บทที่ 2

ข้อมูลและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยครั้งนี้สนใจศึกษา การเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์การถดถอยเชิงเส้นแบบพหุคูณ ในกรณีเกิดปัญหาอัตตสหสัมพันธ์อันดับที่ 1, 2 และ 3 ในบทนี้จะกล่าวถึงรายละเอียดดังต่อไปนี้

2.1 ความรู้พื้นฐานที่เกี่ยวกับการวิเคราะห์การถดถอย

2.2 ความหมายและสาเหตุการเกิดอัตตสหสัมพันธ์

2.3 ผลกระทบของการมีอัตตสหสัมพันธ์ของค่าคลาดเคลื่อนต่อค่าประมาณด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด

2.4 การกำหนดตัวแบบอัตตสหสัมพันธ์ของค่าคลาดเคลื่อน

2.5 วิธีทดสอบอัตตสหสัมพันธ์ของค่าคลาดเคลื่อน

2.6 วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์

2.7 ค่าสถิติที่ใช้วัดประสิทธิภาพของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์

2.8 ตัวอย่างการวิเคราะห์ข้อมูล

2.9 ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 ความรู้พื้นฐานที่เกี่ยวกับการวิเคราะห์การถดถอย

การวิเคราะห์การถดถอยเป็นการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรสองตัวแปรขึ้นไป เมื่อกำหนดตัวแปรที่ต้องการศึกษาเป็นตัวแปรตาม (Y) และตัวแปรอื่นๆ ที่แทนอิทธิพลหรือปัจจัยที่มีผลต่อตัวแปรตามที่ต้องการจะศึกษาเป็นตัวแปรอิสระ(X) โดยพิจารณาว่าตัวแปรตามและตัวแปรอิสระมีความสัมพันธ์กันในลักษณะใด แล้วสร้างตัวแบบการถดถอยเพื่อแทนลักษณะความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร การวิเคราะห์การถดถอยจะทำตามตัวแบบการถดถอยและข้อสมมติของตัวแบบที่กำหนดไว้ล่วงหน้า ในการวิจัยครั้งนี้จะทำการศึกษาในตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นแบบพหุคูณ ซึ่งสามารถเขียนตัวแบบได้ดังนี้

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \beta_2 X_{t2} + \beta_3 X_{t3} + \beta_4 X_{t4} + \varepsilon_t \qquad (1)$$

โดยที่ Y_t เป็นตัวแปรตาม

$X_{t1}, X_{t2}, X_{t3}, X_{t4}$ เป็นตัวแปรอิสระ

$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ เป็นค่าพารามิเตอร์ เรียก ค่าสัมประสิทธิ์การถดถอย

และ ε_t เป็นค่าความคลาดเคลื่อนสุ่ม ซึ่ง $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$

เมื่อตัวแปรอิสระมีข้อมูลทั้งหมด n ค่า จะสามารถหาค่า **Y** ได้ดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= \beta_0 + \beta_1 X_{11} + \beta_2 X_{12} + \beta_3 X_{13} + \beta_4 X_{14} + \varepsilon_1 \\
Y_2 &= \beta_0 + \beta_1 X_{21} + \beta_2 X_{22} + \beta_3 X_{23} + \beta_4 X_{24} + \varepsilon_2 \\
&\vdots \\
Y_n &= \beta_0 + \beta_1 X_{n1} + \beta_2 X_{n2} + \beta_3 X_{n3} + \beta_4 X_{n4} + \varepsilon_n
\end{aligned}
$$

สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

โดยที่ $\boldsymbol{Y}$ เป็นเวกเตอร์ของค่าสังเกตของตัวแปรตามขนาด $n \times 1$

$\boldsymbol{X}$ เป็นเมทริกซ์ของค่าสังเกตของตัวแปรอิสระขนาด $n \times 5$

$\boldsymbol{\beta}$ เป็นเวกเตอร์ของค่าสัมประสิทธ์การถดถอยขนาด 5×1

และ $\boldsymbol{\varepsilon}$ เป็นเวกเตอร์ของค่าคลาดเคลื่อนขนาด $n \times 1$

เมื่อ

$$
\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & X_{n3} & X_{n4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}
$$

จากตัวแบบการถดถอย $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ สามารถประมาณค่าสัมประสิทธิ์การถดถอย (β) ได้โดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Ordinary Least Square Method: OLS) ให้ $\hat{\beta}$ เป็นเวกเตอร์ของค่าประมาณพารามิเตอร์ β ซึ่งเมื่อแทนที่ $\hat{\beta}$ ลงในตัวแบบจะได้

