# บทที่ 3

## สถิติวิเคราะห์เชิงพรรณนาสำหรับการแจกแจงหางยาว

### 3.1 กล่าวนำ

สถิติวิเคราะห์เชิงพรรณนาเป็นระเบียบวิธีทางสถิติที่สร้างขึ้นมาโดยมีจุดมุ่งหมาย 2ประการ คือ ประการแรก เพื่อที่จะพรรณนาหรืออธิบายให้เห็นถึงลักษณะของข้อมูลที่มีอยู่ทั้งหมดในขณะนั้นโดยอาศัยค่าสถิติ ซึ่งผลที่ได้จากการวิเคราะห์ข้อมูลด้วยสถิติเชิงพรรณนานี้ไม่สามารถนำไปใช้อ้างถึงข้อมูลชุดอื่นได้ จุดมุ่งหมายประการที่สองคือ เพื่อที่จะนำค่าสถิติที่วิเคราะห์ได้จากสถิติเชิงพรรณนานี้ไปใช้ในการอนุมานหรือเพื่ออ้างถึงข้อมูลชุดอื่นๆซึ่งจะได้กล่าวถึงในบทที่ 4 สำหรับข้อมูลที่นำมาวิเคราะห์นั้นอาจจะเป็นคุณลักษณะของสิ่งมีชีวิต สิ่งของ หรือปรากฏการณ์ต่างๆ โดยอาจเป็นเพียงข้อมูลบางส่วน ( ตัวอย่าง ) หรือข้อมูลทั้งหมดของสิ่งที่สนใจศึกษา ( ประชากร ) ก็ได้ ซึ่งค่าทางสถิติที่สำคัญที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูลด้วยสถิติเชิงพรรณนามักเกี่ยวข้องกับลักษณะ 3 ประการ ของข้อมูล ได้แก่

1. ค่ากลางของข้อมูล ซึ่งเป็นค่าที่บอกให้ทราบถึงจุดศูนย์กลางของข้อมูลทั้งหมดว่าอยู่ที่ใด หรืออาจกล่าวว่าเป็นค่าที่ใช้บอกตำแหน่งตรงกลางของข้อมูลนั่นเอง โดยทั่วไปนั้นการหาค่ากลางของข้อมูลมีหลายวิธี แต่ที่นิยมใช้กันทั่วไปคือ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ค่ามัธยฐาน และค่าฐานนิยม ซึ่งค่ากลางแต่ละชนิดมีข้อดีและข้อเสีย และมีความเหมาะสมไม่เหมือนกันขึ้นอยู่กับลักษณะของข้อมูลที่รวบรวมมา

2. ค่าการกระจายของข้อมูล ในการศึกษาลักษณะของข้อมูลนั้นนอกจากจะพิจารณาค่ากลางของข้อมูลแล้ว ยังต้องพิจารณาการกระจายของข้อมูลควบคู่กันไปด้วย เนื่องจากค่าการกระจายของข้อมูลแสดงให้เห็นถึงการกระจายหรือความแตกต่างกันของข้อมูลชุดนั้นๆ เช่นข้อมูลที่มีค่าการกระจายของข้อมูลมาก แสดงว่า ค่าสังเกตภายในข้อมูลชุดนั้นมีความแตกต่างกันมากหรือมีการกระจายตัวมากนั่นเอง ในการวัดการกระจายของข้อมูลชุดใดๆนั้นมีหลายวิธีด้วยกัน แต่ที่นิยมวัดคือ ค่าความแปรปรวน และ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานซึ่งเป็นรากที่สองของความแปรปรวน

3. ลักษณะการกระจายของข้อมูล เป็นค่าที่บอกรายละเอียดให้ทราบถึงลักษณะหรือรูปแบบของการกระจายตัวรอบค่ากลางของข้อมูล ซึ่งจะมีการวัดลักษณะการกระจายของข้อมูล 2 แบบ

คือ สัมประสิทธิ์ความเบ้ ซึ่งเป็นค่าที่บอกให้ทราบว่าลักษณะโค้งความถี่ของข้อมูลมีลักษณะสมมาตรหรือไม่ และสัมประสิทธิ์ความโด่ง ซึ่งจะเป็นค่าที่บอกว่าโค้งความถี่มีลักษณะโด่งมากหรือโด่งน้อย

ซึ่งในบทนี้จะได้นำเสนอสถิติวิเคราะห์เชิงพรรณนาสำหรับการแจกแจงลอกนอร์มอล การแจกแจงโคชี และการแจกแจงลาปลาซ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

**3.2 สถิติวิเคราะห์เชิงพรรณนาสำหรับการแจกแจงลอกนอร์มอล**

**3.2.1ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงลอกนอร์มอล**

**นิยาม3.1** ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่ามากกว่าศูนย์และมีตัวแปรสุ่ม $Y = \ln X$ โดยที่ $Y \sim N(m,\sigma_m^2)$

จะเรียก X ว่า มีการแจกแจงแบบลอกนอร์มอล

จาก $Y \sim N(m,\sigma_m^2)$

ดังนั้น $$f(y) = \frac{1}{\sigma_m\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-m}{\sigma_m}\right)^2}$$

และจาก $Y = \ln X$ ดังนั้น $X = e^Y$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

ดังนั้นฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X คือ

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma_m\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x-m}{\sigma_m}\right)^2}$$



จากนิยามของฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง ซึ่งกล่าวว่าถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่องแล้ว $f(x)$ จะเป็นฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X ก็ต่อเมื่อ $f(x)$ สอดคล้องกับคุณสมบัติต่อไปนี้

1) $f(x) \geq 0$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

เพื่อแสดงว่าฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงลอกนอร์มอล มีคุณสมบัติดังกล่าว สามารถพิจารณาได้ดังนี้

จากนิยามฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงลอกนอร์มอลจะพบว่า ตัวแปรสุ่ม X และ พารามิเตอร์ $\sigma_m$ มีค่ามากกว่าศูนย์ ดังนั้นจึงทำให้ $f(x)$ มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ด้วย นั่นคือ $f(x) \geq 0$

สำหรับการแสดงว่า $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ พิสูจน์ได้ดังนี้

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx \qquad , x > 0$$

$$= \int_{0}^{\infty} \frac{1}{x\sigma_m\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma_m^2}(\ln x - m)^2} dx$$

ให้ $y = \ln x$ จะได้ $x = e^y$ จะได้ $dx = e^y\, dy$

$$\text{ดังนั้น} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^y\sigma_m\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y-m)^2} e^y\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_m\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y-m)^2} dy$$

