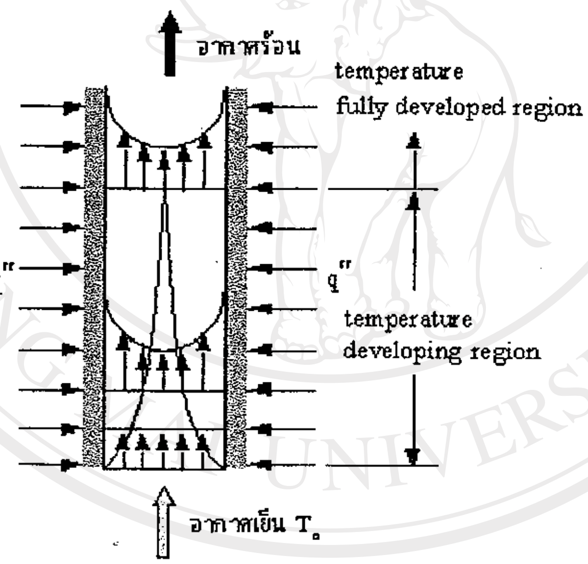
บทที่2

หลักการและทฤษฎี

2.1 ทฤษฎีของการพาความร้อนโดยวิธีธรรมชาติ

2.1.1 การพาความร้อนในท่อแบบแผ่นขนาน

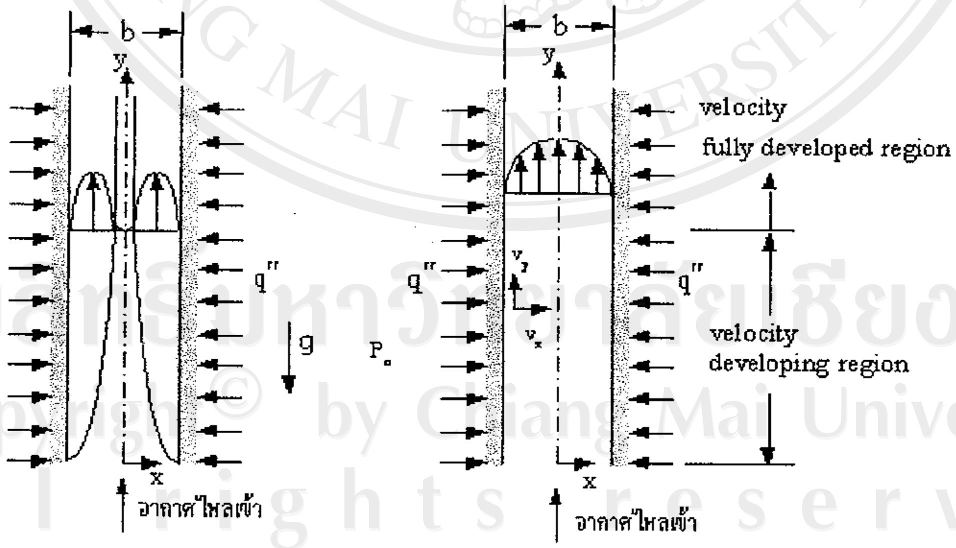
การไหลแบบการพาความร้อนโดยวิธีธรรมชาติในท่อแบบแผ่นขนานเกิดขึ้นเนื่องจากผลของแรงลอยตัวซึ่งมีสาเหตุมาจากความแตกต่างของความหนาแน่นในชั้นของของไหลที่อยู่ในสนามความโน้มถ่วง โดยที่การเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงของความหนาแน่นในเนื้อของของไหล เมื่อของไหลในท่อได้รับความร้อนแล้วลอยตัวสูงขึ้นจะเหนี่ยวนำให้ของไหลภายนอกไหลเข้าทางด้านล่างท่อ สำหรับการศึกษาวิจัยนี้ของไหลคืออากาศ



รูปที่ 2.1 ลักษณะการกระจายอุณหภูมิ (Temperature profile) กรณีการพาความร้อนโดยวิธีธรรมชาติในท่อแบบแผ่นขนาน

เมื่ออากาศไหลเข้าท่อจะได้รับอิทธิพลของความร้อนจากผนังท่อ ซึ่งจะทำให้อุณหภูมิของอากาศที่ไหลเข้าท่อเกิดการเปลี่ยนแปลง โดยที่อากาศที่อยู่ใกล้ผนังท่อจะได้รับอิทธิพลของความร้อนจากผนังท่อเร็วกว่าอากาศที่อยู่ห่างออกไปจากผนังท่อ ซึ่งเรียกขอบเขตชั้นการไหลที่ได้รับอิทธิพลของความร้อนจากผนังท่อว่าขอบเขตชั้นการไหลของความร้อน (Thermal boundary layer) โดยอากาศที่อยู่ติดผนังท่อจะมีอุณหภูมิเท่ากับผนังท่อ และอากาศในชั้นที่อยู่ห่างจากผนังท่อ