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\hat{\beta}} + \boldsymbol{\hat{\varepsilon}}$$

และ $$\boldsymbol{\hat{\beta}} = (\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'Y}$$

$$\boldsymbol{\hat{\varepsilon}} = \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\hat{Y}} \qquad \text{โดยที่ } \boldsymbol{\hat{Y}} = \boldsymbol{X\hat{\beta}}$$

จากผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อน (Sum Square of Error : SSE)

$$
\begin{aligned}
SSE &= \sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2 \\
&= \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \\
&= (Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta}) \\
&= Y'Y - \hat{\beta}'X'Y - Y'X\hat{\beta} + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta} \\
&= Y'Y - 2\hat{\beta}'X'Y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{SSE}}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}}} &= \frac{\partial}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}}}[\boldsymbol{Y'Y} - 2\hat{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{X'Y} + \hat{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{X'X}\hat{\boldsymbol{\beta}}] \\
&= -2\boldsymbol{X'Y} + 2\boldsymbol{X'X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = 0 \\
\boldsymbol{X'X}\hat{\boldsymbol{\beta}} &= \boldsymbol{X'Y} \\
\hat{\boldsymbol{\beta}} &= (\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'Y}
\end{aligned}
$$

โดยที่

$$
\boldsymbol{X'X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ X_{11} & X_{21} & \cdots & X_{n1} \\ X_{12} & X_{22} & \cdots & X_{n2} \\ X_{13} & X_{23} & \cdots & X_{n3} \\ X_{14} & X_{24} & \cdots & X_{n4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & X_{n3} & X_{n4} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} n & \sum X_1 & \sum X_2 & \sum X_3 & \sum X_4 \\ \sum X_1 & \sum X_1^2 & \sum X_1X_2 & \sum X_1X_3 & \sum X_1X_4 \\ \sum X_2 & \sum X_1X_2 & \sum X_2^2 & \sum X_2X_3 & \sum X_2X_4 \\ \sum X_3 & \sum X_1X_3 & \sum X_2X_3 & \sum X_3^2 & \sum X_3X_4 \\ \sum X_4 & \sum X_1X_4 & \sum X_2X_4 & \sum X_3X_4 & \sum X_4^2 \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{X'Y} = \begin{bmatrix} \sum Y \\ \sum X_1Y \\ \sum X_2Y \\ \sum X_3Y \\ \sum X_4Y \end{bmatrix}
$$

จากคุณสมบัติของตัวประมาณของสัมประสิทธิ์การถดถอย โดยอาศัยทฤษฎีของเกาส์-มาร์คอฟ (Gauss-Markov Theorem) จะได้ว่า $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ เป็นตัวประมาณที่มีคุณสมบัติเป็น BLUE (Best

Linear Unbiased Estimators) กล่าวคือ เป็นตัวประมาณเชิงเส้นที่ไม่เอนเอียง และมีค่าความแปรปรวนต่ำที่สุด

รูปแบบการถดถอยเชิงเส้นทั้งแบบง่ายและแบบพหุคูณ มีข้อตกลงเบื้องต้นของตัวแบบดังนี้

1. ความคลาดเคลื่อน ε_t มีการแจกแจงแบบปกติ มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และค่าความแปรปรวน σ_ε^2 นั่นคือ $\varepsilon_t \sim N(0,\sigma_\varepsilon^2)$

2. ค่าคลาดเคลื่อน (ε_t) มีการแจกแจงที่เป็นอิสระกัน (ไม่มีความสัมพันธ์กัน) นั่นคือ $E(\varepsilon_t\varepsilon_s)=0$ เมื่อ $t \neq s$ หรืออาจกล่าวได้ว่า $Cov(\varepsilon_t,\varepsilon_s)=0$

3. ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตามและตัวแปรอิสระเป็นเส้นตรง และ

4. แต่ละค่าของตัวแปรตามเป็นอิสระต่อกัน

หากข้อสมมติของตัวแบบเป็นจริงการสรุปผลการวิเคราะห์จะทำได้อย่างถูกต้อง แต่ถ้าสมมติฐานไม่เป็นจริงผลการวิเคราะห์จะผิดพลาด โดยเฉพาะสมมติฐานของตัวแบบการถดถอยที่เกี่ยวข้องกับค่าคลาดเคลื่อนมีความจำเป็นยิ่งต่อการทดสอบสมมติฐานและการประมาณค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบ หากข้อตกลงข้อใดข้อหนึ่งไม่เป็นจริง จะส่งผลให้ตัวประมาณที่ได้ไม่มีคุณสมบัติเป็นตัวประมาณที่ดี (Best Linear Unbiased Estimator : BLUE) และการสรุปผลจากการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับข้อมูลที่นำมาวิเคราะห์จะผิดพลาด (ทรงศิริ แต้สมบัติ, 2541)

