ภาคผนวก ก

ภาคผนวก ก

1. ถ้าตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแบบลอกนอร์มอลแล้วสามารถหา $E\left(X^3\right)$ และ $E\left(X^4\right)$ ได้ได้นี้

$$E\left(X^3\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

ให้ $z = \frac{\ln x-\mu}{\sigma}$ ดังนั้น $x = e^{\mu+\sigma z}$ จะได้ $dx = \sigma e^{\mu+\sigma z} dz$

ดังนั้น $E\left(X^3\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\mu+2\sigma z} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \sigma e^{\mu+\sigma z} dz$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} e^{3\mu+3\sigma z} dz$$

$$= e^{3\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z^2-6z\sigma+9\sigma^2-9\sigma^2)} dz$$

$$= e^{3\mu+\frac{9}{2}\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z-3\sigma)^2} dz$$

$$= e^{3\mu+\frac{9}{2}\sigma^2} \times 1 \qquad (\because z \sim N(3\sigma,1))$$

ดังนั้น $E\left(X^3\right) = e^{3\mu+\frac{9}{2}\sigma^2}$

$$E\left(X^4\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 f(x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} x^4 \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

ให้ $z = \frac{\ln x-\mu}{\sigma}$ ดังนั้น $x = e^{\mu+\sigma z}$ จะได้ $dx = \sigma e^{\mu+\sigma z}\,dz$

ดังนั้น $E\left(X^4\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{3\mu+3\sigma z} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \sigma e^{\mu+\sigma z}\,dz$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} e^{4\mu+4\sigma z}\,dz$$

$$= e^{4\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z^2-8z\sigma+16\sigma^2-16\sigma^2)}\,dz$$

$$= e^{4\mu+8\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z-4\sigma)^2}\,dz$$

$$= e^{4\mu+8\sigma^2} \times 1 \qquad (\because z \sim N(4\sigma,1))$$

ดังนั้น $E\left(X^4\right) = e^{4\mu+8\sigma^2}$

2. ถ้าตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแบบลาปลาซแล้ว สามารถหา $E(X^3)$ และ $E(X^4)$ ได้ได้นี้

จาก $f(x) = \frac{1}{2b} e^{-\frac{|x-a|}{b}}$, $-\infty < x < \infty$, $-\infty < a < \infty$ และ $b > 0$

$$M_x(t) = \frac{e^{at}}{1-b^2t^2}$$

$$M_x'(t) = \frac{e^{at}\left(a-ab^2t^2+2b^2t\right)}{\left(1-b^2t\ \right)^2}$$

$$M_x''(t) = e^{at}\left(4ab^2t+2b^2+a^2-2a^2b^2t^2-4ab^4t^3+6b^4t^2+a^2b^4t^4\right)$$

$$\Big/\left(1-b^2t^2\right)^3$$

ดังนั้น

$$M_x'''(t) = \Big\{\left(1-b^2t^2\right)^3\Big[e^{at}\left(4ab^2-4a^2b^2t-12ab^4t^2+12b^4t+4a^2b^4t^3\right)$$

$$+ae^{at}\left(4ab^2t+2b^2+a^2-2a^2b^2t^2-4ab^4t^3+6b^4t^2+a^2b^4t^4\right)\Big]$$

$$-\Big[e^{at}\left(4ab^2t+2b^2+a^2-2a^2b^2t^2-4ab^4t^3+6b^4t^2+a^2b^4t^4\right)$$

$$\times(3)\left(-2b^2t\right)\left(1-b^2t^2\right)^2\Big]\Big\}\Big/\left(1-b^2t^2\right)^6$$

$$= \Big\{e^{at}\left(1-b^2t^2\right)\Big[4ab^2-4a^2b^2t-12ab^4t^2+12b^4t+4a^2b^4t^3$$

$$+4a^2b^2t+2ab^2+a^3-2a^3b^2t^2-4a^2b^4t^3+6ab^4t^2+a^3b^4t^4\Big]$$

$$+e^{at}\Big[24ab^4t^2+12b^4t+6a^2b^2t-12a^2b^4t^3-24ab^6t^4+36b^6t^3$$

$$+6a^2b^6t^5\Big]\Big\}\Big/\left(1-b^2t^2\right)^4$$

$$M_x'''(t) = e^{at}\left\{\left(1-b^2t^2\right)\left[6ab^2-6ab^4t^2+12b^4t+a^3-2a^3b^2t^2+a^3b^4t^4\right]\right.$$

