมีประสิทธิภาพดีกว่าหรือไม่ ซึ่งเกณฑ์ความแกร่งของแรมเซย์ มีฟังก์ชันของ ρ และ ψ_i คือ

$$\rho = a^{-2}\left[1 - \exp\left(-a|\varepsilon_i|/s\right)\right]\left(1 + a|\varepsilon_i|\right)/s$$

$$\psi_i = \left(\varepsilon_i/s\right)\exp\left(-a|\varepsilon_i|/s\right)$$

โดยฟังก์ชัน ψ_i จะมีลักษณะเป็นฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียลที่ลาดลงเรื่อยๆ และจะลู่เข้าหาค่าศูนย์เมื่อ ε_i มีขนาดใหญ่ และจะใช้ $a = 0.3$ เป็นค่าคงที่ในการกำหนดขอบเขตของฟังก์ชัน โดยที่ขอบเขตคือ $|\varepsilon_i|/s = 1/a$ เมื่อพิจารณา ψ_i พบว่า ถ้าค่าความคลาดเคลื่อนมีค่ามากหรือมีค่าสังเกตที่ผิดปกติมากๆ ค่าเหล่านี้จะมีอิทธิพลลดลงเรื่อยๆ

2.2.3 วิธีการแปลงข้อมูลเป็นลำดับ (Rank Transformation Method)

เป็นวิธีการทดสอบแบบไม่ใช้พารามิเตอร์ ซึ่ง Conover, W.J. และ Iman, (1982) ได้ศึกษาและสร้างสถิติทดสอบนี้ขึ้น โดยอาศัยการแปลงข้อมูลให้เป็นอันดับมาประยุกต์กับปัญหานี้ ซึ่งทำได้โดยการจัดอันดับของข้อมูลร่วมกัน แล้วใช้การวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมกับอันดับของข้อมูลเหล่านั้น รายละเอียดของการทดสอบเป็น ดังนี้

ขั้นตอนการทดสอบ

1. ให้ $R(Y_{ij})$ เป็นค่าที่จัดเรียงอันดับของค่าสังเกตหรือตัวแปรตาม Y (รวมทุกกลุ่มเท่ากับ n) จาก 1 ถึง n โดยการเรียงจากค่าน้อยที่สุดไปหาค่ามากที่สุด ถ้าค่าสังเกตซ้ำกันให้ใช้ค่าอันดับเฉลี่ย

2. ให้ $R(X_{ijk})$ เป็นค่าที่จัดเรียงอันดับของตัวแปรร่วม X (รวมทุกกลุ่ม = n) จาก 1 ถึง n ในลักษณะเช่นเดียวกับตัวแปรตาม Y

3. นำค่าอันดับของข้อมูล Y และ X ไปทำการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมแบบพาราเมตริก ซึ่งลักษณะของข้อมูลที่นำมาใช้วิเคราะห์ได้ดังนี้

ตารางที่ 2.2 แสดงข้อมูลของการวิเคราะห์ โดยวิธี การแปลงข้อมูลเป็นลำดับ

วิธีปฏิบัติที่ 1				วิธีปฏิบัติที่ 2				วิธีปฏิบัติที่ p			
R(Y)	$R(X_1)$	...	$R(X_q)$	R(Y)	$R(X_1)$	...	$R(X_q)$	R(Y)	$R(X_1)$	...	$R(X_q)$
$R(Y_{11})$	$R(X_{111})$	...	$R(X_{11q})$	$R(Y_{12})$	$R(X_{121})$	...	$R(X_{12q})$	$R(Y_{1p})$	$R(X_{1p1})$	...	$R(X_{1pq})$
$R(Y_{11})$	$R(X_{211})$	...	$R(X_{21q})$	$R(Y_{12})$	$R(X_{221})$	...	$R(X_{22q})$	$R(Y_{1p})$	$R(X_{2p1})$	...	$R(X_{2pq})$
$R(Y_{11})$	$R(X_{311})$	...	$R(X_{31q})$	$R(Y_{12})$	$R(X_{321})$	...	$R(X_{32q})$	$R(Y_{1p})$	$R(X_{3p1})$	...	$R(X_{3pq})$
.	.		.	.	.		.	.	.		.
.	.		.	.	.		.	.	.		.
.	.		.	.	.		.	.	.		.
$R(Y_{11})$	$R(X_{n11})$	...	$R(X_{n1q})$	$R(Y_{12})$	$R(X_{n21})$	...	$R(X_{n2q})$	$R(Y_{1p})$	$R(X_{np1})$	...	$R(X_{npq})$