2.2 ความหมายและสาเหตุการเกิดอัตตสหสัมพันธ์

ในการวิจัยนี้จะขอกล่าวถึงข้อตกลงเบื้องต้นของตัวแบบการถดถอยที่กำหนดว่าค่าความคลาดเคลื่อนมีการแจกแจงที่เป็นอิสระกัน แต่ในทางปฏิบัติมักพบเสมอว่าค่าคลาดเคลื่อนที่ได้มักไม่เป็นอิสระกัน เช่น เมื่อวิเคราะห์อนุกรมเวลาซึ่งเป็นข้อมูลที่เก็บรวบรวมต่อเนื่องกันตามเวลา หรือการกำหนดรูปแบบโพลิโนเมียลที่ลำดับต่ำเกินไปกับข้อมูลที่นำมาวิเคราะห์ เป็นต้น กรณีที่ค่าคลาดเคลื่อนไม่เป็นอิสระกันจะเรียกว่าการมีอัตตสหสัมพันธ์ของค่าคลาดเคลื่อน (autocorrelation) กล่าวคือ $E(\varepsilon_t\varepsilon_s)\neq 0,\ t\neq s$ ซึ่งเป็นเหตุการณ์ที่ขัดแย้งกับข้อตกลงของตัวแบบการถดถอยที่กำหนดว่า $E(\varepsilon_t\varepsilon_s)=0,\ t\neq s$ การคำนวณหาค่าอัตตสหสัมพันธ์สามารถทำได้จากสมาชิกของ ε_t ครั้งละ 2 ตัว ซึ่งจะคำนวณได้ทั้งหมด ${}^nC_2=\dfrac{n(n-1)}{2}$ ครั้ง เมื่อคำนวณหา $E(\varepsilon_t\varepsilon_s)$ ครบ $\dfrac{n(n-1)}{2}$ ครั้ง จะได้ค่าอัตตสหสัมพันธ์ซึ่งเขียนเป็นเมทริกซ์ $V(\varepsilon_t)$ ถ้าให้ $V(\varepsilon_t)\neq\sigma^2 I_n$ ตามข้อตกลงเบื้องต้น คือ ถ้า $E(\varepsilon_t\varepsilon_s)\neq 0,\ t\neq s$ จะได้เมทริกซ์ $V(\varepsilon_t)$ ดังนี้

$$V(\varepsilon_t) = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{12} & 1 & \rho_{23} & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho_{1n} & \rho_{2n} & \rho_{3n} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \neq \sigma^2 I_n$$

เมื่อ $\sigma^2 \rho_{ij} = E(\varepsilon_t \varepsilon_s), t \neq s,\ i = 1,2,\ldots,n,\ \ j = 1,2,\ldots,n$

ความสัมพันธ์ของค่าคลาดเคลื่อนดังกล่าวนี้อาจเป็นไปในทิศทางบวก (Positive Autocorrelation) หรือลบ (Negative Autocorrelation) ก็ได้ ซึ่งการเกิดอัตตสหสัมพันธ์ส่วนใหญ่มักเกิดขึ้นกับข้อมูลอนุกรมเวลาที่เราเรียกว่า Serial Correlation** ค่าความคลาดเคลื่อนอาจมีความสัมพันธ์ในช่วงเวลาที่ต่างกัน เช่น ค่าคลาดเคลื่อนในช่วงเวลา t หรือ ε_t อาจมีความสัมพันธ์กับค่าคลาดเคลื่อนในช่วงเวลาก่อนหน้า คือ $\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots$ หรือสัมพันธ์กับช่วงเวลาที่ตามมา คือ $\varepsilon_{t+1}, \varepsilon_{t+2}, \ldots$

