

## บทที่ 2

### ทฤษฎีพื้นฐาน

#### 2.1 สมมุติฐาน

สมมุติฐานเบื้องต้นสำหรับงานวิจัยนี้คือ

ก. ชิ้นส่วนย่อยของโครงสร้างมีหน้าตัดคงที่ตลอดความยาว

ข. ระนาบหน้าตัดของชิ้นส่วนย่อยยังคงเป็นระนาบภายหลังการเปลี่ยนแปลงรูปทรง (Deformation)

ค. ละทิ้งผลกระทบจากการเปลี่ยนแปลงรูปทรงเนื่องจากแรงเฉือน

ง. วัสดุที่ประกอบเป็นโครงสร้างเป็นแบบเอกพันธ์ (Homogeneous) มีคุณสมบัติเหมือนกันทุกทิศทาง (Isotropic) และมีความยืดหยุ่นเชิงเส้น (Linear Elastic)

จ. โครงสร้างมีการเปลี่ยนแปลงรูปทรงน้อย (Small Deformation) ในแต่ละขั้นของแรงกระทำที่เพิ่มขึ้น (Incremental Step Loading)

#### 2.2 รายละเอียดทั่วไปเกี่ยวกับโครงข้อแข็ง

โครงข้อแข็ง คือ โครงสร้างที่มีจุดเชื่อมต่อที่แข็งแรงระหว่างชิ้นส่วนย่อย (Members) จุดเชื่อมต่อดังกล่าวเรียกว่า โหนด (Nodes) และเนื่องจากชิ้นส่วนย่อยมีความขรุขระ ดังนั้นในการเขียนแบบจำลองของโครงข้อแข็งจะใช้สัญลักษณ์เส้นตรงแทนชิ้นส่วนย่อยและใช้สัญลักษณ์จุดแทนโหนด โครงข้อแข็งจำแนกออกได้เป็น 2 ชนิดตามขนาดมิติของโครงสร้างคือ โครงข้อแข็ง 2 มิติ หรือโครงข้อแข็งแบบระนาบ (Plane Frames) และ โครงข้อแข็ง 3 มิติ (Space Frames)

##### 2.2.1 ระบบแกนพิกัด (Coordinate Systems)

ในขั้นตอนการวิเคราะห์โครงสร้างมีการใช้ตัวแปรที่เป็นปริมาณเวกเตอร์หลายตัว เช่น แรงกระทำที่โหนด (Nodal Forces) แรงที่ปลายชิ้นส่วนย่อย (Member End Forces) หรือ การเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของโหนด (Node Displacements) ค่าตัวแปรเหล่านี้มีทั้งขนาดและทิศทาง จึงจำเป็นต้องแตกองค์ประกอบของค่าตัวแปรเหล่านี้ในทิศทางของแกนอ้างอิง เรียกว่า ระบบพิกัด ระบบพิกัดสามารถจำแนกได้ 2 ระบบ คือ

1. ระบบพิกัดโครงสร้าง (Global Coordinate System) เป็นระบบพิกัดสำหรับอ้างอิงกับตัวแปรเวกเตอร์ที่เกี่ยวข้องกับโหนด กำหนดให้ใช้สัญลักษณ์  $x$   $y$   $z$  แทนแกนทั้ง 3 ในระบบพิกัดโครงสร้าง ค่าตัวแปรที่อ้างอิงกับระบบพิกัดโครงสร้างได้แก่ ค่าการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของโหนด ค่าแรงกระทำที่โหนด (Nodal Forces) ซึ่งจำแนกได้ 2 ส่วนคือ แรงภายนอกที่กระทำที่โหนด และ แรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ

2. ระบบพิกัดชิ้นส่วนย่อย (local Coordinate System) เป็นระบบพิกัดสำหรับอ้างอิงกับตัวแปรเวกเตอร์ที่เกี่ยวข้องกับชิ้นส่วนย่อย ค่าตัวแปรที่อ้างอิงกับระบบพิกัดชิ้นส่วนย่อยได้แก่ ค่าแรงดัดที่ปลายชิ้นส่วนย่อย พิจารณารูปที่ 2.1 กำหนดให้เส้น  $AB$  คือชิ้นส่วนย่อยใดๆ  $A$  แทนโหนดเริ่มต้น  $B$  แทนโหนดปลาย กำหนดให้  $x'$   $y'$   $z'$  แทนแกนทั้ง 3 ในระบบพิกัดชิ้นส่วนย่อย

ข้อกำหนดสำหรับทิศของแกนในระบบพิกัดชิ้นส่วนย่อยที่ใช้ในงานวิจัยนี้เป็นดังนี้

ก. แกน  $x'$  มีทิศทางพุ่งจากโหนดเริ่มต้นไปยังโหนดปลาย

ข. แกน  $y'$  ให้พิจารณาตามทิศทางของชิ้นส่วนย่อยโดยแบ่งตามกรณีดังนี้

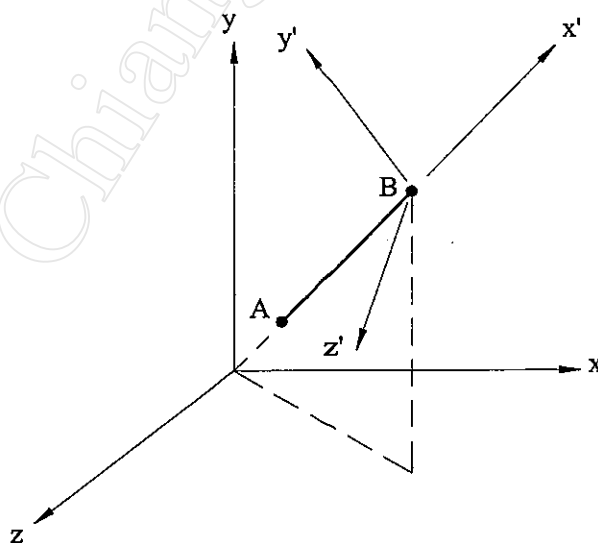
- กรณีที่แนวของชิ้นส่วนย่อยขนานกับแกน  $y$  ให้แกน  $y'$  มีทิศเดียวกับแกน  $x$

- กรณีที่แนวของชิ้นส่วนย่อยอยู่ในระนาบ  $xz$  ให้แกน  $y'$  มีทิศเดียวกับแกน  $y$

- กรณีที่แนวของชิ้นส่วนย่อยไม่ขนานกับ  $y$  และไม่อยู่ในระนาบ  $xz$  ให้แกน  $y'$

มีทิศพุ่งจากโหนดปลายตัดผ่านแกน  $y$  และตั้งฉากกับแกน  $x'$

ค. แกน  $z'$  เป็นแกนที่ตั้งฉากกับระนาบ  $x'y'$  โดยมีทิศทางพิจารณาตามกมือขวา



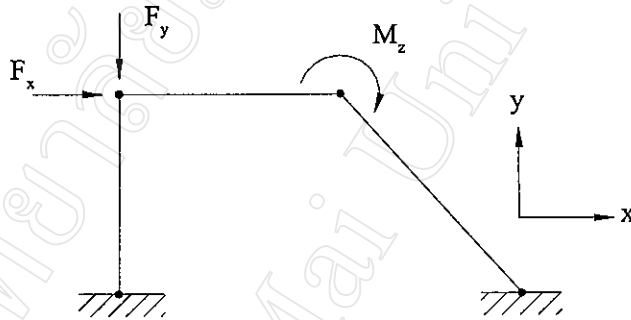
รูปที่ 2.1 แกนพิกัดโครงสร้างและแกนพิกัดชิ้นส่วนย่อย

### 2.2.2 แรงกระทำต่อโครงสร้าง

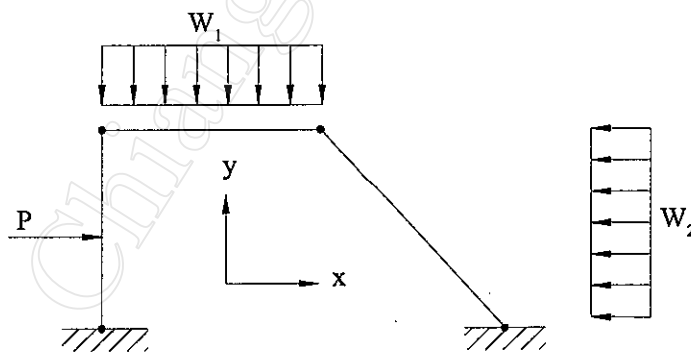
แรงกระทำต่อโครงสร้างนำมาจากปริมาณน้ำหนักบรรทุกคงที่ (Dead Loads) น้ำหนักบรรทุกจร (Live Loads) และแรงลม (Wind Loads)

สำหรับงานวิจัยนี้ได้พิจารณาแรงที่กระทำต่อโครงสร้าง 2 ส่วนคือ

1. แรงกระทำที่โหนด (Nodal Forces) คือแรงในแนวแกนระบบพิกัดโครงสร้างที่กระทำต่อโหนด ประกอบด้วยแรงกระทำเป็นจุด และแรงคัต โดยกำหนดให้แรงที่มีทิศเดียวกับแกนพิกัดโครงสร้างมีขนาดเป็นบวก ยกตัวอย่างแรงกระทำที่โหนดดังรูปที่ 2.2  $F_x$  มีทิศเดียวกับแกน  $x$  จึงมีขนาดเป็นบวก  $F_y$  มีทิศตรงข้ามกับแกน  $y$  จึงมีขนาดเป็นลบ และ  $M_z$  มีทิศตรงข้ามกับแกน  $z$  จึงมีขนาดเป็นลบ



รูปที่ 2.2 แรงกระทำที่โหนด



รูปที่ 2.3 แรงกระทำที่ชิ้นส่วนย่อย

2. แรงกระทำที่ชิ้นส่วนย่อย (Member Forces) คือแรงที่กระทำต่อชิ้นส่วนย่อยซึ่งมีทั้งแรงในแนวแกนระบบพิกัดโครงสร้าง และแรงในแนวแกนระบบพิกัดชิ้นส่วนย่อย โดยในงานวิจัยนี้ได้พิจารณาแรงกระทำต่อชิ้นส่วนย่อย 2 แบบคือ แรงกระทำเป็นจุด และแรงกระจายสม่ำเสมอ

ดังรูปที่ 2.3  $W_1$  เป็นแรงกระจายสม่ำเสมอในระบบพิกัดชิ้นส่วนย่อย  $W_2$  เป็นแรงกระจายสม่ำเสมอในระบบพิกัดชิ้นโครงสร้าง และ  $P$  เป็นแรงกระทำเป็นจุด

ก่อนจะนำค่าแรงกระทำต่อชิ้นส่วนย่อยไปวิเคราะห์ จะต้องการมีทำการคำนวณเพื่อแปลงค่าแรงดังกล่าวให้เป็นแรงกระทำที่ปลายชิ้นส่วนย่อยก่อน โดยใช้สมการซึ่งแสดงไว้ในตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1 การแปลงค่าแรงกระทำต่อชิ้นส่วนย่อยให้เป็นแรงกระทำที่ปลายชิ้นส่วนย่อย กรณีแรงกระจายสม่ำเสมอกระทำต่อชิ้นส่วนย่อย

แรงในระบบพิกัดโครงสร้าง	แรงในระบบพิกัดชิ้นส่วนย่อย
$f_1 = W_G l_1 / 2$ $f_2 = W_G l_1 / 2$ $f_3 = -W_G l_1^2 / 12$ $f_4 = W_G l_1^2 / 12$	$f'_1 = W_L l / 2$ $f'_2 = W_L l / 2$ $f'_3 = -W_L l^2 / 12$ $f'_4 = W_L l^2 / 12$

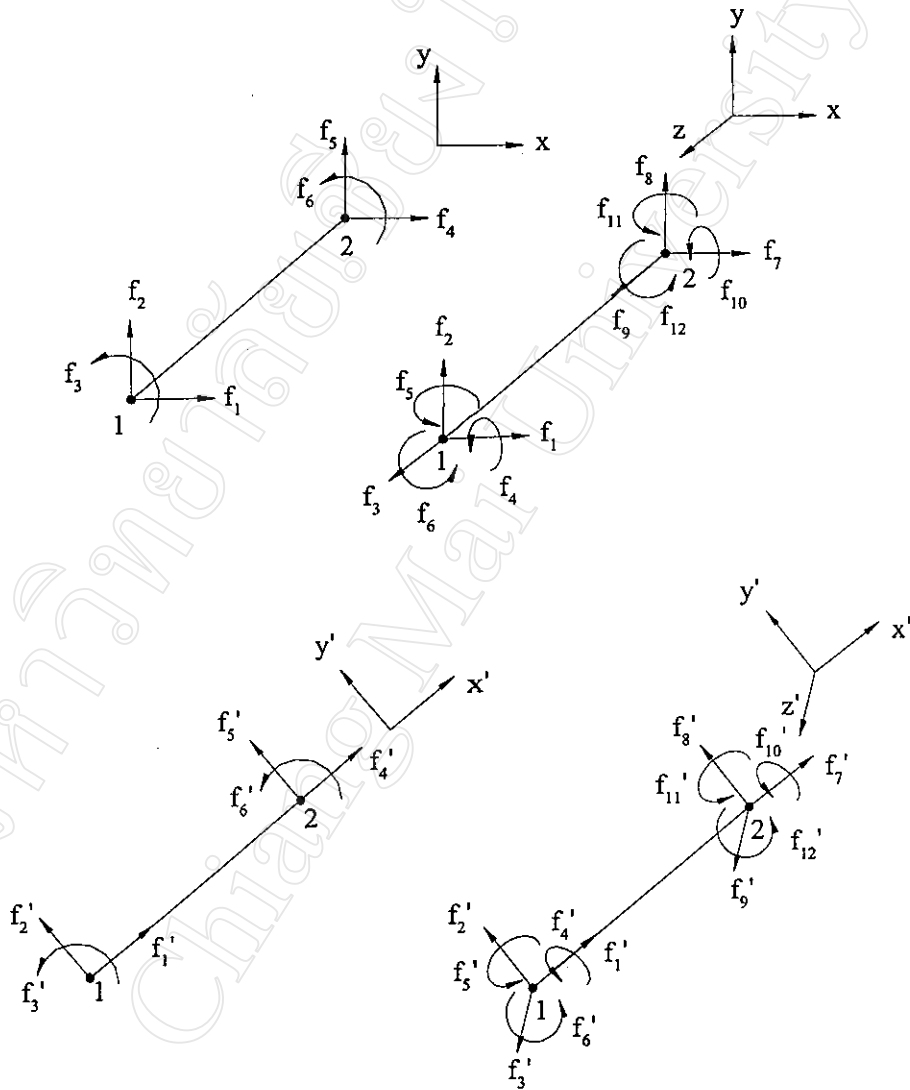
กรณีแรงกระทำเป็นจุดกระทำต่อชิ้นส่วนย่อย

แรงในระบบพิกัดโครงสร้าง	แรงในระบบพิกัดชิ้นส่วนย่อย
$f_1 = P_G (l_1 - a_1) / l_1$ $f_2 = P_G a_1 / l_1$ $f_3 = -P_G a_1^2 (l_1 - a_1) / l_1^2$ $f_4 = P_G (l_1 - a_1)^2 a_1 / l_1^2$	$f'_1 = P_L (l - a) / l$ $f'_2 = P_L a / l$ $f'_3 = -P_L a^2 (l - a) / l^2$ $f'_4 = P_L (l - a)^2 a / l^2$

แรงกระทำที่ปลายชิ้นส่วนย่อยที่ได้จะเป็นแรงในระบบพิกัดโครงสร้างหรือแรงในระบบพิกัดชิ้นส่วนย่อยอยู่ที่ว่าแรงกระทำต่อชิ้นส่วนย่อยที่นำมาแปลงนั้นเป็นแรงในระบบพิกัดใด หากเป็นแรงกระทำที่ปลายชิ้นส่วนย่อยในระบบพิกัดโครงสร้างจะใช้แทนด้วยสัญลักษณ์  $f$  ส่วน

แรงกระทำที่ปลายชิ้นส่วนย่อยในระบบพิกัดชิ้นส่วนย่อยจะใช้แทนด้วยสัญลักษณ์  $f$  การแปลง  $f$  ให้เป็น  $f'$  จะต้องมีเมทริกซ์แปลงค่า (Transformation Matrix)  $L$  ดังสมการที่ (2.1) สำหรับรายละเอียดของเมทริกซ์แปลงค่า  $L$  จะกล่าวถึงในหัวข้อ 2.2.4

$$f = L^T f' \tag{2.1}$$



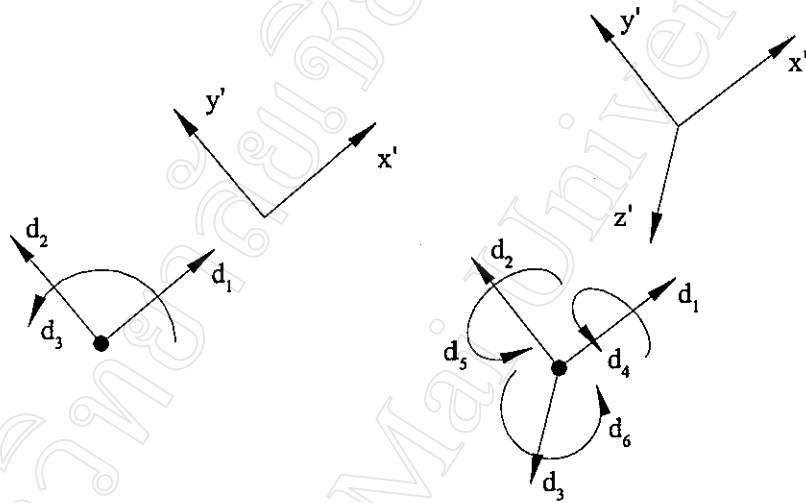
(ก) โครงข้อแข็ง 2 มิติ

(ข) โครงข้อแข็ง 3 มิติ

รูปที่ 2.4 แรงกระทำที่ปลายชิ้นส่วนย่อยในระบบพิกัดโครงสร้าง  $f$  และในระบบพิกัดชิ้นส่วนย่อย  $f'$