ออกไปจะมีอุณหภูมิลดหลั่นกัน ณ บริเวณที่ความร้อนจากผนังท่อทั้งสองด้านถูกส่งถ่ายไปสู่ชั้นของอากาศที่ไหลเข้ามาในท่อ โดยที่ขอบเขตชั้นการไหลของความร้อนยังไม่บรรจบกัน จะเรียกการไหลในช่วงนี้ว่าบริเวณการไหลแบบพัฒนาอุณหภูมิ (Temperature developing region) และบริเวณของการไหลที่อยู่ถัดไปตามความสูงของท่อ โดยที่ขอบเขตชั้นการไหลของความร้อนบรรจบกันแล้ว จะเรียกว่าบริเวณการไหลแบบพัฒนาอุณหภูมิแล้ว (Temperature fully developed region) หรือบริเวณที่ $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{T_w - T}{T_w - T_B}\right) = 0$ ดังรูปที่ 2.1 ในกรณีที่ขอบเขตชั้นการไหลของความร้อนของผนังท่อทั้งสองด้านไม่บรรจบกัน แรงขับการไหลไปตามผนังท่อแต่ละด้านพิจารณาเป็นกระแสของผนัง (Wall jet) ซึ่งจะไม่มีผลกระทบต่อกันระหว่างผนังท่อทั้งสองด้าน แต่ถ้าขอบเขตชั้นการไหลของความร้อนของผนังท่อทั้งสองด้านบรรจบกันกระแสของผนังทั้งสองอันรวมเป็นกระแสลอยตัว (Buoyant stream) อันเดียว ดังรูปที่ 2.2 สำหรับการกระจายของความเร็วในท่อ ช่วงที่อิทธิพลของความหนืดจากการไหลผ่านผนังท่อทั้งสองด้านส่งผลไปสู่อากาศที่ไหลเข้ามาในท่อ ซึ่งทำให้เกิดขอบเขตชั้นการไหลของความเร็ว (Velocity boundary layer) โดยถ้าขอบเขตชั้นการไหลของความเร็วยังไม่บรรจบกันเรียกว่าบริเวณการไหลแบบพัฒนาความเร็ว (Velocity developing region) และช่วงที่อยู่ถัดไปจากบริเวณนี้ตามความสูงของท่อ ซึ่งขอบเขตชั้นการไหลของความเร็วบรรจบกันแล้วหรือ $\frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$ เรียกว่าบริเวณการไหลแบบพัฒนาความเร็วแล้ว (Velocity fully developed region)



รูปที่ 2.2 การพาโดยธรรมชาติในท่อแบบแผ่นขนาน

รูปที่ 2.2 แสดงการไหลของอากาศผ่านท่อซึ่งชั้นของอากาศที่ $(-b/2) < x < (-b/2)^+$ และที่ $(b/2)^- < x < (b/2)$ อากาศอยู่ติดผนังท่อและไม่มีการเคลื่อนที่ การถ่ายเทความร้อนจากผนังท่อไปสู่อากาศที่อยู่ติดผนังท่อจะเกิดขึ้นโดยการนำความร้อน ซึ่งแสดงเป็นสมการความสัมพันธ์ระหว่างฟลักซ์ความร้อน q'' ค่าการนำความร้อน k และอุณหภูมิ T ได้ดังนี้

$$q'' = -k\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{\text{ที่ผนังท่อ}} \tag{2.1}$$

ความร้อนที่ปล่อยจากผนังท่อไปสู่ชั้นอากาศที่อยู่ติดผนังท่อจะมีปริมาณเท่ากับความร้อนที่ถูกถ่ายเทโดยการพาความร้อนของอากาศในท่อ

$$q'' = h(T_{wa} - T_0) \tag{2.2}$$

โดยที่ h คือ สัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อน

T_{wa} คือ อุณหภูมิเฉลี่ยที่ผนังท่อ

T_0 คือ อุณหภูมิของอากาศก่อนเข้าท่อ

2.1.2 การวิเคราะห์ความสามารถในการถ่ายเทความร้อน

สำหรับการพิจารณาความสามารถในการถ่ายเทความร้อนโดยวิธีธรรมชาติจากท่อแบบแผ่นขนาน สามารถพิจารณาได้จากค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนเฉลี่ย (h_a) ซึ่งแสดงอยู่ในรูปของตัวแปรไร้มิติ Nu เฉลี่ยทั้งท่อ โดยที่ค่าของ Nu จะแปรผันตรงกับค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อน แต่จะแปรผกผันกับค่าการนำความร้อนของอากาศ (k) และอุณหภูมิที่ผนังท่อ ซึ่งการคำนวณหาค่า Nu ใช้ความแตกต่างของอุณหภูมิเฉลี่ยที่ผนังท่อ T_{wa} กับอุณหภูมิของอากาศขาเข้า T_o โดยสามารถแสดงเป็นสมการได้ดังนี้

