บทที่ 2
ทฤษฎีและการแจกแจงที่เกี่ยวข้อง

2.1 กล่าวนำ

ในการศึกษาการแจกแจงหางยาวซึ่งประกอบไปด้วยการแจกแจงลอกนอร์มอล การแจกแจงโคชี และการแจกแจงลาปลาซ โดยที่แต่ละการแจกแจงนั้นมีลักษณะและความสัมพันธ์กับการแจกแจงชนิดต่างๆที่รู้จักกันเป็นอย่างดี เช่น การแจกแจงลอกนอร์มอลมีความสัมพันธ์กับการแจกแจงปกติ การแจกแจงโคชีมีความสัมพันธ์กับการแจกแจงปกติและการแจกแจงที ส่วนการแจกแจงลาปลาซมีความสัมพันธ์กับการแจกแจงเอฟและการแจกแจงเอกซ์โปเนนเชียล ซึ่งความสัมพันธ์ดังกล่าวจะทำให้ทราบถึงลักษณะและที่มาของการแจกแจงหางยาวที่ทำการศึกษาได้ดียิ่งขึ้น ดังนั้นในบทนี้จึงได้นำเสนอการแจกแจงที่มีความสัมพันธ์กับการแจกแจงหางยาวที่ทำการศึกษา

2.2 ความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงโคชีและการแจกแจงที

การแจกแจงโคชี : $C(a,b)$ โดยที่ $a = 0$ และ $b = 1$ เป็นกรณีพิเศษของการแจกแจงที ซึ่งมีองศาอิสระเท่ากับ 1

สมมุติว่า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงทีด้วยองศาอิสระเท่ากับหนึ่ง

ดังนั้น $f(x) \quad = \quad \dfrac{1}{B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}\left(1+x^2\right)^{-1}$

เนื่องจาก $B(\alpha,\beta) = \quad \dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$

และ $\Gamma(\alpha) \quad = \quad (\alpha - 1)!$

ดังนั้น $f(x) \quad = \quad \dfrac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left(1+x^2\right)^{-1}$

$$= \frac{1}{\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2\left(1+x^2\right)}$$

$$= \frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}$$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงโคชี: $C(a,b)$ โดยที่ $a=0$ และ $b=1$

เนื่องจาก $\Gamma(\alpha) = 2\int_0^\infty x^{2\alpha-1} e^{-x^2}\,dx$

ดังนั้น $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty x^{\left(2.\frac{1}{2}\right)-1} e^{-x^2}\,dx$

$$= 2\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

ดังนั้น $\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \left(2\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\right)\times\left(2\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy\right)$

$$= 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\left(x^2+y^2\right)}\,dxdy$$

ให้ $x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} re^{-r^2}\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} e^{-r^2}\,d\left(r^2\right)d\theta$$

$$= -2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(e^{-r^2}\right)_0^{\infty} d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta$$

$$= 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \pi$$

2.3 ความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงโคชีและการแจกแจงปกติ

ถ้าให้ X_1 และ X_2 เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน : $N(0,1)$ โดยที่ X_1 และ X_2 เป็นอิสระกัน จะได้ว่า $Y = \frac{X_1}{X_2}$ มีการแจกแจงแบบ โคชี : $C(a,b)$ โดยที่ $a=0$ และ $b=1$ (standard Cauchy distribution)

จาก ตัวแปรสุ่ม $X_1, X_2 \sim N(0,1)$ และเป็นอิสระกัน

ดังนั้น $f(x_1) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_1^2}$

$$f(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_2^2}$$

และ $f(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_1^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_2^2}$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right)}$$

ให้ $X = X_1$ และ $Y = \frac{X_1}{X_2}$

ดังนั้น

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x} & \frac{\partial x_1}{\partial y} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x} & \frac{\partial x_2}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{y} & \frac{x}{y^2} \end{vmatrix} = -\frac{x}{y^2}$$

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+\left(\frac{x}{y}\right)^2\right)} \cdot \left|-\frac{x}{y^2}\right|$$

