บทที่ 4

สถิติวิเคราะห์เชิงอนุมานสำหรับการแจกแจงหางยาว

4.1 กล่าวนำ

ในการศึกษาลักษณะของประชากรหนึ่ง เช่น ค่าเฉลี่ย ค่าความแปรปรวน ค่าสัดส่วน การจะได้มาซึ่งค่าดังกล่าวของประชากร ถ้าต้องคำนวณจากทุกหน่วยของประชากรอาจเสียเวลา เสียค่าใช้จ่ายหรือสิ้นเปลืองบุคลากรเป็นจำนวนมากและบางครั้งกระทำไม่ได้ เพื่อแก้ปัญหาดังกล่าว เราใช้ค่าเฉลี่ย ความแปรปรวน ค่าสัดส่วน ที่คำนวณได้จากตัวอย่างมาสรุปค่าของประชากรแทน การใช้ค่าที่คำนวณได้จากตัวอย่างไปอธิบายหรือสรุปค่าของทั้งประชากร เรียกว่า "การอนุมาน" การอนุมานค่าประชากรอาจคลาดเคลื่อนเป็นอย่างมาก ถ้าตัวอย่างที่นำมาศึกษาไม่ได้เป็นตัวอย่างที่มาจากการสุ่มตัวอย่างด้วยวิธีที่เหมาะสม หรือขนาดตัวอย่างเล็กเกินไป หรือวิธีการอนุมานไม่ถูกต้อง[1]

สำหรับการอนุมานค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงหางยาวนั้น จะนำเสนอการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบจุดโดยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด(Maximum likelihood method) และการทดสอบสมมุติฐานในกรณีที่ตัวอย่างมีขนาดมากพอ

4.2 การหาตัวประมาณโดยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด(Maximum likelihood method)

การหาตัวประมาณโดยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดนั้นเป็นวิธีการหนึ่งที่ใช้กันมากในทางสถิติ เพราะว่าวิธีการดังกล่าวจะทำให้ได้ตัวประมาณที่มีคุณสมบัติที่ดีหลายประการ ซึ่งหลักการโดยทั่วไปของวิธีภาวะน่าเป็นสูงสุดมีดังนี้

ให้ $x_1, x_2, ..., x_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากการแจกแจงซึ่งมีฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นคือ $f(x;\theta)$ เมื่อ θ คือ พารามิเตอร์ของการแจกแจง ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นร่วมของ $x_1, x_2, ..., x_n$ คือ $f(x_1, x_2, ..., x_n;\theta) = f(x_1;\theta).f(x_2;\theta).....f(x_n;\theta)$ ซึ่งฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นร่วมดังกล่าวนี้บางครั้งเรียกว่าฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น แทนด้วย $L(\theta)$ อาจเขียนแทนได้ดังนี้

---

[1] เพ็ญนภา สิงหพันธ์, "การศึกษาการแจกแจงพาเรโต", หน้า 18

$$
\begin{aligned}
L(\theta) &= L(x_1, x_2, \ldots x_n; \theta) \\
&= f(x_1;\theta).f(x_2;\theta).....f(x_n;\theta) \\
&= \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)
\end{aligned}
$$

ขั้นต่อไปคือ จะเลือกตัวประมาณ $\hat{\theta}$ ที่ทำให้ $L(\theta)$ มีค่าสูงที่สุด นั่นคือ $L(\hat{\theta}) \geq L(\theta)$ สำหรับทุกค่า θ เมื่อหาค่า $\hat{\theta}$ ได้ เราจะกล่าวว่า $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของพารามิเตอร์ θ ซึ่งมีขั้นตอนในการหาค่า $\hat{\theta}$ ดังนี้

(1) สร้างฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น

$$L(\theta) = f(x_1;\theta).f(x_2;\theta).....f(x_n;\theta)$$

(2) หาอนุพันธ์ของ $L(\theta)$ เทียบกับ θ แล้วให้เท่ากับศูนย์ นั่นคือ

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = 0$$

(3) แก้สมการในข้อ 2) หาค่า θ จะได้ $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ θ

ในกรณีที่ $L(\theta)$ เป็นฟังก์ชันที่ยุ่งยากในการหาอนุพันธ์ สามารถหาค่าของตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดโดยการหาอนุพันธ์ของ $\ln L(\theta)$ เทียบกับ θ แทนการหา $\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta}$ ได้ ซึ่งจะให้ผลลัพธ์เช่นเดียวกันและทำได้ง่ายกว่า

4.3 ข้อสนเทศของฟิชเชอร์ (Fisher Information)

ข้อสนเทศของฟิชเชอร์ คือ ปริมาณหนึ่งที่ถูกคิดค้นขึ้นโดย R.A. Fisher ในปี พ.ศ. 2463 บางครั้งถูกเรียกว่า ข้อสนเทศของค่าคาดหวัง เพราะว่าข้อสนเทศของฟิชเชอร์ถูกกำหนดโดยค่าคาดหวังของอนุพันธ์ครั้งที่ 2 ของลอกธรรมชาติของฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นดังทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎี 4.1 ถ้าให้ X เป็นตัวแปรสุ่มใดๆ ซึ่งมีฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นคือ $f(x;\theta)$ และฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นคือ $L(\theta)$ มีค่าความแปรปรวนจำกัดแล้ว ข้อสนเทศของฟิชเชอร์ของตัวแปรสุ่ม X คือ

$$
\begin{aligned}
I_n(\theta) &= E\left(\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}\right)^2 \\
&= -E\left(\frac{d^2 \ln L(\theta)}{d\theta^2}\right)
\end{aligned}
$$

นอกจากทฤษฎีดังกล่าวแล้ว ยังมีวิธีที่ช่วยให้การหาข้อสนเทศของฟิชเชอร์มีความสะดวกยิ่งขึ้น คือ

ถ้าให้ $x_1, x_2, ..., x_n$ คือตัวอย่างสุ่มขนาด n จากการแจกแจงซึ่งมีฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นคือ $f(x;\theta)$ เราสามารถที่จะหาข้อสนเทศของค่าสังเกต x_i ได้จาก

$$I(\theta) = E\left(\frac{d\ln f(x;\theta)}{d\theta}\right)^2$$

$$= -E\left(\frac{d^2 \ln f(x;\theta)}{d\theta^2}\right)$$

โดยที่ $I_n(\theta) = n \times I(\theta)$

ตัวอย่าง 4.1 ถ้าให้ $x_1, x_2, ..., x_n$ คือตัวอย่างสุ่มขนาด n เมื่อ n มีค่ามาก จากประชากรที่มีการแจกแจงเอกซ์โปเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ θ

จะได้ $f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}$

$$L(\theta) = \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta}}$$

ดังนั้น $\ln f(x;\theta) = -\ln\theta - \frac{x}{\theta}$

$$\frac{d\ln f(x;\theta)}{d\theta} = \frac{-1}{\theta} + \frac{x}{\theta^2}$$

$$\frac{d^2 \ln f(x;\theta)}{d\theta^2} = \frac{1}{\theta^2} - \frac{2x}{\theta^3}$$

$$E\left(\frac{d^2\ln f(x;\theta)}{d\theta^2}\right) = \frac{1}{\theta^2}-\frac{2E(x)}{\theta^3}$$

$$= \frac{1}{\theta^2}-\frac{2\theta}{\theta^3}$$

$$= \frac{-1}{\theta^2}$$

ดังนั้น $I(\theta) = \frac{1}{\theta^2}$

จาก $\ln L(\theta) = -n\ln\theta-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta}$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{-n}{\theta}+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta^2}$$

$$\frac{d^2\ln L(\theta)}{d\theta^2} = \frac{n}{\theta^2}-\frac{2\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta^3}$$

$$E\left(\frac{d^2\ln L(\theta)}{d\theta^2}\right) = \frac{n}{\theta^2}-\frac{2E\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)}{\theta^3}$$

$$= \frac{n}{\theta^2}-\frac{2\sum_{i=1}^{n}\left(E(x_i)\right)}{\theta^3}$$

$$E\left(\frac{d^2 \ln L(\theta)}{d\theta^2}\right) = \frac{n}{\theta^2} - \frac{2n\theta}{\theta^3}$$

$$= \frac{-n}{\theta^2}$$

$$I_n(\theta) = \frac{n}{\theta^2}$$

นั่นคือ $I_n(\theta) = n \times I(\theta)$

ข้อสนเทศของฟิชเชอร์นี้ กล่าวว่าเป็นข้อสนเทศพื้นฐานหนึ่งที่มีความสำคัญในการอนุมานทางสถิติ เนื่องจากข้อสนเทศดังกล่าวถูกนำไปใช้ในการกำหนดขอบเขตล่างของความแปรปรวนของตัวประมาณที่ไม่เอนเอียง ซึ่งรู้จักกันดีในชื่อขอบเขตล่างของ คราเมอร์ - ราว นอกจากนี้ในกรณีของตัวอย่างขนาดใหญ่ ข้อสนเทศของฟิชเชอร์ยังเป็นความแปรปรวนของตัวประมาณที่ได้จากวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ซึ่งจะนำไปใช้ในการทดสอบสมมุติฐานทางสถิติในกรณีตัวอย่างขนาดใหญ่ต่อไป

ข้อสนเทศของฟิชเชอร์ (Fisher Information) สำหรับการแจกแจงลอกนอร์มอล

ถ้าให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงลอกนอร์มอล : $X \sim LN\left(m, \sigma_m^2\right)$ แล้วเมทริกซ์ข้อสนเทศของฟิชเชอร์สามารถหาได้ดังนี้