$$Nu = \frac{h_a b}{k} = \frac{q''}{T_{wa} - T_o}\frac{b}{k} \tag{2.5}$$

โดยที่

$$T_{wa} = \frac{1}{L_h}\int_0^{L_h} T_w(y)\,dy \tag{2.6}$$

ซึ่ง k เป็นค่าเฉลี่ยที่ $(T_{wa}-T_o)/2$

ในการเพิ่มการถ่ายเทความร้อนโดยวิธีธรรมชาติจากผนังท่อแบบแผ่นขนาน จากงานวิจัยการพาความร้อนในท่อแผ่นขนานที่ผ่านมาในอดีต พบว่าการติดปล่องแบบตรงแนวดิ่งที่ด้านบนท่อจะทำให้มีการถ่ายเทความร้อนจากผนังท่อดีขึ้น ซึ่งได้ค่า Nu เพิ่มขึ้นจากกรณีท่อที่ไม่ได้

ติดปล่อง โดยงานวิจัยของ Straatman และคณะ (1993) และงานวิจัยของ Auletta และคณะ (2000) พบว่าค่า Nu จะเป็นฟังก์ชันของสัดส่วนความสูงทั้งหมดต่อความสูงของท่อ (L/L_h) สัดส่วนความกว้างของปล่องต่อความกว้างของท่อ (B/b) และตัวเลขเรย์ลีจ์ (Rayleigh number, Ra)

$$Nu = f\left(Ra, \frac{L}{L_h}, \frac{B}{b}\right) \tag{2.7}$$

ซึ่ง Ra สามารถหาได้จากสมการดังนี้

$$Ra = Gr\frac{b}{L_h}Pr = \frac{g\beta q''b^4}{\nu^2 k}\frac{b}{L_h}Pr \tag{2.8}$$

โดยที่ g คือ ค่าความโน้มถ่วง

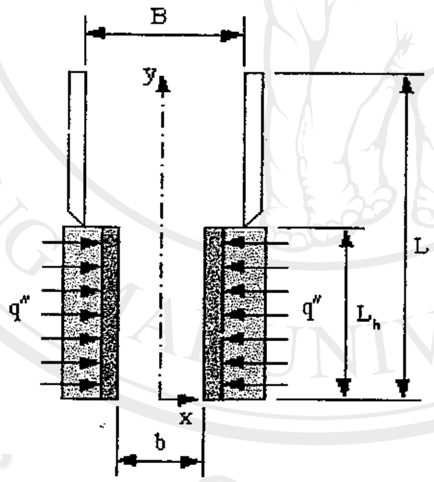
β คือ สัมประสิทธิ์การขยายตัวเชิงปริมาตร

ν คือ ความหนืดเชิงจลน์

L_h คือ ความยาวของท่อ

Gr คือ ตัวเลขกราชอฟ (Grashof number)

Pr คือ ตัวเลขพรันทล์ (Prandtl number, Pr)



รูปที่ 2.3 ท่อติดปล่องแบบตรงแนวดิ่ง

2.2 หลักการและทฤษฎีสำหรับการคำนวณทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Peter, 1997)

2.2.1 แบบจำลองของปัญหา

ในการวิเคราะห์ปัญหาทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการศึกษาวิจัยนี้ได้ใช้เอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยม 3 โหนดแบบเชิงเส้น วิเคราะห์ปัญหาเป็นแบบ 2 มิติ และมีข้อสมมุติฐานเกี่ยวกับของไหล (ในที่นี้คืออากาศ) และการวิเคราะห์ดังนี้

2.2.1.1 อากาศถูกสมมุติให้เป็นของไหลตามทฤษฎีของนิวตัน (Newtonian Fluid)