การเกิดอัตตสหสัมพันธ์ของค่าคลาดเคลื่อนมีสาเหตุหลัก ๆ 3 ประการคือ

1. ขาดตัวแปรอิสระที่มีความสำคัญบางตัวในตัวแบบการถดถอย (Omitted variables) โดยปกตินักวิจัยจะหาตัวแปรอิสระที่มีอิทธิพลในการอธิบายธรรมชาติของตัวแปรตามให้ได้ครบถ้วนที่สุดเท่าที่จะทำได้ เพราะถ้าสามารถหาตัวแปรอิสระได้ครบถ้วนมากเพียงใด ผู้วิจัยย่อมทราบธรรมชาติตลอดจนพฤติกรรมทั้งในอดีต-ปัจจุบัน-อนาคตของตัวแปรตามได้มากเท่านั้น แต่ในบางครั้งอาจไม่สามารถหาตัวแปรที่เกี่ยวข้องได้ หรืออาจมีการตัดตัวแปรอิสระบางตัวทิ้งไป เนื่องจากไม่อาจวัดหรือสังเกตได้ ตัวแปรอิสระที่ถูกตัดทิ้งไปนี้มีอิทธิพลต่อค่าตัวแปรตาม ผลกระทบของตัวแปรนี้จะส่งผ่านตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อน (ε_t) ทำให้ค่าคลาดเคลื่อนเกิดอัตตสหสัมพันธ์อย่างหลีกเลี่ยงไม่ได้ อัตตสหสัมพันธ์ลักษณะนี้ไม่ใช่ธรรมชาติที่แท้จริงของค่าคลาดเคลื่อน แต่เป็นอาการที่แสดงให้เห็นเสมือนว่า ความคลาดเคลื่อนมีอัตตสหสัมพันธ์ เรียกว่า Quasi-Autocorrelation

---

** บางท่านให้ความหมายของ Autocorrelation กับ Serial Correlation แตกต่างกัน เช่น Autocorrelation เป็นอัตตสหสัมพันธ์ของข้อมูลอนุกรมเวลาที่ล่าช้า ส่วน Serial Correlation เป็นสหสัมพันธ์ที่ล่าช้าระหว่างอนุกรมข้อมูล 2 อนุกรม หรือ บางท่านกล่าวว่า Autocorrelation เป็นอัตตสหสัมพันธ์ของข้อมูลที่ประชากร (Population) เป็นพื้นฐาน ส่วน Serial Correlation เป็นอัตตสหสัมพันธ์ของข้อมูลที่มีตัวอย่าง (Sample) เป็นพื้นฐาน อย่างไรก็ตามโดยมากมักจะใช้แทนกัน (รศ.เฉลียว ฉัตรแก้ว, 2535)

2. การกำหนดตัวแบบการถดถอยไม่เหมาะสม (Model misspecification) เช่น ในการศึกษาความสัมพันธ์ของตัวแปรตาม (Y) และตัวแปรอิสระ (X) ซึ่งมีความสัมพันธ์อยู่ในตัวแบบกำลังสอง (quadratic) แต่ผู้วิเคราะห์กำหนดตัวแบบการถดถอยเป็นเชิงเส้นให้มีความสัมพันธ์เป็นแบบเชิงเส้นตรง แล้วค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการกำหนดตัวแบบที่ไม่ถูกต้องจะขึ้นอยู่กับค่ากำลังสองของตัวแปรอิสระ (X^2) ดังนั้นเมื่อตัวแปรอิสระมีค่ามากขึ้นเมื่อเวลามากขึ้น ค่าคลาดเคลื่อนจะมีค่ามากขึ้นตามไปด้วย ซึ่งชี้ให้เห็นการมีอัตตสหสัมพันธ์ของค่าคลาดเคลื่อน

3. ค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการวัดค่าตัวแปร ข้อมูลที่นำมาใช้ในการวิเคราะห์ความถดถอยทั้งข้อมูลปฐมภูมิและทุติยภูมิ ได้มาจากการทดลองและการสำรวจด้วยตัวอย่าง ซึ่งขั้นตอนในการเก็บรวบรวมข้อมูลนั้นย่อมเกิดความคลาดเคลื่อนขึ้นได้เสมอ แม้ว่าผู้เก็บรวบรวมข้อมูลจะควบคุมงานได้ดีเพียงใด ดังนั้นความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นจากตัวแปรที่มีค่าคลาดเคลื่อนอาจมีอัตตสหสัมพันธ์กันได้ หรือในกรณีที่ค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในช่วงเวลาหนึ่งโดยตัวมันเองจะส่งผลกระทบไปยังช่วงเวลาอื่น ๆ ทำให้ค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในแต่ละช่วงเวลาไม่เป็นอิสระต่อกันอยู่แล้วตามธรรมชาติ กรณีนี้เรียกว่าเกิดสภาพ “true autocorrelation” หรือ “pure autocorrelation” การกำหนดให้ $E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0, \quad t \neq s$ โดยไม่ได้ตรวจสอบจึงเป็นการบังคับให้ค่าคลาดเคลื่อนฝืนธรรมชาติของตนเอง