$$+\left[24ab^4t^2+12b^4t+6a^2b^2t-12a^2b^4t^3-24ab^6t^4+36b^6t^3\right.$$

$$\left.\left.+6a^2b^6t^5\right]\right\}\Big/\left(1-b^2t^2\right)^4$$

$$= e^{at}\left\{6ab^2-6ab^4t^2+12b^4t+a^3-2a^3b^2t^2+a^3b^4t^4-6ab^4t^2\right.$$

$$+6ab^6t^4-12b^6t^3-a^3b^2t^2+2a^3b^4t^4-a^3b^6t^6+24ab^4t^2$$

$$\left.+12b^4t+6a^2b^2t-12a^2b^4t^3-24ab^6t^4+36b^6t^3+6a^2b^6t^5\right\}$$

$$\Big/\left(1-b^2t^2\right)^4$$

$$M_x'''(t) = e^{at}\left\{6ab^2+12ab^4t^2+24b^4t+a^3-3a^3b^2t^2+3a^3b^4t^4\right.$$

$$\left.-18ab^6t^4+24b^6t^3-a^3b^6t^6+6a^2b^2t-12a^2b^4t^2+6a^2b^6t^5\right\}$$

$$\Big/\left(1-b^2t^2\right)^4$$

$$M_x'''(0) = 6ab^2+a^3$$

ดังนั้น $E\left(X^3\right) = M_x'''(0)$

$$= 6ab^2+a^3$$

$$
\begin{aligned}
M_x''''(t) \quad = \quad & \Big\{\left(1-b^2t^2\right)^4\Big[e^{at}\left(24ab^2t+24b^4-6a^3b^2t+12a^3b^4t^3-72ab^6t^3\right.\\
& \left.+72b^6t^2-6a^3b^6t^5+6a^2b^2-36a^2b^4t^2+30a^2b^6t^4\right)\\
& +ae^{at}\left(6ab^2+12ab^4t^2+24b^4t+a^3-3a^3b^2t^2+3a^3b^4t^4-18ab^6t^4\right.\\
& \left.+24b^6t^3-a^3b^6t^6+6a^2b^2t-12a^2b^4t^3+6a^2b^6t^5\right)\Big]\\
& -(4)\left(-2b^2t\right)\left(1-b^2t^2\right)^3\left(e^{at}\right)\Big[6ab^2+12ab^4t^2+24b^4t+a^3-3a^3b^2t^2\\
& +3a^3b^4t^4-18ab^6t^4+24b^6t^3-a^3b^6t^6+6a^2b^2t-12a^2b^4t^3\\
& +6a^2b^6t^5\Big]\Big\}\Big/\left(1-b^2t^2\right)^8\\
= \quad & \Big\{\left(1-b^2t^2\right)e^{at}\Big[24ab^2t+24b^4-6a^3b^2t+12a^3b^4t^3-72ab^6t^3\\
& +72b^6t^2-6a^3b^6t^5+6a^2b^2-36a^2b^4t^2+30a^2b^6t^4+6a^2b^2\\
& +12a^2b^4t^2+24ab^4t+a^4-3a^4b^2t^2+3a^4b^4t^4-18a^2b^6t^4\\
& +24ab^6t^3-a^4b^6t^6+6a^3b^2t-12a^3b^4t^3+6a^3b^6t^5\Big]+\\
& e^{at}\Big[48ab^4t+96ab^6t^3+192b^6t^2+8a^3b^2t-24a^3b^4t^3+24a^3b^6t^5\\
& -144ab^8t^5+192b^8t^4-8a^3b^8t^7+48a^2b^4t^2-96a^2b^6t^4\\
& +48a^2b^8t^6\Big]\Big\}\Big/\left(1-b^2t^2\right)^5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_x'''(t) = \; & \Big\{\big(1-b^2t^2\big)e^{at}\Big[24ab^2t+24b^4-48ab^6t^3+72b^6t^2+12a^2b^2 \\
& -24a^2b^4t^2+12a^2b^6t^4+24ab^4t+a^4-3a^4b^2t^2+3a^4b^4t^4 \\
& -a^4b^6t^6\Big]+e^{at}\Big[48ab^4t+96ab^6t^3+192b^6t^2+8a^3b^2t \\
& -24a^3b^4t^3+24a^3b^6t^5-144ab^8t^5+192b^8t^4-8a^3b^8t^7 \\
& +48a^2b^4t^7-96a^2b^6t^4+48a^2b^8t^6\Big]\Big\}\Big/\big(1-b^2t^2\big)^5 \\
= \; & e^{at}\Big\{24ab^2t+24b^4-48ab^6t^3+72b^6t^2+12a^2b^2-24a^2b^4t^2 \\
& +12a^2b^6t^4+24ab^4t+a^4-3a^4b^2t^2+3a^4b^4t^4-a^4b^6t^6 \\
& -24ab^4t^3-24b^6t^2+48ab^8t^5-72b^8t^4-12a^2b^4t^2+24a^2b^6t^4 \\
& -12a^2b^8t^6-24ab^6t^3-a^4b^2t^2+3a^4b^4t^4-3a^4b^6t^6 \\
& +a^4b^8t^8+48ab^4t+96ab^6t^3+192b^6t^2+8a^3b^2t-24a^3b^4t^3 \\
& +24a^3b^6t^5-144ab^8t^5+192b^8t^4-8a^3b^8t^7+48a^2b^4t^2 \\
& -96a^2b^6t^4+48a^2b^8t^6\Big\}\Big/\big(1-b^2t^2\big)^5
\end{aligned}
$$