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+\left(\frac{x}{y}\right)^2\right)} \frac{|x|}{y^2} dx$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+\left(\frac{x}{y}\right)^2\right)} \frac{x}{y^2} dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+\left(\frac{x}{y}\right)^2\right)} \frac{x}{y^2} dx$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}x^2\left(1+\frac{1}{y^2}\right)} \frac{x}{y^2} dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}x^2\left(1+\frac{1}{y^2}\right)} \frac{x}{y^2} dx$$

$$= -\frac{1}{y^2\left(1+\frac{1}{y^2}\right)} \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}x^2\left(1+\frac{1}{y^2}\right)} d\left(\frac{x^2}{2}\left(1+\frac{1}{y^2}\right)\right)$$

$$+ \frac{1}{y^2\left(1+\frac{1}{y^2}\right)} \int_{0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}x^2\left(1+\frac{1}{y^2}\right)} d\left(\frac{x^2}{2}\left(1+\frac{1}{y^2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi\left(y^2+1\right)} e^{-\frac{1}{2}x^2\left(1+\frac{1}{y^2}\right)} \Bigg|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{2\pi\left(y^2+1\right)} e^{-\frac{1}{2}x^2\left(1+\frac{1}{y^2}\right)} \Bigg|_{0}^{\infty}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi\left(y^2+1\right)} - 0\right) - \left(0 - \frac{1}{2\pi\left(y^2+1\right)}\right)$$

$g(y) = \dfrac{1}{\pi(y^2+1)}$ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงโคชี ซึ่งมีค่า $a=0$ และ $b=1$

ดังนั้น $Y = \dfrac{X_1}{X_2}$ มีการแจกแจงโคชี : $C(a,b)$ โดยที่ $a=0$ และ $b=1$ เมื่อ X_1 และ X_2 เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปกติมาตรฐาน : $N(0,1)$

2.4 ความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงลาปลาซและการแจกแจงเอกซ์โปเนนเชียล

ถ้าให้ X_1 และ X_2 เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงเอกซ์โปเนนเชียล : $\exp(b)$ โดยที่ X_1 และ X_2 เป็นอิสระกัน จะได้ว่าผลต่างระหว่าง X_1 และ X_2 มีการแจกแจงลาปลาซ : $LP(a,b)$ โดยที่ $a=0$

จาก ตัวแปรสุ่ม $X_1, X_2 \sim \exp(b)$ และเป็นอิสระกัน

ดังนั้น $f(x_1) = \dfrac{1}{b}e^{\frac{-x_1}{b}}$

และ $f(x_2) = \dfrac{1}{b}e^{\frac{-x_2}{b}}$

ดังนั้น $f(x_1, x_2) = \dfrac{1}{b}e^{\frac{-x_1}{b}} \cdot \dfrac{1}{b}e^{\frac{-x_2}{b}}$

$$= \frac{1}{b^2}e^{\frac{-(x_1+x_2)}{b}}$$

กรณีที่ 1 ; ให้ $X = X_1$ และ $Y = X_1 - X_2$

ดังนั้น $X_2 = X_1 - Y = X - Y$

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial x} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial x} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$f(x,y) = \frac{1}{b^2} e^{\frac{-[x+(x-y)]}{b}} \cdot |-1|$$

$$= \frac{1}{b^2} e^{\frac{-[2x-y]}{b}}$$

$$g(y) = \int_0^\infty \frac{1}{b^2} e^{\frac{-(2x-y)}{b}} dx$$

$$= \frac{b}{2b^2} \int_0^\infty e^{\frac{-(2x-y)}{b}} d\left(\frac{2x-y}{b}\right)$$

$$= \left(\frac{-1}{2b} e^{\frac{-(2x-y)}{b}}\right)_0^\infty$$

$$= \frac{1}{2b} e^{\frac{y}{b}}$$

กรณีที่ 2 ; ให้ $X = X_1$ และ $Y = X_2 - X_1$

ดังนั้น $X_2 = X_1 + Y = X + Y$

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial x} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial x} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$f(x,y) = \frac{1}{b^2} e^{\frac{-[x+(x+y)]}{b}} .|1|$$

$$= \frac{1}{b^2} e^{\frac{-[2x+y]}{b}}$$

$$g(y) = \int_0^\infty \frac{1}{b^2} e^{\frac{-(2x+y)}{b}} dx$$

$$= \frac{b}{2b^2} \int_0^\infty e^{\frac{-(2x+y)}{b}} d\left(\frac{2x+y}{b}\right)$$

$$= \left(\frac{-1}{2b} e^{\frac{-(2x+y)}{b}}\right)_0^\infty$$

$$= \frac{1}{2b} e^{\frac{-y}{b}}$$

จากทั้งสองกรณีสรุปได้ว่าจะได้ว่า ผลต่างระหว่าง X_1 และ X_2 มีการแจกแจงลาปลาซ : LP(a, b)
โดยที่ $a = 0$