2.3 ผลกระทบของการมีอัตตสหสัมพันธ์ของค่าคลาดเคลื่อนต่อค่าประมาณด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด

เมื่อเทอมของค่าคลาดเคลื่อนในตัวแบบการถดถอยมีอัตตสหสัมพันธ์เกิดขึ้น นั่นคือ $V(\varepsilon) = \dfrac{\sigma_u^2}{1-\rho} \neq \sigma_\varepsilon^2 I_n$ แต่ยังคงใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดในการประมาณค่า β อยู่เช่นเดิม จะก่อให้เกิดความเสียหายโดยเฉพาะคุณภาพของค่าประมาณสัมประสิทธิ์การถดถอย ($\hat{\beta}$) ดังนี้

1. ค่าประมาณสัมประสิทธิ์การถดถอย (และการพยากรณ์บนตัวประมาณนี้ทั้งหมด) เป็นค่าประมาณที่ไม่เอนเอียงและคงเส้นคงวา (Ramu Ramanathan, 2002) ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ดังนี้

จาก
$$\begin{aligned}
\hat{\beta} &= (X'X)^{-1}X'Y \\
&= (X'X)^{-1}X'(X\beta+\varepsilon) \\
&= (X'X)^{-1}(X'X)\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon \\
&= I_n\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon \\
E(\hat{\beta}) &= E(\beta) + \mathrm{E}[(X'X)^{-1}X'\varepsilon] \\
&= \beta + (X'X)^{-1}X'E(\varepsilon) \\
&= \beta \qquad\qquad , \text{เนื่องจาก } E(\varepsilon) = 0
\end{aligned}$$

แต่เมื่อเทอมของค่าคลาดเคลื่อนมีอัตตสหสัมพันธ์ ปัญหานี้จะส่งผลต่อประสิทธิภาพของค่าประมาณตามทฤษฎีเกาส์-มาร์คอฟ (Gauss-Markov Theorem) ซึ่งมีขั้นตอนหนึ่งเกี่ยวข้องกับค่าความแปรปรวนที่น้อยที่สุดของผลรวมเชิงเส้น $\sum a_t \varepsilon_t$:

$$Var(\sum a_t \varepsilon_t) = \sum a_t^2 \sigma_\varepsilon^2 + \sum_{t \neq s} \sum a_t a_s Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s)$$

สามารถพิสูจน์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
&Var(\hat{\beta}) \\
&= E\left[\hat{\beta} - E(\hat{\beta})\right]^2 \\
&= E[\,\hat{\beta} - \beta\,]^2 \qquad \text{เนื่องจาก } E(\hat{\beta}) = \beta \\
&= E[\,\beta + (X'X)^{-1} X'\varepsilon - \beta\,]^2 \\
&= E[\,(X'X)^{-1} X'\varepsilon\,]^2 \qquad \text{โดยที่ } a_t = (X'X)^{-1} X' \\
&= E\left(\sum a_t \varepsilon_t\right)^2 \\
&= E[\,(a_1^2\varepsilon_1^2 + a_2^2\varepsilon_2^2 + \ldots + a_n^2\varepsilon_n^2) + (2a_1a_2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 2a_1a_3\varepsilon_1\varepsilon_3 + \ldots + 2a_{n-1}a_n\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n)] \\
&= E\left(\sum a_t^2 \varepsilon_t^2 + 2\sum\sum a_t a_s \varepsilon_t \varepsilon_s\right) \\
&= \sum a_t^2\, E(\varepsilon_t^2) + 2\sum\sum a_t a_s\, E(\varepsilon_t \varepsilon_s) \\
&= \sum a_t^2 \sigma_\varepsilon^2 + 2\sum_{t \neq s}\sum a_t a_s\, COV(\varepsilon_t, \varepsilon_s)
\end{aligned}$$

ถ้า $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) \neq 0$ เทอมของ $\sum_{t \neq s}\sum a_t a_s Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s)$ จะยังคงอยู่ในสมการ ทำให้ค่าความแปรปรวนของค่าประมาณสัมประสิทธิ์การถดถอยไม่เป็นค่าที่ต่ำที่สุด ด้วยเหตุนี้ตัวประมาณด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดจึงไม่มีคุณสมบัติการเป็นตัวประมาณที่ดี ส่งผลให้ค่าประมาณและค่าการพยากรณ์ไม่มีประสิทธิภาพเพียงพอ

