บทที่ 6
สรุปผลและข้อเสนอแนะ

6.1 สรุปผล

ในการศึกษาการแจกแจงที่มีลักษณะหางยาวในครั้งนี้ ซึ่งประกอบด้วยการแจกแจงลอกนอร์มอล การแจกแจงโคชี และการแจกแจงลาปลาซ เป็นการศึกษาลักษณะต่างๆของแต่ละการแจกแจงได้แก่ ทฤษฎีและการแจกแจงที่เกี่ยวข้อง สถิติเชิงพรรณนา สถิติเชิงอนุมาน ตลอดจนแนวทางการนำไปประยุกต์ใช้ ซึ่งแต่ละการแจกแจงจะมีลักษณะแตกต่างกันไป สรุปได้ดังนี้

การแจกแจงลอกนอร์มอล

การแจกแจงลอกนอร์มอลมีความสัมพันธ์กับการแจกแจงปกติ กล่าวคือ ลอกธรรมชาติ (natural log) ของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงลอกนอร์มอลจะมีการแจกแจงปกติ สำหรับสถิติพรรณนาสำหรับการแจกแจงลอกนอร์มอลมีดังนี้

ถ้าตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงลอกนอร์มอลด้วยพารามิเตอร์ m และ σ_m^2 (เมื่อ m และ σ_m^2 คือค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงปกติตามลำดับ) จะได้ว่า

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma_m\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma_m}\right)^2} \qquad x > 0 \text{ , } \sigma_m^2 > 0 \text{ , } -\infty \leq m \leq \infty$$

$$F(x) = \Phi\left(\frac{\ln x - m}{\sigma_m}\right)$$

ค่าเฉลี่ย = $e^{m+\frac{1}{2}\sigma_m^2}$

ค่ามัธยฐาน = e^{m}

ค่าฐานนิยม = $e^{m-\sigma_m^2}$

ความแปรปรวน = $e^{2m+\sigma_m^2}\left(e^{\sigma_m^2}-1\right)$

สัมประสิทธิ์ความเบ้ $=$ $\left(e^{\sigma_m^2}+2\right)\left(e^{\sigma_m^2}-1\right)^{1/2}$

สัมประสิทธิ์ความโด่ง $=$ $e^{4\sigma_m^2}+2e^{3\sigma_m^2}+3e^{2\sigma_m^2}-3$

สำหรับการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบจุดโดยใช้วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum likelihood method) นั้น ตัวประมาณค่าแบบจุดของการแจกแจงลอกนอร์มอลคือ

$$\hat{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{n}$$

$$\hat{\sigma}_m^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i - \hat{m})^2$$

โดยใช้สมบัติของตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดและDelta-Method ในกรณีตัวอย่างมีขนาดใหญ่ ทำให้ได้ว่าการแจกแจงของค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนตัวอย่างของการแจกแจงลอกนอร์มอลมีการแจกแจงแบบปกติ นั่นคือ

$$z = \frac{\hat{\mu}-\mu}{\sigma_m e^{m+\frac{1}{2}\sigma_m^2}\sqrt{1+\frac{1}{2}\sigma_m^2}\Big/\sqrt{n}}$$

$$z = \frac{\hat{\sigma}^2-\sigma^2}{\sigma_m e^{m+\frac{1}{2}\sigma_m^2}\sqrt{\left(e^{\sigma_m^2}-1\right)e^{m+\frac{1}{2}\sigma_m^2}+2\sigma_m^2\left(2e^{\sigma_m^2}-1\right)^2 e^{2m+\sigma_m^2}}\Big/\sqrt{n}}$$