สำหรับโครงข้อแข็ง 2 มิติขนาดของเวกเตอร์  $f$  หรือ  $f'$  เท่ากับ 6 ส่วนโครงข้อแข็ง 3 มิติขนาดของเวกเตอร์  $f$  หรือ  $f'$  เท่ากับ 12 ดังแสดงในรูปที่ 2.4

เวกเตอร์แรงกระทำต่อโครงสร้าง  $F$  เกิดจากการรวมแรงกระทำที่โหนด และแรงกระทำที่ปลายชิ้นส่วนย่อยในระบบพิกัดโครงสร้าง  $f$  ทั้งหมด ขนาดของ  $F$  จะเท่ากับผลคูณของจำนวนโหนดในโครงสร้างกับจำนวนดีกรีความอิสระ (Degree of Freedom; DOF) สำหรับโครงข้อแข็ง 2 มิติ ในแต่ละโหนดจะมี DOF เท่ากับ 3 ส่วนโครงข้อแข็ง 3 มิติในแต่ละโหนดจะมี DOF เท่ากับ 6 ดังแสดงในรูปที่ 2.5



(ก) DOF ของโครงข้อแข็ง 2 มิติ

(ข) DOF ของโครงข้อแข็ง 3 มิติ

รูปที่ 2.5 DOF ในระบบพิกัดย่อย

### 2.2.3 การเปลี่ยนแปลงตำแหน่ง (Displacements)

เมื่อโครงสร้างได้รับแรงกระทำจะมีการเปลี่ยนแปลงเกิดขึ้นภายในโครงสร้าง โดยการเปลี่ยนแปลงดังกล่าวสามารถจำแนกออกเป็น 2 แบบคือ

1. การเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของโหนด (Node Displacements) เป็นการเปลี่ยนแปลงของโหนดตามแนวของ DOF ในระบบพิกัดโครงสร้าง

พิจารณารูปที่ 2.6 การเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของโหนดสำหรับโครงข้อแข็ง 2 มิติที่มีจำนวน DOF เท่ากับ 3 ที่โหนด  $i$  ใดๆ กำหนดให้ใช้สัญลักษณ์  $U_{3i-2}$  และ  $U_{3i-1}$  แทนการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของโหนดในแนวแกน  $x$  และแกน  $y$  ตามลำดับ และกำหนดให้  $U_{3i}$  แทนการหมุนรอบแกน  $z$

สำหรับโครงข้อแข็ง 3 มิติ เนื่องจากมีจำนวน DOF เท่ากับ 6 สำหรับโหนด  $i$  ใดๆ กำหนดให้ใช้สัญลักษณ์  $U_{6i-5}$ ,  $U_{6i-4}$  และ  $U_{6i-3}$  แทนการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของโหนดในแนวแกน  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ตามลำดับ และกำหนดให้  $U_{6i-2}$ ,  $U_{6i-1}$  และ  $U_{6i}$  แทนการหมุนรอบแกน  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ตามลำดับ

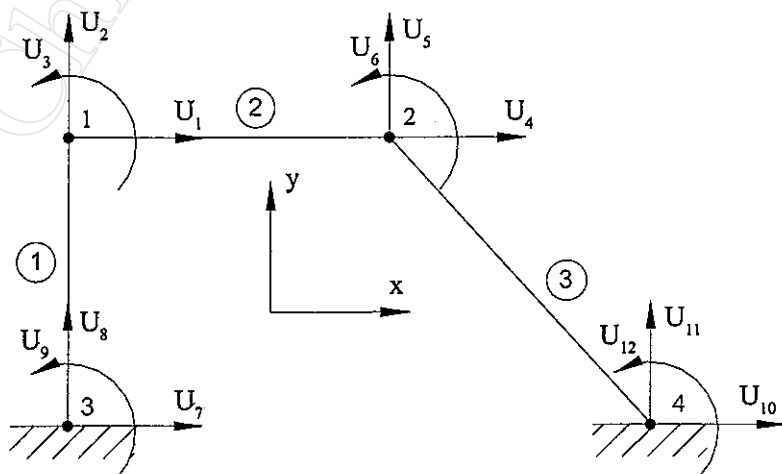
เวกเตอร์การเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของโหนดทั้งหมดในโครงสร้าง  $U$  เป็นการรวมค่าการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของโหนดทั้งหมดในระบบพิกัดโครงสร้าง แสดงดังสมการที่ (2.2)

$$U = [U_1 \ U_2 \ \dots \ U_{3N}]^T \quad (\text{สำหรับโครงข้อแข็ง 2 มิติ}) \quad (2.2a)$$

และ

$$U = [U_1 \ U_2 \ \dots \ U_{6N}]^T \quad (\text{สำหรับโครงข้อแข็ง 3 มิติ}) \quad (2.2b)$$

เมื่อ  $N$  คือจำนวนโหนดทั้งหมดของโครงสร้าง



รูปที่ 2.6 การเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของโหนด

2. การเปลี่ยนแปลงรูปทรงของชิ้นส่วนย่อย (Member Deformations) เป็นการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งตามแนวของ DOF ที่ปลายโหนดทั้ง 2 ข้างของชิ้นส่วนย่อย ซึ่งมีทั้งการเปลี่ยนแปลงในระบบพิกัดโครงสร้าง และการเปลี่ยนแปลงในระบบพิกัดชิ้นส่วนย่อย ดังรูปที่ 2.7

เวกเตอร์การเปลี่ยนแปลงรูปทรงของชิ้นส่วนย่อยในระบบพิกัดโครงสร้าง  $u$  และในระบบพิกัดชิ้นส่วนย่อย  $u'$  มีรายละเอียดดังสมการ (2.3) และ (2.4)

$$u = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5 \ u_6]^T \quad (\text{สำหรับ โครงข้อแข็ง 2 มิติ}) \quad (2.3a)$$

และ

$$u = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5 \ u_6 \ u_7 \ u_8 \ u_9 \ u_{10} \ u_{11} \ u_{12}]^T \quad (\text{สำหรับ โครงข้อแข็ง 3 มิติ}) \quad (2.3b)$$

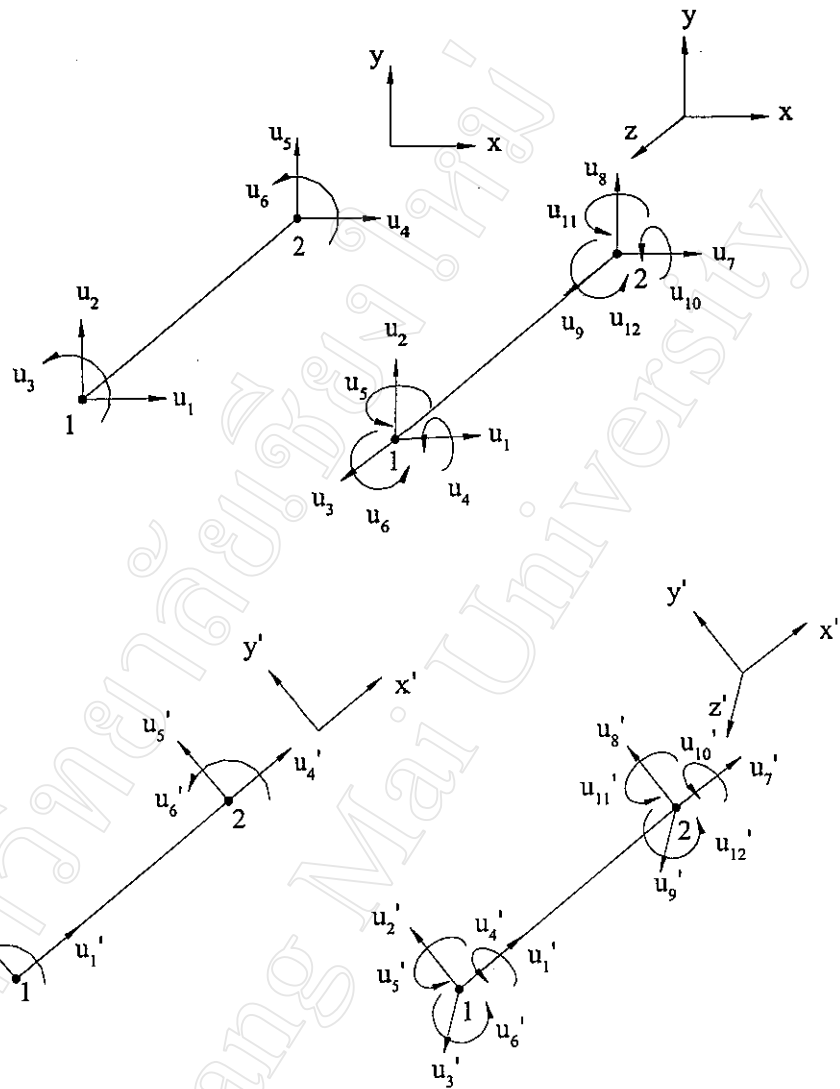
$$u' = [u'_1 \ u'_2 \ u'_3 \ u'_4 \ u'_5 \ u'_6]^T \quad (\text{สำหรับ โครงข้อแข็ง 2 มิติ}) \quad (2.4a)$$

และ

$$u' = [u'_1 \ u'_2 \ u'_3 \ u'_4 \ u'_5 \ u'_6 \ u'_7 \ u'_8 \ u'_9 \ u'_{10} \ u'_{11} \ u'_{12}]^T \quad (\text{สำหรับ โครงข้อแข็ง 3 มิติ}) \quad (2.4b)$$

สำหรับความสัมพันธ์ของ  $u$  และ  $u'$  เป็นดังสมการ (2.5)

$$u' = L u \quad (2.5)$$



(ก) โครงงข้อแข็ง 2 มิติ

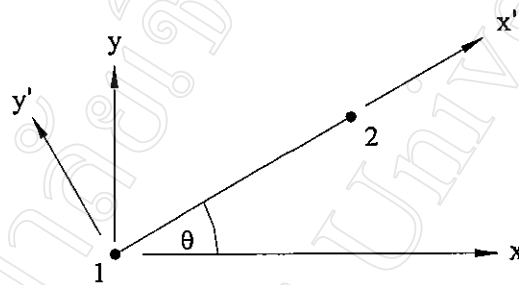
(ข) โครงงข้อแข็ง 3 มิติ

รูปที่ 2.7 การเปลี่ยนแปลงรูปทรงของชิ้นส่วนย่อย

### 2.2.4 เมตริกซ์แปลงค่า (Transformation Matrix)

ดังที่ได้กล่าวไว้แล้วว่า ก่อนจะนำปริมาณต่างๆที่เป็นค่าในระบบพิกัดย่อยมาวิเคราะห์นั้น จะต้องแปลงให้ค่าดังกล่าวอยู่ในระบบเดียวกันนั่นคือระบบพิกัดโครงสร้าง โดยใช้เมตริกซ์แปลงค่า (Transformation Matrix)  $L$

เมตริกซ์แปลงค่า  $L$  เป็นเมตริกซ์ที่ได้จากความสัมพันธ์ของแกนพิกัดชิ้นส่วนย่อยกับแกนพิกัดโครงสร้าง สำหรับโครงข้อแข็ง 2 มิติ แกนพิกัดย่อยคือ แกน  $x'$  และ  $y'$  กับแกนพิกัดโครงสร้าง  $x$  และ  $y$  มีความสัมพันธ์โดยทำมุม  $\theta$  ดังรูปที่ 2.8

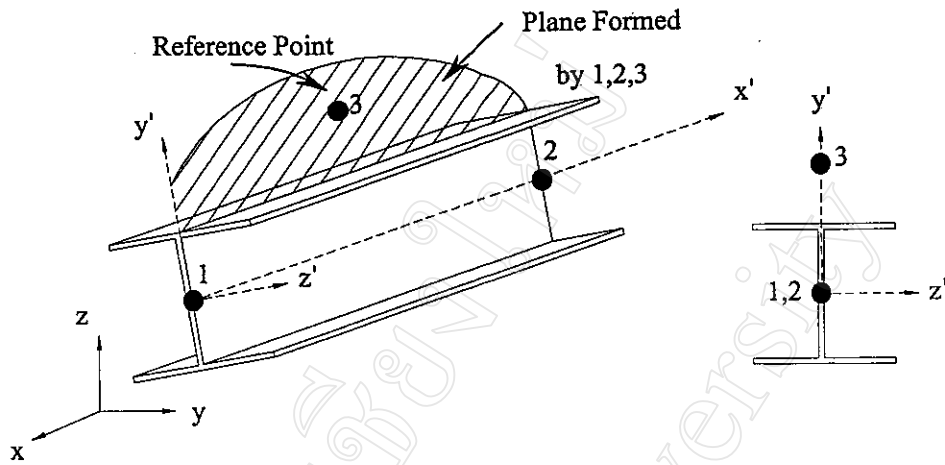


รูปที่ 2.8 ความสัมพันธ์ของแกนพิกัดชิ้นส่วนย่อยกับแกนพิกัดโครงสร้างสำหรับโครงข้อแข็ง 2 มิติ

ขนาดของเมตริกซ์  $L$  เท่ากับ  $(6 \times 6)$  และมีรูปแบบดังสมการที่ (2.6) โดยที่  $l = \cos \theta$  และ  $m = \sin \theta$

$$L = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m & l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

ก่อนจะถึงขั้นตอนการหาเมตริกซ์  $L$  สำหรับโครงข้อแข็ง 3 มิติ จะขออธิบายถึงแนวทางในการหาแกนพิกัดชิ้นส่วนย่อย ในที่นี้จะใช้วิธีการสร้างโหนดอ้างอิง (Reference Node) ให้แก่ชิ้นส่วนย่อย ทำให้แต่ละชิ้นส่วนย่อยมีโหนด 3 โหนด คือ โหนดต้น โหนดปลาย และ โหนดอ้างอิง เราใช้โหนดทั้ง 3 ในการสร้างระนาบชิ้น โดยเป็นระนาบเดียวกับระนาบ  $x'y'$  ดังรูปที่ 2.9



รูปที่ 2.9 การกำหนดโหนดอ้างอิงในชั้นส่วนย่อยของโครงข้อแข็ง 3 มิติ

โดยกำหนดค่า  $(x_1, y_1, z_1)$   $(x_2, y_2, z_2)$  และ  $(x_3, y_3, z_3)$  เป็นค่าพิกัดโหนดของโหนดต้น โหนดปลาย และ โหนดอ้างอิง ตามลำดับ

กำหนดให้  $V_x$  เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของแกน  $x'$  หาได้จากสมการดังนี้

$$V_x = [l_1 \ m_1 \ n_1]^T \quad (2.7)$$

เมื่อ

$$l_1 = \frac{x_2 - x_1}{l_e} \quad m_1 = \frac{y_2 - y_1}{l_e} \quad n_1 = \frac{z_2 - z_1}{l_e} \quad (2.8)$$

$$\text{โดยที่ } l_e = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

ในทำนองเดียวกันเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางจากโหนด 1 ถึงโหนด 3  $V_{13}$  หาได้จากสมการดังนี้

$$V_{13} = \begin{bmatrix} \frac{x_3 - x_1}{l_{13}} & \frac{y_3 - y_1}{l_{13}} & \frac{z_3 - z_1}{l_{13}} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

เมื่อ  $l_{13}$  เป็นระยะจากโหนด 1 ถึงโหนด 3

จากรูปที่ 2.9 ผลคูณเชิงเวกเตอร์ระหว่าง  $V_x$  กับ  $V_{13}$  หาด้วยขนาดของผลคูณเวกเตอร์ดังกล่าว จะให้ค่าเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวแกน  $z'$   $V_z$  ดังสมการที่ (2.10)

$$\mathbf{V}_z = [l_3 \ m_3 \ n_3]^T = \frac{\mathbf{V}_{x'} \times \mathbf{V}_{13}}{|\mathbf{V}_{x'} \times \mathbf{V}_{13}|} \quad (2.10)$$

ส่วนเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวแกน  $y'$   $\mathbf{V}_y$  หาได้จากสมการดังนี้

$$\mathbf{V}_y = [l_2 \ m_2 \ n_2]^T = \mathbf{V}_z \times \mathbf{V}_{x'} \quad (2.11)$$

เมตริกซ์  $\mathbf{L}$  สำหรับโครงข้อแข็ง 3 มิติ เป็นเมตริกซ์มีขนาด  $(12 \times 12)$  ภายในประกอบด้วยเมตริกซ์ย่อย เรียกว่า เมตริกซ์โคซายน์ทิศทาง (Direction Cosines)  $\lambda$  ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

โดย  $\lambda$  เป็นเมตริกซ์ ที่ประกอบขึ้นจากเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวแกน  $x' y' z'$  มีรายละเอียดดังนี้

$$\lambda = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

### 2.3 แนวทางแก้ปัญหาโดยวิธีการพลังงานศักย์ (Potential Energy Approach)

พลังงานศักย์รวม (Total Potential Energy)  $\Pi$  เป็นผลรวมระหว่างงานภายใน (Internal Work)  $U$  และ งานภายนอก (External Work)  $W$  แสดงได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\Pi = U + W \quad (2.14)$$