2. ค่าผลรวมกำลังสองของค่าคลาดเคลื่อน (SSE) = $\sum e_t^2$ อาจเป็นสาเหตุทำให้ค่าประมาณความแปรปรวนของค่าคลาดเคลื่อนมีค่าต่ำกว่าค่าความแปรปรวนของค่าคลาดเคลื่อนที่แท้จริง (Yin-Feng Gau, 2002) :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum e_t^2}{n-k}$$

โดยที่ $\hat{\sigma}^2$ เป็นค่าประมาณความแปรปรวนของ σ^2 เมื่อไม่ทราบค่า σ^2

3. ค่าประมาณความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์การถดถอย $\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}}$ เป็นค่าประมาณที่เอนเอียง และมักจะมีค่าต่ำกว่าความเป็นจริง

จาก $$\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}} = \hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}$$

จากข้างต้นทราบว่า $\hat{\sigma}^2$ มีค่าต่ำกว่าค่าความแปรปรวนของค่าคลาดเคลื่อนที่แท้จริง ส่งผลให้ค่าประมาณความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์การถดถอยมีค่าต่ำไปด้วย นอกจากนี้ยังเป็นผลให้ค่าคลาดเคลื่อนมาตรฐานของสัมประสิทธิ์การถดถอย $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}$ มีค่าน้อยมาก ดังนั้นช่วงความเชื่อมั่นแคบกว่าความเป็นจริง

4. ค่าสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ (R^2) มีค่ามากกว่าความเป็นจริง ทั้งนี้เนื่องมาจากค่าประมาณความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์การถดถอยเป็นค่าประมาณที่เอนเอียงและมักมีค่าน้อยกว่าความเป็นจริง ซึ่งชี้ให้เห็นว่า ความเหมาะสมของตัวแบบการถดถอยดีกว่าความเป็นจริง

5. ช่วงความเชื่อมั่นและการทดสอบสมมติฐานที่เกี่ยวข้องกับค่าสัมประสิทธิ์การถดถอย β_i โดยเฉพาะสถิติทดสอบ t และ F ไม่ถูกต้อง

2.4 การกำหนดตัวแบบอัตตสหสัมพันธ์ของค่าคลาดเคลื่อน

เนื่องจากค่าคลาดเคลื่อนมีอัตตสหสัมพันธ์เกิดจากหลายสาเหตุ ฉะนั้นการแก้ปัญหาจึงแตกต่างกันออกไป เช่น ถ้าเกิดจากการขาดตัวแปรสำคัญบางตัวในตัวแบบการถดถอย วิธีการแก้ไขคือ การใส่ตัวแปรนั้นเข้าไปในตัวแบบการถดถอย หรือถ้าปัญหาเกิดจากตัวแบบการถดถอยไม่เหมาะสม ก็แก้ไขโดยเปลี่ยนตัวแบบการถดถอย แต่ถ้าได้ทดสอบแล้วว่าเกิดอัตตสหสัมพันธ์จากค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการวัดค่าตัวแปรหรือเกิดอัตตสหสัมพันธ์ประเภทแท้จริง “pure autocorrelation” ผู้วิจัยจะต้องประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบด้วยวิธีการใหม่ (methods for estimating the autocorrelation parameters) วิธีการแก้ไขปัญหานี้กระทำได้หลายวิธี ในแต่ละวิธีจะมีหลักการเหมือนกันประการหนึ่งที่สำคัญ คือ ต้องคำนวณหาค่า r แล้วนำไปแปลง (transform) ตัวแปรทุกตัวเพื่อแก้ปัญหาค่าคลาดเคลื่อนมีอัตตสหสัมพันธ์ วิธีการนี้เป็นวิธีการซึ่งถูกพัฒนาขึ้นจากตัวประมาณ BLUE โดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด ซึ่งลักษณะการแปลงจะขึ้นอยู่กับโครงสร้างหรือตัวแบบอัตตสหสัมพันธ์ของค่าคลาดเคลื่อนที่กำหนดขึ้น ดังนี้

2.4.1 ตัวแบบอัตตสหสัมพันธ์การถดถอยอันดับที่ 1 : AR(1)

สำหรับ AR(1) จะกำหนดให้ ε_t มีความสัมพันธ์กันดังนี้

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t \qquad \text{โดยที่ } -1 < \rho < 1$$