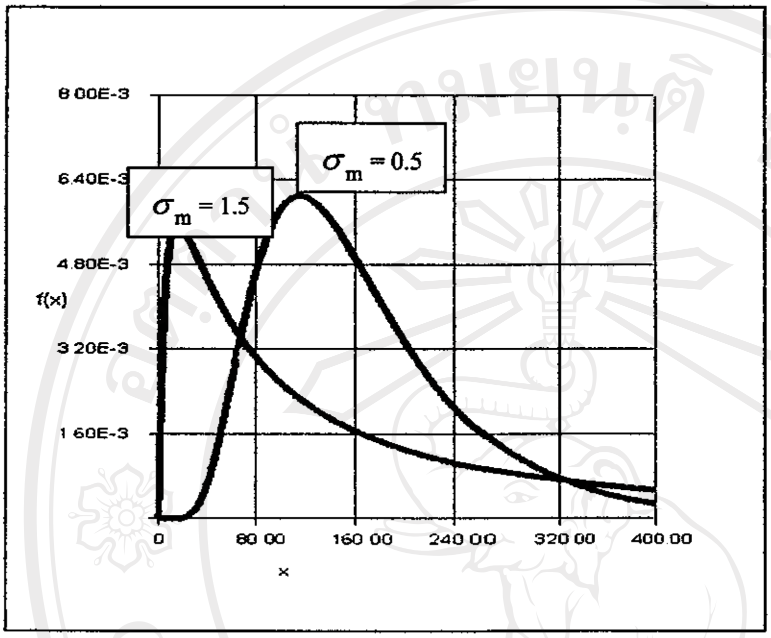
$$= 1$$



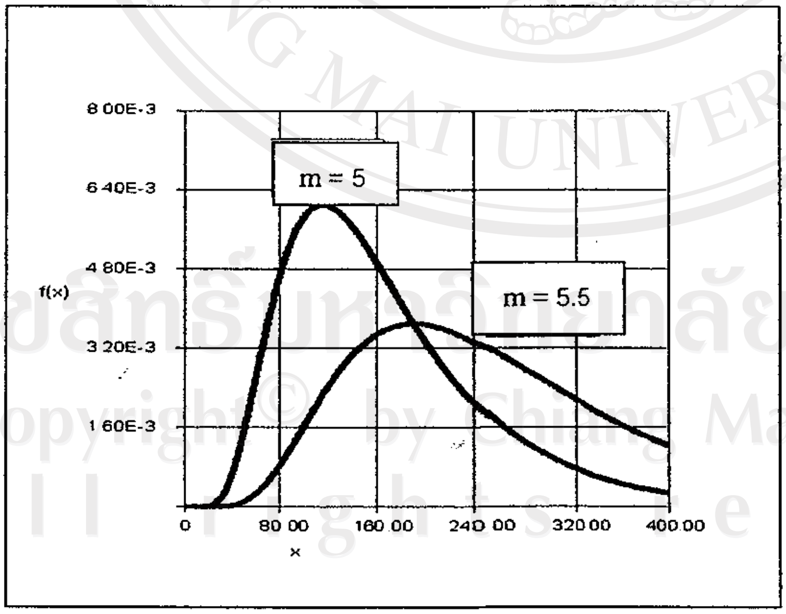
ดังนั้นสรุปได้ว่าฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงลอกนอร์มอล มีความสอดคล้องกับคุณสมบัติของฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง ที่กล่าวในขั้นต้น

จากฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงลอกนอร์มอล ซึ่งประกอบไปด้วยพารามิเตอร์คือ m , $\sigma_m^2$ (โดยที่ m, $\sigma_m^2$ คือ ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงปกติ ) เมื่อนำมาเขียนกราฟ โดยกำหนดให้ค่าเฉลี่ย( m )มีค่าคงที่ กราฟของฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นจะมีลักษณะเบ้มากขึ้นตามค่าของความแปรปรวน ($\sigma_m^2$) ที่เพิ่มขึ้น ดังรูปที่ 3.1 และเมื่อกำหนดให้ค่า

ความแปรปรวน ($\sigma_m^2$) มีค่าคงที่ กราฟของฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นจะมีลักษณะแบนราบมากขึ้นตามค่าของค่าเฉลี่ย ( m ) ที่เพิ่มขึ้นเช่นกัน ดังรูปที่ 3.2




รูป 3.1 แสดงฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงลอกนอร์มอลเมื่อ $\sigma_m = 0.5$ ,1.5 และ m = 5 โดยที่ m และ $\sigma_m$ คือค่าเฉลี่ยและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของการแจกแจงปกติ




รูป 3.2 แสดงฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงลอกนอร์มอลเมื่อ m = 5 , 5.5 และ $\sigma_m = 0.5$ โดยที่ m และ $\sigma_m$ คือค่าเฉลี่ยและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของการแจกแจงปกติ

**3.2.2 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของการแจกแจงลอกนอร์มอล**

**ทฤษฎี 3.1** ถ้าตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงลอกนอร์มอล ด้วยฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น $f(x)$ แล้วฟังก์ชันการแจกแจงสะสม (Cumulative distribution function ) ของการแจกแจงลอกนอร์มอล คือ

$$F(x) = \Phi\left(\frac{\ln x - m}{\sigma_m}\right)$$

**พิสูจน์**

จาก
$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$= \int_0^x \frac{1}{x\sigma_m\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma_m}\right)^2} dx$$

ให้ $z = \dfrac{\ln x - m}{\sigma_m}$ จะได้ $x = e^{m+\sigma_m z}$ จะได้ $dx = \sigma_m e^{m+\sigma_m z} dz$

ดังนั้น
$$F(x) = \int_{-\infty}^{\frac{\ln x - m}{\sigma_m}} \frac{1}{e^{m+\sigma_m z}\sigma_m\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \sigma_m e^{m+\sigma_m z} dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{\ln x - m}{\sigma_m}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \Phi\left(\frac{\ln x - m}{\sigma_m}\right)$$

**3.2.3 สถิติพรรณนาสำหรับการแจกแจงลอกนอร์มอล**

**ค่าเฉลี่ย ค่ามัธยฐาน และค่าฐานนิยมของการแจกแจงลอกนอร์มอล**

**ทฤษฎี 3.2** ถ้าตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงลอกนอร์มอล ด้วยพารามิเตอร์ $m$ , $\sigma_m^2$ แล้ว ค่าเฉลี่ย (mean) ค่ามัธยฐาน ( median ) และค่าฐานนิยม (mode )ของการแจกแจงลอกนอร์มอล กำหนดโดย

$$\text{ค่าเฉลี่ย} = e^{m+\frac{1}{2}\sigma_m^2}$$

ค่ามัธยฐาน $= e^{m}$

ค่าฐานนิยม $= e^{m-\sigma_m^2}$

การหาค่าเฉลี่ย ค่ามัธยฐานและค่าฐานนิยมแสดงได้ดังนี้

ค่าเฉลี่ย $= E(X)$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} x \frac{1}{x\sigma_m\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma_m}\right)^2} dx$$

ให้ $z = \dfrac{\ln x - m}{\sigma_m}$ จะได้ $x = e^{m+\sigma_m z}$ จะได้ $dx = \sigma_m e^{m+\sigma_m z} dz$