สำหรับ โครงข้อแข็งยืดหยุ่น รายละเอียดของ  $U$  และ  $W$  เป็นดังนี้

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \quad (2.15)$$

$$W = -\mathbf{U}^T \mathbf{F} \quad (2.16)$$

เมื่อ  $\mathbf{F}$  เป็นเวกเตอร์แรงกระทำต่อโครงสร้าง และ  $\mathbf{U}$  เป็นเวกเตอร์การเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของโครงสร้างโดยรายละเอียดข้อเวกเตอร์ดังกล่าวแสดงไว้ในหัวข้อ 2.2.2 และ 2.2.3 ตามลำดับ ส่วนค่า  $\mathbf{K}$  ที่ปรากฏในสมการ (2.15) คือ เมทริกซ์สติฟเนสของโครงสร้าง (Structure Stiffness Matrix) ซึ่งได้จากการรวมเมทริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วนย่อย (Element Stiffness Matrix)  $\mathbf{k}$  สำหรับรายละเอียดของเมทริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วนย่อย  $\mathbf{k}$  จะกล่าวถึงในหัวข้อต่อไป

จากสมการ (2.14) เมื่อนำหลักการพลังงานศักย์ต่ำสุด (Principle of Minimum Potential Energy) มาใช้จะได้

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{U}} = \mathbf{K} \mathbf{U} - \mathbf{F} = 0 \quad (2.17)$$

สมการ (2.17) เมื่อนำมาจัดรูปใหม่เป็น  $\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F}$  เราเรียกสมการนี้ว่า สมการสมดุล (Equilibrium Equation) สมการสมดุลนี้จะใช้เป็นสมการหลักสำหรับการแก้สมการเมทริกซ์ในขั้นตอนการวิเคราะห์โครงสร้าง

## 2.4 เมตริกซ์สติฟเนส (Stiffness Matrix)

ค่าสติฟเนสเป็นความสามารถต้านทานการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นในโครงสร้าง สำหรับเมตริกซ์สติฟเนสที่จะกล่าวถึงนี้ได้จำแนกออกเป็น 2 ส่วนคือ เมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วนย่อยและเมตริกซ์สติฟเนสของโครงสร้าง ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

### 2.4.1 เมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วนย่อย (Element Stiffness Matrix)

รายละเอียดและขนาดของเมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วนย่อย  $k'$  สำหรับโครงสร้างแต่ละประเภทจะแตกต่างกันออกไป สำหรับโครงข้อแข็งแบบ 2 มิติ จะมีขนาดของเมตริกซ์  $k'$  เท่ากับ  $(6 \times 6)$  ส่วนโครงข้อแข็งแบบ 3 มิติ จะมีขนาดของเมตริกซ์  $k'$  เท่ากับ  $(12 \times 12)$

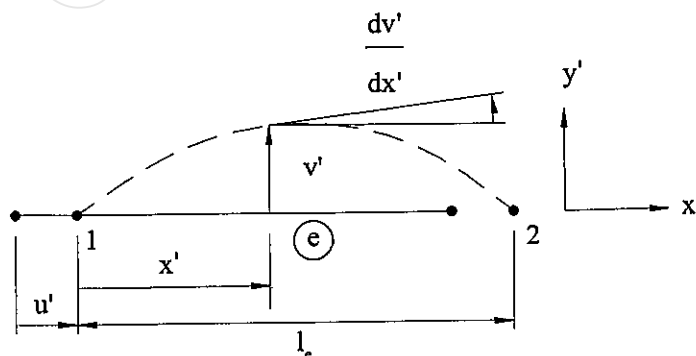
เนื่องจากงานวิจัยนี้เป็นการวิเคราะห์โครงข้อแข็งยึดหยุ่นแบบไม่เป็นเชิงเส้นทางเรขาคณิต ดังนั้นเมื่อนำผลของความไม่เป็นเชิงเส้นทางเรขาคณิตมาพิจารณาในขั้นตอนการวิเคราะห์โครงสร้าง จะทำให้เมตริกซ์  $k'$  แบ่งออกเป็น 2 ส่วน คือ เมตริกซ์สติฟเนสแบบยึดหยุ่น (Elastic Stiffness Matrix) ของชิ้นส่วนย่อย  $k'_e$  และเมตริกซ์สติฟเนสแบบเรขาคณิต (Geometric Stiffness Matrix) ของชิ้นส่วนย่อย  $k'_g$  ดังสมการต่อไปนี้

$$k' = k'_e + k'_g \quad (2.18)$$

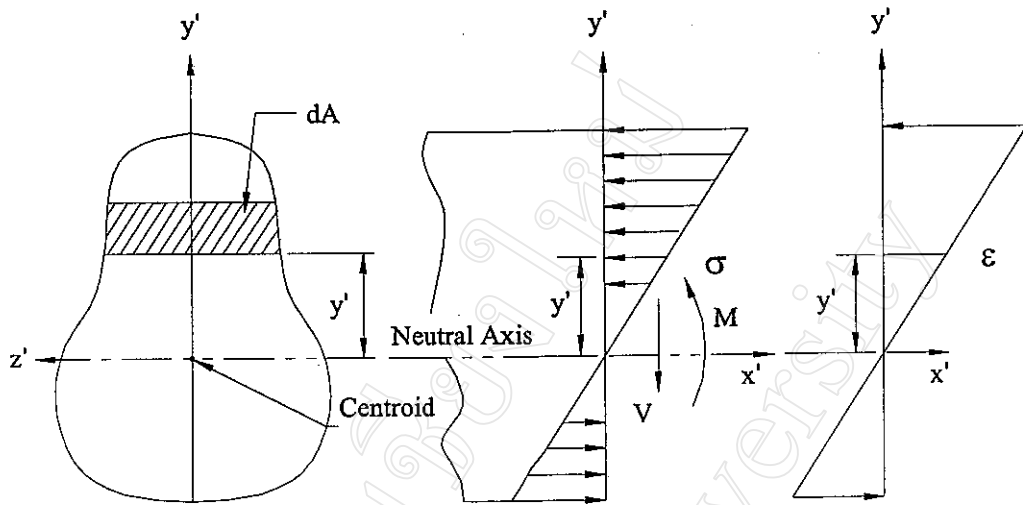
#### ก. ค่าเมตริกซ์สติฟเนสแบบยึดหยุ่นของชิ้นส่วนย่อย (Elastic Stiffness Matrix)

ค่าเมตริกซ์สติฟเนสแบบยึดหยุ่นของชิ้นส่วนย่อย  $k'_e$  สำหรับโครงข้อแข็ง 2 มิติ มีขั้นตอนการหาดังต่อไปนี้

พิจารณาชิ้นส่วนย่อยในโครงข้อแข็ง 2 มิติ ดังรูปที่ 2.10 กำหนดให้  $u'$  เป็นการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งตามแนวแกน  $x'$  ของชิ้นส่วนย่อย  $v'$  เป็นการเปลี่ยนแปลงรูปทรงของชิ้นส่วนย่อย และ  $dv'/dx'$  เป็นความชันของส่วนโค้ง ณ ตำแหน่ง  $x'$  ใดๆ โดยมีความยาวคือ  $l_e$  เมื่อพิจารณาหน้าตัดของชิ้นส่วนย่อยดังกล่าวจะมีการกระจายของความเค้นและความเครียดดังแสดงในรูปที่ 2.11



รูปที่ 2.10 การเปลี่ยนแปลงรูปทรงของชิ้นส่วนย่อย ณ ตำแหน่ง  $x'$  ใดๆ



รูปที่ 2.11 หน้าตัดของชิ้นส่วนย่อย การกระจายความเค้น และความเครียด

โดยข้อสมมุติฐานเบื้องต้นคือ โครงสร้างมีการเปลี่ยนแปลงรูปทรงน้อย (Small Deformation) เมื่อใช้ทฤษฎีพื้นฐานของคาน (Elementary Beam Theory) จะได้สมการดังต่อไปนี้

$$\sigma = -\frac{M}{I_z} y' \quad (2.19)$$

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{du'}{dx'} \quad (2.20)$$

$$\frac{d^2 v'}{dx'^2} = \frac{M}{EI} \quad (2.21)$$

เมื่อ

$\sigma$  คือ ค่าความเค้น (Normal Stress)

$\epsilon$  คือ ค่าความเครียด (Normal Strain)

$M$  คือ ค่าแรงดัด (Bending Moment)

$v$  คือ ค่าการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของแนวกึ่งกลางแกน (Centroidal Axis) ณ ตำแหน่ง  $x'$  ใดๆ

$I_z$  คือ ค่าโมเมนต์อินเนอร์เซีย (Moment of Inertia) ของหน้าตัดรอบแกน  $z'$

$E$  คือ ค่าโมดูลัสยืดหยุ่น (Modulus of Elasticity)

$y'$  คือ ระยะใด ๆ จากแนวกึ่งกลางของหน้าตัด

$A$  คือ พื้นที่หน้าตัด

ผลจากความเค้นและความเครียดทำให้เกิดพลังงานภายในชิ้นส่วนย่อย เรียกว่า พลังงานความเครียด  $U_e$  ซึ่งสามารถแสดงได้ดังสมการต่อไปนี้

$$dU_e = \frac{1}{2} \int_A \sigma \epsilon \, dA \, dx' \quad (2.22)$$

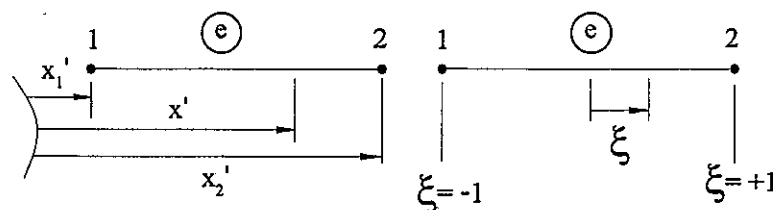
โดยแยกพิจารณาเป็น 2 ส่วนคือ พลังงานเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงตำแหน่ง  $u'$  และพลังงานเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงรูปทรง  $v'$  ดังนี้

$$U_e = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{d^2 v'}{dx'^2} \right)^2 dx' + \frac{1}{2} \int_0^l EA \left( \frac{du'}{dx'} \right)^2 dx' \quad (2.23)$$

เนื่องจากค่า  $u'$  และ  $v'$  เป็นค่าการเปลี่ยนแปลงรูปทรงของชิ้นส่วนย่อยใดๆ ในระบบพิกัดชิ้นส่วนย่อย ดังนั้นเพื่อให้การพิจารณาค่าดังกล่าวอยู่ในระบบเดียวกัน จึงแปลงให้อยู่ในรูปของสมการทางคณิตศาสตร์ เรียกว่า ฟังก์ชันรูปทรง (Shape Function) โดยปรับค่าพิกัด  $x'$  ของชิ้นส่วนย่อยให้เป็นค่า  $\xi$  ในระบบพิกัดธรรมชาติซึ่งมีรูปแบบดังแสดงในรูปที่ 2.12 และมีความสัมพันธ์ของ  $x'$  และ  $\xi$  ดังนี้

$$\xi = \frac{2}{x_2' - x_1'} (x' - x_1') - 1 \quad (2.24)$$

เมื่อ  $x_1'$  และ  $x_2'$  แทนค่าพิกัดของโหนด 1 และ โหนด 2 ของระบบพิกัดย่อย และ  $x'$  แทนค่าพิกัดของจุดใดๆ ที่สนใจบนชิ้นส่วนย่อยของระบบพิกัดย่อย



รูปที่ 2.12 ความสัมพันธ์ระหว่างค่า  $x'$  ในระบบพิกัดย่อย และค่า  $\xi$  ในระบบพิกัดธรรมชาติ (Natural Coordinate System) Chandrupatla (1997)

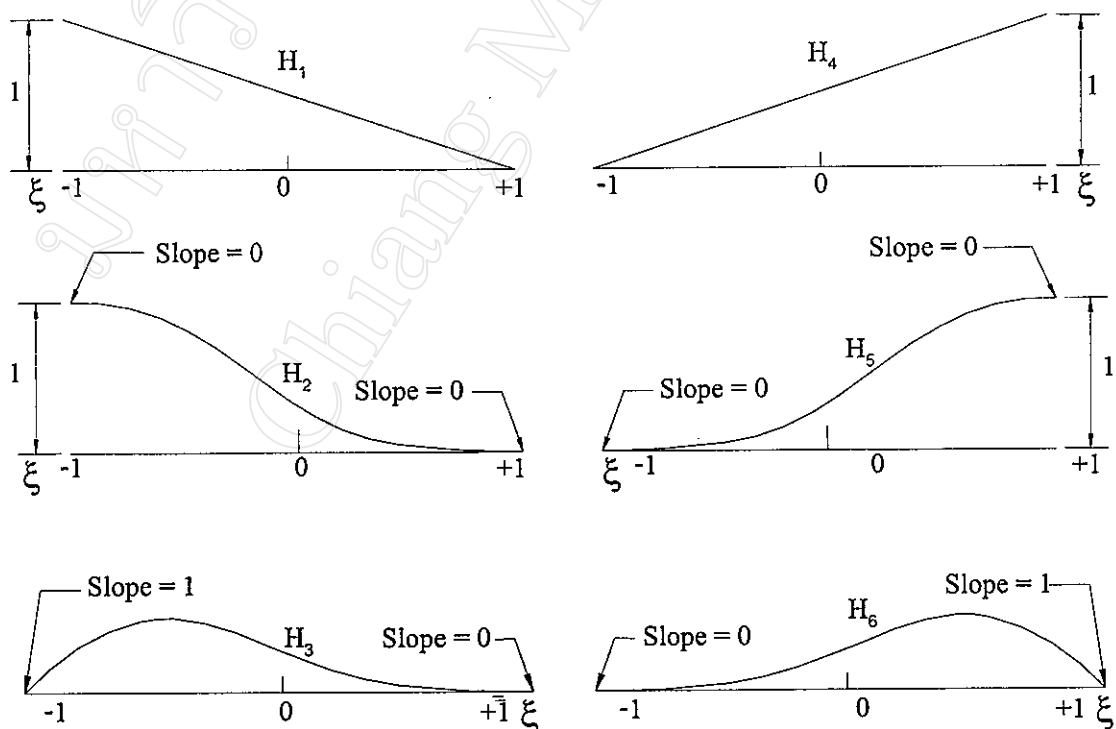
กำหนดให้ฟังก์ชันรูปทรงเฮอริมีต (Hermite Shape Function) เป็นค่าฟังก์ชันรูปทรงของชิ้นส่วนในสำหรับ โครงข้อแข็ง ค่าฟังก์ชันดังกล่าวมีความสัมพันธ์ในเทอมของค่า  $\xi$  โดยกำหนดค่า  $\xi$  จากโหนดเริ่มต้นถึงโหนดปลายของชิ้นส่วนย่อยด้วยค่า -1 ถึง +1 ดังแสดงในรูปที่ 2.13 ค่าฟังก์ชันนี้สามารถเขียนในรูปสมการพหุนามกำลังสาม โดยมีรูปแบบดังนี้

$$H_i = a_i + b_i \xi + c_i \xi^2 + d_i \xi^3 \quad i=1,2,3,4,5,6 \quad (2.25)$$

ตารางที่ 2.2 เงื่อนไขที่ปลายของฟังก์ชันรูปทรง  $H_i$  และ  $H_i'$

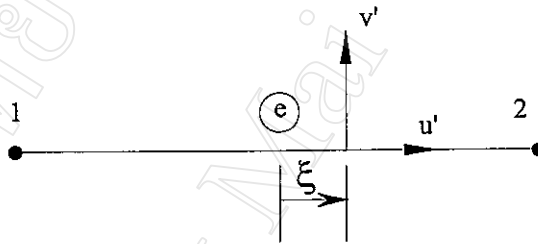
	$H_1$	$H_1'$	$H_2$	$H_2'$	$H_3$	$H_3'$	$H_4$	$H_4'$	$H_5$	$H_5'$	$H_6$	$H_6'$
$\xi=-1$	1	-1/2	1	0	0	1	0	1/2	0	0	0	0
$\xi=+1$	0	-1/2	0	0	0	0	1	1/2	1	0	0	1

โดยกำหนดเงื่อนไขที่ปลายทั้ง 2 ของฟังก์ชันรูปทรงให้สอดคล้องกับค่าดังแสดงในตารางที่ 2.2 เมื่อ  $H_i'$  คืออนุพันธ์ของ  $H_i$  เทียบกับ  $\xi$  เราสามารถหาค่าฟังก์ชันรูปทรงเฮอริมีตได้ดังสมการ (2.26)



รูปที่ 2.13 ฟังก์ชันรูปทรงเฮอริมีต (Hermite Shape Function) Chandrupatla (1997)

$$\begin{aligned}
H_1 &= \frac{1-\xi}{2} \\
H_2 &= \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi) \quad \text{หรือ} \quad \frac{1}{4}(2-3\xi+\xi^3) \\
H_3 &= \frac{1}{4}(1-\xi)^2(\xi+1) \quad \text{หรือ} \quad \frac{1}{4}(1-\xi-\xi^2+\xi^3) \\
H_4 &= \frac{1+\xi}{2} \\
H_5 &= \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi) \quad \text{หรือ} \quad \frac{1}{4}(2+3\xi-\xi^3) \\
H_6 &= \frac{1}{4}(1+\xi)^2(\xi-1) \quad \text{หรือ} \quad \frac{1}{4}(-1-\xi+\xi^2+\xi^3)
\end{aligned} \tag{2.26}$$



รูปที่ 2.14 การเปลี่ยนแปลงตำแหน่งที่จุดใด ๆ บนชิ้นส่วนย่อย

กำหนดให้การเปลี่ยนแปลงตำแหน่ง  $u'$  และ  $v'$  ที่จุด  $\xi$  ใด ๆ ในชิ้นส่วนย่อย ดังรูปที่ 2.14 ความสัมพันธ์ของ  $u'$  และ  $v'$  ในเทอมของฟังก์ชันรูปทรงเฮอรัมิตดัดและการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งที่โหนดทั้ง 2 ปลายของชิ้นส่วนย่อยมีดังนี้

$$u'(\xi) = H_1 u_1' + H_4 u_4' \tag{2.27}$$

$$v'(\xi) = H_2 u_2' + H_3 \left( \frac{dv'}{d\xi} \right)_1 + H_5 u_5' + H_6 \left( \frac{dv'}{d\xi} \right)_2 \tag{2.28}$$