เราสามารถกำหนดโครงสร้างของ ε_t ให้เป็นฟังก์ชันของ u_t โดยอาศัยการย้อนคาบเวลาลักษณะผลกระทบแบบลูกโซ่ตามวิธีของมาร์คอฟ (มนตรี พิริยะกุล, 2545) จะพบว่า

$$\begin{aligned}
\varepsilon_t &= \rho\varepsilon_{t-1} + u_t \\
\varepsilon_{t-1} &= \rho\varepsilon_{t-2} + u_{t-1} \\
\varepsilon_{t-2} &= \rho\varepsilon_{t-3} + u_{t-2} \\
\varepsilon_{t-3} &= \rho\varepsilon_{t-4} + u_{t-3} \\
&\vdots \\
\varepsilon_{t-s} &= \rho\varepsilon_{t-(s+1)} + u_{t-s}
\end{aligned}$$

ดังนั้นจากสมการ (a) แทนค่า ε_{t-1} จะได้

$$\begin{aligned}
\varepsilon_t &= \rho(\rho\varepsilon_{t-2} + u_{t-1}) + u_t \\
&= \rho^2\varepsilon_{t-2} + (\rho u_{t-1} + u_t)
\end{aligned}$$

แทนค่า ε_{t-2} จะได้

$$\begin{aligned}
\varepsilon_t &= \rho^2(\rho\varepsilon_{t-3} + u_{t-2}) + (\rho u_{t-1} + u_t) \\
&= \rho^3\varepsilon_{t-3} + (\rho^2 u_{t-2} + \rho u_{t-1} + u_t)
\end{aligned}$$

แทนค่า ε_{t-3} จะได้

$$\begin{aligned}
\varepsilon_t &= \rho^3(\rho\varepsilon_{t-4} + u_{t-3}) + (\rho^2 u_{t-2} + \rho u_{t-1} + u_t) \\
&= \rho^4\varepsilon_{t-4} + (\rho^3 u_{t-3} + \rho^2 u_{t-2} + \rho u_{t-1} + u_t)
\end{aligned}$$

แทนค่า ε_{t-s} จะได้

$$\varepsilon_t = \rho^{s+1}\varepsilon_{t-(s+1)} + (\rho^s u_{t-s} + \ldots + \rho^3 u_{t-3} + \rho^2 u_{t-2} + \rho u_{t-1} + u_t)$$

เนื่องจาก $-1 < \rho < 1$ และ $s \to \infty$ จะทำให้ $\rho^s \to 0$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\varepsilon_t &= u_t + \rho u_{t-1} + \rho^2 u_{t-2} + \rho^3 u_{t-3} + \ldots \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} \rho^s u_{t-s}
\end{aligned}$$

ค่าความคาดหวังของความคลาดเคลื่อน

จาก

$$\begin{aligned}
\varepsilon_t &= \sum_{s=0}^{\infty} \rho^s u_{t-s} \\
&= u_t + \rho u_{t-1} + \rho^2 u_{t-2} + \rho^3 u_{t-3} + \ldots
\end{aligned}$$

จะได้ $E(\varepsilon_t) = E(u_t) + \rho E(u_{t-1}) + \rho^2 E(u_{t-2}) + \rho^3 E(u_{t-3}) + \ldots$

$= 0$ เนื่องจาก $E(u_i) = 0$ สำหรับทุกค่าของ i

ค่าความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน

จาก $\varepsilon_t = \sum_{s=0}^{\infty} \rho^s u_{t-s}$

จะพบว่า

$$E(\varepsilon_t^2) = E\left(\sum_{s=0}^{\infty} \rho^s u_{t-s}\right)^2$$

$$= E\,(u_t + \rho u_{t-1} + \rho^2 u_{t-2} + \rho^3 u_{t-3} + \ldots)^2$$

$$= E\,[(u_t^2 + \rho^2 u_{t-1}^2 + \rho^4 u_{t-2}^2 + \ldots) + (2\rho \mathrm{u}_t \mathrm{u}_{t-1} + 2\rho^2 \mathrm{u}_t \mathrm{u}_{t-2} + \ldots)]$$

เนื่องจาก $E(u_t^2) = \sigma_u^2$ และ $E(u_t u_{t-1}) = 0 \quad ; s > 0$

ดังนั้น $V(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = (u_t^2 + \rho^2 u_{t-1}^2 + \rho^4 u_{t-2}^2 + \ldots) + 0$

$$= \sigma_u^2 (1 + \rho^2 + \rho^4 + \rho^6 + \ldots)$$

$$= \frac{\sigma_u^2}{1 - \rho^2} \qquad , |\rho| < 1$$

การแปลงตัวแปรเพื่อแก้ปัญหาค่าคลาดเคลื่อนมีอัตตสหสัมพันธ์

พิจารณาตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นแบบพหุคูณ (1) ดังนี้