ดังนั้น ค่าเฉลี่ย $= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_m\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \sigma_m e^{m+\sigma_m z} dz$

$$= e^{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z^2 - 2z\sigma_m + \sigma_m^2 - \sigma_m^2)} dz$$

$$= e^{m+\frac{1}{2}\sigma_m^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z-\sigma_m)^2} dz$$

$$= e^{m+\frac{1}{2}\sigma_m^2} \times 1 \qquad (\because z \sim N(\sigma_m, 1))$$

$$= e^{m+\frac{1}{2}\sigma_m^2}$$

ค่ามัธยฐาน คือ ค่าของ x ที่ทำให้พื้นที่ใต้โค้งฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น: $f(x)$ ด้านซ้ายมือของ x มีค่าเท่ากับด้านขวามือเท่ากับ $\frac{1}{2}$

จาก $\int_{-\infty}^{median} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$

$$\int_{0}^{median} \frac{1}{x\sigma_m\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma_m}\right)^2} dx = \frac{1}{2}$$

ให้ $y = \ln x$ จะได้ $x = e^y$ จะได้ $dx = e^y\,dy$

$$\int_{-\infty}^{\ln(median)} \frac{1}{e^y\sigma_m\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-m}{\sigma_m}\right)^2} e^y\,dy = \frac{1}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\ln(median)} \frac{1}{\sigma_m\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-m}{\sigma_m}\right)^2} dy = \frac{1}{2}$$

เนื่องจาก $Y \sim N(m, \sigma_m^2)$

ดังนั้น $\ln(median) = m$

ดังนั้น $median = e^m$

นั่นคือ ค่ามัธยฐานของการแจกแจงลอกนอร์มอลคือ $e^m$

ค่าฐานนิยม คือ ค่าของ x ที่ให้ค่า $f(x)$ สูงที่สุด ซึ่งสามารถหาได้ดังนี้

$$\text{จาก}\quad f(x) = \frac{1}{x\sigma_m\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x-m}{\sigma_m}\right)^2}$$

$$\text{ดังนั้น}\ \ln f(x) = -\ln\left(x\sigma_m\sqrt{2\pi}\right)-\frac{1}{2\sigma_m^2}(\ln x-m)^2$$

$$\frac{d\ln f(x)}{dx} = -\frac{\sigma_m\sqrt{2\pi}}{x\sigma_m\sqrt{2\pi}}-\frac{1}{x\sigma_m^2}(\ln x-m)$$

$$0 = -\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x\sigma_m^2}+\frac{m}{x\sigma_m^2}$$

$$0 = -\sigma_m^2-\ln x+m$$

$$\ln x = m-\sigma_m^2$$

$$x = e^{m-\sigma_m^2}$$

ดังนั้นค่าฐานนิยมของการแจกแจงลอกนอร์มอล คือ $e^{m-\sigma_m^2}$

**ความแปรปรวนของการแจกแจงลอกนอร์มอล**

**ทฤษฎี 3.3** ถ้าให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงลอกนอร์มอล ด้วยพารามิเตอร์m , $\sigma_m^2$ แล้ว

ความแปรปรวนของ X กำหนดโดย

$$\text{ความแปรปรวน} = e^{2m+\sigma_m^2}\left(e^{\sigma_m^2}-1\right)$$

**พิสูจน์**

ความแปรปรวน = $E\left(X^2\right) - \left(E(X)\right)^2$

$$E\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} x^2 \frac{1}{x\sigma_m\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma_m}\right)^2} dx$$

ให้ $z = \frac{\ln x - m}{\sigma_m}$ จะได้ $x = e^{m+\sigma_m z}$ จะได้ $dx = \sigma_m e^{m+\sigma_m z}\,dz$

ดังนั้น $$E\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{m+\sigma_m z} \frac{1}{\sigma_m\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \sigma_m e^{m+\sigma_m z}\,dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} e^{2m+2\sigma_m z}\,dz$$

$$= e^{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(z^2 - 4z\sigma_m + 4\sigma_m^2 - 4\sigma_m^2\right)} dz$$

$$= e^{2m+2\sigma_m^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z-2\sigma_m)^2} dz$$

$$= e^{2m+2\sigma_m^2} \times 1 \qquad (\because z \sim N(2\sigma_m, 1))$$

$$= e^{2m+2\sigma_m^2}$$

$$\text{ความแปรปรวน} = e^{2m+2\sigma_m^2} - \left(e^{m+\frac{1}{2}\sigma_m^2}\right)^2$$

$$= e^{2m+2\sigma_m^2} - e^{2m+\sigma_m^2}$$

$$= e^{2m+\sigma_m^2}\left(e^{\sigma_m^2} - 1\right)$$

**สัมประสิทธิ์ความเบ้และสัมประสิทธิ์ความโด่งของการแจกแจงลอกนอร์มอล**

**ทฤษฎี 3.4** ถ้าให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงลอกนอร์มอลด้วยพารามิเตอร์ m , $\sigma_m^2$ แล้ว สัมประสิทธิ์ความเบ้ของ X : $\sigma_3$ และสัมประสิทธิ์ความโด่งของ X : $\sigma_4$ กำหนดโดย

$$\sigma_3 = \left(e^{\sigma_m^2} + 2\right)\left(e^{\sigma_m^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sigma_4 = e^{4\sigma_m^2} + 2e^{3\sigma_m^2} + 3e^{2\sigma_m^2} - 3$$

**พิสูจน์**

$$\sigma_3 = \frac{E(X-\mu)^3}{\sigma^3}$$

เมื่อ $\mu = E(X) = e^{m+\frac{1}{2}\sigma_m^2}$

และ $\sigma^3 = e^{3m+\frac{3}{2}\sigma_m^2}\left(e^{\sigma_m^2} - 1\right)^{\frac{3}{2}}$

ดังนั้น $\sigma_3 = E\left(X - e^{m+\frac{1}{2}\sigma_m^2}\right)^3 \times \dfrac{1}{e^{3m+\frac{3}{2}\sigma_m^2}\left(e^{\sigma_m^2} - 1\right)^{\frac{3}{2}}}$

กำหนดให้ $C = \dfrac{1}{e^{3m+\frac{3}{2}\sigma_m^2}\left(e^{\sigma_m^2} - 1\right)^{\frac{3}{2}}}$ เป็นค่าคงที่