เมื่อ  $\left( \frac{dv'}{d\xi} \right)_1$  และ  $\left( \frac{dv'}{d\xi} \right)_2$  คือค่าความชันของชิ้นส่วนย่อย ณ ตำแหน่งที่ 1 และ 2 ในระบบพิกัดย่อยซึ่งสัมพันธ์กับเทอมของ  $\xi$  เมื่อใช้กฎลูกโซ่จะได้

$$\frac{dv'}{d\xi} = \left( \frac{dv'}{dx'} \right) \left( \frac{dx'}{d\xi} \right) \quad (2.29)$$

ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่ง  $x'$  ใด ๆ ในชิ้นส่วนย่อยกับ  $\xi$  คือ

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1-\xi}{2} x_1' + \frac{1+\xi}{2} x_2' \\ &= \frac{x_1' + x_2'}{2} + \frac{x_2' - x_1'}{2} \xi \\ dx' &= \frac{l_e}{2} d\xi \end{aligned} \quad (2.30)$$

เมื่อความยาวของชิ้นส่วนย่อย  $l_e = x_2' - x_1'$  แทนค่า  $dx'$  จากสมการ (2.30) ลงในสมการ (2.29) จะได้

$$\frac{dv'}{d\xi} = \frac{l_e}{2} \frac{dv'}{dx'} \quad (2.31)$$

โดยค่า  $(dv'/dx')$  ณ ตำแหน่ง 1 และ 2 คือ  $u_3'$  และ  $u_6'$  ตามลำดับ ดังนั้นจากสมการ (2.28) จะได้

$$v'(\xi) = H_2 u_2' + \frac{l_e}{2} H_3 u_3' + H_5 u_5' + \frac{l_e}{2} H_6 u_6' \quad (2.32)$$

นำสมการ (2.27) และสมการ (2.32) มาเขียนใหม่ได้เป็น

$$u'(\xi) = H_u u_u' \quad (2.33)$$

เมื่อ  $H_u = [H_1, H_4]$  และ  $u_u' = [u_1', u_4']^T$

$$v'(\xi) = H_v u_v' \quad (2.34)$$

เมื่อ  $H_v = \left[ H_2, \frac{l_e}{2} H_3, H_5, \frac{l_e}{2} H_6 \right]$  และ  $u_v' = [u_2', u_3', u_5', u_6']^T$

จากสมการ (2.31) หาอนุพันธ์อันดับ 2 จะได้  $\frac{d^2 v'}{dx'^2} = \frac{4}{l_e^2} \frac{d^2 v'}{d\xi^2}$

เมื่อแทนค่า  $v'(\xi) = \mathbf{H}_v \mathbf{u}_v'$  จะได้

$$\left( \frac{d^2 v'}{dx'^2} \right)^2 = \mathbf{u}_v'^T \frac{16}{l_e^4} \left( \frac{d^2 \mathbf{H}_v}{d\xi^2} \right)^T \left( \frac{d^2 \mathbf{H}_v}{d\xi^2} \right) \mathbf{u}_v' \quad (2.35)$$

$$\text{โดยที่ } \left( \frac{d^2 \mathbf{H}_v}{d\xi^2} \right) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \xi, & \frac{-1+3\xi}{2} \frac{l_e}{2}, & -\frac{3}{2} \xi, & \frac{1+3\xi}{2} \frac{l_e}{2} \end{bmatrix}$$

เมื่อนำค่าจากสมการ (2.35) แทนลงในเทอมแรกของสมการ (2.23) แล้วทำการอินทิเกรตตลอดความยาว ผลที่ได้แสดงดังสมการ (2.36) โดย  $\mathbf{k}_v'$  คือเมตริกสตีเฟนเนสของชิ้นส่วนย่อยสำหรับการเปลี่ยนแปลงรูปทรง  $v'$  โดย  $\mathbf{k}_v'$  มีรายละเอียดดังสมการ (2.37)

$$\frac{1}{2} \int_0^{l_e} EI \left( \frac{d^2 v'}{dx'^2} \right)^2 dx' = \frac{1}{2} \mathbf{u}_v'^T \mathbf{k}_v' \mathbf{u}_v' \quad (2.36)$$

$$\mathbf{k}_v' = \frac{EI}{l_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ 6l_e & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ -12 & -6l_e & 12 & -6l_e \\ 6l_e & 2l_e^2 & -6l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

สำหรับสมการ (2.27) เมื่อแทนค่า  $H_1$  และ  $H_4$  จากนั้นหาอนุพันธ์เทียบกับ  $\xi$  จะได้

$$\frac{du'}{d\xi} = \frac{-u_1' + u_4'}{2}$$

แทนค่า  $d\xi = 2(dx'/l_e)$  จะได้

$$\frac{du'}{dx'} = \frac{-u_1' + u_4'}{l_e}$$

หรือ

$$\frac{du'}{dx'} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{u_u'}{l_e} \quad (2.38)$$

แทนสมการ (2.38) ไปในเทอมที่ 2 ของสมการ (2.23) แล้วทำการอินทิเกรตตลอดความยาวชิ้นส่วนย่อย จะได้

$$\frac{1}{2} \int_0^{l_e} EA \left( \frac{du'}{dx'} \right)^2 dx' = \frac{1}{2} u_u'^T k_u' u_u' \quad (2.39)$$

เมื่อ  $k_u'$  คือเมตริกสติเฟนสของชิ้นส่วนย่อยสำหรับการเปลี่ยนแปลงตำแหน่ง  $u'$  มีรายละเอียดดังนี้

$$k_u' = \frac{EA}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

ดังนั้นเมื่อรวมสมการ (2.36) และสมการ (2.39) จะได้พลังงานความเครียดในชิ้นส่วนย่อย  $U_e$  ของโครงข้อแข็ง 2 มิติเป็นดังสมการ (2.41) โดยค่า  $k_e'$  มีรายละเอียดแสดงในสมการ (2.42)

$$U_e = \frac{1}{2} u'^T k_e' u' \quad (2.41)$$

$$k_e' = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_e} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l_e} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{l_e^3} & \frac{6EI_z}{l_e^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{l_e^3} & \frac{6EI_z}{l_e^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{l_e^2} & \frac{4EI_z}{l_e} & 0 & -\frac{6EI_z}{l_e^2} & \frac{2EI_z}{l_e} \\ -\frac{EA}{l_e} & 0 & 0 & \frac{EA}{l_e} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{l_e^3} & -\frac{6EI_z}{l_e^2} & 0 & \frac{12EI_z}{l_e^3} & -\frac{6EI_z}{l_e^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{l_e^2} & \frac{2EI_z}{l_e} & 0 & -\frac{6EI_z}{l_e^2} & \frac{4EI_z}{l_e} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

สำหรับค่า  $k_e'$  สำหรับโครงข้อแข็ง 3 มิติ สามารถนำค่า  $k_e'$  ของโครงข้อแข็ง 2 มิติ มาประยุกต์ โดยเพิ่มระนาบ  $x'z'$  ในระบบพิกัดย่อยของโครงข้อแข็ง 3 มิติ และพิจารณาผลของแรงบิดร่วมด้วย จะได้ค่าเมตริกซ์  $k_e'$  สำหรับโครงข้อแข็ง 3 มิติ มีรายละเอียดดังสมการ (2.43)

$$k_e' = \begin{bmatrix} k_1' & k_2' \\ k_2'^T & k_3' \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

เมื่อ  $k_1'$ ,  $k_2'$  และ  $k_3'$  เป็นเมตริกซ์ย่อยขนาด  $(6 \times 6)$  มีรูปแบบดังสมการ (2.44a) (2.44b) และ (2.44c) ตามลำดับ

$$k_1' = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_e} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{l_e^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l_e^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l_e^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{l_e^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l_e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_y}{l_e} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l_e} \end{bmatrix} \quad (2.44a)$$

Sym

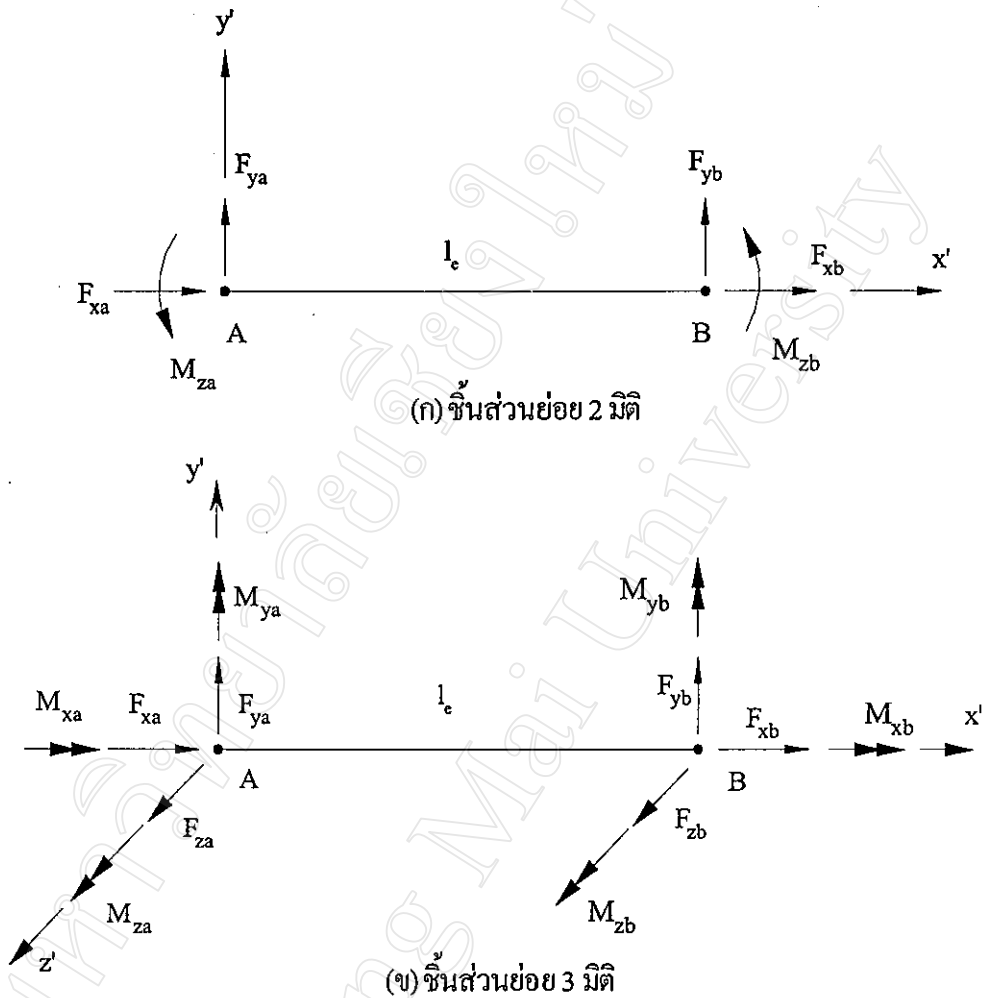
$$k_2' = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_e} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{l_e^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l_e^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{l_e^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{l_e^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l_e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l_e^2} & 0 & \frac{2EI_y}{l_e} & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_z}{l_e^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{l_e} \end{bmatrix} \quad (2.44b)$$

$$\mathbf{k}_3' = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_c} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{l_c^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{l_c^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l_c^3} & 0 & \frac{6EI_y}{l_c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l_c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l_c^2} & 0 & \frac{4EI_y}{l_c} & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_z}{l_c^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l_c} \end{bmatrix} \quad (2.44c)$$

Sym

- เมื่อ
- $I_y$  คือ ค่าโมเมนต์อินเนอร์เซีย (Moment of Inertia) ของหน้าตัดรอบแกนพิกัดย่อย  $y'$
  - $J$  คือ ค่าคงที่ของการบิด (Torsional Constant) รอบแกนพิกัดย่อย  $x'$
  - $G$  คือ ค่าโมดูลัสแรงเฉือน (Shear Modulus)

ข. เมตริกซ์สติฟเนสแบบเรขาคณิตของชิ้นส่วนย่อย (Geometric Stiffness Matrix)



รูปที่ 2.15 แรงภายในเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงรูปทรงของชิ้นส่วนย่อย Yang (1994)

ค่าเมตริกซ์สติฟเนสแบบเรขาคณิตของชิ้นส่วนย่อย  $k_g'$  เป็นเมตริกซ์ที่นำมาบวกกับเมตริกซ์สติฟเนสแบบยืดหยุ่นของชิ้นส่วนย่อย  $k_e'$  เพื่อปรับปรุงสติฟเนสหลังจากที่โครงสร้างมีการเปลี่ยนแปลงรูปทรง Yang (1994)

$k_g'$  เป็นค่าที่คำนวณจากแรงภายในที่เกิดขึ้นเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงรูปทรงของชิ้นส่วนย่อย โดยแรงดังกล่าวเป็นแรงที่ปลายชิ้นส่วนย่อยมีรายละเอียดดังแสดงในรูปที่ 2.15

รายละเอียดของ  $k_g'$  สำหรับโครงข้อแข็ง 2 มิติ และ 3 มิติแสดงไว้ในสมการ (2.45) และ (2.47) ตามลำดับ

$$\mathbf{k}_g' = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{g1}' & \mathbf{k}_{g2}' \\ \mathbf{k}_{g2}'^T & \mathbf{k}_{g3}' \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

โดย  $\mathbf{k}_{g1}'$   $\mathbf{k}_{g2}'$  และ  $\mathbf{k}_{g3}'$  เป็นเมตริกซ์ขนาด (6 x 6) มีรายละเอียดดังนี้

$$\mathbf{k}_{g1}' = \begin{bmatrix} \frac{F_{xb}}{l_e} & 0 & -\frac{M_{za}}{l_e} \\ \frac{6 F_{xb}}{5l_e} + \frac{12I_z F_{xb}}{Al_e^3} & \frac{F_{xb}}{10} + \frac{6I_z F_{xb}}{Al_e^2} \\ \text{Sym} & \frac{2l_e F_{xb}}{15} + \frac{4I_z F_{xb}}{Al_e} \end{bmatrix} \quad (2.46a)$$

$$\mathbf{k}_{g2}' = \begin{bmatrix} \frac{F_{xb}}{l_e} & 0 & -\frac{M_{zb}}{l_e} \\ 0 & -\frac{6 F_{xb}}{5l_e} - \frac{12I_z F_{xb}}{Al_e^3} & \frac{F_{xb}}{10} + \frac{6I_z F_{xb}}{Al_e^2} \\ \frac{M_{za}}{l_e} & -\frac{F_{xb}}{10} - \frac{6I_z F_{xb}}{Al_e^2} & -\frac{l_e F_{xb}}{30} + \frac{2I_z F_{xb}}{Al_e} \end{bmatrix} \quad (2.46b)$$

$$\mathbf{k}_{g3}' = \begin{bmatrix} \frac{F_{xb}}{l_e} & 0 & \frac{M_{zb}}{l_e} \\ \frac{6 F_{xb}}{5l_e} + \frac{12I_z F_{xb}}{Al_e^3} & \frac{F_{xb}}{10} - \frac{6I_z F_{xb}}{Al_e^2} \\ \text{Sym} & \frac{2l_e F_{xb}}{15} + \frac{4I_z F_{xb}}{Al_e} \end{bmatrix} \quad (2.46c)$$

$$\mathbf{k}_g' = \begin{bmatrix}
 a & 0 & 0 & 0 & -d & -e & -a & 0 & 0 & 0 & -n & -o \\
 b & 0 & d & g & k & 0 & -b & 0 & n & -g & k \\
 & c & e & h & g & 0 & 0 & -c & o & -h & -g \\
 & & f & i & l & 0 & -d & -e & -f & -i & -l \\
 & & & j & 0 & d & -g & h & -i & p & -q \\
 & & & & m & e & -k & -g & -l & q & r \\
 & & & & & a & 0 & 0 & 0 & n & o \\
 & & & & & & b & 0 & -n & g & -k \\
 & & & & & & & c & -o & h & g \\
 & & & & & & & & f & i & l \\
 \text{S y m} & & & & & & & & & j & 0 \\
 & & & & & & & & & & m
 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

အ

$$a = \frac{F_{xb}}{l_e}, \quad b = \frac{6F_{xb}}{5l_e} + \frac{12F_{xb}I_z}{Al_e^3}, \quad c = \frac{6F_{xb}}{5l_e} + \frac{12F_{xb}I_y}{Al_e^3}, \quad d = \frac{M_{ya}}{l_e}$$

$$e = \frac{M_{za}}{l_e}, \quad f = \frac{F_{xb}J}{Al_e}, \quad g = \frac{M_{xa}}{l_e}, \quad h = \frac{F_{xb}}{10} + \frac{6F_{xb}I_y}{Al_e^2}, \quad i = \frac{M_{za} + M_{zb}}{6}$$

$$j = \frac{2F_{xb}l_e}{15} + \frac{4F_{xb}I_y}{Al_e}, \quad k = \frac{F_{xb}}{10} + \frac{6F_{xb}I_z}{Al_e^2}, \quad l = \frac{M_{ya} + M_{yb}}{6}$$

$$m = \frac{2F_{xb}l_e}{15} + \frac{4F_{xb}I_z}{Al_e}, \quad n = \frac{M_{yb}}{l_e}, \quad o = \frac{M_{zb}}{l_e}$$

$$p = \frac{F_{xb}l_e}{30} + \frac{2F_{xb}I_y}{Al_e}, \quad q = \frac{M_{xb}}{2}, \quad r = \frac{F_{xb}l_e}{30} + \frac{2F_{xb}I_z}{Al_e}$$