จากทฤษฎี $I(\theta) = -E\left(\frac{d^2 \ln f(x;\theta)}{d\theta^2}\right)$

$$= \begin{bmatrix} -E\left(\frac{\partial^2 \ln f\left(x; m, \sigma_m^2\right)}{\partial m^2}\right) & -E\left(\frac{\partial^2 \ln f\left(x; m, \sigma_m^2\right)}{\partial m\, \partial \sigma_m^2}\right) \\ -E\left(\frac{\partial^2 \ln f\left(x; m, \sigma_m^2\right)}{\partial m\, \partial \sigma_m^2}\right) & -E\left(\frac{\partial^2 \ln f\left(x; m, \sigma_m^2\right)}{\partial \left(\sigma_m^2\right)^2}\right) \end{bmatrix}$$

จาก $X \sim LN\left(m, \sigma_m^2\right)$

ดังนั้น $$f(x) = \frac{1}{x\sigma_m\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma_m^2}(\ln x - m)^2}$$

ดังนั้น $$\ln f(x) = -\frac{1}{2}\ln\left(2\pi\sigma_m^2\right) - \ln x - \frac{1}{2\sigma_m^2}(\ln x - m)^2$$

ดังนั้น $$\frac{\partial \ln f\left(x; m, \sigma_m^2\right)}{\partial m} = \frac{1}{\sigma_m^2}(\ln x - m)$$

$$\frac{\partial^2 \ln f\left(x; m, \sigma_m^2\right)}{\partial m^2} = -\frac{1}{\sigma_m^2}$$

$$\frac{\partial \ln f\left(x; m, \sigma_m^2\right)}{\partial \sigma_m^2} = -\frac{1}{2\sigma_m^2} + \frac{1}{2\sigma_m^4}(\ln x - m)^2$$

$$\frac{\partial^2 \ln f\left(x; m, \sigma_m^2\right)}{\partial \left(\sigma_m^2\right)^2} = \frac{1}{2\sigma_m^4} - \frac{1}{\sigma_m^6}(\ln x - m)^2$$

$$\frac{\partial^2 \ln f\left(x; m, \sigma_m^2\right)}{\partial m\, \partial \sigma_m^2} = -\frac{1}{\sigma_m^4}(\ln x - m)$$

ดังนั้น $$E\left(\frac{\partial^2 \ln f\left(x; m, \sigma_m^2\right)}{\partial m^2}\right) = E\left(-\frac{1}{\sigma_m^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{\sigma_m^2}$$

$$E\left(\frac{\partial^2 \ln f\left(x;m,\sigma_m^2\right)}{\partial\left(\sigma_m^2\right)^2}\right) = E\left(\frac{1}{2\sigma_m^4} - \frac{1}{\sigma_m^6}(\ln x - m)^2\right)$$

$$= \frac{1}{2\sigma_m^4} - \frac{1}{\sigma_m^4}$$

$$= -\frac{1}{2\sigma_m^4}$$

$$E\left(\frac{\partial^2 \ln f\left(x;m,\sigma_m^2\right)}{\partial m\, \partial\sigma_m^2}\right) = E\left(-\frac{1}{\sigma_m^4}(\ln x - m)\right)$$

$$= 0$$

ดังนั้น $I(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_m^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sigma_m^4} \end{bmatrix}$

นั่นคือ ข้อสนเทศของฟิชเชอร์ สำหรับการแจกแจงลอกนอร์มอล คือ

$$I_n(\theta) = n \times I(\theta)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{n}{\sigma_m^2} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2\sigma_m^4} \end{bmatrix}$$

ข้อสนเทศของฟิชเชอร์ (Fisher Information) สำหรับการแจกแจงโคชี

ถ้าให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงโคชี : $X \sim C(a,1)$ แล้วข้อสนเทศของฟิชเชอร์สามารถหาได้ดังนี้

จาก $X \sim C(a,1)$

ดังนั้น $$f(x) = \frac{1}{\pi[1+(x-a)^2]}$$

ดังนั้น $$\ln f(x) = \ln 1 - \ln\pi - \ln[1+(x-a)^2]$$

$$= -\ln\pi - \ln[1+(x-a)^2]$$

$$\frac{d\ln f(x)}{da} = \frac{2(x-a)}{1+(x-a)^2}$$

ดังนั้น $$\frac{d^2\ln f(x)}{da^2} = \frac{(-2)[1+(x-a)^2]+4(x-a)^2}{[1+(x-a)^2]^2}$$

$$= \frac{-2}{1+(x-a)^2} + \frac{4(x-a)^2}{[1+(x-a)^2]^2}$$

$$= \frac{-2}{1+(x-a)^2} + \frac{4[(x-a)^2+1-1]}{[1+(x-a)^2]^2}$$

$$= \frac{-2}{1+(x-a)^2} + \frac{4[(x-a)^2+1]}{[1+(x-a)^2]^2} - \frac{4}{[1+(x-a)^2]^2}$$

$$= \frac{-2}{1+(x-a)^2} + \frac{4}{1+(x-a)^2} - \frac{4}{[1+(x-a)^2]^2}$$

$$= \frac{2}{1+(x-a)^2} - \frac{4}{[1+(x-a)^2]^2}$$

และเนื่องจาก $I(\theta) = -E\left(\frac{d^2 \ln f(x;\theta)}{d\theta^2}\right)$

ดังนั้น $I(\theta) = -E\left[\frac{2}{1+(x-a)^2}\right] + E\left[\frac{4}{[1+(x-a)^2]^2}\right]$

กำหนดให้ $A = E\left[\frac{2}{1+(x-a)^2}\right]$

และ $B = E\left[\frac{4}{[1+(x-a)^2]^2}\right]$

ดังนั้น $I(\theta) = -A + B$

จาก $A = E\left[\frac{2}{1+(x-a)^2}\right]$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+(x-a)^2} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi\left[1+(x-a)^2\right]^2} dx$$

กำหนดให้ $x-a = \tan\omega$ ดังนั้น $dx = \sec^2\omega\, d\omega$ หรือ $dx = \frac{d\omega}{\cos^2\omega}$

ดังนั้น $A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi(1+\tan^2\omega)^2} \frac{d\omega}{\cos^2\omega}$

และเนื่องจาก $1+\tan^2\omega = \sec^2\omega = \frac{1}{\cos^2\omega}$

ดังนั้น $\quad A = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\cos^2\omega\right)^2}{\pi}\frac{d\omega}{\cos^2\omega}$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\omega}{\pi} d\omega$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\omega}{2} d\omega \qquad , \because \cos^2\omega = \frac{1+\cos 2\omega}{2}$$

$$= \frac{2}{2\pi}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\omega + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\omega\, d\omega\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\omega + \frac{\sin 2\omega}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\pi}{2}\right) - \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\pi}{2}\right)\right]$$

$$= 1$$

จาก $\quad B = E\left[\frac{4}{[1+(x-a)^2]^2}\right]$

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4}{[1+(x-a)^2]^2} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4}{\pi[1+(x-a)^2]^3} dx$$

กำหนดให้ $x-a=\tan\omega$ ดังนั้น $dx=\sec^2\omega\, d\omega$ หรือ $dx=\frac{d\omega}{\cos^2\omega}$

ดังนั้น $$B = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{4}{\pi(1+\tan^2\omega)^3} \frac{d\omega}{\cos^2\omega}$$

และเนื่องจาก $1+\tan^2\omega=\sec^2\omega=\frac{1}{\cos^2\omega}$

ดังนั้น $$B = 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\cos^2\omega\right)^3}{\pi} \frac{d\omega}{\cos^2\omega}$$

$$= 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4\omega}{\pi} d\omega$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\omega}{2}\right)^2 d\omega \qquad , \because \cos^2\omega=\frac{1+\cos 2\omega}{2}$$

$$B = \frac{4}{4\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos 2\omega+\cos^2 2\omega\right)d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos 2\omega+\frac{1+\cos 4\omega}{2}\right)d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\omega+2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\omega\, d\omega+\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\omega+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 4\varpi}{2}d\omega\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\omega+\sin 2\omega+\frac{\omega}{2}+\frac{\sin 4\omega}{8}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}+\sin\pi+\frac{\pi}{4}+\frac{\sin 2\pi}{8}\right]$$

$$-\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi}{2}+\sin\pi-\frac{\pi}{4}+\frac{\sin 2\pi}{8}\right]$$

$$= \frac{3}{2}$$

และเนื่องจาก $I(\theta) = -A + B$

ดังนั้น $I(\theta) = -1+\frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

นั่นคือ ข้อสนเทศของฟิชเชอร์สำหรับการแจกแจงโคชี คือ

$$I_n(\theta) = n \times I(\theta)$$

$$= \frac{n}{2}$$

ข้อสนเทศของฟิชเชอร์ (Fisher Information) สำหรับการแจกแจงลาปลาซ

ถ้าให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงลาปลาซ : $X \sim LP(a,b)$ แล้วเมทริกซ์ข้อสนเทศของฟิชเชอร์สามารถหาได้ดังนี้

จาก $X \sim LP(a,b)$

ดังนั้น $$f(x) = \frac{1}{2b} e^{-\frac{|x-a|}{b}}$$

ดังนั้น $$\ln f(x) = -\ln 2b - \frac{|x-a|}{b}$$

หรือ $$\ln f(x) = \begin{cases} -\ln 2b - \dfrac{(x-a)}{b} & ; x \geq a \\ -\ln 2b + \dfrac{(x-a)}{b} & ; x < a \end{cases}$$