นั่นคือ $\sigma_3 = E\left(X - e^{m+\frac{1}{2}\sigma_m^2}\right)^3 \times C$

$$= E\left(X^3 - 3X^2\mu + 3X\mu^2 - \mu^3\right) \times C$$

$$= \left(E(X^3) - 3\mu E(X^2) + 3\mu^2 E(X) - \mu^3\right) \times C$$

$$= \left(e^{3m+\frac{9}{2}\sigma_m^2} - 3e^{m+\frac{1}{2}\sigma_m^2} e^{2m+2\sigma_m^2} + 3e^{2m+\sigma_m^2} e^{m+\frac{1}{2}\sigma_m^2} - e^{3m+\frac{3}{2}\sigma_m^2}\right) \times C$$

$$= \left(e^{3m+\frac{9}{2}\sigma_m^2} - 3e^{3m+\frac{5}{2}\sigma_m^2} + 3e^{3m+\frac{3}{2}\sigma_m^2} - e^{3m+\frac{3}{2}\sigma_m^2}\right) \times C$$

$$= e^{3m+\frac{3}{2}\sigma_m^2}\left(e^{3\sigma_m^2} - 3e^{\sigma_m^2} + 2\right) \times \frac{1}{e^{3m+\frac{3}{2}\sigma_m^2}\left(e^{\sigma_m^2} - 1\right)^{3/2}}$$

$$= \left(e^{3\sigma_m^2} - 3e^{\sigma_m^2} + 2\right) \times \frac{1}{\left(e^{\sigma_m^2} - 1\right)^{3/2}}$$

$$= \left(e^{\sigma_m^2} - 1\right)^2 \left(e^{\sigma_m^2} + 2\right)\left(e^{\sigma_m^2} - 1\right)^{1/2} \times \frac{1}{\left(e^{\sigma_m^2} - 1\right)^2}$$

$$\sigma_3 = \left(e^{\sigma_m^2} + 2\right)\left(e^{\sigma_m^2} - 1\right)^{1/2}$$

$$\sigma_4 = \frac{E(X-\mu)^4}{\sigma^4}$$

เมื่อ $\mu = E(X) = e^{m+\frac{1}{2}\sigma_m^2}$

และ $\sigma^4 = e^{4m+2\sigma_m^2}\left(e^{\sigma_m^2}-1\right)^2$

ดังนั้น $\sigma_4 = E\left(X-e^{m+\frac{1}{2}\sigma_m^2}\right)^4 \times \frac{1}{e^{4m+2\sigma_m^2}(e^{\sigma_m^2}-1)^2}$

กำหนดให้ $C = \frac{1}{e^{4m+2\sigma_m^2}(e^{\sigma_m^2}-1)^2}$ เป็นค่าคงที่

นั่นคือ $\sigma_4 = E\left(X-e^{m+\frac{1}{2}\sigma_m^2}\right)^4 \times C$

$$= E\left(X^4-4X^3\mu+6X^2\mu^2-4X\mu^3+\mu^4\right)\times C$$

$$= \left(E(X^4)-4\mu E(X^3)+6\mu^2 E(X^2)-4\mu^3 E(X) + \mu^4\right)\times C$$

$$= (e^{4m+8\sigma_m^2} - 4e^{m+\frac{1}{2}\sigma_m^2} e^{3m+\frac{9}{2}\sigma_m^2} + 6e^{2m+\sigma_m^2} e^{2m+2\sigma_m^2} - 4e^{3m+\frac{3}{2}\sigma_m^2} e^{m+\frac{1}{2}\sigma_m^2} + e^{4m+2\sigma_m^2}) \times C$$

$$\sigma_4 = \left(e^{4m+8\sigma_m^2} - 4e^{4m+5\sigma_m^2} + 6e^{4m+3\sigma_m^2} - 4e^{4m+2\sigma_m^2} + e^{4m+2\sigma_m^2}\right) \times C$$

$$= e^{4m+2\sigma_m^2}\left(e^{6\sigma_m^2} - 4e^{3\sigma_m^2} + 6e^{\sigma_m^2} - 3\right) \times \frac{1}{e^{4m+2\sigma_m^2}(e^{\sigma_m^2}-1)^2}$$

$$= \left(e^{6\sigma_m^2} - 4e^{3\sigma_m^2} + 6e^{\sigma_m^2} - 3\right) \times \frac{1}{(e^{\sigma_m^2}-1)^2}$$

$$= \left(e^{\sigma_m^2} - 1\right)^2 \left(e^{4\sigma_m^2} + 2e^{3\sigma_m^2} + 3e^{2\sigma_m^2} - 3\right) \times \frac{1}{(e^{\sigma_m^2}-1)^2}$$

$$\sigma_4 = e^{4\sigma_m^2} + 2e^{3\sigma_m^2} + 3e^{2\sigma_m^2} - 3$$

### 3.3 สถิติวิเคราะห์เชิงพรรณนาสำหรับการแจกแจงโคชี

#### 3.3.1 ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงโคชี

**นิยาม 3.2** ถ้าตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงโคชีแล้ว ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น: $f(x)$ ของตัวแปรสุ่ม X คือ

$$f(x) = \frac{1}{\pi b\left[1+\left(\frac{x-a}{b}\right)^2\right]} \quad , -\infty < x < \infty, -\infty < a < \infty \text{ และ } b > 0$$

จากนิยามของฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง ซึ่งกล่าวว่า ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่องแล้ว $f(x)$ จะเป็นฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X ก็ต่อเมื่อ $f(x)$ สอดคล้องกับคุณสมบัติต่อไปนี้

1) $f(x) \geq 0$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

เพื่อแสดงว่าฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงโคชีมีคุณสมบัติดังกล่าว สามารถพิจารณาได้ดังนี้

จากนิยามฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงโคชี จะพบว่า ตัวแปรสุ่ม $-\infty \leq X \leq \infty$ และ พารามิเตอร์ $b > 0$ ดังนั้นจึงทำให้ $f(x)$ มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ด้วย นั่นคือ $f(x) \geq 0$

สำหรับการแสดงว่า $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ พิสูจน์ได้ดังนี้

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi b\left[1+\left(\frac{x-a}{b}\right)^2\right]}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi b}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{x-a}{b}\right)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{b}{b^2+(x-a)^2}\,dx$$

$$= \frac{b}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{b^2+(x-a)^2}\,d(x-a)$$

เนื่องจาก $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{b}{\pi}\int_{-\infty}^{a}\frac{1}{b^2+(x-a)^2}\,d(x-a)$$

$$+\frac{b}{\pi}\int_{a}^{\infty}\frac{1}{b^2+(x-a)^2}\,d(x-a)$$

$$= \frac{b}{\pi}\left[\frac{1}{b}\tan^{-1}\frac{(x-a)}{b}\right]_{-\infty}^{a}$$