### 2.4.2 เมตริกซ์สติฟเนสของโครงสร้าง (Structure Stiffness Matrix)

เนื่องจากค่าเมตริกซ์  $k'$  เป็นค่าในระบบพิกัดชิ้นส่วนย่อย ดังนั้นจึงต้องแปลงให้อยู่ในระบบพิกัดโครงสร้าง โดยใช้สมการ (2.48)

$$k = L^T k' L \quad (2.48)$$

จากนั้นจึงนำค่า  $k$  ในแต่ละชิ้นมารวมกันตามความสัมพันธ์ของโหนดที่เชื่อมต่อเป็นเมตริกซ์สติฟเนสของโครงสร้าง  $K$  ดังนี้

$$K \leftarrow \sum k$$

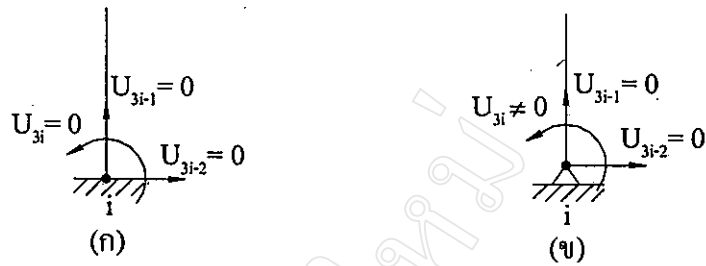
### 2.5 เงื่อนไขขอบเขต (Boundary Condition) และแนวทางแก้ปัญหาโดยใช้ตัวอุปสรรค (Penalty Approach)

เงื่อนไขขอบเขต (Boundary Condition) คือเงื่อนไขที่กำหนดให้แก่โหนดที่เป็นจุดรองรับ โดยจะพิจารณาตามประเภทของจุดรองรับ สำหรับงานวิจัยนี้ได้กำหนดประเภทของจุดรองรับไว้ 3 ประเภท แต่ละประเภทมีเงื่อนไขขอบเขตดังนี้

1. จุดรองรับแบบยึดรั้งทั้งหมด (Fixed Support) คือจุดรองรับที่ยึดรั้งการเคลื่อนตำแหน่งตามแนวแกนพิกัดโครงสร้างทั้ง 3 และยึดรั้งการหมุนรอบแกนพิกัดโครงสร้างทั้ง 3 โดยเงื่อนไขขอบเขตที่โหนด  $i$  ใดๆที่เป็นจุดรองรับแบบยึดรั้งทั้งหมดสำหรับโครงข้อแข็งแบบ 2 มิติ คือ  $U_{3i-2} = 0; U_{3i-1} = 0; U_{3i} = 0$  และเงื่อนไขขอบเขตสำหรับโครงข้อแข็งแบบ 3 มิติ คือ  $U_{6i-5} = 0; U_{6i-4} = 0; U_{6i-3} = 0; U_{6i-2} = 0; U_{6i-1} = 0; U_{6i} = 0$

2. จุดรองรับแบบหมุด (Pinned Support) คือจุดรองรับที่ยึดรั้งเฉพาะการเคลื่อนตำแหน่งตามแนวแกนพิกัดโครงสร้างทั้ง 3 โดยเงื่อนไขขอบเขตที่โหนด  $i$  ใดๆที่เป็นจุดรองรับแบบหมุดสำหรับโครงข้อแข็งแบบ 2 มิติ คือ  $U_{3i-2} = 0; U_{3i-1} = 0$  และเงื่อนไขขอบเขตสำหรับโครงข้อแข็งแบบ 3 มิติ คือ  $U_{6i-5} = 0; U_{6i-4} = 0; U_{6i-3} = 0$

3. จุดรองรับตามเงื่อนไข (Conditional Support) คือจุดรองรับที่ยึดรั้งตามเงื่อนไขที่ผู้ใช้กำหนดเอง ดังนั้นจุดรองรับประเภทนี้จึงไม่มีรูปแบบของเงื่อนไขขอบเขตที่ตายตัว



รูปที่ 2.16 (ก) จุดรองรับแบบยึดรั้งทั้งหมด (ข) จุดรองรับแบบหมุน

การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตสำหรับโครงข้อแข็ง พิจารณาโครงข้อแข็ง 2 มิติในรูปที่ 2.6 โหนดที่เป็นจุดรองรับ คือ โหนดที่ 3 และโหนดที่ 4 และเนื่องจากโหนดทั้ง 2 เป็นจุดรองรับแบบยึดรั้งทั้งหมด (Fixed Support) ดังนั้นเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดให้แก่ค่าการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งที่โหนดของโครงสร้างนี้ คือ  $U_7 = 0; U_8 = 0; U_9 = 0$  และ  $U_{10} = 0; U_{11} = 0; U_{12} = 0$

หลังจากการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตแล้ว ขั้นตอนต่อมาคือการแก้ไขเมตริกซ์สติฟเนสของโครงสร้าง  $K$  โดยปรับปรุงเฉพาะส่วนที่เกี่ยวข้องกับเงื่อนไขขอบเขต ในขั้นตอนนี้ได้เลือกใช้วิธีแก้ปัญหาโดยใช้ตัวอุปสรรค (Penalty Approach) เนื่องจากวิธีการดังกล่าวเหมาะสมสำหรับประยุกต์ใช้ในโปรแกรมคอมพิวเตอร์ และเป็นวิธีที่สะดวกในการแก้ไขเมตริกซ์สติฟเนส  $K$  โดยไม่กระทบขนาดของเมตริกซ์ ซึ่งมีหลักการดังนี้

จากสมการ  $KU = F$  เมื่อนำมาขยายจะได้รูปแบบสมการดังต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} K_{11} + C & K_{12} & K_{13} & \cdots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} + C & K_{23} & \cdots & K_{2N} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} + C & \cdots & K_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{N1} & K_{N2} & K_{N3} & \cdots & K_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 = 0 \\ U_2 = 0 \\ U_3 = 0 \\ \vdots \\ U_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \vdots \\ F_N \end{Bmatrix} \quad (2.49)$$

กำหนด  $K_{11}, K_{22}, K_{33}, \dots, K_{NN}$  เป็นค่าตามแนวทแยงของเมตริกซ์  $K$  ขนาด  $N \times N$   $U_1, U_2, U_3, \dots, U_N$  เป็นค่าการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งในเวกเตอร์  $U$  และ  $F_1, F_2, F_3, \dots, F_N$  เป็นค่าแรงกระทำต่อโครงสร้างในเวกเตอร์  $F$

ในที่นี้กำหนดให้เงื่อนไขขอบเขตคือ  $U_1 = 0; U_2 = 0$  และ  $U_3 = 0$  จากนั้นทำการแก้ไขค่าตามแนวทแยงของเมตริกซ์  $K$  ในตำแหน่งที่ 1, 2, และ 3 โดยบวกด้วยค่าคงที่  $C$  ซึ่งเป็นตัวอุปสรรคที่มีขนาดใหญ่ สามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$C = \text{Max}(K_{11}, K_{22}, K_{33}, \dots, K_{NN}) \times 10^6 \quad (2.50)$$

เมื่อแก้ไขเมตริกซ์  $K$  แล้ว จึงทำการแก้สมการ (2.49) เพื่อหาเวกเตอร์  $U$  จากนั้นเมื่อต้องการหาค่าแรงภายในชิ้นส่วนย่อย  $f$  ให้ทำการแปลงค่าเวกเตอร์  $U$  ในระบบพิกัดโครงสร้างให้เป็นเวกเตอร์  $u'$  ของแต่ละชิ้นส่วนย่อยในระบบพิกัดชิ้นส่วนย่อย แล้วนำไปคูณกับเมตริกซ์  $k'$  จะได้ค่าแรงที่ปลายชิ้นส่วนย่อย  $f$  ดังสมการ (2.51)

$$k' u' = f \quad (2.51)$$

สำหรับค่าแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ (Support Reaction) กำหนดให้  $R$  เป็นเวกเตอร์ค่าแรงปฏิกิริยาแสดงดังสมการ (2.52) มีขนาดเท่ากับจำนวนเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดไว้ สำหรับค่าในเวกเตอร์  $R$  หาได้จากสมการ (2.53)

$$R = [R_1 R_2 R_3 \dots R_r]^T \quad \text{เมื่อ } r \text{ คือจำนวนเงื่อนไขขอบเขต} \quad (2.52)$$

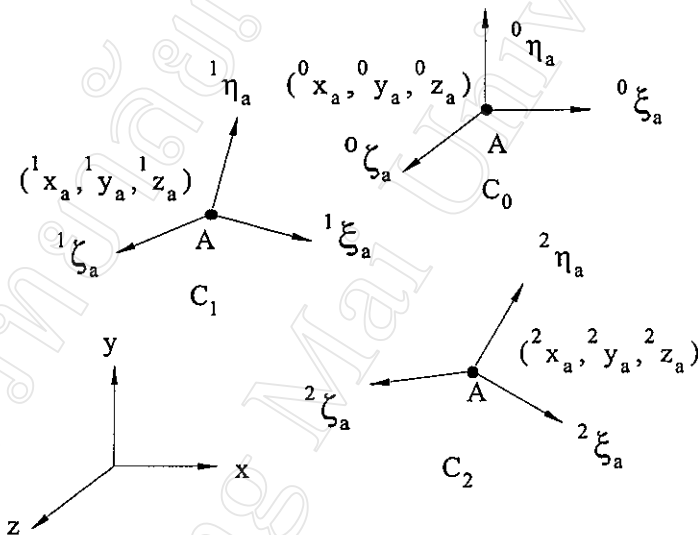
$$R_i = -C(U_{P_i}) \quad (2.53)$$

เมื่อ  $i$  คือ ตำแหน่งใดๆของเวกเตอร์  $R$  โดย  $i = 1, 2, 3, \dots, r$

$P_i$  คือ ตำแหน่งใดๆของเวกเตอร์  $U$  ที่มีเงื่อนไขขอบเขต โดย  $P_i = P_1, P_2, P_3, \dots, P_r$

## 2.6 การแก้ปัญหาโครงข้อแข็งยืดหยุ่นที่มีความไม่เป็นเชิงเส้นทางเรขาคณิต

การวิเคราะห์ที่เพิ่มขึ้นแบบไม่เป็นเชิงเส้น (Incremental Nonlinear Analysis) เป็นวิธีการสำหรับแก้ปัญหาโครงข้อแข็งยืดหยุ่นที่มีความไม่เป็นเชิงเส้นทางเรขาคณิต ก่อนจะกล่าวถึงรายละเอียดของวิธีการดังกล่าว จะขออธิบายถึงรูปแบบของการเคลื่อนที่แบบไม่เป็นเชิงเส้นดังแสดงไว้ในรูปที่ 2.17 ซึ่งเป็นการเคลื่อนที่ของโหนด A ใดๆ การเคลื่อนที่แบบไม่เป็นเชิงเส้นสามารถแยกพิจารณาเป็นสามสถานะดังนี้  $C_0$  คือ สถานะเริ่มต้นที่ยังไม่มีการเปลี่ยนแปลงรูปทรง (Initial Undeformed Configuration)  $C_1$  คือ สถานะที่รู้ค่าคำนวณสุดท้าย (Last Calculated Configuration) และ  $C_2$  คือ สถานะปัจจุบันที่เกิดการเปลี่ยนแปลงรูปทรง (Current Deformed Configuration)



รูปที่ 2.17 การเคลื่อนที่ของโหนด A ในสามสถานะ Yang (1994)

การวิเคราะห์ที่เพิ่มขึ้นแบบไม่เป็นเชิงเส้น จะพิจารณาความสัมพันธ์ของโครงสร้างในสถานะที่ต่อเนื่องกันทีละคู่ โดยเริ่มต้นจากการวิเคราะห์โครงสร้างที่เปลี่ยนแปลงจากสถานะ  $C_0$  ถึง  $C_1$  ซึ่งเป็นการวิเคราะห์โครงสร้างแบบเชิงเส้น ผลที่ได้จากการวิเคราะห์คือ ค่าการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของโครงสร้าง และแรงภายในชิ้นส่วนย่อยจะนำมาปรับปรุงค่าสตีเฟนสของโครงสร้าง จากนั้นจึงทำการวิเคราะห์โครงสร้างที่ปรับปรุงค่าสตีเฟนสแล้วจากสถานะ  $C_1$  ถึง  $C_2$  โดยมีเงื่อนไขของการวิเคราะห์คือ โครงสร้างในสถานะ  $C_2$  จะต้องเป็นโครงสร้างที่มีแรงกระทำภายนอกและแรงภายในสมดุลย์กัน

การวิเคราะห์ที่เพิ่มขึ้นแบบไม่เป็นเชิงเส้น ไม่ใช่การวิเคราะห์ที่เกิดขึ้นและสิ้นสุดในครั้งเดียว แต่เป็นการวิเคราะห์ที่ได้จากการทำซ้ำหลายๆครั้ง ข้อดีของการวิเคราะห์ที่เพิ่มขึ้นแบบไม่เป็นเชิงเส้น คือการแบ่งย่อยปัญหาความไม่เป็นเชิงเส้นซึ่งถือว่าเป็นปัญหาของโครงสร้างที่มีการเปลี่ยน

แปดรูปทรงขนาดใหญ่ (Large Deformations) ให้เป็นปัญหาของโครงสร้างที่มีการเปลี่ยนแปลงรูปทรงขนาดเล็ก (Small Deformations) จากนั้นจึงนำผลของการวิเคราะห์ในแต่ละชั้นที่แบ่งย่อยแล้วมารวมกันกลายเป็นผลวิเคราะห์ปัญหาของโครงสร้างที่มีการเปลี่ยนแปลงรูปทรงขนาดใหญ่ได้  
สำหรับสมการหลักที่ใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้างจากสถานะ  $C_1$  ถึงสถานะ  $C_2$  คือ

$$KU = {}^2F - {}^1F \quad (2.54)$$

เมื่อ  ${}^2F$  และ  ${}^1F$  เป็นเวกเตอร์แรงกระทำต่อโครงสร้างที่สถานะ  $C_2$  และ  $C_1$  ตามลำดับ

ในการแก้สมการของโครงสร้างที่มีความไม่เป็นเชิงเส้นจะใช้กระบวนการที่เรียกว่ากระบวนการทำซ้ำที่เพิ่มขึ้น (Incremental and Iteration Procedures) กระบวนการดังกล่าวเป็นการผนวกกระบวนการเพิ่มขึ้นและกระบวนการทำซ้ำเข้าด้วยกัน โดยกระบวนการเพิ่มขึ้นคือการวิเคราะห์ปัญหาที่แบ่งย่อยแล้วแบบเพิ่มขึ้นทีละชั้น ส่วนกระบวนการทำซ้ำเป็นการทำซ้ำพร้อมกันแก้ไขเพื่อให้ได้คำตอบที่ดีที่สุด ซึ่งกระบวนการทำซ้ำนี้จะเป็นส่วนย่อยของกระบวนการเพิ่มขึ้น  
กระบวนการทำซ้ำที่เพิ่มขึ้นสามารถแบ่งออกเป็น 3 ขั้นตอนหลักดังนี้

1. ขั้นตอนการทำนาย (Predictor Phase) เป็นขั้นตอนการแก้สมการ  $KU = F$  เพื่อหาเวกเตอร์  $U$  และ เวกเตอร์การเปลี่ยนแปลงรูปทรงของชิ้นส่วนย่อย  $u'$

3. ขั้นตอนการปรับแก้ (Corrector Phase) เป็นขั้นตอนการคำนวณหา  ${}^2f$  ซึ่งเป็นเวกเตอร์แรงภายในชิ้นส่วนย่อยในสถานะ  $C_2$  โดยใช้สมการ (2.55) เมื่อ  ${}^1f$  เป็นเวกเตอร์แรงภายในชิ้นส่วนย่อยในสถานะ  $C_1$  และ  $f'_n$  เป็นเวกเตอร์แรงภายในชิ้นส่วนย่อยที่เพิ่มขึ้น (Incremental force) ซึ่งหาได้จากสมการ (2.56) สำหรับค่า  $u'_n$  เป็นเวกเตอร์การเปลี่ยนแปลงรูปทรงโดยธรรมชาติของชิ้นส่วนย่อยซึ่งจะกล่าวถึงวิธีการหา  $u'_n$  ในหัวข้อ 2.6.2

$${}^2f = {}^1f + f'_n \quad (2.55)$$

$$k' u'_n = f'_n \quad (2.56)$$

3. ขั้นตอนตรวจสอบ (Checking Phase) เป็นขั้นตอนสำหรับตรวจสอบความสมดุลของแรงภายในและแรงภายนอกโดยจะกล่าวถึงในหัวข้อ 2.6.3

### 2.6.1 การปรับปรุงเรขาคณิตของชิ้นส่วนย่อย (Updating of Element Geometry)

ในการวิเคราะห์โครงสร้างจากสถานะ  $C_1$  ถึง  $C_2$  เมื่อพิจารณารูปที่ 2.17 จะเห็นว่า โครงสร้างที่เริ่มต้นวิเคราะห์ในสถานะ  $C_1$  ไม่ได้อยู่ในระบบพิกัด โหนดเดิม (สถานะ  $C_0$ ) แต่จะมีการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งไป ดังนั้นก่อนจะทำการวิเคราะห์ต่อไปจึงต้องทำการปรับปรุงเรขาคณิตของชิ้นส่วนย่อย