2.2.1.2 ขอบเขตของบริเวณที่พิจารณา (Domain) ไม่มีการเปลี่ยนแปลงเมื่อเทียบกับเวลา

2.2.1.3 ลักษณะการไหลของอากาศเป็นแบบราบเรียบ ซึ่งพิจารณาด้วยค่าของตัวแปรไร้มิติคือตัวเลขเรย์โนลดส์ โดยที่การไหลจะเป็นแบบราบเรียบถ้า $Re_b \leq 2300$ (Peter, 1997)

$$Re_b = \frac{\rho_a \bar{v} b}{\mu} \tag{2.9}$$

เมื่อ ρ_a คือ ความหนาแน่นเฉลี่ยของอากาศ

$\bar{v}$ คือ ความเร็วเฉลี่ย

b คือ ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางท่อ

μ คือ ความหนืดสัมบรูณ์

2.2.1.4 อากาศไม่อัดตัว เนื่องจากการไหลของอากาศเป็นไปอย่างช้า ๆ เมื่อเปรียบเทียบกับความเร็วเสียง หรือ ค่ามัคนัมเบอร์ (Mach number, M) น้อยกว่า 0.3 (Peter, 1997)

$$M = \frac{|v|}{\sqrt{rRT}} \tag{2.10}$$

เมื่อ $|v|$ คือ ขนาดความเร็วของอากาศในท่อ

r คือ สัดส่วนความร้อนจำเพาะ (C_p/C_v)

R คือ ค่าคงที่ของอากาศ (Universal Gas Constant)

T คือ อุณหภูมิสมบรูณ์ของอากาศ (Absolute temperature)

และในกรณีนี้ความสัมพันธ์ระหว่างความหนาแน่นกับความดัน (P) คือ

$$\frac{d\rho}{dP} = \frac{1}{z} \tag{2.11}$$

โดยกำหนดค่า z ไว้เท่ากับ 10^{15}

2.2.1.5 วิเคราะห์ปัญหาในกรณีเสถียรไม่ขึ้นอยู่กับเวลา (Steady state)

2.2.1.6 คุณสมบัติเหมือนกันทั้งเอลิเมนต์ (Isotropic material properties)

2.2.1.7 ค่าความจุความร้อนคงที่

2.2.1.8 ไม่คิดผลที่เกิดจากการแผ่รังสีความร้อน

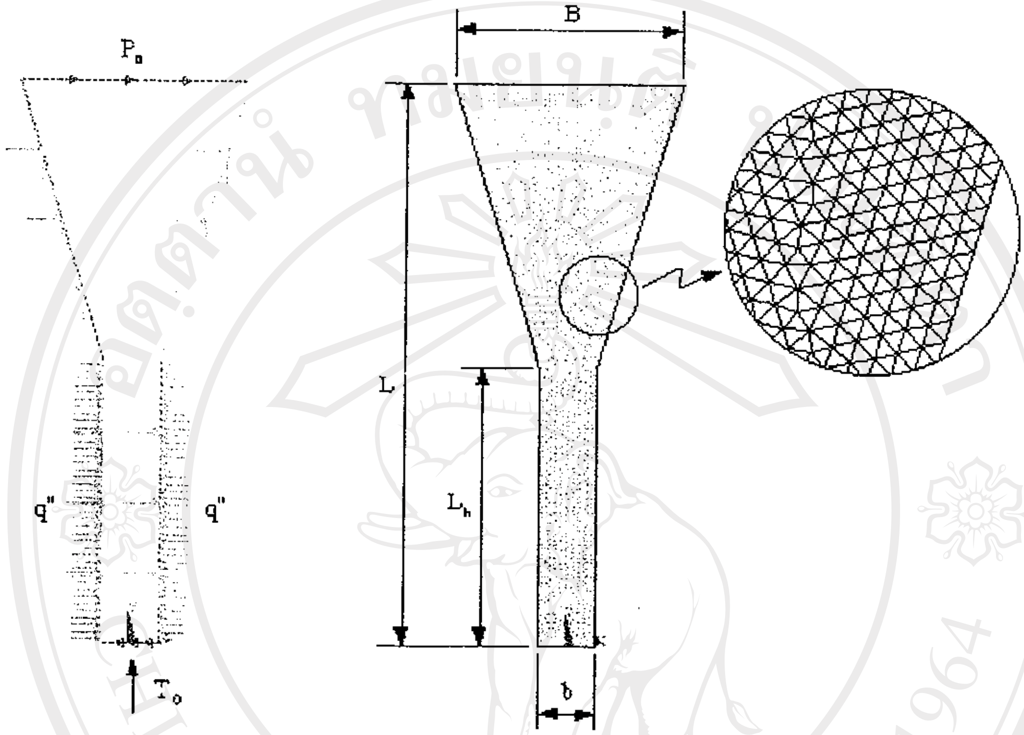
2.2.1.9 เงื่อนไขที่ขอบของปัญหาสำหรับการคำนวณทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข มีดังนี้

(1) ที่ผนังท่อได้รับความร้อน q'' คงที่ (100 W/m^2 และ 300 W/m^2)