กรณีที่ 1 ; เมื่อ $x \geq a$ จะได้

$$\frac{\partial \ln f(x)}{\partial b} = -\frac{2}{2b} + \frac{(x-a)}{b^2}$$

$$= -\frac{1}{b} + \frac{(x-a)}{b^2}$$

$$\frac{\partial \ln f(x)}{\partial a} = \frac{1}{b}$$

กรณีที่ 2 ; เมื่อ $x < a$ จะได้

$$\frac{\partial \ln f(x)}{\partial b} = -\frac{2}{2b} - \frac{(x-a)}{b^2}$$

$$= -\frac{1}{b} - \frac{(x-a)}{b^2}$$

$$\frac{\partial \ln f(x)}{\partial a} = -\frac{1}{b}$$

จากทั้ง 2 กรณี จะได้ว่า

$$E\left(\frac{\partial \ln f(x)}{\partial a}\right)^2 = E\left(\frac{1}{b^2}\right)$$

$$= \frac{1}{b^2}$$

$$E\left(\frac{\partial \ln f(x)}{\partial b}\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \ln f(x)}{\partial b}\right)^2 f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{a} \left(\frac{\partial \ln f(x)}{\partial b}\right)^2 f(x)\,dx + \int_{a}^{\infty} \left(\frac{\partial \ln f(x)}{\partial b}\right)^2 f(x)\,dx$$

$$E\left(\frac{\partial \ln f(x)}{\partial b}\right)^2 = \frac{1}{2b}\int_{-\infty}^{a}\left(\frac{1}{b}+\frac{(x-a)}{b^2}\right)^2 e^{\frac{x-a}{b}}\,dx$$

$$+\frac{1}{2b}\int_{a}^{\infty}\left(-\frac{1}{b}+\frac{(x-a)}{b^2}\right)^2 e^{-\frac{x-a}{b}}\,dx$$

ให้ $t=\frac{x-a}{b}$ จะได้

$$E\left(\frac{\partial \ln f(x)}{\partial b}\right)^2 = \frac{1}{2b^2}\int_{-\infty}^{0}(1+t)^2 e^{t}dt + \frac{1}{2b^2}\int_{0}^{\infty}(-1+t)^2 e^{-t}dt$$

เนื่องจาก $\frac{1}{2b^2}\int_{-\infty}^{0}(1+t)^2 e^{t}dt = \frac{1}{2b^2}\int_{-\infty}^{0}e^{t}dt+\frac{2}{2b^2}\int_{-\infty}^{0}te^{t}dt+\frac{1}{2b^2}\int_{-\infty}^{0}t^2e^{t}dt$

$$= \left(\frac{e^t}{2b^2}\right)_{-\infty}^{0}+\frac{1}{b^2}\left\{\left(te^t\right)_{-\infty}^{0}-\int_{-\infty}^{0}e^{t}dt\right\}$$

$$+\frac{1}{2b^2}\left\{\left(t^2e^t\right)_{-\infty}^{0}-\int_{-\infty}^{0}2te^{t}dt\right\}$$

$$= \frac{1}{2b^2}+\frac{1}{b^2}\left\{0-\left(e^t\right)_{-\infty}^{0}\right\}$$

$$+\frac{1}{2b^2}\left\{0-2\left[\left(te^t\right)_{-\infty}^{0}-\int_{-\infty}^{0}e^{t}dt\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2b^2}-\frac{1}{b^2}+\frac{1}{2b^2}\left\{-2\left[0-\left(e^t\right)_{-\infty}^{0}\right]\right\}$$

$$\frac{1}{2b^2}\int_{-\infty}^{0}(1+t)^2 e^{t}\,dt = \frac{1}{2b^2}-\frac{1}{b^2}+\frac{2}{2b^2}$$

$$= \frac{1}{2b^2}$$

เนื่องจาก $\frac{1}{2b^2}\int_{0}^{\infty}(-1+t)^2 e^{-t}\,dt = \frac{1}{2b^2}\int_{0}^{\infty}e^{-t}\,dt-\frac{2}{2b^2}\int_{0}^{\infty}te^{-t}\,dt+\frac{1}{2b^2}\int_{0}^{\infty}t^2e^{-t}\,dt$

$$= \left(-\frac{e^{-t}}{2b^2}\right)_0^{\infty}-\frac{1}{b^2}\left\{\left(-te^{-t}\right)_0^{\infty}+\int_0^{\infty}e^{-t}\,dt\right\}$$

$$+\frac{1}{2b^2}\left\{\left(-t^2e^{-t}\right)_0^{\infty}+\int_0^{\infty}2te^{-t}\,dt\right\}$$

$$= \frac{1}{2b^2}-\frac{1}{b^2}\left\{0-\left(e^{-t}\right)_0^{\infty}\right\}$$

$$+\frac{1}{2b^2}\left\{0+2\left[\left(-te^{-t}\right)_0^{\infty}+\int_0^{\infty}e^{-t}\,dt\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2b^2}-\frac{1}{b^2}+\frac{1}{2b^2}\left\{2\left[0-\left(e^{-t}\right)_0^{\infty}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2b^2}-\frac{1}{b^2}+\frac{2}{2b^2}$$

$$= \frac{1}{2b^2}$$

ดังนั้น $$E\left(\frac{\partial \ln f(x)}{\partial b}\right)^2 = \frac{1}{2b^2}+\frac{1}{2b^2}$$

$$= \frac{1}{b^2}$$

$$E\left(\left(\frac{\partial \ln f(x)}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial \ln f(x)}{\partial b}\right)\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\left(\frac{\partial \ln f(x)}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial \ln f(x)}{\partial b}\right)\right)f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{a}\left(\left(\frac{\partial \ln f(x)}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial \ln f(x)}{\partial b}\right)\right)f(x)\,dx$$

$$+\int_{a}^{\infty}\left(\left(\frac{\partial \ln f(x)}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial \ln f(x)}{\partial b}\right)\right)f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2b}\int_{-\infty}^{a}\frac{1}{b}\left(\frac{1}{b}+\frac{(x-a)}{b^2}\right)e^{\frac{x-a}{b}}\,dx$$

$$+\frac{1}{2b}\int_{a}^{\infty}\frac{1}{b}\left(-\frac{1}{b}+\frac{(x-a)}{b^2}\right)e^{-\frac{x-a}{b}}\,dx$$

จาก $$\frac{1}{2b}\int_{-\infty}^{a}\frac{1}{b}\left(\frac{1}{b}+\frac{(x-a)}{b^2}\right)e^{\frac{x-a}{b}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2b}\int_{-\infty}^{a}\frac{1}{b^2}e^{\frac{x-a}{b}}\,dx+\frac{1}{2b}\int_{-\infty}^{a}\frac{1}{b}\frac{(x-a)}{b^2}e^{\frac{x-a}{b}}\,dx$$

$$\frac{1}{2b}\int_{-\infty}^{a}\frac{1}{b}\left(\frac{1}{b}+\frac{(x-a)}{b^2}\right)e^{\frac{x-a}{b}}dx$$

$$= \frac{1}{2b^2}\int_{-\infty}^{a}e^{\frac{x-a}{b}}d\left(\frac{x-a}{b}\right)+\frac{1}{2b^3}\int_{-\infty}^{a}\frac{x}{b}e^{\frac{x-a}{b}}dx$$

$$-\frac{1}{2b^3}\int_{-\infty}^{a}\frac{a}{b}e^{\frac{x-a}{b}}dx$$

$$= \left(\frac{e^{\frac{x-a}{b}}}{2b^2}\right)_{-\infty}^{a}+\left\{\left(\frac{xe^{\frac{x-a}{b}}}{2b^3}\right)_{-\infty}^{a}-\frac{1}{2b^3}\int_{-\infty}^{a}e^{\frac{x-a}{b}}dx\right\}$$

$$-\frac{a}{2b^3}\int_{-\infty}^{a}\frac{1}{b}e^{\frac{x-a}{b}}dx$$

$$= \left(\frac{1}{2b^2}-0\right)+\left\{\left(\frac{a}{2b^3}-0\right)-\frac{1}{2b^2}\int_{-\infty}^{a}e^{\frac{x-a}{b}}d\left(\frac{x-a}{b}\right)\right\}$$

$$-\frac{a}{2b^3}\int_{-\infty}^{a}e^{\frac{x-a}{b}}d\left(\frac{x-a}{b}\right)$$

$$= \frac{1}{2b^2}+\frac{a}{2b^3}-\frac{1}{2b^2}\left(e^{\frac{x-a}{b}}\right)_{-\infty}^{a}-\frac{a}{2b^3}\left(e^{\frac{x-a}{b}}\right)_{-\infty}^{a}$$

$$= \frac{1}{2b^2}+\frac{a}{2b^3}-\frac{1}{2b^2}(1-0)-\frac{a}{2b^3}(1-0)$$

$$\frac{1}{2b}\int_{-\infty}^{a}\frac{1}{b}\left(\frac{1}{b}+\frac{(x-a)}{b^{2}}\right)e^{\frac{x-a}{b}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2b^{2}}+\frac{a}{2b^{3}}-\frac{1}{2b^{2}}-\frac{a}{2b^{3}}$$

$$= 0$$

จาก $\frac{1}{2b}\int_{a}^{\infty}\frac{1}{b}\left(-\frac{1}{b}+\frac{(x-a)}{b^{2}}\right)e^{-\frac{x-a}{b}}\,dx$

$$= -\frac{1}{2b^{2}}\int_{a}^{\infty}\frac{1}{b}e^{-\frac{x-a}{b}}\,dx+\frac{1}{2b^{3}}\int_{a}^{\infty}\frac{(x-a)}{b}e^{-\frac{x-a}{b}}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2b^{2}}\int_{a}^{\infty}e^{-\frac{x-a}{b}}\,d\left(\frac{x-a}{b}\right)+\frac{1}{2b^{3}}\int_{a}^{\infty}\frac{x}{b}e^{-\frac{x-a}{b}}\,dx$$