จากตารางที่ 2.2 สามารถนำข้อมูลดังกล่าวมาเขียนในรูปของเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$R(\underset{\sim}{Y}) = R(\underset{\sim}{X})\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}$$

เมื่อ $R(\underset{\sim}{Y})$ คือ เวกเตอร์ของอันดับค่าตัวแปรตาม

$R(\underset{\sim}{X})$ คือ เมทริกซ์ของอันดับค่าตัวแปรอิสระ

การวิเคราะห์ตามวิธี Parametric ANCOVA โดยตัวประมาณ $\underset{\sim}{\hat{\beta}_R}$ สามารถหาได้จาก

$$\underset{\sim}{\hat{\beta}_R} = \left(R(\underset{\sim}{X})' R(\underset{\sim}{X})\right)^{-1} . \left(R(\underset{\sim}{X})' R(\underset{\sim}{Y})\right)$$

2.3 ตัวอย่างการคำนวณหาค่าสถิติทดสอบทั้ง 3 วิธี

ในการวิเคราะห์ประสิทธิภาพของอุปกรณ์ที่ใช้ในการส่งน้ำอัดลมตามเส้นทางต่างๆ ทั้ง 3 ชนิด โดยวัดจากเวลาที่ใช้ในการขนส่ง (Y) ซึ่งมีความสัมพันธ์กับจำนวนลังที่บรรจุน้ำอัดลม (X_1) และ ระยะทางในการเดินทางของพนักงาน (X_2) ได้ข้อมูลเป็นดังนี้

ตารางที่ 2.3 แสดงข้อมูลของการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม แผนการทดลองแบบสุ่มตลอด

อุปกรณ์ชนิดที่ 1			อุปกรณ์ชนิดที่ 2			อุปกรณ์ชนิดที่ 3		
Y	X_1	X_2	Y	X_1	X_2	Y	X_1	X_2
15	29	3	20	22	3	14	33	2
19	49	3	34	24	2	20	45	1
21	48	2	28	49	4	30	35	5
27	35	5	35	46	4	32	39	4
35	53	5	42	52	5	34	36	3
39	47	9	44	43	4	42	48	8
23	46	3	46	64	8	40	63	8
38	74	7	47	61	7	38	57	4
33	72	6	40	55	6	54	56	9
50	67	8	54	54	5	56	78	7