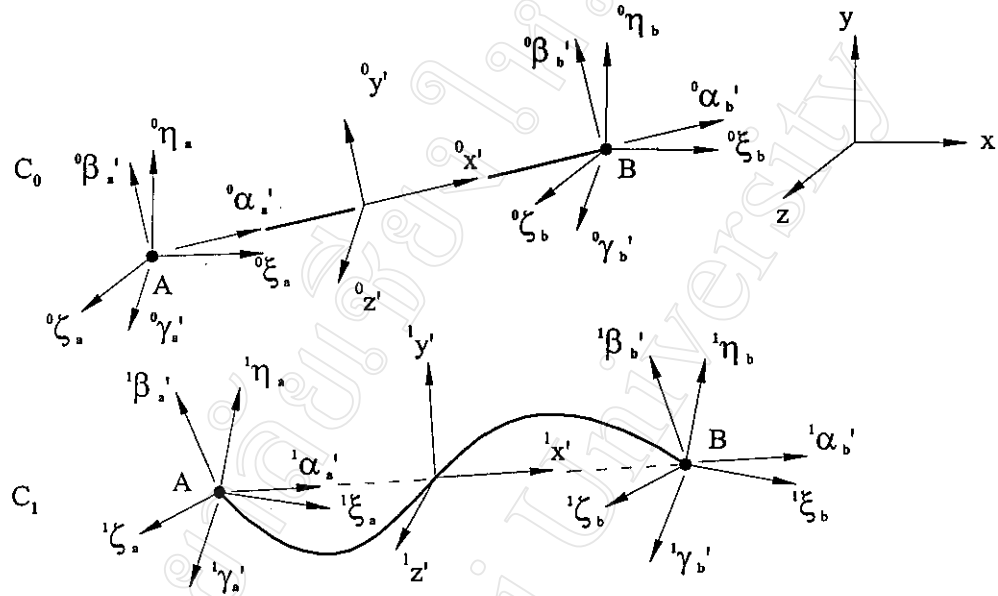
ก่อนจะเข้าสู่ขั้นตอนการปรับปรุงเรขาคณิตของชิ้นส่วนย่อย จะขอกล่าวถึงระบบแกนที่ใช้สำหรับอธิบายการเปลี่ยนแปลงโครงสร้างในแต่ละสถานะ ซึ่งมี 3 แบบได้แก่

1. แกนอ้างอิงของโหนด (Reference Axes of Nodes) เป็นแกนในระบบพิกัดโครงสร้างที่ถูกกำหนดไว้ที่โหนดทุกโหนดภายในโครงสร้าง ในสถานะ  $C_0$  แกนอ้างอิงของโหนดทุกโหนดจะมีทิศทางเดียวกับแกนพิกัดโครงสร้าง  $x y z$  แต่เมื่อโครงสร้างมีการเปลี่ยนแปลงรูปทรงในสถานะ  $C_1$  และ  $C_2$  แกนดังกล่าวจะมีการเปลี่ยนแปลงไปด้วย โดยค่าการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของโหนดในโครงสร้างจะเป็นตัวกำหนดทิศทางของแกนอ้างอิงในสถานะ  $C_1$  และ  $C_2$  สำหรับสัญลักษณ์ที่ใช้แทนแกนอ้างอิงของโหนด A ใดๆ ในสถานะ  $C_0$  คือ  ${}^0\xi_a$ ,  ${}^0\eta_a$  และ  ${}^0\zeta_a$  โดยมีทิศทางอ้างอิงกับแกน  $x y$  และ  $z$  ตามลำดับ ส่วนสัญลักษณ์ของแกนอ้างอิงของโหนดในสถานะ  $C_1$  และ  $C_2$  จะมีรูปแบบคล้ายกันกันเพียงแต่เปลี่ยนสัญลักษณ์ด้วยค่าน้ำจายจาก 0 เป็น 1 และ 2 ตามลำดับ ดังแสดงในรูปที่ 2.18

2. แกนหน้าตัด (Section Axes) เป็นแกนในระบบพิกัดชิ้นส่วนย่อยที่ถูกกำหนดไว้ที่โหนดต้นและโหนดปลายของชิ้นส่วนย่อยทุกๆอันในโครงสร้าง ในสถานะ  $C_0$  แกนหน้าตัดที่โหนดต้นและโหนดปลายของชิ้นส่วนย่อยใดๆจะมีทิศทางเดียวกับแกนพิกัดชิ้นส่วนย่อย  $x' y' z'$  ส่วนในสถานะ  $C_1$  และ  $C_2$  แกนหน้าตัดที่โหนดต้นและโหนดปลายของชิ้นส่วนย่อยจะเปลี่ยนแปลงไปโดยการเปลี่ยนแปลงจะสัมพันธ์กับแกนอ้างอิงของโหนดในสถานะนั้นๆ สัญลักษณ์ที่ใช้แทนแกนหน้าตัดที่โหนดต้นและโหนดปลายของชิ้นส่วนย่อยใดๆในสถานะ  $C_0$  คือ  ${}^0\alpha'_a$ ,  ${}^0\beta'_a$ ,  ${}^0\gamma'_a$  และ  ${}^0\alpha'_b$ ,  ${}^0\beta'_b$ ,  ${}^0\gamma'_b$  โดยมีทิศทางอ้างอิงกับแกน  $x' y'$  และ  $z'$  ตามลำดับ ส่วนสัญลักษณ์ของแกนหน้าตัดที่โหนดต้นและโหนดปลายของชิ้นส่วนย่อยในสถานะ  $C_1$  และ  $C_2$  จะมีรูปแบบคล้ายกันกันเพียงแต่เปลี่ยนสัญลักษณ์ด้วยค่าน้ำจายจาก 0 เป็น 1 และ 2 ตามลำดับ ดังแสดงในรูปที่ 2.18

3. แกนชิ้นส่วนย่อย (Element Axes) เป็นแกนในระบบพิกัดชิ้นส่วนย่อยที่ถูกกำหนดไว้ที่จุดกึ่งกลางชิ้นส่วนย่อยทุกๆอันในโครงสร้าง ในสถานะ  $C_0$  แกนชิ้นส่วนย่อยใดๆก็คือแกนพิกัดชิ้นส่วนย่อย  $x' y' z'$  แต่ในสถานะ  $C_1$  และ  $C_2$  แกนชิ้นส่วนย่อยจะเปลี่ยนแปลงไปโดยการเปลี่ยนแปลงจะสัมพันธ์กับแกนหน้าตัดที่โหนดต้นและโหนดปลายของชิ้นส่วนย่อยในสถานะนั้นๆ สัญลักษณ์ที่ใช้แทนแกนชิ้นส่วนย่อยใดๆในสถานะ  $C_0$  คือ  ${}^0x'$ ,  ${}^0y'$ ,  ${}^0z'$  ส่วนสัญลักษณ์ของแกนชิ้น

ส่วนย่อยในสถานะ  $C_1$  และ  $C_2$  จะมีรูปแบบคล้ายกันกันเพียงแต่เปลี่ยนสัญลักษณ์ด้วยก้านซ้ายจาก 0 เป็น 1 และ 2 ตามลำดับ ดังแสดงในรูปที่ 2.18

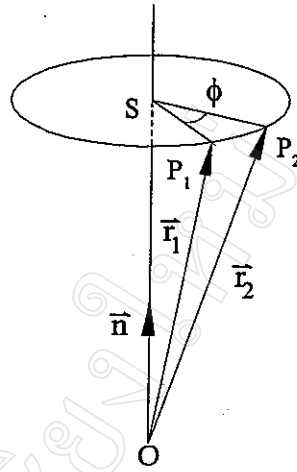


รูปที่ 2.18 แกนที่ใช้อธิบายการเปลี่ยนแปลงโครงสร้างในแต่ละสถานะ

### ก. การปรับปรุงแกนอ้างอิงของโหนด (Updating of Reference Axes of Nodes)

เมื่อโครงสร้างมีการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง ค่าพิกัดของโหนดในโครงสร้างจะมีการเปลี่ยนแปลงไปในแต่ละสถานะ กำหนดให้ค่าพิกัด  $x y z$  ของโหนด A ใดๆ ในสถานะ  $C_0, C_1$  และ  $C_2$  เป็น  $(^0x_a, ^0y_a, ^0z_a)$ ,  $(^1x_a, ^1y_a, ^1z_a)$  และ  $(^2x_a, ^2y_a, ^2z_a)$  ตามลำดับ ในขณะที่เดียวกันแกนอ้างอิงของโหนด A ในสถานะ  $C_1$  และ  $C_2$  จะเปลี่ยนไปด้วย โดยทิศทางของแกนอ้างอิงของโหนด A ในสถานะ  $C_1$  และ  $C_2$  สามารถหาได้โดยใช้สมการการหมุนแบบไฟไนท์ (Finite Rotation Formula) Chen และ Gupta (1989) ซึ่งมีหลักการดังนี้

พิจารณารูปที่ 2.19 กำหนดให้  $\vec{r}_1$  คือ เวกเตอร์ใดๆ ในระนาบ OSP  $\pi$  เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของแกน OS และกำหนดให้  $\vec{r}_2$  คือ เวกเตอร์ที่เกิดจากการหมุนของเวกเตอร์  $\vec{r}_1$  รอบแกน OS เป็นมุม  $\phi$  โดยสามารถหาเวกเตอร์  $\vec{r}_2$  ได้จากความสัมพันธ์ของเวกเตอร์  $\vec{r}_1$  และมุม  $\phi$  ดังสมการ (2.57)



รูปที่ 2.19 แนวคิดของการหมุนแบบไฟไนท์ (Concept of finite Rotation) Yang (1994)

$$\vec{r}_2 = \cos \phi \vec{r}_1 + \sin \phi (\vec{n} \times \vec{r}_1) + (1 - \cos \phi)(\vec{n} \cdot \vec{r}_1)\vec{n} \quad (2.57)$$

เมื่อพิจารณาการเคลื่อนที่ของโหนด A จากสถานะ  $C_0$  ถึง  $C_1$  การเปลี่ยนแปลงตำแหน่งที่เพิ่มขึ้นประกอบด้วย 2 ส่วนคือ การเปลี่ยนแปลงตำแหน่งตามแนวแกน  $\Delta \vec{u}_a$  และ การหมุน  $\Delta \vec{\theta}_a$  ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$\Delta \vec{u}_a = \Delta u_x \vec{i} + \Delta u_y \vec{j} + \Delta u_z \vec{k} \quad (2.58)$$

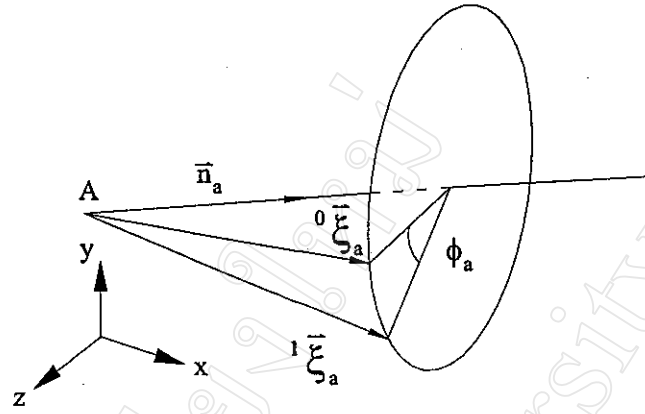
$$\Delta \vec{\theta}_a = \Delta \theta_x \vec{i} + \Delta \theta_y \vec{j} + \Delta \theta_z \vec{k} \quad (2.59)$$

กำหนดให้  $\phi_a$  เป็นขนาดของมุม  $\Delta \vec{\theta}_a$  และ  $\vec{n}_a$  เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของมุม  $\Delta \vec{\theta}_a$

$$\phi_a = |\Delta \vec{\theta}_a| = \sqrt{\Delta \theta_x^2 + \Delta \theta_y^2 + \Delta \theta_z^2} \quad (2.60)$$

$$\vec{n}_a = \frac{\Delta \vec{\theta}_a}{\phi_a} \quad (2.61)$$

กำหนดให้  ${}^0\vec{\xi}_a$ ,  ${}^0\vec{\eta}_a$  และ  ${}^0\vec{\zeta}_a$  เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของแกน  ${}^0\xi_a$ ,  ${}^0\eta_a$  และ  ${}^0\zeta_a$  ตามลำดับ และ  ${}^1\vec{\xi}_a$ ,  ${}^1\vec{\eta}_a$  และ  ${}^1\vec{\zeta}_a$  เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของแกน  ${}^1\xi_a$ ,  ${}^1\eta_a$  และ  ${}^1\zeta_a$  ตามลำดับ



รูปที่ 2.20 การเปลี่ยนแปลงแกนอ้างอิงจากสถานะ  $C_0$  ถึง  $C_1$

จากรูปที่ 2.20 โดยใช้หลักการของการหมุนแบบไฟไนท์จกสมการ (2.57) เพื่อหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของแกนอ้างอิงทั้งสามแกนสำหรับโหนด A ในสถานะ  $C_1$  โดยเทียบจากแกนอ้างอิงในสถานะ  $C_0$  ได้ดังสมการ (2.62)

$${}^1\bar{\xi}_a = \cos \phi_a {}^0\bar{\xi}_a + \sin \phi_a (\bar{n}_a \times {}^0\bar{\xi}_a) + (1 - \cos \phi_a) (\bar{n}_a \cdot {}^0\bar{\xi}_a) \bar{n}_a \quad (2.62a)$$

$${}^1\bar{\eta}_a = \cos \phi_a {}^0\bar{\eta}_a + \sin \phi_a (\bar{n}_a \times {}^0\bar{\eta}_a) + (1 - \cos \phi_a) (\bar{n}_a \cdot {}^0\bar{\eta}_a) \bar{n}_a \quad (2.62b)$$

$${}^1\bar{\zeta}_a = \cos \phi_a {}^0\bar{\zeta}_a + \sin \phi_a (\bar{n}_a \times {}^0\bar{\zeta}_a) + (1 - \cos \phi_a) (\bar{n}_a \cdot {}^0\bar{\zeta}_a) \bar{n}_a \quad (2.62c)$$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อกำหนดให้  ${}^2\bar{\xi}_a$ ,  ${}^2\bar{\eta}_a$  และ  ${}^2\bar{\zeta}_a$  เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของแกน  ${}^2\bar{x}_a$ ,  ${}^2\bar{y}_a$  และ  ${}^2\bar{z}_a$  ตามลำดับ เราสามารถประยุกต์สมการ (2.62) เพื่อหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของแกนอ้างอิงทั้งสามแกนสำหรับโหนด A ในสถานะ  $C_2$  โดยเทียบจากแกนอ้างอิงในสถานะ  $C_1$  โดยแก้ไขสัญลักษณ์ด้วยดัชนีซ้ำจาก 0 เป็น 1 และจาก 1 เป็น 2

สำหรับค่า  $({}^1x_a, {}^1y_a, {}^1z_a)$  ซึ่งเป็นค่าพิกัดของโหนด A ในสถานะ  $C_1$  หาได้จากสมการ (2.63) ขณะเดียวกันค่า  $({}^2x_a, {}^2y_a, {}^2z_a)$  ซึ่งเป็นค่าพิกัดของโหนด A ในสถานะ  $C_2$  หาได้โดยการแก้ไขสัญลักษณ์ด้วยดัชนีซ้ำในสมการ (2.63) จาก 0 เป็น 1 และจาก 1 เป็น 2

$$({}^1x_a, {}^1y_a, {}^1z_a) = ({}^0x_a + \Delta u_x, {}^0y_a + \Delta u_y, {}^0z_a + \Delta u_z) \quad (2.63)$$

ข. การปรับปรุงแกนหน้าตัดและแกนชิ้นส่วนย่อย (Updating of Section Axes and Element Axes)

กำหนดให้  ${}^0\bar{\alpha}_a, {}^0\bar{\beta}_a, {}^0\bar{\gamma}_a$  และ  ${}^0\bar{\alpha}_b, {}^0\bar{\beta}_b, {}^0\bar{\gamma}_b$  เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของแกนหน้าตัด  ${}^0\alpha_a, {}^0\beta_a, {}^0\gamma_a$  และ  ${}^0\alpha_b, {}^0\beta_b, {}^0\gamma_b$  ตามลำดับ และกำหนดให้  ${}^0\bar{x}, {}^0\bar{y}, {}^0\bar{z}$  เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของแกนชิ้นส่วนย่อย  ${}^0x, {}^0y, {}^0z$  โดยทั้งหมดนี้เป็นแกนที่อยู่ในสถานะ  $C_0$  สำหรับแกนในสถานะ  $C_1$  และ  $C_2$  มีรูปแบบคล้ายกันเพียงแต่แก้ไขสัญลักษณ์ด้วยก้านซ้าย จาก 0 เป็น 1 สำหรับแกนในสถานะ  $C_1$  และ 2 สำหรับแกนในสถานะ  $C_2$

เนื่องจากในสถานะ  $C_0$  แกนหน้าตัดของโหนด A มีทิศทางเดียวกับแกนพิกัดชิ้นส่วนย่อย ส่วนแกนอ้างอิงของโหนด A มีทิศทางเดียวกับแกนพิกัดโครงสร้าง ดังนั้นความสัมพันธ์ระหว่างแกนหน้าตัดกับแกนอ้างอิงที่โหนด A ในสถานะ  $C_0$  และความสัมพันธ์ระหว่างแกนพิกัดชิ้นส่วนย่อยกับแกนพิกัดโครงสร้างจึงมีรูปแบบเหมือนกัน โดยสามารถแสดงดังสมการที่ (2.64)

$${}^0\bar{p}_a = {}^0L {}^0\bar{q}_a \quad (\bar{p}' = \bar{\alpha}', \bar{\beta}', \bar{\gamma}'; \quad \bar{q} = \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}) \quad (2.64)$$

เมื่อ  ${}^0\bar{p}_a$  ( $\bar{p}' = \bar{\alpha}', \bar{\beta}', \bar{\gamma}'$ ) คือ แกนของหน้าตัดที่โหนด A ในสถานะ  $C_0$

${}^0\bar{q}_a$  ( $\bar{q} = \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$ ) คือ แกนอ้างอิงที่โหนด A ในสถานะ  $C_0$