$$+\frac{b}{\pi}\left[\frac{1}{b}\tan^{-1}\frac{(x-a)}{b}\right]_{a}^{\infty}$$

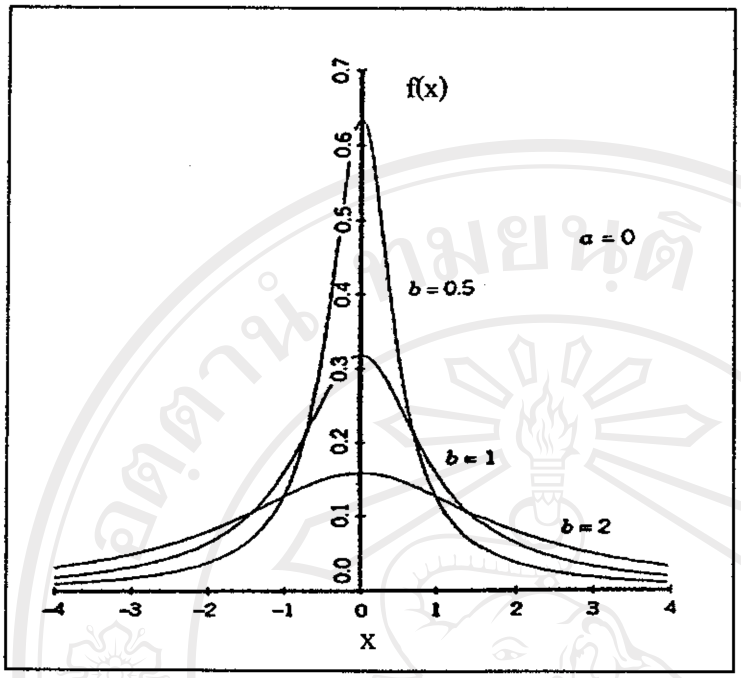
$$= \frac{1}{\pi}\left[0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]+\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-0\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 1$$

ดังนั้นสรุปได้ว่าฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงโคชี มีความสอดคล้องกับคุณสมบัติของฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มต่อเนื่องที่กล่าวในขั้นต้น

จากลักษณะฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงโคชี เมื่อนำมาเขียนกราฟจะพบว่าลักษณะของกราฟมีความสมมาตรรอบค่าพารามิเตอร์a และเมื่อพารามิเตอร์ a มีค่าคงที่ กราฟจะมีลักษณะโด่งมากขึ้นเมื่อพารามิเตอร์ b มีค่าลดลง ดังแสดงในรูปที่ 3.3




รูป 3.3 แสดงฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงโคชีเมื่อพารามิเตอร์ $a = 0$ และ $b = 0.5 , 1 , 2$

**3.3.2 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของการแจกแจงโคชี**

**ทฤษฎี 3.5** ถ้าตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงโคชี ด้วยฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น $f(x)$ แล้ว ฟังก์ชันการแจกแจงสะสม (Cumulative distribution function ) ของการแจกแจงโคชี คือ

$$F(x) = \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{x-a}{b}\right)$$

**พิสูจน์**

จาก $F(x) = P(X \leq x)$

$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi b\left[1+\left(\frac{x-a}{b}\right)^2\right]}dx$$

$$= \frac{1}{\pi b}\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1+\left(\frac{x-a}{b}\right)^2}dx$$

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{b}{b^2+(x-a)^2}\,dx$$

$$= \frac{b}{\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{b^2+(x-a)^2}\,d(x-a)$$

$$= \frac{b}{\pi}\left[\frac{1}{b}\tan^{-1}\frac{(x-a)}{b}\right]_{-\infty}^{x}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\tan^{-1}\left(\frac{x-a}{b}\right)-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{x-a}{b}\right)$$

**3.3.3 สถิติพรรณนาสำหรับการแจกแจงโคชี**

สำหรับการแจกแจงโคชีนั้นจะมีลักษณะพิเศษกว่าการแจกแจงลอกนอร์มอลที่กล่าวถึงไปก่อนหน้านี้ เนื่องจากสถิติพรรณนาของการแจกแจงโคชีนั้นมีเฉพาะค่ามัธยฐานและค่าฐานนิยมเท่านั้น ในส่วนของค่าเฉลี่ย ความแปรปรวน สัมประสิทธิ์ความเบ้ และสัมประสิทธิ์ความโด่งนั้นไม่สามารถหาค่าของการอินทิเกรตได้ ซึ่งค่ามัธยฐานและค่าฐานนิยมนั้นสามารถหาได้ดังนี้

**ค่ามัธยฐาน และค่าฐานนิยมของการแจกแจงโคชี**

**ทฤษฎี 3.6** ถ้าตัวแปรสุ่ม $X$ มีการแจกแจงโคชี ด้วยพารามิเตอร์ $a$ , $b$ โดยที่ $b > 0$ แล้ว ค่ามัธยฐาน ( median ) และค่าฐานนิยม (mode )ของการแจกแจงโคชี กำหนดโดย

ค่ามัธยฐาน $= a$

ค่าฐานนิยม $= a$

การหาค่ามัธยฐานและค่าฐานนิยมแสดงได้ดังนี้

ค่ามัธยฐาน คือ ค่าของ x ที่ทำให้พื้นที่ใต้โค้งฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น: $f(x)$ ด้านซ้ายมือของ x มีค่าเท่ากับด้านขวามือเท่ากับ $\frac{1}{2}$

จาก $\int_{-\infty}^{\text{median}} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} = \int_{-\infty}^{\text{median}} \frac{1}{\pi b\left[1+\left(\frac{x-a}{b}\right)^2\right]}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi b}\int_{-\infty}^{\text{median}} \frac{1}{1+\left(\frac{x-a}{b}\right)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\text{median}} \frac{b}{b^2+(x-a)^2}\,dx$$

$$= \frac{b}{\pi}\int_{-\infty}^{\text{median}} \frac{1}{b^2+(x-a)^2}\,d(x-a)$$

$$= \frac{b}{\pi}\left[\frac{1}{b}\tan^{-1}\frac{(x-a)}{b}\right]_{-\infty}^{\text{median}}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\tan^{-1}\left(\frac{\text{median}-a}{b}\right)-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{\text{median}-a}{b}\right)$$

$$0 = \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{\text{median}-a}{b}\right)$$

$$0 = \tan^{-1}\left(\frac{\text{median}-a}{b}\right)$$

ดังนั้น $\frac{\text{median}-a}{b} = 0$

ดังนั้น median $= a$

นั่นคือ ค่ามัธยฐานของการแจกแจงโคชีคือ a

ค่าฐานนิยม คือ ค่าของ x ที่ให้ค่า $f(x)$ สูงที่สุด ซึ่งสามารถหาได้ดังนี้

จาก $f(x) = \dfrac{1}{\pi b\left[1+\left(\frac{x-a}{b}\right)^2\right]}$

ดังนั้น $\dfrac{df(x)}{dx} = \dfrac{2\pi\left(\frac{x-a}{b}\right)}{(\pi b)^2\left[1+\left(\frac{x-a}{b}\right)^2\right]^2}$

$$0 = \frac{2\pi\left(\frac{x-a}{b}\right)}{(\pi b)^2\left[1+\left(\frac{x-a}{b}\right)^2\right]^2}$$

$$0 = 2\pi\left(\frac{x-a}{b}\right)$$

$$0 = x - a$$

$$x = a$$

ดังนั้นค่าฐานนิยมของการแจกแจงโคชี คือ a

### 3.4 สถิติวิเคราะห์เชิงพรรณนาสำหรับการแจกแจงลาปลาซ

#### 3.4.1 ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงลาปลาซ

**นิยาม 3.3** ถ้าตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงลาปลาซแล้ว ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น : $f(x)$ ของตัวแปรสุ่ม X คือ

$$f(x) = \frac{1}{2b} e^{-\frac{|x-a|}{b}} \quad , -\infty < x < \infty , -\infty < a < \infty \text{ และ } b > 0$$

จากนิยามของฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง ซึ่งกล่าวว่า ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่องแล้ว $f(x)$ จะเป็นฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มX ก็ต่อเมื่อ $f(x)$ สอดคล้องกับคุณสมบัติต่อไปนี้

1) $f(x) \geq 0$
2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

เพื่อแสดงว่าฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงลาปลาซ มีคุณสมบัติดังกล่าว สามารถพิจารณาได้ดังนี้

จากนิยามฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงลาปลาซจะพบว่า พารามิเตอร์ b มีค่ามากกว่าศูนย์ ดังนั้นจึงทำให้ $f(x)$ มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ด้วย นั่นคือ $f(x) \geq 0$

สำหรับการแสดงว่า $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ พิสูจน์ได้ดังนี้

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2b} e^{\frac{|x-a|}{b}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2b} \int_{-\infty}^{a} e^{\frac{-(a-x)}{b}}\,dx + \frac{1}{2b} \int_{a}^{\infty} e^{\frac{-(x-a)}{b}}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{a} e^{\frac{-(a-x)}{b}}\, d\left(\frac{a-x}{b}\right) + \frac{1}{2}\int_{a}^{\infty} e^{\frac{-(x-a)}{b}}\, d\left(\frac{x-a}{b}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{\frac{(a-x)}{b}}\right)_{-\infty}^{a} + \frac{1}{2}\left(-e^{\frac{(x-a)}{b}}\right)_{a}^{\infty}$$

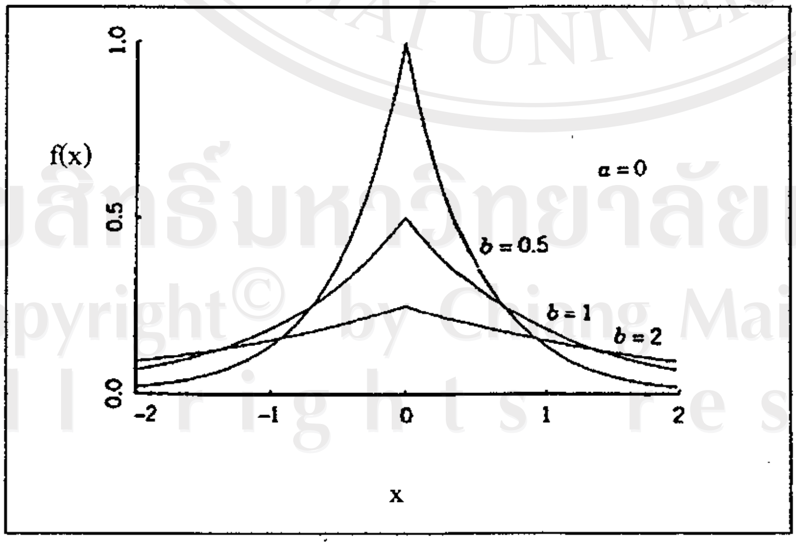
$$= \frac{1}{2}(1-0) + \frac{1}{2}(0+1)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= 1$$

ดังนั้นสรุปได้ว่าฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงลาปลาซ มีความสอดคล้องกับคุณสมบัติของฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มต่อเนื่องที่กล่าวในขั้นต้น

จากลักษณะฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงลาปลาซ เมื่อนำมาเขียนกราฟจะพบว่าลักษณะของกราฟมีความสมมาตรรอบค่าพารามิเตอร์ a และเมื่อพารามิเตอร์ a มีค่าคงที่กราฟจะมีลักษณะโด่งมากขึ้นเมื่อพารามิเตอร์ b มีค่าลดน้อยลง ดังแสดงในรูปที่ 3.4




รูป 3.4 แสดงฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงลาปลาซเมื่อพารามิเตอร์ a = 0 และ b = 0.5 , 1 , 2

**3.4.2 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของการแจกแจงลาปลาซ**

**ทฤษฎี 3.7** ถ้าตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงลาปลาซ ด้วยฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น $f(x)$ แล้ว ฟังก์ชันการแจกแจงสะสม (Cumulative distribution function )ของการแจกแจงลาปลาซ คือ

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\left(\frac{a-x}{b}\right)} & ,x < a \\ 1-\frac{1}{2}e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)} & ,x \geq a \end{cases}$$

**พิสูจน์**

กรณีที่ 1; ถ้า $x < a$

จาก $F(x) = P(X \leq x)$

$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2b} e^{-\frac{|x-a|}{b}} dx$$

$$= \frac{1}{2b} \int_{-\infty}^{x} e^{-\left(\frac{a-x}{b}\right)} dx \qquad ,x < a$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{x} e^{-\left(\frac{a-x}{b}\right)} d\left(\frac{a-x}{b}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{-\left(\frac{a-x}{b}\right)}\right)_{-\infty}^{x}$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{-\left(\frac{a-x}{b}\right)} - 0\right)$$

$$F(x) = \frac{1}{2}e^{-\left(\frac{a-x}{b}\right)}$$

กรณีที่ 2 ; ถ้า $x \geq a$

จาก $F(x) = P(X \leq x)$

$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2b} e^{-\frac{|x-a|}{b}} dx$$

$$= \frac{1}{2b}\int_{-\infty}^{a} e^{-\left(\frac{a-x}{b}\right)} dx + \frac{1}{2b}\int_{a}^{x} e^{\frac{-(x-a)}{b}} dx \qquad ,x \geq a$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{a} e^{-\left(\frac{a-x}{b}\right)} d\left(\frac{a-x}{b}\right) + \frac{1}{2}\int_{a}^{x} e^{\frac{-(x-a)}{b}} d\left(\frac{x-a}{b}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}e^{-\left(\frac{a-x}{b}\right)}\right)_{-\infty}^{a} - \left(\frac{1}{2}e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)}\right)_{a}^{x}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - 0\right) - \left(\frac{1}{2}e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)}$$

**3.4.3 ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของการแจกแจงลาปลาซ**

ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ เป็นรูปแบบหนึ่งของค่าคาดหวังทางคณิตศาสตร์โดยที่ถ้ากำหนดให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น $f(x)$ แล้วฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่ม X คือ $E\left(e^{tx}\right)$ และค่าอนุพันธ์ครั้งที่ n ของฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์เมื่อแทนค่า $t = 0$ จะให้ค่าโมเมนต์ที่ n ของตัวแปรสุ่ม X ซึ่งมีประโยชน์ในการนำไปหาค่าเฉลี่ย ความแปรปรวน สัมประสิทธิ์ความเบ้ และสัมประสิทธิ์ความโด่งของตัวแปรสุ่ม X