(2) อากาศที่อยู่ติดผนังท่อไม่มีการเคลื่อนที่

(3) อากาศไหลเข้าท่อที่อุณหภูมิเท่ากับอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อม (ใช้ค่า 298 K หรือ 24.85 °C)

(4) ความดันของอากาศที่ทางออกมีค่าเท่ากับความดันของสิ่งแวดล้อม



รูปที่ 2.4 แบบจำลองสำหรับกรณีติดปล่องแบบถ่าง

2.2.2 สมการและการคำนวณทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

การคำนวณหาคำตอบโดยใช้วิธีทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ สำหรับการศึกษาวิจัยเกี่ยวกับการพาความร้อนโดยวิธีธรรมชาติในท่อแบบแผ่นขนาน ใช้หลักการอนุรักษ์ มวล โมเมนตัม และพลังงาน ในการพิจารณาถึงลักษณะการไหล และการกระจายของอุณหภูมิ ซึ่งมีสมการพื้นฐานดังนี้

สมการความต่อเนื่อง

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}=0 \qquad (2.12)$$

สมการโมเมนตัม

$$\frac{\partial(\rho v_x v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y v_x)}{\partial y}=-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \qquad (2.13)$$

$$\frac{\partial(\rho v_x v_y)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y v_y)}{\partial y}=\rho g-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v_y}{\partial y}\right) \qquad (2.14)$$

สมการพลังงาน

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x c_p T)+\frac{\partial}{\partial Y}(\rho v_y c_p T)=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) \qquad (2.15)$$

โดยที่ ρ คือ ความหนาแน่น

v_x, v_y คือ ความเร็วตามแนวแกน x และ y ตามลำดับ

g คือ ค่าความโน้มถ่วง

c_p คือ ค่าความจุความร้อน

k คือ ค่าการนำความร้อน

T คือ อุณหภูมิ

จากสมการโมเมนตัมและสมการพลังงานสามารถพิจารณาให้อยู่ในรูปสมการขนส่ง (Transport equation)ได้ ซึ่งประกอบด้วยเทอมการถ่ายเท (Advection) เทอมการแพร่ (Diffusion) และเทอม Source ในสมการขนส่งตัวแปรที่พิจารณาคือ ϕ และแสดงเป็นสมการได้ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x c_\phi \phi)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y c_\phi \phi)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma_\phi\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma_\phi\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)+S_\phi \qquad (2.16)$$

โดยที่ C_ϕ คือ สัมประสิทธิ์การถ่ายเท (Advection coefficient)

Γ_ϕ คือ สัมประสิทธิ์การแพร่ (Diffusion coefficient)

S_ϕ คือ เทอม Source

ตาราง 2.1 การแทนตัวแปรในสมการขนส่ง

ϕ(DOF)	C_ϕ	Γ_ϕ	S_ϕ
v_x	1	μ_e	$-\partial P/\partial x$
v_y	1	μ_e	$\rho g-\partial P/\partial y$
T	C_p	k	-

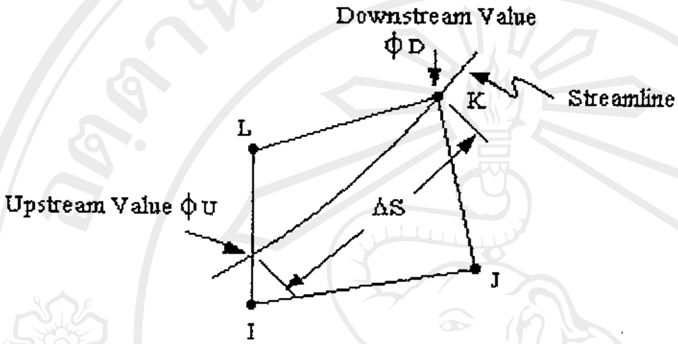
สมการ 2.15 เมื่อแสดงอยู่ในรูปทั่วไปของสมการเอลิเมนต์เมตริกซ์ จะมีรูปแบบสมการดังนี้

$$\left(\left[A_e^{advection}\right]+\left[A_e^{diffusion}\right]\right)\{\phi_e\}=\{S_e^{\phi}\} \qquad (2.17)$$

ซึ่งใช้วิธีของ Galerkin ในรูปการอินทิเกรตและใช้สัญลักษณ์ W^e แทนฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก (Weighting function) สำหรับเอลิเมนต์ จากสมการ 2.17 สามารถแยกพิจารณาได้สามเทอมดังนี้

(1) เทอมการถ่ายเท (Advection term)

เทอมการถ่ายเทสามารถพิจารณาด้วยคุณลักษณะของเส้นกระแสความเร็ว (Streamline velocities) โดยสมมติว่าการถ่ายเทจะเกิดขึ้นไปตามเส้นกระแสและไม่มีการส่งผ่านข้ามระหว่างเส้นกระแส