$$-\frac{1}{2b^{3}}\int_{a}^{\infty}\frac{a}{b}e^{-\frac{x-a}{b}}\,dx$$

$$= \left(\frac{e^{-\frac{x-a}{b}}}{2b^{2}}\right)_{a}^{\infty}+\left\{\left(-\frac{xe^{-\frac{x-a}{b}}}{2b^{3}}\right)_{a}^{\infty}+\frac{1}{2b^{3}}\int_{a}^{\infty}e^{-\frac{x-a}{b}}\,dx\right\}$$

$$-\frac{a}{2b^{3}}\int_{a}^{\infty}\frac{1}{b}e^{-\frac{x-a}{b}}\,dx$$

$$\frac{1}{2b}\int_a^{\infty}\frac{1}{b}\left(-\frac{1}{b}+\frac{(x-a)}{b^2}\right)e^{-\frac{x-a}{b}}dx$$

$$= \left(0-\frac{1}{2b^2}\right)+\left\{\left(0+\frac{a}{2b^3}\right)+\frac{1}{2b^2}\int_a^{\infty}e^{-\frac{x-a}{b}}d\left(\frac{x-a}{b}\right)\right\}$$

$$-\frac{a}{2b^3}\int_a^{\infty}e^{-\frac{x-a}{b}}d\left(\frac{x-a}{b}\right)$$

$$= -\frac{1}{2b^2}+\frac{a}{2b^3}-\frac{1}{2b^2}\left(e^{-\frac{x-a}{b}}\right)_a^{\infty}+\frac{a}{2b^3}\left(e^{-\frac{x-a}{b}}\right)_a^{\infty}$$

$$= -\frac{1}{2b^2}+\frac{a}{2b^3}-\frac{1}{2b^2}(0-1)+\frac{a}{2b^3}(0-1)$$

$$= -\frac{1}{2b^2}+\frac{a}{2b^3}+\frac{1}{2b^2}-\frac{a}{2b^3}$$

$$= 0$$

ดังนั้น $E\left(\left(\frac{\partial \ln f(x)}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial \ln f(x)}{\partial b}\right)\right) = 0$

จากทฤษฎี $I(\theta) = E\left(\frac{d\ln f(x;\theta)}{d\theta}\right)^2$

$$= -E\left(\frac{d^2\ln f(x;\theta)}{d\theta^2}\right)$$

ดังนั้น $I(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \end{bmatrix}$

นั่นคือ ข้อสนเทศของฟิชเชอร์ สำหรับการแจกแจงลาปลาซ คือ

$$I_n(\theta) = n \times I(\theta)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{n}{b^2} & 0 \\ 0 & \frac{n}{b^2} \end{bmatrix}$$

4.4 กฎอย่างอ่อนของเลขจำนวนมาก (Weak Law of Large Number)

กฎอย่างอ่อนของเลขจำนวนมาก เป็นการกล่าวถึงการลู่เข้าในเชิงความน่าจะเป็นของค่าเฉลี่ยตัวอย่างในกรณีที่ตัวอย่างมีขนาดใหญ่ ดังทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎี 4.2 ให้ $x_1 . x_2 ...... x_n$ เป็นตัวแปรสุ่มที่อิสระต่อกัน จากประชากรที่มีค่าเฉลี่ยคือ μ และ

ความแปรปรวนคือ σ^2 และ $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ โดยที่ n = 1,2,3,... แล้ว

$$\lim_{n \to \infty} P(|\bar{x} - \mu| \le \varepsilon) = 1 \quad , \varepsilon > 0$$

จากทฤษฎีสามารถกล่าวโดยสรุปว่า ถ้าตัวอย่างมีขนาดใหญ่จะทำให้ค่าเฉลี่ยของตัวอย่างมีค่าเข้าใกล้ค่าเฉลี่ยของประชากร

พิสูจน์ จากทฤษฎีบทของเชบีเชฟ ซึ่งกล่าวว่า

$$P(|\bar{x} - \mu_{\bar{x}}| \le k\sigma_{\bar{x}}) \ge 1 - \frac{1}{k^2}$$

เนื่องจาก $\mu_{\bar{x}} = \mu$ และ $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

ดังนั้น $P\left(\left|\bar{x}-\mu\right| \le k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \ge 1-\frac{1}{k^2}$

กำหนดให้ $\quad \varepsilon \quad = \quad k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$$k \quad = \quad \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}$$

ดังนั้น $P\left(\left|\bar{x}-\mu\right| \le \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \ge 1-\frac{1}{\left(\varepsilon\sqrt{n}/\sigma\right)^2}$

$$P\left(\left|\bar{x}-\mu\right| \le \varepsilon\right) \ge 1-\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\bar{x}-\mu\right| \le \varepsilon\right) \ge 1$$

เนื่องจากความน่าจะเป็นมีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 1

ดังนั้น $\quad \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\bar{x}-\mu\right| \le \varepsilon\right) \quad = \quad 1$

4.5 ทฤษฎีค่าจำกัดเข้าสู่ส่วนกลาง (Central limit Theorem)

ถ้าให้ $x_1, x_2, ..., x_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติที่มีค่าเฉลี่ย μ ความแปรปรวน σ^2 เราทราบว่า $\bar{x}$ จะมีการแจกแจงปกติด้วยค่าเฉลี่ย μ ความแปรปรวน σ^2/n แต่ในกรณีที่ตัวอย่างสุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบอื่น การหาการแจกแจงของ $\bar{x}$ อาจทำได้ยาก โดยเฉพาะเมื่อขนาดตัวอย่าง (n) มีค่ามาก จึงต้องใช้การแจกแจงโดยประมาณแทน เพื่อก่อให้เกิดความสะดวกมากขึ้นดังทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎี 4.3 ให้ $\bar{x}$ เป็นค่าเฉลี่ยของตัวอย่างขนาด n จากการแจงแจงหนึ่ง ซึ่งมีค่าเฉลี่ยคือ μ และความแปรปรวนคือ σ^2 แล้วการแจกแจงของ $Z_n = \dfrac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ เมื่อ $n \to \infty$

จากทฤษฎีสามารถกล่าวโดยสรุปได้ว่า ไม่ว่าประชากรจะมีการแจกแจงแบบใดก็ตาม ค่าเฉลี่ยตัวอย่าง $(\bar{x})$ จะมีการแจกแจงปกติด้วยค่าเฉลี่ย μ ความแปรปรวน σ^2/n เสมอ เมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่

พิสูจน์ เนื่องจาก $Z_n = \dfrac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$

ดังนั้น

$$M_{Z_n}(t) = M_{\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}(t)$$

$$= E\left[e^{t\left(\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)}\right]$$

$$= E\left[e^{t\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)}\right]$$

$$M_{Z_n}(t) = E\left[e^{t\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sigma\sqrt{n}}\right)} . e^{\frac{-tn\mu}{\sigma\sqrt{n}}} \right]$$

$$= e^{\frac{-tn\mu}{\sigma\sqrt{n}}} . E\left[e^{t\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sigma\sqrt{n}}\right)} \right]$$

$$= e^{\frac{-tn\mu}{\sigma\sqrt{n}}} . \prod_{i=1}^{n} M_{x_i}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

$$= e^{\frac{-tn\mu}{\sigma\sqrt{n}}} . M_x\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^n$$

$$\ln M_{Z_n}(t) = \frac{-tn\mu}{\sigma\sqrt{n}} + n \ln M_x\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

$$= \frac{-tn\mu}{\sigma\sqrt{n}} + n \ln E\left(e^{\frac{tx}{\sigma\sqrt{n}}}\right)$$

จาก $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\ldots$

ดังนั้น $\ln M_{Z_n}(t) = \frac{-tn\mu}{\sigma\sqrt{n}} + n\ln E\left(1+\frac{tx}{\sigma\sqrt{n}}+\frac{t^2x^2}{2!\sigma^2 n}+\frac{t^3x^3}{3!\sigma^3 n\sqrt{n}}+..\right)$

$$= \frac{-tn\mu}{\sigma\sqrt{n}} + n\ln\left(1+\frac{tE(x)}{\sigma\sqrt{n}}+\frac{t^2E\left(x^2\right)}{2!\sigma^2 n}+\frac{t^3E\left(x^3\right)}{3!\sigma^3 n\sqrt{n}}+..\right)$$

จาก $\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + ...$

ดังนั้น $\ln M_{Z_n}(t) = \frac{-tn\mu}{\sigma\sqrt{n}} + n\left(\frac{tE(x)}{\sigma\sqrt{n}}+\frac{t^2E\left(x^2\right)}{2!\sigma^2 n}+..\right)$

$$- \frac{n}{2}\left(\frac{tE(x)}{\sigma\sqrt{n}}+\frac{t^2E\left(x^2\right)}{2!\sigma^2 n}+..\right)^2 + ...$$

$$= \frac{-tn\mu}{\sigma\sqrt{n}} + \left\{n\frac{tE(x)}{\sigma\sqrt{n}}+\frac{t^2E\left(x^2\right)}{2!\sigma^2}+\frac{t^3E\left(x^3\right)}{3!\sigma^2\sqrt{n}}+...\right\}$$

$$-\frac{n}{2}\left\{\left[\frac{t^2E^2(x)}{\sigma^2 n}+\left(\frac{tE(x)}{\sigma\sqrt{n}}\right)\left(\frac{t^2E\left(x^2\right)}{2!\sigma^2 n}\right)\right]+...\right\}$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln M_{Z_n}(t) = \frac{t^2E\left(x^2\right)}{2!\sigma^2} - \frac{t^2E^2(x)}{2\sigma^2}$$

$$= \frac{t^2\left[E\left(x^2\right)-E^2(x)\right]}{2\sigma^2}$$

$$= \frac{t^2\sigma^2}{2\sigma^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln M_{Z_n}(t) \quad = \quad \frac{t^2}{2}$$

$$M_{Z_n}(t) \quad = \quad e^{\frac{t^2}{2}}$$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของการแจกแจงปกติมาตรฐาน $N(0,1)$