$$M_x''''(t) = e^{at}\{24ab^2t + 24b^4 + 24ab^6t^3 + 240b^6t^2 + 12a^2b^2 + 12a^2b^4t^2$$

$$-60a^2b^6t^4 + 72ab^4t + a^4 - 4a^4b^2t^2 + 6a^4b^4t^4 - 4a^4b^6t^6$$

$$-24ab^4t^3 - 96ab^8t^5 + 120b^8t^4 + 36a^2b^8t^6 + a^4b^8t^8 + 8a^3b^2t$$

$$-24a^3b^4t^3 + 24a^3b^6t^5 - 8a^3b^8t^7\}/\left(1-b^2t^2\right)^5$$

$$M_x''''(0) = 24b^4 + 12a^2b^2 + a^4$$

ดังนั้น $E\left(X^4\right) = M_x''''(0)$

$$= 24b^4 + 12a^2b^2 + a^4$$

ภาคผนวก ข

ภาคผนวก ข

การหาคำตอบของสมการ $f(x) = 0$ โดยวิธีการของ Newton Raphson

สมมุติให้ a คือ คำตอบของสมการ $f(x) = 0$

ขั้นตอนการหาค่า a คือ

1. กำหนดค่า a_0
2. คำนวณหาค่า a_1, a_2, a_3 ..... โดยใช้สูตร

$$a_{p+1} = a_p - \frac{f(a_p)}{f'(a_p)}$$

3. เมื่อ $a_{p+1} = a_p$ จะได้ว่าคำตอบของสมการคือ $a = a_{p+1}$

ตัวอย่าง สมมุติว่าสุ่มตัวอย่างขนาด $n = 4$ จากประชากรซึ่งมีการแจกแจงโคชี $:C(a,b)$ โดยที่มีพารามิเตอร์ $b = 1$ และ $x_1 = 10$, $x_2 = 5$, $x_3 = 8$, $x_4 = 12$ ต้องการหาค่าประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของพารามิเตอร์ a โดยใช้วิธีการของ Newton Raphson

วิธีทำ

เนื่องจากการหาค่าประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของพารามิเตอร์ a ของการแจกแจงโคชีดังได้กล่าวมาแล้วในบทที่ 4 ต้องหาจากสมการ

$$2\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - a)}{1 + (x_i - a)^2} = 0$$