รูปที่ 2.5 เส้นกระแสการไหลผ่านโหนดด้านท้ายกระแส

ที่มา : Peter(1997)

เมื่อสมมุติให้

$$\frac{\partial(\rho v_x \phi)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y \phi)}{\partial y} = \frac{\partial(\rho v_s \phi)}{\partial s} \tag{2.18}$$

ดังนั้นจะได้

$$\left[A_e^{advection}\right] = \frac{d\rho v_s \phi}{ds} \int W^e d(vol) \tag{2.19}$$

สมการนี้ใช้กับทุก ๆ เอลิเมนต์ ซึ่งจะมีเพียงหนึ่งโหนดที่ได้รับผลจากข้างในเอลิเมนต์ สำหรับการคำนวณอนุพันธ์สามารถคำนวณได้โดยใช้ความแตกต่างคือ

$$\frac{d(\rho v_s)}{ds} = \frac{(\rho v_s \phi)_U - (\rho v_s \phi)_D}{\Delta s} \tag{2.20}$$

เมื่อ D แสดงถึงค่าที่ด้านท้ายกระแส

U แสดงถึงค่าที่ตำแหน่งเส้นกระแสเข้าเอลิเมนต์ผ่านโหนดด้านท้ายกระแส

ΔS ระยะทางจากจุดต้นกระแสถึงโหนดท้ายกระแส

ค่าที่ตำแหน่งต้นกระแสถูกแสดงในเทอมของโหนดที่อยู่ระหว่างเส้นกระแสซึ่งไม่ทราบค่า

(2) เทอมการแพร่ (Diffusion terms)

เทอมนี้ได้จากการอินทิเกรตทั้งขอบเขตของปัญหาที่พิจารณาหลังจากคูณฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก (W^e) ซึ่งจะได้ว่า

$$\text{Diffusion contribution} = \int W^e \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) d(vol) + \int W^e \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) d(vol) \tag{2.21}$$

เมื่อกำหนดให้ $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial W^e}{\partial x}\phi$ และ $\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial W^e}{\partial y}\phi$ จะได้เทอมการแพร่คือ

$$\left[A_e^{diffusion}\right] = \int \left(\frac{\partial W^e}{\partial x}\Gamma_\phi \frac{\partial W^e}{\partial x} + \frac{\partial W^e}{\partial y}\Gamma_\phi \frac{\partial W^e}{\partial y}\right) d(vol) \tag{2.22}$$

(3) เทอม Source

เมื่อคูณฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก (W^e) แล้วอินทิเกรตทั้งปริมาตรของเอลิเมนต์จะได้เทอม Source สำหรับเอลิเมนต์ คือ

$$S_\phi^e = \int W^e S_\phi d(vol) \tag{2.23}$$

จากสมการโมเมนตัมสามารถเปลี่ยนให้อยู่ในรูปสมการความเร็ว โดยที่สัมประสิทธิ์เมตริกซ์ของสมการความเร็วประกอบด้วยเทอมการถ่ายเทและเทอมการแพร่ และแยกเทอมเกรเดียนของความดันจากเทอม Source ซึ่งจะได้สมการความเร็วตามแนวแกน v_x และ v_y ดังนี้

$$Av_x = S_\phi - \sum_{p=1}^{E} W\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^e d(vol) \tag{2.24}$$

$$Av_y = S_\phi - \sum_{p=1}^{E} W\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^e d(vol) \tag{2.25}$$

เมื่อพิจารณาโดยรวมเอลิเมนต์ทั้งหมด องค์ประกอบของความเร็วที่แต่ละโหนดจะถูกแสดงในเทอมของความเร็ว บริเวณใกล้เคียง เทอม Source และความดันลด (Pressure drop) จากสมการ 2.24 และสมการ 2.25 สามารถแสดงอยู่ในรูปสมการความเร็วที่แต่ละโหนด i ได้ดังนี้

$$v_{xi} = \hat{v}_{xi} - \frac{1}{a_{ii}^x}\int W\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) d(vol) \tag{2.26}$$

$$v_{yi} = \hat{v}_{yi} - \frac{1}{a_{ii}^y}\int W\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) d(vol) \tag{2.27}$$

โดยที่

$$\hat{v}_{xi} = \frac{-\sum_{j}^{j \neq i} a_{ij}^{x} v_{xj} + S_x}{a_{ii}^{x}} \tag{2.27}$$

$$\hat{v}_{yi} = \frac{-\sum_{j}^{j \neq i} a_{ij}^{y} v_{yj} + S_y}{a_{ii}^{y}} \tag{2.28}$$