ดังนั้น $Z_n = \dfrac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน $N(0,1)$ เมื่อ $n \to \infty$

4.6 Delta Method

ในกรณีที่ตัวอย่างขนาดใหญ่ เราสามารถที่จะประมาณการแจกแจงของค่าเฉลี่ยตัวอย่าง: $\bar{x}$ ด้วยการแจกแจงปกติตามทฤษฎีค่าจำกัดเข้าสู่ส่วนกลาง (Central limit Theorem) และในทำนองเดียวกัน ถ้า $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณที่ได้จากวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของพารามิเตอร์ θ เราก็สามารถประมาณการแจกแจงของ $\hat{\theta}$ ด้วยการแจกแจงปกติตามสมบัติของตัวประมาณที่ได้จากวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดในกรณีตัวอย่างขนาดใหญ่ ในทางตรงกันข้าม หากเราสนใจที่จะทราบการแจกแจงของ $g(\hat{\theta})$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่ทราบค่าของ $\hat{\theta}$ และเป็นตัวประมาณของ $g(\theta)$ โดยที่เราทราบว่า $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณของ θ ซึ่งมีการแจกแจงปกติ เราจะมีวิธีการอย่างไร

Delta Method เป็นวิธีการที่จะทำให้เราทราบว่า เมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ $g(\hat{\theta})$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ $\hat{\theta}$ มีการแจกแจงอย่างไร เมื่อ $\hat{\theta}$ มีการแจกแจงปกติ ดังทฤษฎีต่อไปนี้ [1]

ทฤษฎี 4.4 กำหนดให้ $\left(\dfrac{\hat{\theta}-\theta}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \sim N(0,1)$ และกำหนดให้ g เป็นฟังก์ชันการแจกแจงของตัวแปรสุ่มต่อเนื่องที่ $g'(\hat{\theta})$ หาค่าได้ และ $g'(\hat{\theta}) \neq 0$ แล้ว

1. $\dfrac{g(\hat{\theta})-g(\theta)}{\sigma g'(\hat{\theta})/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ และ
2. $\dfrac{g(\hat{\theta})-g(\theta)}{1/\sqrt{n}} \sim N\left(0,\sigma^2\left(g'(\hat{\theta})\right)^2\right)$

---

[1] A. W. Vander , Asymptotic Statistics (Cambridge Universityb Press, 1998) pp. 25-34

และจากผลของทฤษฎี 4.4 ทำให้ได้ข้อสรุปตามมาอีกข้อหนึ่ง กล่าวคือ ถ้า $\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta)$ มีการแจกแจงแบบปกติหลายตัวแปร : $N_k(\mu,\Sigma)$ แล้ว $\sqrt{n}(g(\hat{\theta})-g(\theta))$ จะมีการแจกแจงแบบ $N_k\left(g'(\hat{\theta})\mu, g'(\hat{\theta})\Sigma(g'(\hat{\theta}))^t\right)$

ตัวอย่าง 4.2 ให้ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นตัวแปรสุ่มที่อิสระกันและมีการแจกแจงเหมือนกัน คือ ลอกนอร์มอล พารามิเตอร์ m, σ_m^2 (โดยที่ m, σ_m^2 คือค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงปกติตามลำดับ)

เนื่องจาก $Z_n = \dfrac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

นั่นคือ $\dfrac{\bar{x}-e^{m+\frac{1}{2}\sigma_m^2}}{\sqrt{e^{2m+\sigma_m^2}\left(e^{\sigma_m^2}-1\right)}\Big/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

ให้ $g(\hat{\theta}) = 3\bar{x}$

$$g(\theta) = 3e^{m+\frac{1}{2}\sigma_m^2}$$

$$\begin{aligned}\sigma^2(g(\hat{\theta})) &= V(3\bar{x}) \\ &= 9V(\bar{x}) \\ &= \frac{9V(x)}{n} \\ &= \frac{9e^{2m+\sigma_m^2}\left(e^{\sigma_m^2}-1\right)}{n}\end{aligned}$$

จากทฤษฎี $Z_n \quad = \quad \dfrac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

$$Z_n = \frac{g(\hat{\theta})-g(\theta)}{\sigma(\hat{\theta})} \sim N(0,1)$$

ดังนั้น $Z_n \quad = \quad \dfrac{3\bar{x}-3e^{m+\frac{1}{2}\sigma_m^2}}{\sqrt{9e^{2m+\sigma_m^2}\left(e^{\sigma_m^2}-1\right)/n}}$

$$= \frac{3\bar{x}-3e^{m+\frac{1}{2}\sigma_m^2}}{\frac{3}{\sqrt{n}}\sqrt{e^{2m+\sigma_m^2}\left(e^{\sigma_m^2}-1\right)}} \sim N(0,1)$$

ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีข้อ 1. คือ $\dfrac{g(\hat{\theta})-g(\theta)}{\sigma\, g'(\hat{\theta})/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

กำหนดให้ $C = 3\sqrt{e^{2m+\sigma_m^2}\left(e^{\sigma_m^2}-1\right)}$ เป็นค่าคงที่

จากผลสรุปข้างต้น $Z_n = \dfrac{3\bar{x}-3e^{m+\frac{1}{2}\sigma_m^2}}{\frac{1}{\sqrt{n}}.C} \sim N(0,1)$

$m_{Z_n}(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของการแจกแจงปกติซึ่งมีค่าเฉลี่ยคือ 0 และ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานมีค่าเท่ากับ 1

กำหนดให้ $Y = Z_n.C$

$$M_Y(t) = M_{Z_n.C}(t)$$

$$= E\left(e^{tZ_n.C}\right)$$

$$= e^{\frac{(tC)^2}{2}}$$

$$E(Y) = M'_Y(t=0)$$

$$= e^{\frac{(tC)^2}{2}}.tC^2(t=0)$$

$$= 0$$

$$V(Y) = M''_Y(t=0)$$

$$= C^2\left[e^{\frac{(tC)^2}{2}} + t.e^{\frac{(tC)^2}{2}}.tC^2\right](t=0)$$

$$= C^2$$

นั่นคือ $Y \sim N\left(0,C^2\right)$

หรือ $Z_n.C \sim N\left(0,C^2\right)$ เนื่องจาก $Y = Z_n.C$

ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีข้อ 2. คือ $\frac{g(\dot{\theta}) - g(\theta)}{1/\sqrt{n}} \sim N\left(0,\sigma^2\left(g'(\hat{\theta})\right)^2\right)$

4.7 สมบัติของตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดในกรณีตัวอย่างขนาดใหญ่

ในการศึกษาปัญหาของการประมาณค่าพารามิเตอร์ θ จากตัวอย่างสุ่มขนาด n เมื่อ n มีค่ามาก พบว่าถ้า $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ θ แล้ว $\hat{\theta}$ จะมีสมบัติดังต่อไปนี้

ทฤษฎี 4.5 ถ้าให้ $x_1, x_2, ..., x_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มที่มีการแจกแจงเดียวกันและเป็นอิสระกันขนาด n เมื่อ n มีค่ามาก มีข้อสนเทศของฟิชเชอร์ คือ $I_n(\theta)$ และให้ $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ θ แล้วจะได้ว่า $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณที่พอเพียงของ θ และ

$$(\hat{\theta} - \theta) \;\rightarrow\; N\left(0, 1/I_n(\theta)\right)$$

จากทฤษฎีแสดงให้เห็นว่าในกรณีตัวอย่างขนาดใหญ่นั้นตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดจะเป็นตัวประมาณซึ่งไม่เอนเอียง มีประสิทธิภาพ แจกแจงแบบปกติ หรือกล่าวได้ว่าเป็นตัวประมาณที่ดีที่สุดในกรณีตัวอย่างขนาดใหญ่

และเนื่องจาก $I_n(\theta) = n \times I(\theta)$ เมื่อ $I(\theta)$ คือข้อสนเทศของค่าสังเกต x_i ดังนั้น จึงอาจเขียนทฤษฎีดังกล่าวได้อีกรูปแบบหนึ่งคือ

ถ้าให้ $x_1, x_2, ..., x_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มที่มีการแจกแจงเดียวกันและเป็นอิสระกันขนาด n เมื่อ n มีค่ามาก มีข้อสนเทศของค่าสังเกต x_i คือ $I(\theta)$ และให้ $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ θ แล้วจะได้ว่า $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณที่พอเพียงของ θ และ

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \;\rightarrow\; N\left(0, 1/I(\theta)\right)$$

ตัวอย่าง 4.3 ถ้าให้ $x_1, x_2, ..., x_n$ คือ ตัวอย่างสุ่มขนาด n เมื่อ n มีค่ามาก จากประชากรที่มีการแจกแจงเอกซ์โปเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ θ ซึ่งมีค่าเฉลี่ยของประชากรคือ θ และความแปรปรวนคือ θ^2

ดังนั้น $f(x;\theta) \quad = \quad \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}$