ซึ่งในที่นี้จะได้หาฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของการแจกแจงลาปลาซ และนำฟังก์ชันดังกล่าวไปใช้ในการหาค่าเฉลี่ย ความแปรปรวน สัมประสิทธ์ความเบ้ และสัมประสิทธิ์ความโด่งต่อไป ดังมีรายละเอียดต่อไปนี้

**ทฤษฎี 3.8** ถ้าให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงลาปลาซ ด้วยพารามิเตอร์a, b โดยที่ b> 0 แล้ว

ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์: $M_x(t)$ ของการแจกแจงลาปลาซ คือ

$$M_x(t) = \frac{e^{at}}{1-b^2t^2}$$

**พิสูจน์**

$$M_x(t) = E\left(e^{tx}\right)$$

$$= \frac{1}{2b}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{-\frac{|x-a|}{b}} dx$$

$$= \frac{1}{2b}\int_{-\infty}^{a} e^{tx-\left(\frac{a-x}{b}\right)} dx + \frac{1}{2b}\int_{a}^{\infty} e^{tx-\left(\frac{x-a}{b}\right)} dx$$

$$= \frac{1}{2b}\int_{-\infty}^{a} e^{tx-\frac{a}{b}+\frac{x}{b}} dx + \frac{1}{2b}\int_{a}^{\infty} e^{tx-\frac{x}{b}+\frac{a}{b}} dx$$

$$M_x(t) = \frac{1}{2b\left(t+1/b\right)} \int_{-\infty}^{a} e^{tx-\frac{a}{b}+\frac{x}{b}}\, d\left(tx-\frac{a}{b}+\frac{x}{b}\right)$$

$$+\frac{1}{2b\left(t-1/b\right)} \int_{a}^{\infty} e^{tx-\frac{x}{b}+\frac{a}{b}}\, d\left(tx-\frac{x}{b}+\frac{a}{b}\right)$$

$$= \frac{1}{2b\left(t+1/b\right)} \left(e^{tx-\frac{a}{b}+\frac{x}{b}}\right)_{-\infty}^{a} + \frac{1}{2b\left(t-1/b\right)} \left(e^{tx-\frac{x}{b}+\frac{a}{b}}\right)_{a}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2b\left(t+1/b\right)}\left(e^{at}-0\right) + \frac{1}{2b\left(t-1/b\right)}\left(0-e^{at}\right)$$

$$= \frac{e^{at}}{2(bt+1)} - \frac{e^{at}}{2(bt-1)}$$

$$= \frac{-2e^{at}}{2(bt+1)(bt-1)}$$

$$= \frac{e^{at}}{(1+bt)(1-bt)}$$

$$= \frac{e^{at}}{1-b^2t^2}$$

**3.4.4 สถิติพรรณนาสำหรับการแจกแจงลาปลาซ**

**ค่าเฉลี่ย ค่ามัธยฐาน และค่าฐานนิยมของการแจกแจงลาปลาซ**

**ทฤษฎี 3.9** ถ้าตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงลาปลาซ ด้วยพารามิเตอร์ a, b โดยที่ b> 0 แล้ว ค่าเฉลี่ย (mean) ค่ามัธยฐาน ( median ) และค่าฐานนิยม (mode )ของการแจกแจงลาปลาซ กำหนดโดย

ค่าเฉลี่ย = a

ค่ามัธยฐาน = a

ค่าฐานนิยม = a

การหาค่าเฉลี่ย ค่ามัธยฐานและค่าฐานนิยมแสดงได้ดังนี้

จาก $$M_x(t) = \frac{e^{at}}{1-b^2t^2}$$

ดังนั้น $$M'_x(t) = \frac{ae^{at}\left(1-b^2t^2\right)-e^{at}\left(-2b^2t\right)}{\left(1-b^2t^2\right)^2}$$

$$= \frac{ae^{at}-ab^2t^2e^{at}+2b^2te^{at}}{\left(1-b^2t^2\right)^2}$$

$$M'_x(t) = \frac{a-0+0}{(1-0)^2}$$

$$= a$$

และค่าเฉลี่ย $= E(X) = \mu$

$$= M'_x(0)$$

$$= a$$

ค่ามัธยฐาน คือ ค่าของ x ที่ทำให้พื้นที่ใต้โค้งฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น: $f(x)$ ด้านซ้ายมือของ x มีค่าเท่ากับด้านขวามือเท่ากับ $\frac{1}{2}$

จาก $\int_{-\infty}^{median} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$

ดังนั้น $\frac{1}{2} = \int_{-\infty}^{median} \frac{1}{2b} e^{-\frac{|x-a|}{b}} dx$

กรณีที่ 1 ; ถ้า $x < a$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2b} \int_{-\infty}^{median} e^{-\left(\frac{a-x}{b}\right)} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{median} e^{-\left(\frac{a-x}{b}\right)} d\left(\frac{a-x}{b}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{-\left(\frac{a-x}{b}\right)}\right)_{-\infty}^{median}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{-\left(\frac{a-median}{b}\right)} - 0\right)$$

$$1 = e^{-\left(\frac{a-median}{b}\right)}$$

$$\ln 1 = -\left(\frac{a-median}{b}\right)$$

$$0 = \frac{-a+\text{median}}{b}$$

$$\text{median} = a$$

**กรณีที่ 2 ; ถ้า $x \geq a$**

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2b}\int_{-\infty}^{a} e^{-\left(\frac{a-x}{b}\right)} dx + \frac{1}{2b}\int_{a}^{\text{median}} e^{\frac{-(x-a)}{b}} dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{a} e^{-\left(\frac{a-x}{b}\right)} d\left(\frac{a-x}{b}\right) + \frac{1}{2}\int_{a}^{\text{median}} e^{\frac{-(x-a)}{b}} d\left(\frac{x-a}{b}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}e^{-\left(\frac{a-x}{b}\right)}\right)_{-\infty}^{a} - \left(\frac{1}{2}e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)}\right)_{a}^{\text{median}}$$

$$= \left(\frac{1}{2}-0\right) - \left(\frac{1}{2}e^{-\left(\frac{\text{median}-a}{b}\right)} - \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}e^{-\left(\frac{\text{median}-a}{b}\right)}$$

$$\frac{1}{2}e^{-\left(\frac{\text{median}-a}{b}\right)} = \frac{1}{2}$$

$$-\left(\frac{\text{median}-a}{b}\right) = \ln 1$$

$$\frac{-\text{median}+a}{b} = 0$$

median $=$ a

จากทั้ง 2 กรณีสรุปได้ว่า ค่ามัธยฐานของการแจกแจงลาปลาซคือ a

**ค่าฐานนิยม คือ ค่าของ x ที่ให้ค่าของ $f(x)$ สูงที่สุด จากฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X : $f(x) = \frac{1}{2b} e^{\frac{|x-a|}{b}}$ โดยที่ $-\infty < x < \infty$ , $-\infty < a < \infty$ และ $b > 0$ นั่นคือ $f(x)$ มีค่าสูงที่สุดเมื่อ x เท่ากับ a**