สมมติฐานของการทดสอบ

H_0 : อุปกรณ์ทั้ง 3 ชนิดมีประสิทธิภาพไม่แตกต่างกัน

H_1 : มีอุปกรณ์อย่างน้อย 2 ชนิดมีประสิทธิภาพแตกต่างกัน

2.3.1 วิธีกำลังสองน้อยที่สุด โดยขั้นตอนการคำนวณดังนี้

1. สร้างเมทริกซ์จากข้อมูลในตารางที่ 2.3 เมื่อ

$\underset{\sim}{Y}$ คือ เวกเตอร์ของค่าสังเกตหรือตัวแปรตาม

$\underset{\sim}{X}_{full}$ คือ เมทริกซ์ของตัวแปรอิสระของตัวแบบเต็มรูป

$\underset{\sim}{X}_{redu}$ คือ เมทริกซ์ของตัวแปรอิสระของตัวแบบลดรูป

$$
\underset{\sim}{X}_{full} = \begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 29 & 3 \\
1 & 1 & 0 & 49 & 3 \\
1 & 1 & 0 & 48 & 2 \\
1 & 1 & 0 & 35 & 5 \\
1 & 1 & 0 & 53 & 5 \\
1 & 1 & 0 & 47 & 9 \\
1 & 1 & 0 & 46 & 3 \\
1 & 1 & 0 & 74 & 7 \\
1 & 1 & 0 & 72 & 6 \\
1 & 1 & 0 & 67 & 8 \\
1 & 0 & 1 & 22 & 3 \\
1 & 0 & 1 & 24 & 2 \\
1 & 0 & 1 & 49 & 4 \\
1 & 0 & 1 & 46 & 4 \\
1 & 0 & 1 & 52 & 5 \\
1 & 0 & 1 & 43 & 4 \\
1 & 0 & 1 & 64 & 8 \\
1 & 0 & 1 & 61 & 7 \\
1 & 0 & 1 & 55 & 6 \\
1 & 0 & 1 & 54 & 5 \\
1 & 0 & 0 & 33 & 2 \\
1 & 0 & 0 & 45 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 35 & 5 \\
1 & 0 & 0 & 39 & 4 \\
1 & 0 & 0 & 36 & 3 \\
1 & 0 & 0 & 48 & 8 \\
1 & 0 & 0 & 63 & 8 \\
1 & 0 & 0 & 57 & 4 \\
1 & 0 & 0 & 56 & 9 \\
1 & 0 & 0 & 78 & 7
\end{bmatrix}
\quad
\underset{\sim}{X}_{redu} = \begin{bmatrix}
1 & 29 & 3 \\
1 & 49 & 3 \\
1 & 48 & 2 \\
1 & 35 & 5 \\
1 & 53 & 5 \\
1 & 47 & 9 \\
1 & 46 & 3 \\
1 & 74 & 7 \\
1 & 72 & 6 \\
1 & 67 & 8 \\
1 & 22 & 3 \\
1 & 24 & 2 \\
1 & 49 & 4 \\
1 & 46 & 4 \\
1 & 52 & 5 \\
1 & 43 & 4 \\
1 & 64 & 8 \\
1 & 61 & 7 \\
1 & 55 & 6 \\
1 & 54 & 5 \\
1 & 33 & 2 \\
1 & 45 & 1 \\
1 & 35 & 5 \\
1 & 39 & 4 \\
1 & 36 & 3 \\
1 & 48 & 8 \\
1 & 63 & 8 \\
1 & 57 & 4 \\
1 & 56 & 7 \\
1 & 78 & 9
\end{bmatrix}
\quad
\underset{\sim}{Y} = \begin{bmatrix}
15 \\ 19 \\ 21 \\ 27 \\ 35 \\ 39 \\ 23 \\ 38 \\ 33 \\ 50 \\ 20 \\ 34 \\ 28 \\ 35 \\ 42 \\ 44 \\ 46 \\ 47 \\ 40 \\ 54 \\ 14 \\ 20 \\ 30 \\ 32 \\ 34 \\ 42 \\ 40 \\ 38 \\ 54 \\ 56
\end{bmatrix}
$$

2. คำนวณผลรวมกำลังสองของความคลาดเคลื่อนภายใน (Within residuals)

$$(\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X})_{full} = \begin{bmatrix} 30 & 10 & 10 & 1480 & 150 \\ 10 & 10 & 0 & 520 & 51 \\ 10 & 0 & 10 & 470 & 48 \\ 1480 & 520 & 470 & 78840 & 7998 \\ 150 & 51 & 48 & 7998 & 900 \end{bmatrix} \quad (\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{Y})_{full} = \begin{bmatrix} 1050 \\ 300 \\ 390 \\ 54822 \\ 5825 \end{bmatrix}$$

$$(\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X})^{-1}_{full} = \begin{bmatrix} 0.5212 & -0.0743 & -0.1172 & -0.0086 & -0.0002 \\ -0.0743 & 0.2027 & 0.0993 & -0.0009 & 0.0035 \\ -0.1172 & 0.0993 & 0.2008 & 0.0002 & 0.0010 \\ -0.0086 & -0.0009 & 0.0002 & 0.0003 & -0.0012 \\ -0.0002 & 0.0035 & 0.0010 & -0.0012 & 0.0113 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim full}{\hat{\beta}} = (\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X})^{-1}_{full}.(\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{Y})_{full} = \begin{bmatrix} 7.9890 \\ -6.8298 \\ 4.4037 \\ 0.2766 \\ 2.8349 \end{bmatrix}$$

$$\text{Within residuals} = (\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim full}{X}.\hat{\beta}_{full})'(\underset{\sim}{Y} - X_{full}.\hat{\beta}_{full}) = 972.44$$

3. คำนวณผลรวมกำลังสองของความคลาดเคลื่อนทั้งหมด (Total residuals)

$$(\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X})_{redu} = \begin{bmatrix} 30 & 1480 & 150 \\ 1480 & 78840 & 7998 \\ 150 & 7998 & 900 \end{bmatrix} \quad (\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{Y})_{redu} = \begin{bmatrix} 1050 \\ 54822 \\ 5825 \end{bmatrix}$$

$$(\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X})^{-1}_{redu} = \begin{bmatrix} 0.4511 & -0.0085 & 0.0007 \\ -0.0085 & 0.0003 & -0.0012 \\ 0.0007 & -0.0012 & 0.0113 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim redu}{\hat{\beta}} = (\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X})^{-1}_{redu}.(\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{Y})_{redu} = \begin{bmatrix} 9.6020 \\ 0.2120 \\ 2.9884 \end{bmatrix}$$

$$\text{Total residuals} = (\underset{\sim}{Y} - (\underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\hat{\beta}})_{redu})'(\underset{\sim}{Y} - (\underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\hat{\beta}})_{redu}) = 1597.18$$