เมื่อ z มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน

การแจกแจงลอกนอร์มอลถูกนำไปใช้ในการอธิบายเหตุการณ์ต่างๆในชีวิตประจำวันอย่างกว้างขวาง เช่น นำไปอธิบายจำนวนเงินผลตอบแทนที่บริษัทประกันภัยต้องจ่ายให้กับลูกค้าในแต่ละปี เพื่อประโยชน์ในการแสดงให้เห็นถึงรายละเอียดของการจ่ายเงินผลตอบแทนให้กับลูกค้าของบริษัทว่ามีมากหรือน้อยขนาดไหน นอกจากนี้ยังพบว่าการแจกแจงลอกนอร์มอลสามารถนำไปอธิบายข้อมูลที่ถูกอธิบายด้วยการแจกแจงหางหนักได้อีกด้วย เช่นข้อมูลรายได้ ขนาดแฟ้มข้อมูลที่ถูกเรียกใช้ในระบบอินเทอร์เน็ต เป็นต้น แต่ทั้งนี้การแจกแจงใดจะเหมาะสมกว่าก็ขึ้นอยู่กับลักษณะของข้อมูลที่ทำการศึกษาชุดนั้นๆเป็นสำคัญ

การแจกแจงโคชี

การแจกแจงโคชีเป็นการแจกแจงซึ่งอาจจะมีการนำไปประยุกต์ใช้ในงานด้านต่างๆน้อย แต่มีลักษณะพิเศษทางสถิติกล่าวคือ ไม่สามารถที่จะหาค่าเฉลี่ย ความแปรปรวน สัมประสิทธิ์ความเบ้และสัมประสิทธิ์ความโด่งได้ ดังนั้นสถิติพรรณนาของการแจกแจงโคชีจึงมีเพียงค่ามัธยฐานและฐานนิยม ดังต่อไปนี้

ถ้าตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงโคชีด้วยพารามิเตอร์ a และ b แล้ว จะได้ว่า

$$f(x) = \frac{1}{\pi b\left[1+\left(\frac{x-a}{b}\right)^2\right]} \quad , -\infty < x < \infty, -\infty < a < \infty$$

และ $b > 0$

$$F(x) = \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{x-a}{b}\right)$$

ค่ามัธยฐาน = a

ค่าฐานนิยม = a

สำหรับการศึกษาสถิติอนุมานของการแจกแจงโคชีในที่นี้นั้นได้ศึกษาเฉพาะกรณีที่ $b = 1$ และในการหาตัวประมาณค่าพารามิเตอร์โดยใช้วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของการแจกแจงโคชีนั้นมีความยากลำบากโดยเฉพาะเมื่อขนาดตัวอย่างมีค่ามาก จึงใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ซึ่งอาศัยหลักการ

ของ Newton Raphson ช่วยในการคำนวณ ซึ่งจะให้ค่าของตัวประมาณออกมาและแทนด้วยสัญลักษณ์ $\hat{a}$

จากสมบัติของตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดในกรณีตัวอย่างขนาดใหญ่ทำให้ได้ว่าตัวประมาณของการแจกแจงโคชีมีการแจกแจงแบบปกติ นั่นคือ

$$z = \frac{\hat{a} - a_0}{\sqrt{2}/\sqrt{n}}$$

เมื่อ z มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน

ถึงแม้ว่าการแจกแจงโคชีจะมีการนำไปประยุกต์ใช้น้อย แต่ก็มีประโยชน์ในทางฟิสิกส์ กล่าวคือ มีการนำการแจกแจงดังกล่าวไปช่วยในการศึกษาเกี่ยวกับทฤษฎีกลศาสตร์ และความหนาแน่นของสนามแม่เหล็กไฟฟ้า

การแจกแจงลาปลาซ

การแจกแจงลาปลาซ หรือบางครั้งเรียกว่า การแจกแจงดับเบิลเอ็กซ์โปเนนเชียลนั้นมีลักษณะต่างๆทางสถิติพอสรุปได้ดังนี้

ถ้าตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงลาปลาซด้วยพารามิเตอร์ a และ b แล้ว จะได้ว่า

$$f(x) = \frac{1}{2b} e^{-\frac{|x-a|}{b}} \quad , -\infty < x < \infty \text{ , } -\infty < a < \infty \text{ และ } b > 0$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\left(\frac{a-x}{b}\right)} & , x < a \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)} & , x \geq a \end{cases}$$

ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์= $\dfrac{e^{at}}{1 - b^2 t^2}$

ค่าเฉลี่ย = a

ค่ามัธยฐาน = a

ค่าฐานนิยม = a

ความแปรปรวน = $2b^2$

สัมประสิทธิ์ความเบ้ = 0

สัมประสิทธิ์ความโด่ง = 6

สำหรับตัวประมาณค่าแบบจุดของพารามิเตอร์ของการแจกแจงลาปลาซโดยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดมีดังนี้

$$\hat{a} = \operatorname{median}(x_i)$$

$$\hat{b} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - \hat{a}\right|$$

โดยสมบัติของตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดในกรณีตัวอย่างขนาดใหญ่ จะได้ว่าตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงลาปลาซมีการแจกแจงปกติ นั่นคือ

$$z = \frac{\hat{a} - a_0}{\hat{b}/\sqrt{n}}$$

$$z = \frac{\hat{b} - b_0}{\hat{b}/\sqrt{n}}$$

เมื่อ z มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน

การแจกแจงลาปลาซนั้นถูกนำไปอธิบายอัตราการเจริญเติบโตของบริษัทในช่วงเวลาต่างๆ ที่สนใจ เพื่อประโยชน์ในการคาดเดาอัตราการเจริญเติบโตและประสิทธิภาพในการบริหารงานในบริษัทต่อไป

6.2 ข้อเสนอแนะ

1. เนื่องจากลอกธรรมชาติของข้อมูลที่มีการแจกแจงลอกนอร์มอลนั้นจะมีการแจกแจงปกติ ดังนั้นในทางปฏิบัติจึงมีผู้นิยมนำข้อมูลที่มีการแจกแจงลอกนอร์มอลไปแปลงโดยใช้ลอกธรรมชาติ ให้ข้อมูลมีการแจกแจงปกติก่อน แล้วจึงนำข้อมูลที่เกิดจากการแปลงไปวิเคราะห์โดยใช้สถิติวิเคราะห์ของการแจกแจงปกติซึ่งผู้วิเคราะห์ข้อมูลส่วนใหญ่คุ้นเคยกว่าการนำสถิติวิเคราะห์ของการแจกแจงลอกนอร์มอลไปวิเคราะห์ข้อมูลโดยตรง ดังนั้นในการศึกษาครั้งต่อไปจึงควรมีการเปรียบเทียบความแตกต่างหรือความเหมาะสมระหว่างการวิเคราะห์ข้อมูลที่มีการแจกแจงลอกนอร์มอลโดยใช้สถิติวิเคราะห์ของการแจกแจงลอกนอร์มอลโดยตรง และวิธีการแปลงข้อมูลให้มีการแจกแจงปกติแล้วใช้สถิติวิเคราะห์ของการแจกแจงปกติในการวิเคราะห์ข้อมูล ซึ่งอาจทำได้โดยการศึกษาช่วงความเชื่อมั่นของทั้งสองวิธีว่าวิธีใดให้ควาวมเชื่อมั่นที่ดีกว่ากัน เป็นต้น ทั้งนี้เพื่อความเข้าใจและความถูกต้องของผู้ใช้สถิติต่อไป

2. ในการวิจัยครั้งนี้ทำการศึกษาสถิติอนุมานสำหรับการแจกแจงโคชีกรณีที่พารามิเตอร์ b เท่ากับ 1 เท่านั้น ดังนั้นในโอกาสต่อไปหากมีการศึกษาการแจกแจงชนิดนี้อีกจึงควรศึกษาในกรณีอื่นๆด้วยเพื่อประโยชน์ในการนำการแจกแจงโคชีไปใช้ในการอธิบายเหตุการณ์ต่างๆได้มากขึ้น