**ดังนั้นค่าฐานนิยมของการแจกแจงลาปลาซ คือ a**

**ความแปรปรวนของการแจกแจงลาปลาซ**

**ทฤษฎี 3.10** ถ้าให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงลาปลาซ ด้วยพารามิเตอร์ a, b โดยที่ $b > 0$ แล้ว

ความแปรปรวนของ X กำหนดโดย

ความแปรปรวน $= 2b^2$

**พิสูจน์**

$$\text{จาก } M_x(t) = \frac{e^{at}}{1-b^2t^2}$$

$$M_x'(t) = \frac{ae^{at} - ab^2t^2e^{at} + 2b^2te^{at}}{\left(1-b^2t^2\right)^2}$$

$$= \frac{e^{at}\left(a - ab^2t^2 + 2b^2t\right)}{\left(1-b^2t^2\right)^2}$$

$$\text{ดังนั้น } M_x''(t) = \Big\{\left(1-b^2t^2\right)^2\left[e^{at}\left(-2ab^2t + 2b^2\right) + ae^{at}\left(a - ab^2t^2 + 2b^2t\right)\right]$$

$$-\left[2e^{at}(-2b^2t)(1-b^2t^2)\left(a - ab^2t^2 + 2b^2t\right)\right]\Big\} \Big/ \left(1-b^2t^2\right)^4$$

$$M_x''(t) = \Big\{(1-b^2t^2)e^{at}\left(-2ab^2t+2b^2+a^2-a^2b^2t^2+2ab^2t\right)$$

$$+e^{at}\left(4ab^2t-4ab^4t^3+8b^4t^2\right)\Big\}\Big/\left(1-b^2t^2\right)^3$$

$$= e^{at}\Big\{-2ab^2t+2b^2+a^2-a^2b^2t^2+2ab^2t+2ab^4t^3$$

$$-2b^4t^2-a^2b^2t^2+a^2b^4t^4-2ab^4t^3+4ab^2t$$

$$-4ab^4t^3+8b^4t^2\Big\}\Big/\left(1-b^2t^2\right)^3$$

$$= e^{at}\Big(4ab^2t+2b^2+a^2-2a^2b^2t^2-4ab^4t^3+6b^4t^2$$

$$+a^2b^4t^4\Big)\Big/\left(1-b^2t^2\right)^3$$

ดังนั้น $M_x''(0) = 2b^2+a^2$

และ $M_x''(0) = E(X^2)$

จาก ความแปรปรวน $= E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$

$$= (2b^2+a^2) - (a)^2$$

$$= 2b^2$$

**สัมประสิทธิ์ความเบ้และสัมประสิทธิ์ความโด่งของการแจกแจงลาปลาซ**

**ทฤษฎี 3.11** ถ้าให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงลาปลาซด้วยพารามิเตอร์ a , b โดยที่ $b>0$ แล้ว สัมประสิทธิ์ความเบ้ของ X : $\sigma_3$ และสัมประสิทธิ์ความโด่งของ X : $\sigma_4$ กำหนดโดย

$$\sigma_3 = 0$$

$$\sigma_4 = 6$$

**พิสูจน์**

$$\sigma_3 = \frac{E(X-\mu)^3}{\sigma^3}$$

เมื่อ $\mu = E(X) = a$

และ $\sigma^3 = 2^{3/2}\, b^3$

ดังนั้น
$$\sigma_3 = \frac{1}{2^{3/2}\, b^3} E(X-a)^3$$

$$= \frac{1}{\sigma^3} E\left(X^3 - 3X^2\mu + 3X\mu^2 - \mu^3\right)$$

$$= \frac{1}{\sigma^3}\left(E(X^3) - 3\mu E(X^2) + 3\mu^2 E(X) - \mu^3\right)$$

$$= \frac{1}{2^{3/2}\, b^3}\left\{\left(6ab^2 + a^3\right) - 3a\left(2b^2 + a^2\right) + 3a^3 - a^3\right\}$$

$$= \frac{1}{2^{3/2}\, b^3}\left(6ab^2 + a^3 - 6ab^2 - 3a^3 + 3a^3 - a^3\right)$$

$$= \frac{1}{2^{3/2}\, b^3} \times 0$$

$$= 0$$

$$\sigma_4 = \frac{E(X-\mu)^4}{\sigma^4}$$

เมื่อ $\mu = E(X) = a$

และ $\sigma^4 = 4b^4$

ดังนั้น $\sigma_4 = \frac{1}{4b^4} E(X-a)^4$

นั่นคือ $\sigma_4 = \frac{1}{\sigma^4} E\left(X^4 - 4X^3\mu + 6X^2\mu^2 - 4X\mu^3 + \mu^4\right)$

$$\sigma_4 = \frac{1}{\sigma^4}\left(E\left(X^4\right) - 4\mu E\left(X^3\right) + 6\mu^2 E\left(X^2\right) - 4\mu^3 E(X) + \mu^4\right)$$

$$= \frac{1}{4b^4}\left\{\left(24b^4 + 12a^2b^2 + a^4\right) - 4a\left(6ab^2 + a^3\right) + 6a^2\left(2b^2 + a^2\right) - 4a^4 + a^4\right\}$$

$$= \frac{1}{4b^4}\left(24b^4 + 12a^2b^2 + a^4 - 24a^2b^2 - 4a^4 + 12a^2b^2 + 6a^4 - 4a^4 + a^4\right)$$

$$= \frac{1}{4b^4}\left(24b^4\right)$$

$$= 6$$

**สรุปค่าสถิติเชิงพรรณนาสำหรับการแจกแจงหางยาว**

| สถิติเชิงพรรณนา | การแจกแจงลอกนอร์มอล $LN\left(m,\sigma_m^2\right)$ | การแจกแจงลาปลาซ $LP(a,b)$ | การแจกแจงโคชี $C(a,b)$ |
|---|---|---|---|
| ค่าเฉลี่ย | $e^{m+\frac{1}{2}\sigma_m^2}$ | a | - |
| ค่ามัธยฐาน | $e^{m}$ | a | a |
| ค่าฐานนิยม | $e^{m-\sigma_m^2}$ | a | a |
| ความแปรปรวน | $e^{2m+\sigma_m^2}\left(e^{\sigma_m^2}-1\right)$ | $2b^2$ | - |
| สัมประสิทธิ์ความเบ้ | $\left(e^{\sigma_m^2}+2\right)\left(e^{\sigma_m^2}-1\right)^{1/2}$ | 0 | - |
| สัมประสิทธิ์ความโด่ง | $e^{4\sigma_m^2}+2e^{3\sigma_m^2}+3e^{2\sigma_m^2}-3$ | 6 | - |