และจากตัวอย่างที่ 4.1 จะได้ว่า

$$I(\theta) \quad = \quad \frac{1}{\theta^2}$$

ตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดหาได้จาก

$$L(\theta) \quad = \quad \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta}}$$

ดังนั้น $\ln L(\theta) = -n\ln\theta - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta}$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{-n}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta^2}$$

$$0 = \frac{-n}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta^2}$$

$$0 = \frac{-n\theta}{\theta^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta^2}$$

$$n\theta = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{x}$$

จากทฤษฎีค่าจำกัดเข้าสู่ส่วนกลางจะได้ว่า

$$\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\hat{\theta}-\theta}{\theta/\sqrt{n}} \rightarrow N(0,1)$$

ซึ่งจัดรูปแบบใหม่ได้เป็น

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta) \rightarrow N(0,\theta^2)$$

หรือ

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta) \rightarrow N(0,1/I(\theta))$$

4.8 สถิติวิเคราะห์เชิงอนุมานสำหรับการแจกแจงลอกนอร์มอล

4.8.1 การประมาณค่าพารามิเตอร์โดยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum likelihood method)

$$\text{จาก } f(x) = \frac{1}{x\sigma_m\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma_m}\right)^2}$$

$$L(m,\sigma_m^2) = \frac{1}{\left(2\pi\sigma_m^2\right)^{n/2}\prod_{i=1}^{n} x_i} e^{-\frac{1}{2\sigma_m^2}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i - m)^2}$$

$$\ln L(m,\sigma_m^2) = -\frac{n}{2}\ln\left(2\pi\sigma_m^2\right) - \ln\prod_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{2\sigma_m^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\ln x_i - m\right)^2$$

$$\frac{\partial \ln L(m,\sigma_m^2)}{\partial m} = \frac{2}{2\sigma_m^2}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i - m)$$

$$0 = \frac{1}{\sigma_m^2}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i - m)$$

$$0 = \sum_{i=1}^{n}\ln x_i - n.m$$

$$\hat{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{n}$$

$$\text{จาก } \ln L(m,\sigma_m^2) = -\frac{n}{2}\ln\left(2\pi\sigma_m^2\right) - \ln\prod_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{2\sigma_m^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\ln x_i - m\right)^2$$

$$\frac{\partial \ln L(m,\sigma_m^2)}{\partial \sigma_m^2} = -\frac{n}{2}\frac{2\pi}{2\pi\sigma_m^2} + \frac{1}{2\sigma_m^4}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i - m)^2$$

$$0 = -\frac{n}{2\sigma_m^2} + \frac{1}{2\sigma_m^4}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i - m)^2$$

$$n = \frac{1}{\sigma_m^2}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i - m)^2$$

$$\hat{\sigma}_m^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i - \hat{m})^2$$

คุณสมบัติของตัวประมาณโดยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

ความไม่เอนเอียง (Unbiasedness)

ทฤษฎี 4.6 $\hat{\theta} = t(x_1, x_2, ..., x_n)$ เป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของพารามิเตอร์ θ ก็ต่อเมื่อ $E(\hat{\theta}) = \theta$

พิสูจน์

$$E(\hat{m}) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(E(\ln x_i)\right)$$

$$= \frac{1}{n}n.m = m$$

เนื่องจาก $E(\hat{m}) = m$ แสดงว่า $\hat{m}$ เป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของ m

$$E\left(\hat{\sigma}_m^2\right) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\ln x_i - \hat{m}\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{n} E\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\ln x_i - m\right) - (\hat{m} - m)\right]^2\right\}$$

$$= \frac{1}{n} E\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\ln x_i - m\right)^2 - 2(\hat{m} - m)\sum_{i=1}^{n}\left(\ln x_i - m\right) + \sum_{i=1}^{n}(\hat{m} - m)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{n} E\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\ln x_i - m\right)^2 - 2n(\hat{m} - m)^2 + n(\hat{m} - m)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[E\left(\ln x_i - m\right)^2\right] - nE(\hat{m} - m)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{n}\left\{nV(\ln x_i) - nV(\hat{m})\right\}$$

$$= \frac{1}{n}\left(n\sigma_m^2 - n\frac{\sigma_m^2}{n}\right)$$

$$= \frac{(n-1)\sigma_m^2}{n}$$

เนื่องจาก $E\left(\hat{\sigma}_m^2\right) \neq \sigma_m^2$ แสดงว่า $\hat{\sigma}_m^2$ เป็นตัวประมาณที่เอนเอียงของ σ_m^2

ความคงเส้นคงวา (Consistency)

ทฤษฎี 4.7 $\hat{\theta} = t(x_1, x_2, ..., x_n)$ **เป็นตัวประมาณของพารามิเตอร์ ที่มีความคงเส้นคงวา ก็ต่อเมื่อ**

1) $\lim\limits_{n\to\infty} E(\hat{\theta}) = \theta$ **เมื่อ** θ **คือค่าพารามิเตอร์ และ**

2) $\lim\limits_{n\to\infty} V(\hat{\theta}) = 0$

พิสูจน์

$$\lim_{n\to\infty} E(\hat{m}) = \lim_{n\to\infty} E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} m$$

$$= m$$

$$\lim_{n\to\infty} V(\hat{m}) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sigma_m^2}{n}\right)$$

$$= 0$$

ดังนั้น $\hat{m}$ เป็นตัวประมาณที่คงเส้นคงวา

จาก $\hat{\sigma}_m^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i - \hat{m})^2$

ดังนั้น $\frac{n\hat{\sigma}_m^2}{\sigma_m^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$ (จากทฤษฎี)

จะได้ $$E\left(\frac{n\hat{\sigma}_m^2}{\sigma_m^2}\right) = n-1$$

ดังนั้น $$E\left(\hat{\sigma}_m^2\right) = \frac{(n-1)\sigma_m^2}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\hat{\sigma}_m^2\right) = \lim_{n\to\infty} (n-1)\frac{\sigma_m^2}{n}$$

$$= \sigma_m^2$$

$$V\left(\frac{n\hat{\sigma}_m^2}{\sigma_m^2}\right) = 2(n-1)$$

$$V\left(\hat{\sigma}_m^2\right) = 2(n-1)\frac{\sigma_m^4}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} V\left(\hat{\sigma}_m^2\right) = \lim_{n\to\infty} 2(n-1)\frac{\sigma_m^4}{n^2}$$

$$= 0$$

ดังนั้น $\hat{\sigma}_m^2$ เป็นตัวประมาณที่คงเส้นคงวา

ทฤษฎี 4.8 ในการสุ่มตัวอย่างขนาด n จากประชากรที่มีการแจกแจงแบบลอกนอร์มอลที่มีพารามิเตอร์ คือ m, σ_m^2 ให้ X แทนค่าสังเกตของข้อมูล และ $\hat{\sigma}_m^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i - \hat{m})^2$ แล้ว $\frac{n\hat{\sigma}_m^2}{\sigma_m^2}$ จะแจกแจงแบบไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ $n-1$

พิสูจน์

จาก $X \sim LN\left(m, \sigma_m^2\right)$

ดังนั้น $\ln X \sim N\left(m, \sigma_m^2\right)$

ดังนั้น $\dfrac{\ln x_i - m}{\sigma_m} \sim N(0,1)$

ดังนั้น $\left(\dfrac{\ln x_i - m}{\sigma_m}\right)^2 \sim \chi_1^2$

ดังนั้น $\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\ln x_i - m}{\sigma_m}\right)^2 \sim \chi_n^2$

จาก $$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\ln x_i - m}{\sigma_m}\right)^2 = \frac{1}{\sigma_m^2}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\ln x_i - \hat{m}\right) + \left(\hat{m} - m\right)\right]^2$$

$$= \frac{1}{\sigma_m^2}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\ln x_i - \hat{m}\right)^2 + 2\left(\ln x_i - \hat{m}\right)\left(\hat{m} - m\right) + \left(\hat{m} - m\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{\sigma_m^2}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\ln x_i - \hat{m}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\hat{m} - m\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{\sigma_m^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\ln x_i - \hat{m}\right)^2 + \frac{n}{\sigma_m^2}\left(\hat{m} - m\right)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\ln x_i - m}{\sigma_m}\right)^2 = \frac{n\hat{\sigma}_m^2}{\sigma_m^2} + \left(\frac{\hat{m}-m}{\sigma_m/\sqrt{n}}\right)^2$$

เนื่องจาก $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\ln x_i - m}{\sigma_m}\right)^2 \sim \chi_n^2$

และ $\left(\frac{\hat{m}-m}{\sigma_m/\sqrt{n}}\right)^2 \sim \chi_1^2$

ดังนั้น $\frac{n\hat{\sigma}_m^2}{\sigma_m^2} \sim \chi_{(n-1)}^2$

4.8.2 การแจกแจงของค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนตัวอย่างของการแจกแจงลอกนอร์มอล

เนื่องจากตัวประมาณที่ทำการศึกษาในครั้งนี้ได้มาโดยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และจากสมบัติของตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดในกรณีตัวอย่างขนาดใหญ่ และทฤษฎีบทของ Delta Method ดังกล่าวไปแล้วข้างต้น ทำให้สามารถหาการแจกแจงของค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนตัวอย่างของการแจกแจงลอกนอร์มอลได้ดังนี้

ถ้าให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงลอกนอร์มอลด้วยพารามิเตอร์ m, σ_m^2 (โดยที่ m, σ_m^2 คือค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงแบบปกติตามลำดับ) : $X \sim LN\left(m, \sigma_m^2\right)$ โดยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดจะได้ว่า

$$\hat{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{n}$$

$$\hat{\sigma}_m^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i - \hat{m})^2$$

และโดยสมบัติของตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดกรณีตัวอย่างขนาดใหญ่จะได้ว่า

$$\sqrt{n}\begin{bmatrix}\hat{m}-m\\ \hat{\sigma}_m^2-\sigma_m^2\end{bmatrix}\rightarrow N\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\sigma_m^2 & 0\\ 0 & 2\sigma_m^4\end{bmatrix}\right)$$

โดยใช้ Delta Method

$$\text{ให้ } g:\begin{bmatrix}m\\ \sigma_m^2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}e^{m+\frac{1}{2}\sigma_m^2}\\ e^{2m+\sigma_m^2}\left(e^{\sigma_m^2}-1\right)\end{bmatrix}$$

และให้ G เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการหาอนุพันธ์ จะได้

$$G(m,\sigma_m^2)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial e^{m+\frac{1}{2}\sigma_m^2}}{\partial m} & \dfrac{\partial e^{m+\frac{1}{2}\sigma_m^2}}{\partial(\sigma_m^2)}\\[2ex] \dfrac{\partial\left\{e^{2m+\sigma_m^2}\left(e^{\sigma_m^2}-1\right)\right\}}{\partial m} & \dfrac{\partial\left\{e^{2m+\sigma_m^2}\left(e^{\sigma_m^2}-1\right)\right\}}{\partial(\sigma_m^2)}\end{bmatrix}$$

$$G(m,\sigma_m^2)=\begin{bmatrix}e^{m+\frac{1}{2}\sigma_m^2} & \dfrac{1}{2}e^{m+\frac{1}{2}\sigma_m^2}\\ 2e^{2m+\sigma_m^2}\left(e^{\sigma_m^2}-1\right) & e^{2m+\sigma_m^2}\left(2e^{\sigma_m^2}-1\right)\end{bmatrix}$$

ดังนั้น $\Sigma^t G$ ได้เมทริกซ์ผลลัพธ์ คือ

$$\Sigma^t G=\begin{bmatrix}\sigma_m^2 e^{m+\frac{1}{2}\sigma_m^2} & 2\sigma_m^2 e^{2m+\sigma_m^2}\left(e^{\sigma_m^2}-1\right)\\ \sigma_m^4 e^{m+\frac{1}{2}\sigma_m^2} & 2\sigma_m^4 e^{2m+\sigma_m^2}\left(2e^{\sigma_m^2}-1\right)\end{bmatrix}$$

ดังนั้น $\quad G\Sigma^{t}G \quad = \quad \begin{bmatrix} e^{m+\frac{1}{2}\sigma_m^2} & \frac{1}{2}e^{m+\frac{1}{2}\sigma_m^2} \\ 2e^{2m+\sigma_m^2}\left(e^{\sigma_m^2}-1\right) & e^{2m+\sigma_m^2}\left(2e^{\sigma_m^2}-1\right) \end{bmatrix}$

$$\times\begin{bmatrix} \sigma_m^2 e^{m+\frac{1}{2}\sigma_m^2} & 2\sigma_m^2 e^{2m+\sigma_m^2}\left(e^{\sigma_m^2}-1\right) \\ \sigma_m^4 e^{m+\frac{1}{2}\sigma_m^2} & 2\sigma_m^4 e^{2m+\sigma_m^2}\left(2e^{\sigma_m^2}-1\right) \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $\quad G\Sigma^{t}G \quad = \quad \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$

เมื่อ $\quad A \quad = \quad \sigma_m^2\left(1+\dfrac{\sigma_m^2}{2}\right)e^{2m+\sigma_m^2}$

$$B \quad = \quad \sigma_m^2 e^{3m+\frac{3}{2}\sigma_m^2}\left[\sigma_m^2\left(2e^{\sigma_m^2}-1\right)+2\left(e^{\sigma_m^2}-1\right)\right]$$

$$C \quad = \quad B$$

$$D \quad = \quad \sigma_m^2\left(e^{\sigma_m^2}-1\right)e^{3m+\frac{3}{2}\sigma_m^2}+2\sigma_m^4\left(2e^{\sigma_m^2}-1\right)^2 e^{4m+2\sigma_m^2}$$

ถ้ากำหนดให้ ค่าเฉลี่ยของการแจกแจงลอกนอร์มอลคือ $\mu = e^{m+\frac{1}{2}\sigma_m^2}$

และความแปรปรวนของการแจกแจงลอกนอร์มอลคือ $\sigma^2 = e^{2m+\sigma_m^2}\left(e^{\sigma_m^2}-1\right)$

จะได้ว่า $\sqrt{n}\left(\hat{\mu}-\mu\right) \to N\left(0, \sigma_m^2\left(1+\frac{1}{2}\sigma_m^2\right)e^{2m+\sigma_m^2}\right)$

และจาก $\sigma^2 \quad = \quad e^{2m+\sigma_m^2}\left(e^{\sigma_m^2}-1\right)$

$$= \quad \mu^2\left(e^{\sigma_m^2}-1\right)$$

ดังนั้น $\sigma_m^2 \quad = \quad \ln\left(\frac{\sigma^2}{\mu^2}+1\right)$

ดังนั้น $\sqrt{n}\left(\hat{\mu}-\mu\right) \to N\left(0, \mu^2\left(1+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sigma^2}{\mu^2}+1\right)\right)\ln\left(\frac{\sigma^2}{\mu^2}+1\right)\right)$

และในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$$\sqrt{n}\left(\hat{\sigma}^2-\sigma^2\right) \to N\left(0, \sigma_m^2\left(e^{\sigma_m^2}-1\right)e^{3m+\frac{3}{2}\sigma_m^2}+2\sigma_m^4\left(2e^{\sigma_m^2}-1\right)^2 e^{4m+2\sigma_m^2}\right)$$

4.8.3 การทดสอบสมมุติฐานของการแจกแจงลอกนอร์มอล

เนื่องจากในหัวข้อที่ผ่านมาเราได้ทราบการแจกแจงของค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนตัวอย่างของการแจกแจงลอกนอร์มอลมาแล้ว ดังนั้นในหัวข้อนี้จะได้นำความรู้ดังกล่าวมาช่วยในการทดสอบสมมุติฐานซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

4.8.3.1 การทดสอบสมมุติฐานของค่าเฉลี่ย (μ)

การทดสอบ 2 หาง

สมมุติฐาน $H_0: \quad \mu = \mu_0$ เมื่อ μ_0 เป็นค่าคงที่ใดๆ

$H_1: \quad \mu \neq \mu_0$

กำหนดอาณาเขตวิกฤตที่ระดับนัยสำคัญ α

สถิติที่ใช้ทดสอบ คือ $Z_{cal} = \dfrac{\hat{\mu} - \mu_0}{\sigma_m e^{m+\frac{1}{2}\sigma_m^2}\sqrt{1+\frac{1}{2}\sigma_m^2} \Big/ \sqrt{n}}$

การสรุปผลการทดสอบ คือ ยอมรับ H_0 ถ้า $-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} < Z_{cal} < Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

การทดสอบหางเดียว

สมมุติฐาน $H_0: \mu = \mu_0$ เมื่อ μ_0 เป็นค่าคงที่ใดๆ

$H_1: \mu > \mu_0$

กำหนดอาณาเขตวิกฤตที่ระดับนัยสำคัญ α

สถิติที่ใช้ทดสอบ คือ $Z_{cal} = \dfrac{\hat{\mu} - \mu_0}{\sigma_m e^{m+\frac{1}{2}\sigma_m^2}\sqrt{1+\frac{1}{2}\sigma_m^2} \Big/ \sqrt{n}}$

การสรุปผลการทดสอบ คือ ปฏิเสธ H_0 ถ้า $Z_{cal} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

สมมุติฐาน $H_0: \mu = \mu_0$ เมื่อ μ_0 เป็นค่าคงที่ใดๆ

$H_1: \mu < \mu_0$

กำหนดอาณาเขตวิกฤตที่ระดับนัยสำคัญ α

สถิติที่ใช้ทดสอบ คือ $Z_{cal} = \dfrac{\hat{\mu} - \mu_0}{\sigma_m e^{m+\frac{1}{2}\sigma_m^2}\sqrt{1+\frac{1}{2}\sigma_m^2} \Big/ \sqrt{n}}$

การสรุปผลการทดสอบ คือ ปฏิเสธ H_0 ถ้า $Z_{cal} < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

4.9 สถิติวิเคราะห์เชิงอนุมานสำหรับการแจกแจงโคชี

4.9.1 การประมาณค่าพารามิเตอร์โดยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum likelihood method)

ถ้าให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบโคชีซึ่งมีค่าพารามิเตอร์ b = 1 : $X \sim C(a,1)$

ดังนั้น $$f(x) = \frac{1}{\pi\left[1+(x-a)^2\right]}$$

$$L(a) = \frac{1}{\pi^n \prod_{i=1}^{n}\left[1+(x_i-a)^2\right]}$$

$$\ln L(a) = -n\ln\pi - \sum_{i=1}^{n}\ln\left[1+(x_i-a)^2\right]$$

$$\frac{d\ln L(a)}{da} = 2\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-a)}{1+(x_i-a)^2}$$

$$0 = 2\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-a)}{1+(x_i-a)^2}$$

ในการแก้สมการเพื่อหาค่า a โดยวิธีทำมือนั้นเป็นไปด้วยความยากลำบาก โดยเฉพาะเมื่อ n มีค่ามากๆ ดังนั้นในที่นี้จึงได้นำเสนอวิธีหาค่า a โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วย (รายละเอียดของโปรแกรมดูได้จากภาคผนวก ข) ซึ่งโปรแกรมดังกล่าวอาศัยวิธีการหาค่าตัวแปรของ Newton Raphson และค่า a ที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ คือตัวประมาณของพารามิเตอร์ a และตัวประมาณดังกล่าวจะแทนด้วยสัญลักษณ์ $\hat{a}$