4. คำนวณผลรวมกำลังสองความคลาดเคลื่อนของอิทธิพลที่ได้ปรับแล้ว (Adjusted treatment)

Adjusted treatment = Total residuals – Within residuals

= 1597.18 - 972.18

= 624.74

5. คำนวณค่าสถิติทดสอบ F

ตารางการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม

Source	SS	df	Ms	F
Adjusted treatment	624.744	2	312.37	8.03
Within residuals	972.436	25	38.90	
Total residuals	1597.181			

6. หาค่าวิกฤตจากตาราง F ที่องศาความเป็นอิสระเท่ากับ 2 และ 25 ณ ระดับนัยสำคัญ 0.05 จะได้ $F_{0.05,2,25} = 3.39$ พบว่า F จากการคำนวณมีค่ามากกว่า $F_{0.05,2,25}$ ดังนั้นเราจะปฏิเสธสมมติฐานหลักนั่นคือ สรุปได้ว่ามีอุปกรณ์อย่างน้อย 2 ชนิดที่มีประสิทธิภาพแตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

2.1.2 **วิธีตัวประมาณเอ็ม โดยมีขั้นตอนการคำนวณดังนี้**

1. คำนวณผลรวมกำลังสองของความคลาดเคลื่อนภายใน (Within residuals)

1.1) คำนวณค่าความคลาดเคลื่อนของค่าสังเกตที่ i โดยใช้ $\hat{\beta}_{full}$ จากวิธีกำลังสองน้อยที่สุด

$$\underset{\sim}{\hat{\varepsilon}} = \underset{\sim}{Y} - \left(\underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\hat{\beta}}_{full}\right)$$

1.2) คำนวณเมทริกซ์ W ในรอบแรก

$$W = \begin{bmatrix} W_{1,0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & W_{2,0} & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ 0 & 0 & \cdots & W_{30,0} \end{bmatrix}$$

เมื่อ $S = \dfrac{\text{median}\left|\varepsilon_i - \text{median}(\varepsilon_i)\right|}{0.6745} = \dfrac{\text{median}\left|\varepsilon_i - (-1.06)\right|}{0.6745} = 5.57$

$$\psi_i = (\varepsilon_i / 5.57)\exp\left(-0.3\left|\varepsilon_i\right| / 5.57\right)$$

ดังนั้น
$$W_{i0} = \begin{cases} \dfrac{\psi_i\left|\left(Y_i - (\underset{\sim}{X}'_i\underset{\sim}{\hat{\beta}}_{full})\right)/5.57\right|}{\left(Y_i - (\underset{\sim}{X}'_i\underset{\sim}{\hat{\beta}}_{full})\right)/5.57} & , Y_i \neq \underset{\sim}{X}'_i\underset{\sim}{\hat{\beta}} \\ 1 & , Y_i = \underset{\sim}{X}'_i\underset{\sim}{\hat{\beta}} \end{cases}$$

1.3) คำนวณตัวประมาณเอ็มรอบแรก

$$\underset{\sim}{\hat{\beta}}_{full} = (\underset{\sim}{X}' W \underset{\sim}{X})^{-1} \underset{\sim}{X}' W \underset{\sim}{Y}$$

$$= \begin{bmatrix} 17.9 & 4.5 & 7.2 & 894.2 & 89.5 \\ 4.5 & 4.5 & 0 & 255.9 & 24.8 \\ 7.2 & 0 & 7.2 & 326.1 & 33.0 \\ 894.2 & 255.9 & 326.1 & 48805.9 & 4930.9 \\ 89.5 & 24.8 & 33.0 & 4930.9 & 536.2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 652.9 \\ 148.5 \\ 280.2 \\ 34687.8 \\ 3613.5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7.47 \\ -6.16 \\ 5.60 \\ 0.28 \\ 2.85 \end{bmatrix}$$

1.4) กระทำซ้ำจากขั้นตอนที่ 1.1 ถึง 1.3 จนได้ $\underset{\sim}{\hat{\beta}}_{full}$ ที่ค่อนข้างคงที่ ดังนี้

$$\underset{\sim}{\hat{\beta}}_{full} = \begin{bmatrix} 7.67 \\ -6.49 \\ 5.14 \\ 0.28 \\ 2.83 \end{bmatrix}$$

$$\text{Within residuals} = (\underset{\sim}{Y} - (\underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\hat{\beta}})_{full})'(\underset{\sim}{Y} - (\underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\hat{\beta}})_{full}) = 976.68$$