2.5 ความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงลาปลาซและการแจกแจงเอฟ

ถ้าให้ X_1 และ X_2 เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงลาปลาซ : LP(a, b) ที่เป็นอิสระต่อกันโดยที่ $a=0$ จะได้ว่า $\left|\frac{X_1}{X_2}\right|$ มีการแจกแจงเอฟ : $F_{\upsilon_1,\upsilon_2}$ โดยที่มีองศาความเป็นอิสระคือ $\upsilon_1=\upsilon_2=2$

จาก ตัวแปรสุ่ม $X_1, X_2 \sim LP(0,b)$ และเป็นอิสระกัน

ดังนั้น $f(x_1) \quad = \quad \frac{1}{2b}e^{\frac{-|x_1|}{b}}$

และ $\quad f(x_2) = \frac{1}{2b}e^{\frac{-|x_2|}{b}}$

ดังนั้น $f(x_1,x_2) = \frac{1}{2b}e^{\frac{-|x_1|}{b}} \cdot \frac{1}{2b}e^{\frac{-|x_2|}{b}}$

$$= \frac{1}{4b^2}e^{-(|x_1|+|x_2|)/b}$$

ให้ $\quad m \quad = \quad |x_1| \quad$ ดังนั้น $g(m) \quad = \quad \frac{2}{2b}e^{-\frac{m}{b}}$

ให้ $\quad n \quad = \quad |x_2| \quad$ ดังนั้น $g(n) \quad = \quad \frac{2}{2b}e^{-\frac{n}{b}}$

ดังนั้น $g(m,n) \quad = \quad \frac{1}{b^2}e^{-(m+n)/b}$

ให้ $\quad y \ = \ n \qquad$ และ $\ z = \frac{m}{n}\ $ ดังนั้น $\ m = \ zn \ = \ zy$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial n}{\partial y} & \frac{\partial n}{\partial z} \\ \frac{\partial m}{\partial y} & \frac{\partial m}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ z & y \end{vmatrix} = y$$

ดังนั้น $g(y,z) = \frac{y}{b^2} e^{-(zy+y)/b}$

$$= \frac{y}{b^2} e^{-y(z+1)/b}$$

ดังนั้น $h(z) = \int_0^{\infty} \frac{y}{b^2} e^{-y(z+1)/b} dy$

ให้ $u = y$ ดังนั้น $du = dy$

และ $dv = \frac{1}{b^2} e^{-y(z+1)/b} dy$

$$v = \int_0^{\infty} \frac{1}{b^2} e^{-y(z+1)/b} dy$$

$$= \frac{b}{b^2(z+1)} \int_0^{\infty} e^{-y(z+1)/b} d\left(\frac{y(z+1)}{b}\right)$$

$$= \frac{-1}{b(z+1)} e^{-y(z+1)/b}$$

ดังนั้น $h(z) = \dfrac{-y}{b(z+1)} e^{-y(z+1)/b} + \dfrac{1}{b(z+1)} \int_0^\infty e^{-y(z+1)/b}\, dy$

$$= \frac{-y}{b(z+1)} e^{-y(z+1)/b} + \frac{b}{b(z+1)^2} \int_0^\infty e^{-y(z+1)/b}\, d\left(\frac{y(z+1)}{b}\right)$$

$$= \left(\frac{-y}{b(z+1)} e^{-y(z+1)/b} - \frac{1}{(z+1)^2} e^{-y(z+1)/b}\right)_0^\infty$$

$$= \frac{1}{(z+1)^2}$$

ซึ่ง เท่ากับฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของ $F_{2,2}$

และเนื่องจาก $h(z) = h\left(\dfrac{m}{n}\right) = h\left(\dfrac{|x_1|}{|x_2|}\right) = h\left(\left|\dfrac{x_1}{x_2}\right|\right)$

ดังนั้น $\left|\dfrac{X_1}{X_2}\right|$ มีการแจกแจงเอฟ : $F_{\upsilon_1,\upsilon_2}$ โดยที่มีองศาความเป็นอิสระคือ $\upsilon_1 = \upsilon_2 = 2$