ซึ่งค่าอนุพันธุ์ด้านซ้ายมือของสมการดังกล่าวเมื่อเทียบกับ a จะได้

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2}{1 + (x_i - a)^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{4}{\left[1 + (x_i - a)^2\right]^2}$$

ดังนั้นหาค่าประมาณของ a ได้จากสูตร

$$a_{p+1} = a_p - \frac{2\sum_{i=1}^{4} \frac{(x_i - a_p)}{1 + (x_i - a_p)^2}}{\sum_{i=1}^{4} \frac{2}{1 + (x_i - a_p)^2} - \sum_{i=1}^{4} \frac{4}{\left[1 + (x_i - a_p)^2\right]^2}}$$

ขั้นตอนการหาค่าประมาณของ a คือ

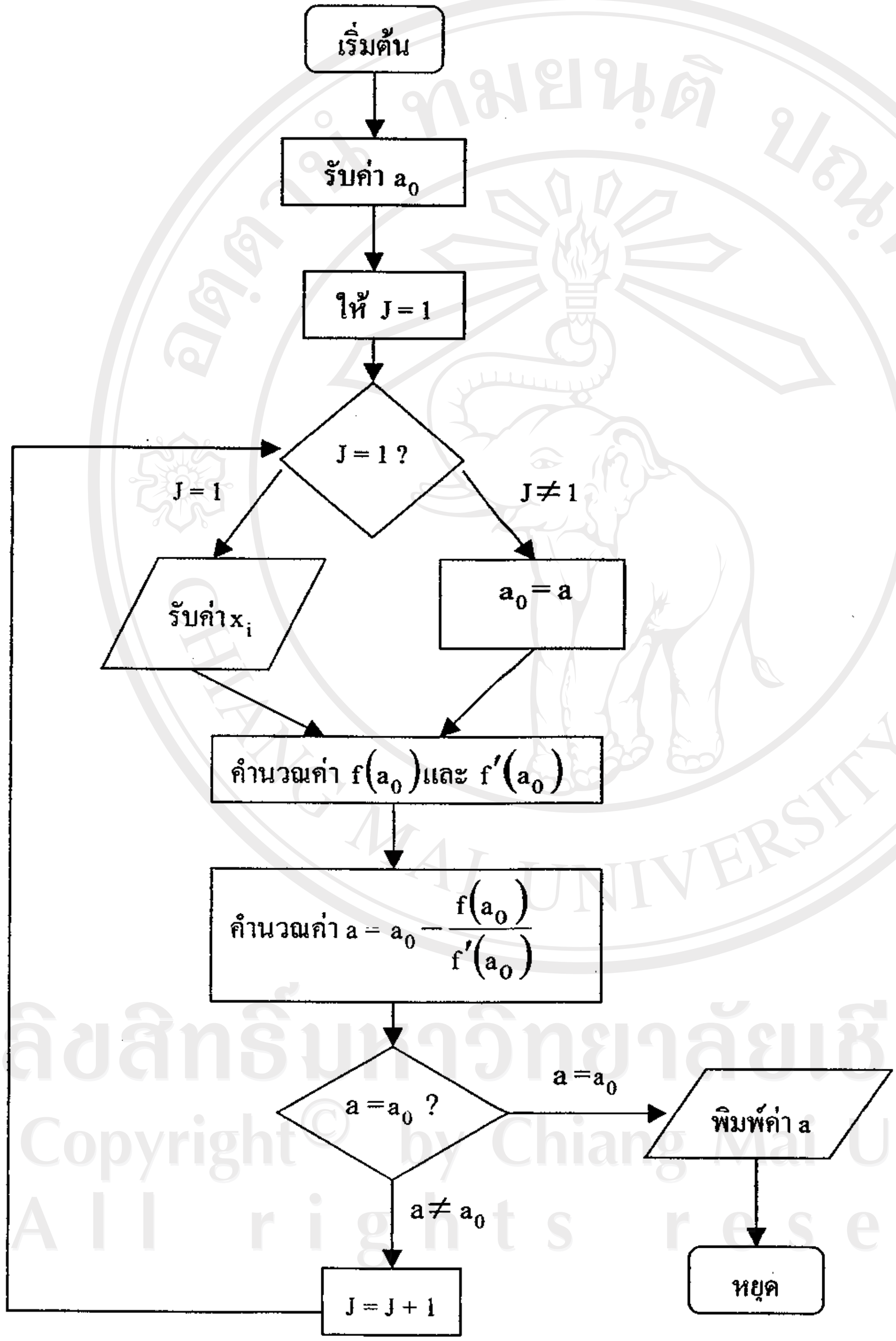
1. กำหนดค่า a_0 เช่น สมมุติให้ $a_0 = 9.0$
2. หาค่า a_1 โดยแทนค่า a_0 และ x_i ลงในสูตร a_{p+1} ที่กล่าวถึงในขั้นต้น ซึ่งจะได้