2. คำนวณผลรวมกำลังสองของความคลาดเคลื่อนทั้งหมด (Total residuals)

2.1) คำนวณค่าความคลาดเคลื่อนของค่าสังเกตที่ i โดยใช้ $\hat{\beta}_{redu}$ จากวิธีกำลังสองน้อยที่สุด

$$\hat{\underset{\sim}{\varepsilon}} = \underset{\sim}{Y} - (\underset{\sim}{X}\hat{\underset{\sim}{\beta}})_{redu}$$

2.4) คำนวณเมทริกซ์ W ในรอบแรก

$$W = \begin{bmatrix} W_{1,0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & W_{2,0} & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & W_{30,0} \end{bmatrix}$$

เมื่อ $S = \dfrac{\text{median}\left|\varepsilon_i - \text{median}(\varepsilon_i)\right|}{0.6745} = \dfrac{\text{median}\left|\varepsilon_i - (-1.38)\right|}{0.6745} = 7.83$

$$\psi_i = (\varepsilon_i / 7.83)\exp\left(-0.3\left|\varepsilon_i\right| / 7.83\right)$$

ดังนั้น $W_{i0} = \begin{cases} \dfrac{\psi_i \left| \left(Y_i - (\underset{\sim}{x}_i' \hat{\underset{\sim}{\beta}})_{full}\right) / 7.83 \right|}{\left(Y_i - (\underset{\sim}{x}_i' \hat{\underset{\sim}{\beta}})_{full}\right) / 7.83} & , Y_i \neq \underset{\sim}{x}_i' \hat{\underset{\sim}{\beta}} \\ 1 & , Y_i = \underset{\sim}{x}_i' \hat{\underset{\sim}{\beta}} \end{cases}$

2.5) คำนวณตัวประมาณเอ็มรอบแรก

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{redu} = (\underset{\sim}{X}' W \underset{\sim}{X})^{-1} \underset{\sim}{X}' W \underset{\sim}{Y}$$

$$\underset{\sim}{\hat{\beta}}_{redu} = \begin{bmatrix} 16.7 & 818.0 & 81.0 \\ 818.0 & 343896.5 & 4300.2 \\ 81.0 & 4300.2 & 465.5 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 586.9 \\ 30534.1 \\ 3119.2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12.45 \\ 0.18 \\ 2.91 \end{bmatrix}$$

2.4) กระทำซ้ำจากขั้นตอนที่ 2.1 ถึง 2.3 จนได้ $\underset{\sim}{\hat{\beta}}_{redu}$ ที่ค่อนข้างคงที่ ดังนี้

$$\underset{\sim}{\hat{\beta}}_{redu} = \begin{bmatrix} 11.12 \\ 0.19 \\ 2.94 \end{bmatrix}$$

$$\text{Total residuals} = (\underset{\sim}{Y} - (\underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\hat{\beta}})_{redu})'(\underset{\sim}{Y} - (\underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\hat{\beta}})_{redu}) = 1605.47$$

3. คำนวณผลรวมกำลังสองความคลาดเคลื่อนของอิทธิพลที่ได้ปรับแล้ว (Adjusted treatment)

Adjusted treatment = Total residuals – Within residuals

= 1605.47-976.68

= 628.79

4. คำนวณค่าสถิติทดสอบ F

ตารางการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม

Source	SS	df	Ms	F
Adjusted treatment	628.79	2	314.39	8.05
Within residuals	976.68	25	39.07	
Total residuals	1605.47			

5. หาค่าวิกฤตจากตาราง F ที่องศาความเป็นอิสระเท่ากับ 2 และ 25 ณ ระดับนัยสำคัญ 0.05 จะได้ $F_{0.05,2,25} = 3.39$ พบว่า F จากการคำนวณมีค่ามากกว่า $F_{0.05,2,25}$ ดังนั้นเราจะปฏิเสธสมมติฐานหลักนั่นคือ สรุปได้ว่ามีอุปกรณ์อย่างน้อย 2 ชนิดที่มีประสิทธิภาพแตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

2.3.3 วิธีการแปลงข้อมูลเป็นลำดับ โดยมีขั้นตอนการคำนวณดังนี้

1. จัดอันดับค่าสังเกตให้แก่ตัวแปรตาม (Y) ร่วมกันทุกตัวจาก 1 ถึง n (ในที่นี้ n = 30) โดยการเรียงจากค่าน้อยที่สุด ไปหาค่ามากที่สุด ถ้าค่าสังเกตซ้ำกัน ให้ใช้ค่าอันดับเฉลี่ย