${}^0L$  คือ เมตริกซ์แปลงค่าระหว่างแกนชิ้นส่วนย่อยและแกนโครงสร้างสำหรับชิ้นส่วนย่อยใด ๆ ในสถานะ  $C_0$  ขนาด  $(3 \times 3)$  มีรายละเอียดดังนี้

$${}^0L = [ {}^0\bar{\alpha}_a, {}^0\bar{\beta}_a, {}^0\bar{\gamma}_a ] \quad (2.65)$$

โดยสมมติฐานของจุดเชื่อมต่อแข็งแรง (Rigid Joints) นั่นคือการเปลี่ยนแปลงรูปทรงของชิ้นส่วนย่อยจะไม่มีผลกระทบต่อค่าการแปลงค่าระหว่างแกนอ้างอิงกับแกนหน้าตัดของโหนด ดังนั้นความสัมพันธ์ระหว่างแกนหน้าตัดกับแกนอ้างอิงที่โหนด A ในสถานะ  $C_1$  และ  $C_2$  สามารถเขียนได้ดังนี้

$${}^1\bar{p}_a = {}^0L {}^1\bar{q}_a \quad (\bar{p}' = \bar{\alpha}', \bar{\beta}', \bar{\gamma}'; \quad \bar{q} = \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}) \quad (2.66)$$

$${}^2\bar{p}_a = {}^0L {}^2\bar{q}_a \quad (\bar{p}' = \bar{\alpha}', \bar{\beta}', \bar{\gamma}'; \quad \bar{q} = \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}) \quad (2.67)$$

เมื่อ  ${}^1\bar{p}_a$  และ  ${}^2\bar{p}_a$  คือ แกนของหน้าตัดที่โหนด A ในสถานะ  $C_1$  และ  $C_2$  ตามลำดับ

${}^1\bar{q}_a$  และ  ${}^2\bar{q}_a$  คือ แกนอ้างอิงที่โหนด A ในสถานะ  $C_1$  และ  $C_2$  ตามลำดับ

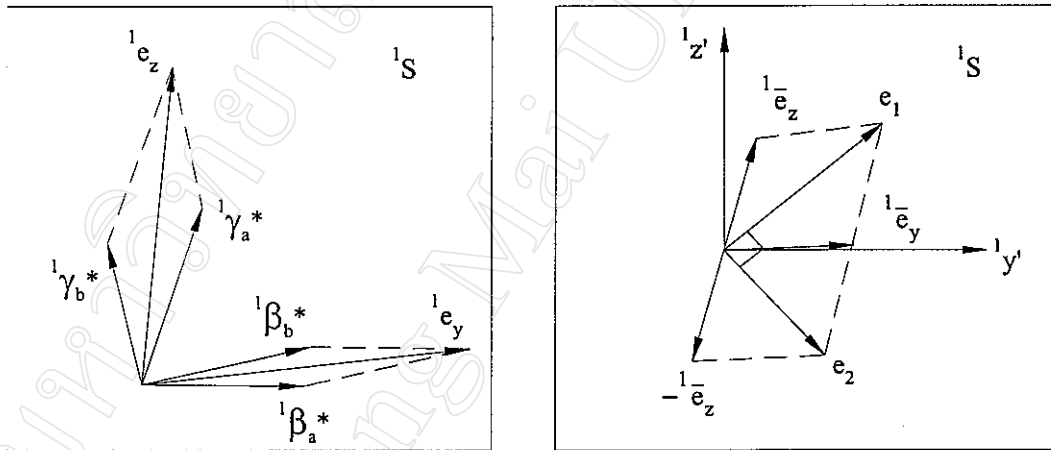
สำหรับขั้นตอนการหาแกนชิ้นส่วนย่อยในสภาวะ  $C_1$  เริ่มต้นจากการหาเวกเตอร์  ${}^1\bar{x}'$  โดยใช้ค่าพิกัดของโหนดเริ่มต้นและโหนดปลายดังแสดงในสมการ(2.68)

$${}^1\bar{x}' = \frac{1}{l_e} [{}^1x_b - {}^1x_a, {}^1y_b - {}^1y_a, {}^1z_b - {}^1z_a]^T \quad (2.68)$$

เมื่อ  $l_e$  เป็นความยาวของชิ้นส่วนย่อย ณ สภาวะ  $C_1$  หาได้จากสมการต่อไปนี้

$$l_e = \sqrt{({}^1x_b - {}^1x_a)^2 + ({}^1y_b - {}^1y_a)^2 + ({}^1z_b - {}^1z_a)^2}$$

ส่วนเวกเตอร์  ${}^1\bar{y}'$  และ  ${}^1\bar{z}'$  หาได้โดยใช้ความสัมพันธ์ของแกนหน้าตัด  ${}^0\beta_a, {}^0\gamma_a$  ที่โหนดเริ่มต้น และแกน  ${}^0\beta_b, {}^0\gamma_b$  ที่โหนดปลาย ซึ่งมีหลักการดังนี้



รูปที่ 2.21 แสดงการคำนวณหาแกนหลักและแกนรองของชิ้นส่วนย่อย Yang (1994)

พิจารณารูปที่ 2.21 กำหนดให้  ${}^1S$  เป็นระนาบที่ตั้งฉากกับแกน  ${}^1\bar{x}'$  และเวกเตอร์  ${}^1\bar{p}_j^*$  เมื่อ  $(j=a, b; \bar{p} = \bar{\beta}, \bar{\gamma})$  เป็นเวกเตอร์ที่ได้จากการโปรเจกต์แกนหน้าตัดที่ปลายทั้งสองของชิ้นส่วนย่อยลงบนระนาบ  ${}^1S$  โดยคำนวณได้จากสมการ (2.69)

$${}^1\bar{p}_j^* = {}^1\bar{p}_j' - \bar{\lambda}_{pj} {}^1\bar{x}' \quad (j=a, b; \bar{p} = \bar{\beta}, \bar{\gamma}) \quad (2.69)$$

เมื่อ 
$$\bar{\lambda}_{pj} = {}^1\bar{p}_j' \cdot {}^1\bar{x}' \quad (j=a, b; \bar{p} = \bar{\beta}, \bar{\gamma})$$

จากนั้นคำนวณหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของ  ${}^1\vec{p}_j^*$  โดยใช้สมการ (2.70) แล้วนำมาหาผลบวกดังสมการ (2.71) จะได้  ${}^1\vec{e}_s$  เมื่อ ( $s=y, z$ ;  $\vec{p}=\vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ) ซึ่งมีรูปแบบดังรูปที่ 2.21

$${}^1\vec{p}_j^* = \frac{{}^1\vec{p}_j^*}{\sqrt{{}^1\vec{p}_j^* \cdot {}^1\vec{p}_j^*}} \quad (j=a, b; \vec{p}=\vec{\beta}, \vec{\gamma}) \quad (2.70)$$

$${}^1\vec{e}_s = {}^1\vec{p}_a^* + {}^1\vec{p}_b^* \quad (s=y, z; \vec{p}=\vec{\beta}, \vec{\gamma}) \quad (2.71)$$

คำนวณหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของ  ${}^1\vec{e}_s$  โดยใช้สมการ (2.72) จะได้เวกเตอร์หนึ่งหน่วย  ${}^1\vec{e}_y$  และ  ${}^1\vec{e}_z$  จากนั้นหาผลบวกและผลต่างระหว่างเวกเตอร์หนึ่งหน่วย  ${}^1\vec{e}_y$  กับ  ${}^1\vec{e}_z$  ได้เป็น  $\vec{e}_1$  และ  $\vec{e}_2$  ดังสมการ (2.73) และ (2.74) ตามลำดับ

$${}^1\vec{e}_s = \frac{{}^1\vec{e}_s}{\sqrt{{}^1\vec{e}_s \cdot {}^1\vec{e}_s}} \quad (s=y, z) \quad (2.72)$$

$$\vec{e}_1 = {}^1\vec{e}_y + {}^1\vec{e}_z \quad (2.73)$$

$$\vec{e}_2 = {}^1\vec{e}_y - {}^1\vec{e}_z \quad (2.74)$$

คำนวณหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของ  $\vec{e}_1$  และ  $\vec{e}_2$  โดยใช้สมการ (2.75) จากนั้นแล้วนำเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ได้ไปคำนวณหาเวกเตอร์  ${}^1\vec{y}'$  และ  ${}^1\vec{z}'$  ดังสมการ (2.76) และ (2.77) ตามลำดับ

$$\vec{e}_k = \frac{\vec{e}_k}{\sqrt{\vec{e}_k \cdot \vec{e}_k}} \quad (k=1, 2) \quad (2.75)$$

$${}^1\vec{y}' = \frac{\vec{e}_1 + \vec{e}_2}{\sqrt{2}} \quad (2.76)$$

$${}^1z' = \frac{\overline{e_1} - \overline{e_2}}{\sqrt{2}} \quad (2.77)$$

สำหรับเวกเตอร์ทิศทางของแกนชิ้นส่วนย่อย  ${}^1x'$ ,  ${}^1y'$  และ  ${}^1z'$  ที่คำนวณได้ จะนำมาหาเมตริกซ์แปลงค่า  ${}^1L$  ซึ่งเป็นเมตริกซ์แปลงค่าระหว่างแกนชิ้นส่วนย่อยและแกนโครงสร้างสำหรับชิ้นส่วนย่อยใดๆในสถานะ  $C_1$  ดังสมการ (2.78)

$${}^1L = [{}^1x' \quad {}^1y' \quad {}^1z'] \quad (2.78)$$

ในทำนองเดียวกันนี้เราสามารถหา  ${}^2x'$ ,  ${}^2y'$  และ  ${}^2z'$  ซึ่งเป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศของแกนชิ้นส่วนย่อยในสถานะ  $C_2$  โดยใช้สมการ (2.68) ถึง (2.77) เพียงแต่เปลี่ยนสัญลักษณ์ด้วยก้านซ้ายของตัวแปรทุกตัวจาก 1 เป็น 2

## 2.6.2 การคำนวณหาการเปลี่ยนแปลงรูปทรงโดยธรรมชาติ (Calculation of Natural Deformations)

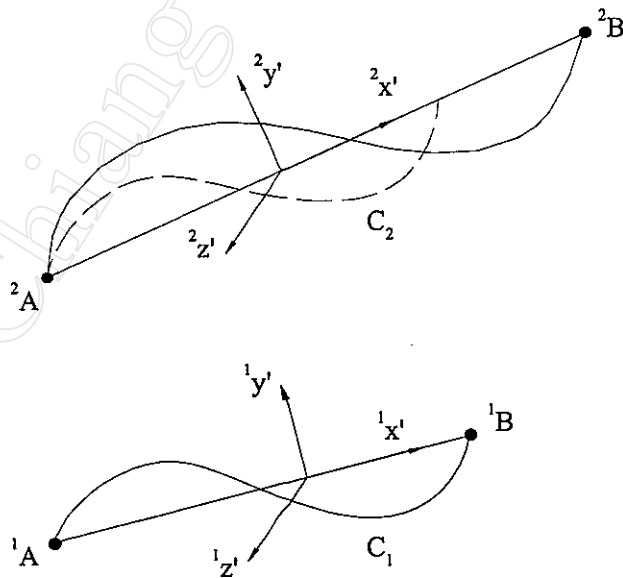
ในการวิเคราะห์โครงสร้างจากสภาวะ  $C_1$  ถึง  $C_2$  กำหนดให้  $u'$  เป็นการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของชิ้นส่วนย่อยในระบบพิกัดย่อย ซึ่งสามารถแยกพิจารณาได้ 2 องค์ประกอบดังนี้

$$u' = u_r' + u_n' \quad (2.79)$$

เมื่อ  $u_r'$  คือ การเปลี่ยนแปลงตำแหน่งโดยรูปทรงไม่เปลี่ยนแปลง (Rigid Body Displacements)

$u_n'$  คือ การเปลี่ยนแปลงรูปทรงโดยธรรมชาติ (Natural Deformations)

สำหรับการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งโดยรูปทรงไม่เปลี่ยนแปลง เป็นการหมุนของรูปทรงแบบแข็งเกร็ง ซึ่งมีผลต่อการเปลี่ยนแปลงทิศทางของแรงกระทำแต่ไม่ทำให้ขนาดของแรงกระทำเปลี่ยนไป Yang and Chiou (1987) โดยการเปลี่ยนแปลงดังกล่าวนี้ ค่าเวกเตอร์ทิศทางของแกนชิ้นส่วนย่อย  $^1x'$   $^1y'$  และ  $^1z'$  ในสภาวะ  $C_1$  จะเปลี่ยนเป็น  $^2x'$   $^2y'$  และ  $^2z'$  ในสภาวะ  $C_2$  และแสดงได้ดังเส้นประในรูปที่ 2.22 ส่วนการเปลี่ยนแปลงรูปทรงโดยธรรมชาติ เป็นการเปลี่ยนแปลงของชิ้นส่วนย่อยที่มีผลต่อขนาดของแรงกระทำ โดยค่าเวกเตอร์แรงภายในชิ้นส่วนย่อยที่เพิ่มขึ้น  $u_n'$  สามารถคำนวณได้จากสมการ (2.56) และรูปแบบของเวกเตอร์  $u_n'$  สำหรับโครงข้อแข็ง 3 มิติเป็นดังสมการ(2.80)



รูปที่ 2.22 การเคลื่อนตำแหน่งของรูปทรงแข็งเกร็ง และการเปลี่ยนแปลงรูปทรงโดยธรรมชาติ Yang (1994)

$$u_n' = [0 \ 0 \ 0 \ \theta_{xa} \ \theta_{ya} \ \theta_{za} \ U_b \ 0 \ 0 \ \theta_{xb} \ \theta_{yb} \ \theta_{zb}]^T \quad (2.80)$$

เมื่อ  $U_b$  คือ ความยาวตามแนวแกนที่เปลี่ยนแปลงซึ่งหาได้จากสมการดังนี้

$$U_b = {}^2I_c - {}^1I_c \quad (2.81)$$

โดย  ${}^2I_c$  และ  ${}^1I_c$  เป็นความยาวคอร์คของชิ้นส่วนย่อยในสถานะ  $C_2$  และ  $C_1$  ตามลำดับ ส่วน  $\theta_{xa}$   $\theta_{ya}$   $\theta_{za}$  และ  $\theta_{xb}$   $\theta_{yb}$   $\theta_{zb}$  เป็นการเปลี่ยนแปลงของมุมที่ปลายโหนด A และ โหนด B จากสถานะ  $C_1$  ไปยัง  $C_2$  รอบแกน  ${}^2x'$   ${}^2y'$  และ  ${}^2z'$  ตามลำดับ ค่า  $\theta_{xa}$   $\theta_{ya}$   $\theta_{za}$  สามารถคำนวณหาจากแกนหน้าตัดที่โหนด และแกนชิ้นส่วนย่อยที่สถานะ  $C_1$  และ  $C_2$  โดยแปลงเวกเตอร์ทิศทางของแกนหน้าตัดที่โหนดในเทอมของแกนพิกัดโครงสร้างในสถานะ  $C_k$  ( $k=1,2$ ) ให้อยู่ในเทอมของแกนชิ้นส่วนย่อย  ${}^k\bar{x}'$   ${}^k\bar{y}'$   ${}^k\bar{z}'$  ดังสมการ (2.82) กำหนดให้  ${}^1_0\bar{p}_a'$  และ  ${}^2_0\bar{p}_a'$  เมื่อ  $(\bar{p}' = \bar{\alpha}', \bar{\beta}', \bar{\gamma}')$  เป็นการเปลี่ยนแปลงของแกนหน้าตัดที่โหนด A จากสถานะ  $C_0$  ไปสู่  $C_1$  และสถานะ  $C_0$  ไปสู่  $C_2$  ตามลำดับ

$${}^k_0\bar{p}_a' = {}^kL^T {}^k\bar{q}_a' \quad (k=1,2; \bar{p}' = \bar{\alpha}', \bar{\beta}', \bar{\gamma}')$$
 (2.82)

เมื่อตัวห้อยด้านซ้าย "0" แสดงว่า อ้างอิงจากสถานะ  $C_0$  และ  ${}^kL$  คือ เมตริกซ์แปลงค่าในสถานะ  $C_k$  มีรูปแบบดังนี้  ${}^kL = [{}^k\bar{x}' \ {}^k\bar{y}' \ {}^k\bar{z}']^T {}^k\bar{q}_a'$  คือ แกนอ้างอิงที่โหนด A