   $a_1 = 8.7065$
3. เนื่องจาก $a_1 \neq a_0$ จึงคำนวณค่า a_2 โดยวิธีการเช่นเดียวกับ a_1 ซึ่งจะได้ $a_2 = 8.7065$
4. เนื่องจาก $a_2 = a_1$ จึงสรุปได้ว่าค่าประมาณของพารามิเตอร์ a คือ 8.7065 หรือ

   $\hat{a} = 8.7065$

จากตัวอย่างการหาค่าประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของพารามิเตอร์ a ของการแจกแจงโคชี : $C(a,b)$ โดยที่ b = 1 โดยใช้วิธีการของ Newton Raphson นั้น จะสังเกตได้ว่าในกรณี n มีค่ามากๆ การหาค่า a โดยการทำด้วยมือนั้นจะเป็นไปด้วยความยากลำบาก ดังนั้นจึงเสนอวิธีการหาค่าประมาณของพารามิเตอร์ a ดังกล่าวด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ดังนี้

แผนผังแสดงการหาค่าประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของพารามิเตอร์ a ของการแจกแจงโคชี: $C(a,b)$ โดยที่ b = 1 โดยใช้วิธีการของ Newton Raphson



```
PROGRAM     Newton  Raphson;
TYPE        Vector = array[1...n]of real;
VAR         A, A0, D1, E1, E2, Sum1, Sum2, Sum3, Y :real;
             x:Vector;
            I, J:integer;
BEGIN
     Write('Enter  A0 :');
    Read( A0);
    J := 1 ;
    REPEAT
    Sum1 := 0; Sum2 := 0; Sum3 := 0;
    IF J = 1 THEN
    BEGIN
          FOR I := 1 TO  n  DO
           BEGIN
                Write('Enter X',I,'=');
                Read(Y);
                 x[I] := Y;
                D1 := x[I] - A0;
                E1 := D1*D1 + 1;
                E2 := 1/E1;
                Sum1 := Sum1 + D1/E1;
                Sum2 := Sum2 + E2;
                Sum3 := Sum3 + 2*E2*E2;
          END;
         A := A0 - Sum1/(Sum2-Sum3);
   END
```

```
ELSE
BEGIN
        A0 := A ;
        FOR I := 1 TO n DO

        BEGIN
                D1 := x[I] - A0;
                E1 := D1*D1 + 1;
                E2 := 1/E1;
                Sum1 := Sum1 + D1/E1;
                Sum2 := Sum2 +E2;
                Sum3 := Sum3 + 2*E2*E2;
        END;
        A := A0 - Sum1/(Sum2-Sum3);
END;
J := J + 1:
UNTIL A = A0;
Write(' a = ', A :12:5) ;
Readln
```
END.

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-สกุล	นายอภิชาติ ลือสมัย
วัน เดือน ปี เกิด	11 พฤษภาคม 2521
ประวัติการศึกษา	สำเร็จการศึกษามัธยมศึกษาตอนปลาย โรงเรียนตราษตระการคุณ จังหวัดตราด ปีการศึกษา 2538 สำเร็จการศึกษาปริญญาการศึกษาบัณฑิต สาขาวิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒประสานมิตร ปีการศึกษา 2542
ประสบการณ์	เมษายน พ.ศ. 2543 – มีนาคม พ.ศ. 2544 อาจารย์โรงเรียนสาธิตบางนา จังหวัดสมุทรปราการ