2. จัดอันดับค่าสังเกตให้แก่ตัวแปรร่วม (X) เช่นเดียวกับตัวแปรตาม (Y)

3. นำค่าอันดับของ Y และ X ไปคำนวณตามวิธี Parametric ANCOVA ดังนี้

3.1) สร้างเมทริกซ์จากอันดับของข้อมูล เมื่อ

$\underset{\sim}{Y}$ คือ เวกเตอร์ของค่าอันดับของค่าสังเกตหรือตัวแปรตาม

$\underset{\sim}{X}_{full}$ คือ เมทริกซ์ของค่าอันดับของตัวแปรอิสระของตัวแบบเต็มรูป

$\underset{\sim}{X}_{redu}$ คือ เมทริกซ์ของค่าอันดับของตัวแปรอิสระของตัวแบบลดรูป

$$
\underset{\sim}{X}_{full} = \begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 3 & 7 \\
1 & 1 & 0 & 16.5 & 7 \\
1 & 1 & 0 & 14.5 & 3 \\
1 & 1 & 0 & 5.5 & 17 \\
1 & 1 & 0 & 19 & 17 \\
1 & 1 & 0 & 13 & 29.5 \\
1 & 1 & 0 & 11.5 & 7 \\
1 & 1 & 0 & 29 & 23 \\
1 & 1 & 0 & 28 & 20.5 \\
1 & 1 & 0 & 27 & 26.5 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 7 \\
1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
1 & 0 & 1 & 16.5 & 12 \\
1 & 0 & 1 & 11.5 & 12 \\
1 & 0 & 1 & 18 & 17 \\
1 & 0 & 1 & 9 & 12 \\
1 & 0 & 1 & 26 & 26.5 \\
1 & 0 & 1 & 24 & 23 \\
1 & 0 & 1 & 21 & 20.5 \\
1 & 0 & 1 & 20 & 17 \\
1 & 0 & 0 & 4 & 3 \\
1 & 0 & 0 & 10 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 5.5 & 17 \\
1 & 0 & 0 & 8 & 12 \\
1 & 0 & 0 & 7 & 7 \\
1 & 0 & 0 & 14.5 & 26.5 \\
1 & 0 & 0 & 25 & 26.5 \\
1 & 0 & 0 & 23 & 12 \\
1 & 0 & 0 & 22 & 29.5 \\
1 & 0 & 0 & 30 & 23
\end{bmatrix}
\quad
\underset{\sim}{X}_{redu} = \begin{bmatrix}
1 & 3 & 7 \\
1 & 16.5 & 7 \\
1 & 14.5 & 3 \\
1 & 5.5 & 17 \\
1 & 19 & 17 \\
1 & 13 & 29.5 \\
1 & 11.5 & 7 \\
1 & 29 & 23 \\
1 & 28 & 20.5 \\
1 & 27 & 26.5 \\
1 & 1 & 7 \\
1 & 2 & 3 \\
1 & 16.5 & 12 \\
1 & 11.5 & 12 \\
1 & 18 & 17 \\
1 & 9 & 12 \\
1 & 26 & 26.5 \\
1 & 24 & 23 \\
1 & 21 & 20.5 \\
1 & 20 & 17 \\
1 & 4 & 3 \\
1 & 10 & 1 \\
1 & 5.5 & 17 \\
1 & 8 & 12 \\
1 & 7 & 7 \\
1 & 14.5 & 26.5 \\
1 & 25 & 26.5 \\
1 & 23 & 12 \\
1 & 22 & 29.5 \\
1 & 30 & 23
\end{bmatrix}
\quad
\underset{\sim}{Y} = \begin{bmatrix}
2 \\ 3 \\ 6 \\ 8 \\ 15.5 \\ 19 \\ 7 \\ 17.5 \\ 12 \\ 27 \\ 4.5 \\ 13.5 \\ 9 \\ 15.5 \\ 22.5 \\ 24 \\ 25 \\ 26 \\ 20.5 \\ 28.5 \\ 1 \\ 4.5 \\ 10 \\ 11 \\ 13.5 \\ 22.5 \\ 20.5 \\ 17.5 \\ 28.5 \\ 30
\end{bmatrix}
$$