สำหรับ i = 1ถึง N ซึ่งมีทั้งหมด N โหนด และ a_{ij} แทนค่าในสัมประสิทธิ์เมตริกซ์ของสมการโมเมนตัมสองสมการ

เมื่อพิจารณาที่เอลิเมนต์ จะได้สมการความเร็วซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$v_x = \hat{v}_x - \frac{1}{a_{ii}^{x}} \int \left(W \frac{\partial W}{\partial x} \right) d(vol)^e [P]^e \tag{2.29}$$

$$v_y = \hat{v}_y - \frac{1}{a_{ii}^{y}} \int \left(W \frac{\partial W}{\partial y} \right) d(vol)^e [P]^e \tag{2.30}$$

สมการ 2.29 และสมการ 2.30 จะใช้แทนความเร็วไม่ทราบค่าในสมการความต่อเนื่องซึ่งจะถูกเปลี่ยนให้อยู่ในรูปสมการความดัน จากสมการความต่อเนื่องกรณีของไหลไม่อัดตัว ซึ่งใช้วิธีของ Galerkin ในการอินทิเกรตหาคำตอบและกำหนดให้สัญลักษณ์ * แทนค่าในการคำนวณครั้งก่อน จะได้สมการความดันของเอลิเมนต์คือ

$$\begin{aligned} &[P]^e \int \left[\frac{\partial W}{\partial x} \rho^* M_x \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} \rho^* M_y \frac{\partial W}{\partial y} \right] d(vol)^e \\ &= \int \left[\frac{\partial W}{\partial x} \rho^* \hat{v}_x + \frac{\partial W}{\partial Y} \rho^* \hat{v}_y \right] d(vol)^e - \int W \left[\rho^* v_x \right]^s d(area)^s - \int W \left[\rho^* v_y \right]^s d(area)^s \end{aligned} \tag{2.31}$$

โดยที่

$$M_x = \frac{1}{a_{ii}^{x}} \sum_{p=1}^{N} W d(vol) \tag{2.32}$$

$$M_y = \frac{1}{a_{ii}^{y}} \sum_{p=1}^{N} W d(vol) \tag{2.33}$$

สำหรับการวิเคราะห์การไหลของความร้อนใช้หลักการอนุรักษ์พลังงาน โดยมีเงื่อนไขที่ขอบซึ่งสมมติว่าครอบคลุมเอลิเมนต์ทั้งหมด คือ

(1) มีการไหลของความร้อนกระทำกับพื้นผิว S_1

$$\{q\}^T \{\eta\} = -q^* \tag{2.34}$$

โดยที่ $\{\eta\}$ คือ เวกเตอร์ตั้งฉากกับพื้นผิว (Unit outward normal vector)

q^* คือ การไหลของความร้อนจำเพาะ (Specified heat flow)

(2) มีการพาความร้อนกระทำกับพื้นผิว S_2 จากกฎการระบายความร้อนของ Newton (Newton's law of cooling) จะได้

$$\{q\}^T \{\eta\} = -h_f(T_B - T_S) \tag{2.35}$$

โดยที่ h_f คือ สัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อน (Heat transfer coefficient หรือ Film coefficient)

T_B คือ อุณหภูมิเฉลี่ยของชั้นอากาศที่อยู่ถัดไป (Bulk temperature)

T_S คือ อุณหภูมิพื้นผิวของแบบจำลอง

กำหนดให้เครื่องหมายลบหมายถึงความร้อนไหลออกจากพื้นผิว

จากสมการพลังงาน 2.14 เมื่อรวมเงื่อนไขข้างต้นแล้วอินทิเกรตทั้งปริมาตรของเอลิเมนต์และคูณด้วยการเปลี่ยนแปลงเสมือนของอุณหภูมิ δT จะได้สมการสำหรับวิเคราะห์การไหลของความร้อนดังนี้

$$\int_{vol}\left(\rho c_p \delta T\left(\{v\}^T \{L\}T\right) + \{L\}^T(\delta T)\left([D]\{L\}T\right)\right)d(vol) = \int_{S_1} \delta T q^* dS_1 + \int_{S_2} \delta T h_f(T_B - T)dS_2 \tag{2.36}$$

โดยที่ $\{v\} = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \end{Bmatrix}$ = ความเร็ว

$[D] = \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 \\ 0 & K_{yy} \end{bmatrix}$ = เมตริกซ์ค่าการนำความร้อน

$\{L\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix}$ = โอเปอเรเตอร์ (Operator)