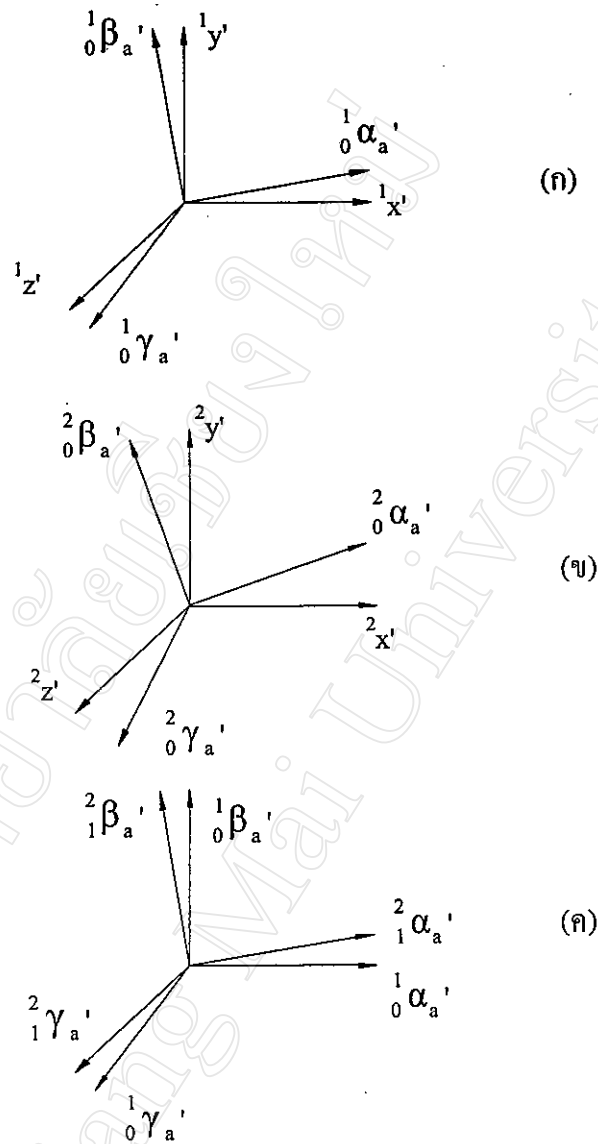
ส่วน  ${}^2_1\bar{p}_a'$  เมื่อ  $(\bar{p}' = \bar{\alpha}', \bar{\beta}', \bar{\gamma}')$  เป็นการเปลี่ยนแปลงของแกนหน้าตัดที่โหนด A จากสถานะ  $C_1$  ไปยัง  $C_2$  ซึ่งมีรูปแบบดังแสดงในรูปที่ 2.23

$${}^2_1\bar{p}_a' = [{}^1_0\bar{\alpha}' \ {}^1_0\bar{\beta}' \ {}^1_0\bar{\gamma}']^T {}^2_0\bar{p}_a' \quad (2.83)$$

กำหนดให้  $\phi_a$  คือขนาดของมุมที่ปลายโหนด A ที่เปลี่ยนแปลงจากสถานะ  $C_1$  ไปยัง  $C_2$  และ  ${}^1_1\bar{n}_a$  แทนเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของเวกเตอร์มุมดังกล่าว มีรูปแบบดังสมการ (2.84) โดยมีเงื่อนไขของค่า  $n_1$   $n_2$  และ  $n_3$  เป็นดังสมการ (2.85)

$${}^1_1\bar{n}_a = [n_1 \ n_2 \ n_3]^T \quad (2.84)$$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad (2.85)$$



รูปที่ 2.23 แสดงทิศทางของเวกเตอร์แกนหน้าตัดในสถานะต่างๆ (ก) สถานะ  $C_1$  (ข) สถานะ  $C_2$  (ค) การเปลี่ยนแปลงเพิ่มขึ้นจากสถานะ  $C_1$  ไปสู่สถานะ  $C_2$  เนื่องจากการหมุน Yang (1994)

พิจารณารูปที่ 2.23 (ค) กำหนดให้  $\vec{r}_1$  เป็นเวกเตอร์การเปลี่ยนแปลงของแกนหน้าตัดที่โหนด A ในช่วงสถานะ  $C_0$  ไปยัง  $C_1$  และ  $\vec{r}_2$  เป็นเวกเตอร์การเปลี่ยนแปลงของแกนหน้าตัดที่โหนด A ช่วงสถานะ  $C_1$  ไปยัง  $C_2$  ซึ่งเมื่อพิจารณาที่แกน  ${}^1_0\alpha_a'$  จะได้  $\vec{r}_1$  และ  $\vec{r}_2$  ดังนี้

$$\vec{r}_1 = {}^1_0\vec{\alpha}_a' = [1, 0, 0]^T \quad (2.86)$$

$$\vec{r}_2 = {}^2_1\vec{\alpha}_a' = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^T \quad (2.87)$$

เมื่อพิจารณาที่แกน  ${}^1\beta_a$  จะได้  $\vec{r}_1$  และ  $\vec{r}_2$  ดังนี้

$$\vec{r}_1 = {}^1\vec{\beta}_a = [0, 1, 0]^T \quad (2.88)$$

$$\vec{r}_2 = {}^2\vec{\beta}_a = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]^T \quad (2.89)$$

เมื่อพิจารณาที่แกน  ${}^1\gamma_a$  จะได้  $\vec{r}_1$  และ  $\vec{r}_2$  ดังนี้

$$\vec{r}_1 = {}^1\vec{\gamma}_a = [0, 0, 1]^T \quad (2.90)$$

$$\vec{r}_2 = {}^2\vec{\gamma}_a = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3]^T \quad (2.91)$$

จากรูปแบบของ  $\vec{r}_1$  และ  $\vec{r}_2$  ข้างต้นเมื่อนำใช้กับสมการการหมุนแบบไฟไนท์ในสมการ (2.57) จะสามารถเขียนกระจายได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\alpha_1 = \cos \phi_a + (1 - \cos \phi_a) n_1^2 \quad (2.92)$$

$$\alpha_2 = n_3 \sin \phi_a + (1 - \cos \phi_a) n_1 n_2 \quad (2.93)$$

$$\alpha_3 = -n_2 \sin \phi_a + (1 - \cos \phi_a) n_1 n_3 \quad (2.94)$$

$$\beta_1 = -n_3 \sin \phi_a + (1 - \cos \phi_a) n_1 n_2 \quad (2.95)$$

$$\beta_2 = \cos \phi_a + (1 - \cos \phi_a) n_2^2 \quad (2.96)$$

$$\beta_3 = n_1 \sin \phi_a + (1 - \cos \phi_a) n_2 n_3 \quad (2.97)$$

$$\gamma_1 = n_2 \sin \phi_a + (1 - \cos \phi_a) n_1 n_3 \quad (2.98)$$

$$\gamma_2 = -n_1 \sin \phi_a + (1 - \cos \phi_a) n_2 n_3 \quad (2.99)$$

$$\gamma_3 = \cos \phi_a + (1 - \cos \phi_a) n_3^2 \quad (2.100)$$

เมื่อนำสมการ (2.93) ลบสมการ (2.95) นำสมการ (2.98) ลบสมการ (2.94) และสมการ (2.97) ลบด้วยสมการ (2.99) ผลที่ได้เป็นดังนี้

$$2n_3 \sin \phi_a = -\beta_1 + \alpha_2 \quad (2.101)$$

$$2n_2 \sin \phi_a = -\alpha_3 + \gamma_1 \quad (2.102)$$

$$2n_1 \sin \phi_a = -\gamma_2 + \beta_3 \quad (2.103)$$

จากสมการ (2.101) (2.102) และ (2.103) สามารถหา  $n_1$ ,  $n_2$  และ  $n_3$  ได้ดังนี้

$$n_1 = -\frac{\gamma_2 - \beta_3}{\lambda} \quad (2.104)$$

$$n_2 = -\frac{\alpha_3 - \gamma_1}{\lambda} \quad (2.105)$$

$$n_3 = -\frac{\gamma_2 - \beta_3}{\lambda} \quad (2.106)$$

ส่วนขนาดของมุม  $\phi_a$  คือ 
$$\phi_a = \sin^{-1}\left(\frac{\lambda}{2}\right) \quad (2.107)$$

เมื่อกำ  $\lambda$  หาได้ดังนี้ 
$$\lambda = \sqrt{(\gamma_2 - \beta_3)^2 + (\alpha_3 - \gamma_1)^2 + (\beta_1 - \alpha_2)^2} \quad (2.108)$$

เนื่องจากเวกเตอร์  ${}_1\vec{n}_a$  เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศของการหมุนที่โหนด A ซึ่งสัมพันธ์กับแกนหน้าตัด  ${}_0\vec{p}_a$  เมื่อ  $(\vec{p}' = \vec{\alpha}', \vec{\beta}', \vec{\gamma}')$  ซึ่งสามารถแปลงให้เป็นเวกเตอร์ที่สัมพันธ์กับแกนขึ้นส่วนย่อยจากสมการดังนี้

$$\vec{n}_a = \begin{bmatrix} {}_1\vec{\alpha}' & {}_1\vec{\beta}' & {}_1\vec{\gamma}' \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} {}_1\vec{n}_a \quad (2.109)$$

จากนั้นนำสมการ (2.107) และสมการ (2.109) มาหาค่า  $\theta_{xa}$   $\theta_{ya}$   $\theta_{za}$  ได้จากความสัมพันธ์ดังนี้

$$[\theta_{xa}, \theta_{ya}, \theta_{za}]^T = \phi_a \vec{n}_a \quad (2.110)$$

ในทำนองเดียวกันเราสามารถหาค่า  $\theta_{xb}$   $\theta_{yb}$   $\theta_{zb}$  ที่โหนด B โดยพิจารณาตามขั้นตอนเช่นเดียวที่หาค่า  $\theta_{xa}$   $\theta_{ya}$   $\theta_{za}$  ที่โหนด A เพียงแต่เปลี่ยนสัญลักษณ์ตัวห้อยด้านขวาของตัวแปรทุกตัวจาก "a" เป็น "b"

### 2.6.3 วิธีการแก้ปัญหาแบบเพิ่มขึ้นและทำซ้ำ (Incremental and Iteration Methods of Solution)

วิธีการแก้ปัญหาแบบเพิ่มขึ้นและทำซ้ำเป็นวิธีที่ใช้ในการแก้ปัญหาแบบไม่เป็นเชิงเส้น ซึ่งมีหลายแบบ เช่น วิธีแก้ปัญหาแบบนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson Method) วิธีแก้ปัญหาแบบควบคุมแรง (Load Control Method) และวิธีแก้ปัญหาแบบควบคุมการเปลี่ยนแปลงตำแหน่ง (Displacement Control Method) เป็นต้น สำหรับงานวิจัยนี้ได้เลือกใช้วิธีแก้ปัญหาแบบควบคุมการเปลี่ยนแปลงตำแหน่ง โดยมีขั้นตอนดังนี้

ก่อนจะเข้าถึงเนื้อหาภายใน จะขอกล่าวถึงรูปแบบของสัญลักษณ์สำหรับสภาวะทั้งสามที่กำหนดขึ้นใหม่ เพื่อความสะดวกในการเขียนสมการดังนี้ กำหนดให้  $C_0$  แทนสภาวะเริ่มต้นก่อนการเปลี่ยนแปลงรูปทรง  $C_{i-1}$  แทนสภาวะที่มีการคำนวณครั้งสุดท้าย และ  $C_i$  แทนสภาวะปัจจุบันที่มีการเปลี่ยนแปลงรูปทรง เมื่อ  $i = 1, 2, 3, \dots$

โดยระบบสัญลักษณ์ใหม่นี้ การเปลี่ยนแปลงที่เพิ่มขึ้นจากสภาวะ  $C_0$  ไปเป็น  $C_1$  เรียกว่า ระดับขั้นที่เพิ่มขึ้น 1 จากสภาวะ  $C_1$  ไปเป็น  $C_2$  เรียกว่า ระดับขั้นที่เพิ่มขึ้น 2 และจากสภาวะ  $C_{i-1}$  ไปเป็น  $C_i$  เรียกว่า ระดับขั้นที่เพิ่มขึ้น  $i$  และปริมาณทุกค่าที่เกิดขึ้นระหว่างขั้นของการเพิ่มขึ้น จะใช้เครื่องหมาย " $\Delta$ " นำหน้า ส่วนกรณีของขั้นการทำซ้ำในแต่ละขั้นของการเพิ่มขึ้น จะกำหนดด้วยสัญลักษณ์  $j$  แทน ระดับการทำซ้ำ (Iteration Step) เรียกว่า ระดับการทำซ้ำ  $j$  ในการเขียนตัวแปรใดๆที่เกิดขึ้นในระดับการทำซ้ำ  $j$  และในระดับขั้นที่เพิ่มขึ้น  $i$  จะใช้สัญลักษณ์ตัวห้อย  $j$  และสัญลักษณ์ตัวยก  $i$  ที่ด้านขวาของตัวแปรนั้นๆ

เมื่อใช้ข้อกำหนดของสัญลักษณ์ดังกล่าวนี้ในสมการ (2.54) จะได้รูปแบบของสมการเป็นดังนี้

$$K_{j-1}^i \Delta U_j^i = P_j^i - F_{j-1}^i \quad (2.111)$$

- เมื่อ  $K_{j-1}^i$  คือเมตริกซ์สติเฟนสของโครงสร้างในระดับขั้นที่เพิ่มขึ้น  $i$  และระดับการทำซ้ำ  $j-1$   
 $\Delta U_j^i$  คือการเปลี่ยนแปลงค่าการเปลี่ยนแปลงตำแหน่ง ของโครงสร้างในระดับขั้นที่เพิ่มขึ้น  $i$  และระดับการทำซ้ำ  $j$   
 $P_j^i$  คือแรงภายนอกที่กระทำต่อโครงสร้างในระดับขั้นที่เพิ่มขึ้น  $i$  และระดับการทำซ้ำ  $j$   
 $F_{j-1}^i$  คือแรงภายในที่กระทำต่อโครงสร้างในระดับขั้นที่เพิ่มขึ้น  $i$  และระดับการทำซ้ำ  $j-1$

โดยมีเงื่อนไขเบื้องต้นคือ

$$K_0^i = K_L^{i-1} \quad (2.112)$$

$$F_0^i = F_L^{i-1} \quad (2.113)$$

$$U_0^i = U_L^{i-1} \quad (2.114)$$

เมื่อสัญลักษณ์ตัวห้อยด้านขวา "L" หมายถึงระดับขั้นการทำซ้ำสุดท้าย (Last Iteration Step) ในระดับขั้นที่เพิ่มขึ้น  $i-1$  สำหรับ  $P_j^i$  หาได้จากสมการดังนี้

$$P_j^i = P_{j-1}^i + \Delta P_j^i \quad \text{หรือ} \quad P_j^i = P_{j-1}^i + \lambda_j^i \bar{P} \quad (2.115)$$

เมื่อ  $\lambda_j^i$  คือ องค์ประกอบการเพิ่มของแรง (Load Increment Factor)

$\bar{P}$  คือ เวกเตอร์แรงอ้างอิง (Reference Load Vector)

การเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของโครงสร้าง  $P_j^i$  หาได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$U_j^i = U_{j-1}^i + \Delta U_j^i \quad (2.116)$$

กำหนดให้  $R_{j-1}^i$  คือ แรงที่ไม่สมดุล (Unbalanced Forces) โดยเป็นผลต่างระหว่างแรงภายนอกและแรงภายในโครงสร้างดังสมการต่อไปนี้

$$R_{j-1}^i = P_{j-1}^i - F_{j-1}^i \quad (2.117)$$

สมการ (2.111) สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$K_{j-1}^i \Delta U_j^i = \lambda_j^i \bar{P} + R_{j-1}^i \quad (2.118)$$

สมการ (2.118) สามารถแยกพิจารณาได้เป็น 2 สมการ คือ

$$K_{j-1}^i \Delta \bar{U}_j = \bar{P} \quad (2.119)$$

$$K_{j-1}^i \Delta \bar{U}_j = R_{j-1}^i \quad (2.120)$$

เมื่อ  $\Delta \bar{U}_j$  คือ ค่าการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งที่เพิ่มขึ้นในระดับการทำซ้ำที่  $j$  เนื่องจากแรงอ้างอิง  $\bar{P}$

$\Delta \bar{U}_j$  คือ ค่าการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งที่เพิ่มขึ้นในระดับการทำซ้ำที่  $j$  เนื่องจากแรงที่ไม่สมดุล  $R_{j-1}^i$

โดยค่า  $\Delta\bar{U}_j$  และ  $\Delta\tilde{U}_j$  จากการแก้สมการ (2.119) และ (2.120) สามารถนำมาคำนวณหาค่า  $\Delta U_j^i$  ดังสมการต่อไปนี้

$$\Delta U_j^i = \lambda_j^i \Delta\bar{U}_j + \Delta\tilde{U}_j \quad (2.121)$$

สำหรับการคำนวณหาค่า  $\lambda_j^i$  แยกเป็น 2 กรณีดังนี้

ก. ค่า  $\lambda_j^i$  ในระดับชั้นที่เพิ่มขึ้น  $i$  และระดับการทำซ้ำ 1 หาได้จากสมการต่อไปนี้

$$\lambda_1^i = \pm \lambda_1^1 |GSP|^{1/2} \quad (2.122)$$

เมื่อ  $\lambda_1^1$  คือ ค่าองค์ประกอบการเพิ่มของแรงเริ่มต้น ซึ่งเป็นค่าที่ผู้ทำการวิเคราะห์กำหนดขึ้น โดยมากจะใช้ค่าระหว่าง 0 ถึง 1

GSP คือ ตัวประกอบสติฟเนสทั่วไป (Generalize Stiffness Parameter) ซึ่งหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$GSP = \frac{\Delta\bar{U}_1^1 \cdot \Delta\tilde{U}_1^1}{\Delta\bar{U}_1^{i-1} \cdot \Delta\bar{U}_1^i} \quad (2.123)$$

โดยค่า  $\lambda_1^i$  จะมีค่าเป็นบวกหรือลบนั่นขึ้นอยู่กับค่า GSP ที่คำนวณได้ ถ้าหากค่า GSP เป็นลบแสดงว่าแรงที่กระทำต่อโครงสร้างมีการกลับทิศ ยกตัวอย่างเช่น ในกรณีที่โครงสร้างมีการเปลี่ยนแปลงรูปทรงมากเกินไปจนเกิดการคดตัวกลับ (Snap-Back Point) ซึ่งกรณีดังกล่าว เราจะต้องคูณค่า  $\lambda_1^i$  ด้วย -1 เพื่อกลับทิศทางของแรง

ข. ค่า  $\lambda_j^i$  ในระดับชั้นที่เพิ่มขึ้น  $i$  และระดับการทำซ้ำ  $j \geq 2$  หาได้จากสมการต่อไปนี้

$$\lambda_j^i = -\frac{\Delta\bar{U}_1^{i-1} \cdot \Delta\tilde{U}_j^i}{\Delta\bar{U}_1^{i-1} \Delta\bar{U}_j^i} \quad \text{เมื่อ } j \geq 2 \quad (2.124)$$