3.2) คำนวณผลรวมกำลังสองของความคลาดเคลื่อนภายใน (Within residulas)

$$(\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X})_{full} = \begin{bmatrix} 30 & 10 & 10 & 465 & 465 \\ 10 & 10 & 0 & 167 & 157.5 \\ 10 & 0 & 10 & 149 & 150 \\ 465 & 167 & 149 & 9453 & 8713.8 \\ 465 & 157.5 & 150 & 8713.8 & 9415 \end{bmatrix} \quad (\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{Y})_{full} = \begin{bmatrix} 465 \\ 117 \\ 189 \\ 8689 \\ 8912 \end{bmatrix}$$

$$(\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X})^{-1}_{full} = \begin{bmatrix} 0.2270 & -0.0938 & -0.1036 & -0.0035 & -0.0048 \\ -0.0938 & 0.2027 & 0.1008 & -0.0015 & 0.0010 \\ -0.1036 & 0.1008 & 0.2005 & -0.0004 & 0.0006 \\ -0.0035 & -0.0015 & -0.0004 & 0.0008 & -0.0006 \\ -0.0048 & 0.0010 & 0.0006 & -0.0006 & 0.0008 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{full} = (\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X})^{-1}_{full} \cdot (\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{Y})_{full} = \begin{bmatrix} 2.2464 \\ -4.7570 \\ 3.4306 \\ 0.3094 \\ 0.5716 \end{bmatrix}$$

$$\text{Within residuals} = (\underset{\sim}{Y} - (\underset{\sim}{X}\hat{\underset{\sim}{\beta}})_{full})'(\underset{\sim}{Y} - (\underset{\sim}{X}\hat{\underset{\sim}{\beta}})_{full}) = 509.35$$

3.3) คำนวณผลรวมกำลังสองของความคลาดเคลื่อนทั้งหมด (Total residuals)

$$(\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X})_{redu} = \begin{bmatrix} 30 & 465 & 465 \\ 465 & 9453 & 8713.8 \\ 465 & 8713.8 & 9415 \end{bmatrix} \quad (\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{Y})_{redu} = \begin{bmatrix} 465 \\ 8689.5 \\ 8912 \end{bmatrix}$$

$$(\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X})^{-1}_{redu} = \begin{bmatrix} 0.1621 & -0.0040 & -0.0043 \\ -0.0040 & 0.0008 & -0.0006 \\ -0.0043 & -0.0006 & 0.0008 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim redu}{\hat{\beta}} = (\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X})^{-1}_{redu}.(\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{Y})_{redu} = \begin{bmatrix} 2.2421 \\ 0.2619 \\ 0.5934 \end{bmatrix}$$

$$\text{Total residuals} = (\underset{\sim}{Y} - (\underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\hat{\beta}})_{redu})'(\underset{\sim}{Y} - (\underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\hat{\beta}})_{redu}) = 844.34$$

3.4) คำนวณผลรวมกำลังสองความคลาดเคลื่อนของอิทธิพลที่ได้ปรับแล้ว (Adjusted treatment)

Adjusted treatment = Total residuals – Within residuals

= 844.34 – 509.35

= 167.49

3.5) คำนวณค่าสถิติทดสอบ F

ตารางการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม

Source	SS	df	Ms	F
Adjusted treatment	344.99	2	167.49	8.22
Within residuals	509.35	25	20.37	
Total residuals	844.34			

3.6) หาค่าวิกฤตจากตาราง F ที่องศาความเป็นอิสระเท่ากับ 2 และ 25 ณ ระดับนัยสำคัญ 0.05 จะได้ $F_{0.05,2,25} = 3.39$ พบว่า F จากการคำนวณมีค่ามากกว่า $F_{0.05,2,25}$ ดังนั้นเราจะปฏิเสธสมมติฐานหลักนั่นคือ สรุปได้ว่ามีอุปกรณ์อย่างน้อย 2 ชนิดที่มีประสิทธิภาพแตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