T = อุณหภูมิของเอลิเมนต์

อุณหภูมิของเอลิเมนต์ T ประกอบด้วยอุณหภูมิที่โหนดและฟังก์ชันรูปร่าง คือ

$$T = \{N\}^T \{T_e\} \tag{2.37}$$

โดยที่ $\{N\} = \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix}$ = ฟังก์ชันรูปร่างของเอลิเมนต์ (Shape function)

$\{T_e\} = \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{Bmatrix}$ = อุณหภูมิที่โหนดของเอลิเมนต์

สำหรับการเปลี่ยนแปลงเสมือนของอุณหภูมิ δT มีรูปแบบคล้ายกับอุณหภูมิของเอลิเมนต์ T คือ

$$\delta T = \{\delta T_e\}^T \{N\} \tag{2.38}$$

กำหนดให้

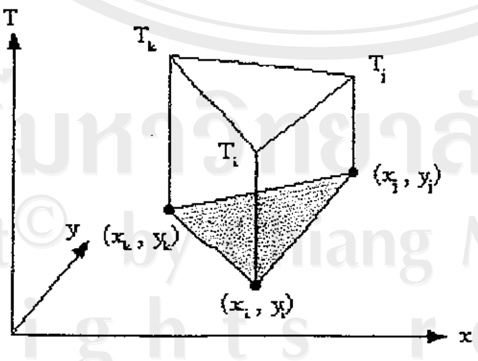
$$\{L\}T = [B]\{T_e\} \tag{2.39}$$

โดยที่ $[B] = \{L\}\{N\}^T$

เมื่อแทนสมการ 2.35 สมการ 2.36 และสมการ 2.37 ลงในสมการ 2.34 แล้วลดรูปของสมการซึ่งมี $\{\delta T_e\}$ ทุกเทอม จะได้สมการซึ่งสมมุติว่าความหนาแน่นและค่าความจุความร้อนคงที่ทั่วทั้งเอลิเมนต์ ดังนี้

$$\rho c_p \int_{vol} \{N\}\{v\}^T [B] d(vol) \{T_e\} + \int_{vol} [B]^T [D][B] d(vol) \{T_e\}$$
$$= \int_{S_1} \{N\} q^* d(S_1) + \int_{S_2} T_B h_f \{N\} d(S_2) - \int_{S_2} h_f \{N\}\{N\}^T \{T_e\} d(S_2) \tag{2.40}$$

สำหรับฟังก์ชันรูปร่าง (N) หรือฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก (W) กรณีเอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมสามโหนดที่ใช้ในการคำนวณทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ประกอบด้วยฟังก์ชันการประมาณที่แต่ละโหนดของเอลิเมนต์ พิจารณารูปที่ 2.5 ฟังก์ชันรูปร่างคือ (Saeed, 1999)



รูปที่ 2.5 เอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยม
ที่มา : Saeed(1999)

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix} \tag{2.41}$$

โดยที่

$$N_i = \frac{1}{2A}\left(\alpha_i + \beta_i x + \delta_i y\right) \tag{2.42a}$$

$$N_j = \frac{1}{2A}\left(\alpha_j + \beta_j x + \delta_j y\right) \tag{2.42b}$$

$$N_k = \frac{1}{2A}\left(\alpha_k + \beta_k x + \delta_k y\right) \tag{2.42c}$$

และ $2A = x_i(y_j-y_k) + x_j(y_k-y_i) + x_k(y_i-y_j)$

$\alpha_i = x_j y_k - x_k y_j$ $\quad \beta_i = y_j - y_k$ $\quad \delta_i = x_k - x_j$

$\alpha_j = x_k y_i - x_i y_k$ $\quad \beta_j = y_k - y_i$ $\quad \delta_j = x_i - x_k$

$\alpha_k = x_i y_j - x_j y_i$ $\quad \beta_k = y_i - y_j$ $\quad \delta_k = x_j - x_I$

การตรวจสอบผลการลู่เข้าสู่คำตอบของโปรแกรม

การตรวจสอบผลจะตรวจสอบผลโดยการเปรียบเทียบความแตกต่างของผลการคำนวณที่ได้ในครั้งปัจจุบัน k กับผลการคำนวณที่ได้ในครั้งก่อน k-1 ซึ่งแสดงเป็นสมการได้ดังนี้

$$\text{Conv Mon} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left|\phi_i^k - \phi_i^{k-1}\right|}{\sum_{i=1}^{N}\left|\phi_i^k\right|} \tag{2.43}$$

โดยที่ N = จำนวนทั้งหมดของไฟไนต์เอลิเมนต์โหนด

ϕ = องศาอิสระ (Degree of freedom)

จากหลักการ สมมุติฐาน และทฤษฎีที่ใช้ในการคำนวณทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้กล่าวมาสามารถสรุปเป็นขั้นตอนในการคำนวณได้ดังนี้