4.9.2 การแจกแจงของตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงโคชี

ถ้าให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงโคชี ด้วยพารามิเตอร์ a : $X \sim C(a,1)$ โดยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดและวิธีการหาค่าประมาณของ Newton Ruphson จะได้ตัวประมาณค่าของพารามิเตอร์ a ซึ่งแทนด้วย $\hat{a}$

และข้อสนเทศของฟิชเชอร์ คือ

$$I_n(\theta) = \frac{n}{2}$$

ดังนั้นโดยสมบัติของตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดในกรณีตัวอย่างมีขนาดใหญ่ จะได้ว่า

$$\sqrt{n}(\hat{a}-a) \rightarrow N(0,2)$$

4.9.3 การทดสอบสมมุติฐานของการแจกแจงโคชี

จากความรู้เรื่องการแจกแจงของตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงโคชีในหัวข้อที่ผ่านมานั้น สามารถนำมาช่วยในการทดสอบสมมุติฐานได้ดังรายละเอียดต่อไปนี้

4.9.3.1 การทดสอบสมมุติฐานของพารามิเตอร์ a

การทดสอบ 2 หาง

สมมุติฐาน $H_0: \; a = a_0$ เมื่อ a_0 เป็นค่าคงที่ใดๆ

$H_1: \; a \neq a_0$

กำหนดอาณาเขตวิกฤตที่ระดับนัยสำคัญ α

สถิติที่ใช้ทดสอบ คือ $Z_{cal} = \dfrac{\hat{a}-a_0}{\sqrt{2}/\sqrt{n}}$

การสรุปผลการทดสอบ คือ ยอมรับ H_0 ถ้า $-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} < Z_{cal} < Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

การทดสอบหางเดียว

สมมุติฐาน $H_0: \; a = a_0$ เมื่อ a_0 เป็นค่าคงที่ใดๆ

$H_1: \; a > a_0$

กำหนดอาณาเขตวิกฤตที่ระดับนัยสำคัญ α

สถิติที่ใช้ทดสอบ คือ $Z_{cal} = \dfrac{\hat{a} - a_0}{\sqrt{2}/\sqrt{n}}$

การสรุปผลการทดสอบ คือ ปฏิเสธ H_0 ถ้า $Z_{cal} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

สมมุติฐาน $H_0: \; a = a_0$ เมื่อ a_0 เป็นค่าคงที่ใดๆ

$H_1: \; a < a_0$

กำหนดอาณาเขตวิกฤตที่ระดับนัยสำคัญ α

สถิติที่ใช้ทดสอบ คือ $Z_{cal} = \dfrac{\hat{a} - a_0}{\sqrt{2}/\sqrt{n}}$

การสรุปผลการทดสอบ คือ ปฏิเสธ H_0 ถ้า $Z_{cal} < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

4.10 สถิติวิเคราะห์เชิงอนุมานสำหรับการแจกแจงลาปลาซ

4.10.1 การประมาณค่าพารามิเตอร์โดยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด(Maximum likelihood method)

จาก $f(x) = \dfrac{1}{2b} e^{-\frac{|x-a|}{b}}$

ดังนั้น $L(a,b) = \dfrac{1}{2^n b^n} e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i - a|}{b}}$

ในสมการ L(a,b) ดังกล่าว เมื่อกำหนดให้ b คงที่ จะได้ว่าค่าของ a ที่ทำให้ L(a,b) มีค่าสูงสุด คือค่าของ a ที่ทำให้ $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{|x_i - a|}{b}$ มีค่าต่ำที่สุด คือ ค่ามัธยฐาน

ดังนั้น $\hat{a} = \text{median}(x_i)$

และค่าของ $\hat{b}$ ที่ทำให้ $L(a,b)$ มีค่าสูงสุดหาได้ดังนี้

$$\ln L(a,b) = -n\ln(2) - n\ln(b) - \frac{1}{b}\sum_{i=1}^{n}|x_i - a|$$

$$\frac{\partial \ln L(a,b)}{\partial b} = \frac{-n}{b} + \frac{1}{b^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i - a|$$

$$0 = -n + \frac{1}{b}\sum_{i=1}^{n}|x_i - a|$$

$$n = +\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{n}|x_i - a|$$

$$\hat{b} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \hat{a}|$$

4.10.2 การแจกแจงของตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงลาปลาซ

จากสมบัติของตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดในกรณีตัวอย่างมีขนาดใหญ่ดังกล่าวแล้วในตอนต้น ทำให้สามารถหาการแจกแจงของตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงลาปลาซได้ดังต่อไปนี้

ถ้าให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงลาปลาซด้วยพารามิเตอร์ a, b โดยที่ $b > 0$: $X \sim LP(a,b)$ โดยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดจะได้ว่า

$$\hat{a} = \text{median}(x_i)$$

$$\hat{b} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \hat{a}|$$

และเมทริกซ์ข้อสนเทศของฟิชเชอร์ คือ

$$I_n(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{n}{b^2} & 0 \\ 0 & \frac{n}{b^2} \end{bmatrix}$$

ดังนั้นโดยสมบัติของตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดในกรณีตัวอย่างมีขนาดใหญ่ จะได้ว่า

$$\sqrt{n}\begin{bmatrix} \hat{a}-a \\ \hat{b}-b \end{bmatrix} \to N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix}\right)$$

จะได้ว่า $\sqrt{n}(\hat{a}-a) \to N(0,b^2)$

และ $\sqrt{n}(\hat{b}-b) \to N(0,b^2)$

4.10.3 การทดสอบสมมุติฐานของการแจกแจงลาปลาซ

จากหัวข้อที่ผ่านมา เราได้ทราบการแจกแจงของตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงลาปลาซมาแล้ว ดังนั้นในหัวข้อนี้จะได้นำความรู้ดังกล่าวมาช่วยในการทดสอบสมมุติฐาน ดังรายละเอียดต่อไปนี้

4.10.3.1 การทดสอบสมมุติฐานของพารามิเตอร์ a

การทดสอบ 2 หาง

สมมุติฐาน $H_0: \; a = a_0$ เมื่อ a_0 เป็นค่าคงที่ใดๆ

$H_1: \; a \neq a_0$

กำหนดอาณาเขตวิกฤตที่ระดับนัยสำคัญ α

สถิติที่ใช้ทดสอบ คือ $Z_{cal} = \dfrac{\hat{a}-a_0}{\hat{b}/\sqrt{n}}$

การสรุปผลการทดสอบ คือ ยอมรับ H_0 ถ้า $-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} < Z_{cal} < Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

การทดสอบหางเดียว

สมมุติฐาน $H_0: \quad a = a_0$ เมื่อ a_0 เป็นค่าคงที่ใดๆ

$H_1: \quad a > a_0$

กำหนดอาณาเขตวิกฤตที่ระดับนัยสำคัญ α

สถิติที่ใช้ทดสอบ คือ $Z_{cal} = \dfrac{\hat{a} - a_0}{\hat{b}/\sqrt{n}}$

การสรุปผลการทดสอบ คือ ปฏิเสธ H_0 ถ้า $Z_{cal} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

สมมุติฐาน $H_0: \quad a = a_0$ เมื่อ a_0 เป็นค่าคงที่ใดๆ

$H_1: \quad a < a_0$

กำหนดอาณาเขตวิกฤตที่ระดับนัยสำคัญ α

สถิติที่ใช้ทดสอบ คือ $Z_{cal} = \dfrac{\hat{a} - a_0}{\hat{b}/\sqrt{n}}$

การสรุปผลการทดสอบ คือ ปฏิเสธ H_0 ถ้า $Z_{cal} < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

4.10.3.2 การทดสอบสมมุติฐานของพารามิเตอร์ b

การทดสอบ 2 หาง

สมมุติฐาน $H_0: \quad b = b_0$ เมื่อ b_0 เป็นค่าคงที่ใดๆ

$H_1: \quad b \neq b_0$

กำหนดอาณาเขตวิกฤตที่ระดับนัยสำคัญ α

สถิติที่ใช้ทดสอบ คือ $Z_{cal} = \dfrac{\hat{b}-b_0}{\hat{b}/\sqrt{n}}$

การสรุปผลการทดสอบ คือ ยอมรับ H_0 ถ้า $-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} < Z_{cal} < Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

การทดสอบหางเดียว

สมมุติฐาน $H_0: \ b = 0$

$H_1: \ b > 0$

กำหนดอาณาเขตวิกฤตที่ระดับนัยสำคัญ α

สถิติที่ใช้ทดสอบ คือ $Z_{cal} = \dfrac{\hat{b}-b_0}{\hat{b}/\sqrt{n}}$

การสรุปผลการทดสอบ คือ ปฏิเสธ H_0 ถ้า $Z_{cal} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

การทดสอบสมมุติฐานข้างเดียวของพารามิเตอร์ b มักทดสอบว่า $b > 0$ หรือไม่ เนื่องจากนิยามของฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงลาปลาซ ได้กำหนดว่า $b > 0$ และหากทดสอบแล้ว $b \leq 0$ แสดงว่าข้อมูลนั้นไม่เหมาะสมกับการประยุกต์ด้วยการแจกแจงลาปลาซ แต่ถ้า $b > 0$ แสดงว่าข้อมูลชุดดังกล่าวมีความเหมาะสมกับการประยุกต์ด้วยการแจกแจงลาปลาซ