2.4 ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

1. กรรณิการ์ อุโฆษกุล (2535) ได้ศึกษาการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีการประมาณพารามิเตอร์ในการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม เมื่อความคลาดเคลื่อนมีการแจกแจงแบบหางยาวกว่าปกติระหว่างวิธีกำลังสองน้อยที่สุดกับตัวประมาณเอ็มที่ใช้เกณฑ์ความแกร่งของแรมเซย์ และตัวประมาณสเกลความคลาดเคลื่อนแบบ MAD (median absolute deviation) โดยศึกษาเปรียบเทียบจากค่าอำนาจการทดสอบเมื่อความคลาดเคลื่อนมีการแจกแจงแบบปกติปลอมปน (scale-contaminated normal distribution) ทุกค่าของจำนวนวิธีปฏิบัติและจำนวนตัวแปรร่วมที่ศึกษาวิธีตัวประมาณเอ็มให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงกว่าวิธีกำลังสองน้อยที่สุดเมื่อขนาดตัวอย่างในแต่ละวิธีปฏิบัติมีค่าน้อยทุกค่าของสเกลแฟกเตอร์และเปอร์เซ็นต์การปลอมปน และขนาดตัวอย่างในแต่ละวิธีปฏิบัติมีค่ามากโดยที่สเกลแฟกเตอร์และเปอร์เซ็นต์การปลอมปนมีค่าสูง ค่าอำนาจการทดสอบจะแปรผันกับสเกลแฟกเตอร์และเปอร์เซ็นต์การปลอมปน เมื่อความคลาดเคลื่อนมีการแจกแจงแบบโลจิสติก (logistic distribution) ทุกค่าของจำนวนวิธีปฏิบัติและจำนวนตัวแปรร่วมที่ศึกษาวิธีตัวประมาณเอ็มจะให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงกว่าวิธีกำลังสองน้อยที่สุดเมื่อขนาดตัวอย่างในแต่ละวิธีปฏิบัติมีค่าน้อย

2. ฐิติฎา กระตุฤกษ์ (2534) ได้ศึกษาเพื่อเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบของตัวสถิติทดสอบแบบไม่ใช้พารามิเตอร์ สำหรับแผนการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ ในการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม 2 วิธี ได้แก่ วิธีการทดสอบแบบเควดแรงค์ (Quade's Rank) และวิธีทดสอบแบบการแปลงข้อมูลเป็นลำดับ (Rank Transformation) กรณีที่การแจกแจงของความคลาดเคลื่อนมีการแจกแจงแบบโลจิสติก (logistic distribution) การแจกแจงแบบดับเบิลเอ็กซ์โปเนนเชียล (double exponential distribution) และการแจกแจงแบบปกติปลอมปน (scale-contaminated normal distribution) พบว่าวิธีทดสอบทั้ง 2 วิธีดังกล่าว สามารถควบคุมความน่าจะเป็นของความผิดพลาดประเภทที่ 1 ได้ดีใกล้เคียงกันในทุกการแจกแจงที่ศึกษา และพบว่าตัวสถิติทดสอบแบบการแปลงข้อมูลเป็นลำดับ จะให้อำนาจการทดสอบสูงสุดในทุกการแจกแจงของความคลาดเคลื่อน ในทุกขนาดตัวอย่าง (n) ในทุกขนาดของค่าความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตามและตัวแปรร่วม (ρ_{xy}) และในทุกขนาดของค่าสัมประสิทธิ์ความแปรปรวน (C.V.) ที่ศึกษา

3. ปราณี รัตนัง (2530) ได้ศึกษาเปรียบเทียบวิธีการประมาณสัมประสิทธิ์การถดถอยพหุ เมื่อความผิดพลาดมีการแจกแจงหางยาวกว่าปกติและแบบเบ้ ระหว่างวิธีกำลังสองน้อยที่สุดและวิธีตัวประมาณเอ็มที่ใช้เกณฑ์ความแกร่งของแรมเซย์ พบว่ากรณีที่ค่าผิดพลาดมีการแจกแจงแบบหางยาวกว่าการแจกแจงแบบปกติ การแจกแจงของค่าผิดพลาดที่มีค่าผิดปกติจะเกิดขึ้นในรูปแบบต่างๆ ซึ่ง

กำหนดโดยสเกลแฟคเตอร์และเปอร์เซ็นต์การปลอมปนสำหรับการแจกแจงแบบปกติปลอมปน และระดับความเป็นอิสระสำหรับการแจกแจงแบบที จะได้ว่าสเกลแฟคเตอร์ เปอร์เซ็นต์การปลอมปนและระดับความเป็นอิสระ จะมีอิทธิพลจากมากไปหาน้อยที่ทำให้วิธีตัวประมาณเอ็มดีกว่าวิธีกำลังสองน้อยที่สุด สำหรับกรณีที่ค่าผิดพลาดมีการแจกแจงแบบเบ้ ได้แก่การแจกแจงที่มีรูปแบบต่างๆ เช่น ลอกนอร์มอล แกมมาและไวล์บูลล์ จะได้ว่าวิธีกำลังสองน้อยที่สุดและวิธีตัวประมาณเอ็มสามารถใช้ในการประมาณค่าสัมประสิทธิ์การถดถอยพหุได้ใกล้เคียงกัน เมื่อใช้เทคนิคการแปลงที่อยู่ในรูปยกกำลังของ Box และ Cox ในการแปลงข้อมูลให้เข้าสู่ภาวะปกติ