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \beta_2 X_{t2} + \beta_3 X_{t3} + \beta_4 X_{t4} + \varepsilon_t$$

จากการกำหนดตัวแบบ จะได้ว่าตัวแบบเชิงเส้นมีช่วงเวลาก่อนหน้าทั้งหมด 1 ช่วงเวลา ดังนี้

$$Y_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 X_{t-1,1} + \beta_2 X_{t-1,2} + \beta_3 X_{t-1,3} + \beta_4 X_{t-1,4} + \varepsilon_{t-1} \qquad (2)$$

นำสมการ (2) คูณด้วย ρ จะได้

$$\rho Y_{t-1} = \rho\beta_0 + \rho\beta_1 X_{t-1,1} + \rho\beta_2 X_{t-1,2} + \rho\beta_3 X_{t-1,3} + \rho\beta_4 X_{t-1,4} + \rho\varepsilon_{t-1} \qquad (3)$$

นำสมการ (3) ลบออกจากสมการ (1) ดังนี้

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = (\beta_0 - \rho\beta_0) + (\beta_1 X_{t1} - \rho\beta_1 X_{t-1,1}) + (\beta_2 X_{t2} - \rho\beta_2 X_{t-1,2}) + (\beta_3 X_{t3} - \rho\beta_3 X_{t-1,3}) + (\beta_4 X_{t4} - \rho\beta_4 X_{t-1,4}) + (\varepsilon_t - \rho\varepsilon_{t-1})$$
$$= \beta_0(1-\rho) + \beta_1(X_{t1} - \rho X_{t-1,1}) + \beta_2(X_{t2} - \rho X_{t-1,2}) + \beta_3(X_{t3} - \rho X_{t-1,3}) + \beta_4(X_{t4} - \rho X_{t-1,4}) + (\varepsilon_t - \rho\varepsilon_{t-1})$$

ดังนั้นจะได้สมการการแปลงเป็น

$$Y_t^* = \beta_0^* + \beta_1 X_{t1}^* + \beta_2 X_{t2}^* + \beta_3 X_{t3}^* + \beta_4 X_{t4}^* + u_t \qquad (4)$$

โดยที่

$$Y_t^* = Y_t - \rho Y_{t-1}$$
$$X_{t1}^* = X_{t1} - \rho X_{t-1,1}$$
$$X_{t2}^* = X_{t2} - \rho X_{t-1,2}$$
$$X_{t3}^* = X_{t3} - \rho X_{t-1,3}$$
$$X_{t4}^* = X_{t4} - \rho X_{t-1,4}$$
$$\beta_0^* = \beta_0(1-\rho)$$
$$u_t = \varepsilon_t - \rho\varepsilon_{t-1}$$

ได้สมการพยากรณ์ของตัวแปรการแปลงเป็น

$$\hat{Y}_t^* = \hat{\beta}_0^* + \hat{\beta}_1 X_{t1}^* + \hat{\beta}_2 X_{t2}^* + \hat{\beta}_3 X_{t3}^* + \hat{\beta}_4 X_{t4}^* \qquad (5)$$

ถ้าตัวแบบการถดถอยเหมาะสม กล่าวคือ ไม่มีอัตตสหสัมพันธ์ จะสามารถแปลงสมการพยากรณ์กลับเป็นสมการพยากรณ์ของตัวแปรเริ่มต้นดังนี้

$$\hat{Y}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{t1} + \hat{\beta}_2 X_{t2} + \hat{\beta}_3 X_{t3} + \hat{\beta}_4 X_{t4} \qquad (6)$$

โดยที่ $\hat{\beta}_0 = \dfrac{\beta_0^*}{1-r}$

2.4.2 ตัวแบบอัตตสหสัมพันธ์การถดถอยอันดับที่ 2 : AR(2)

จากสมการ $\varepsilon_t = \rho_1\varepsilon_{t-1} + \rho_2\varepsilon_{t-2} + u_t$ ………………(b)

โดยกระบวนการนี้จะคงที่ (Stationary) เมื่อ $\rho_1 + \rho_2 < 1, \rho_2 - \rho_1 < 1$ และ $-1 < \rho_2 < 1$

การหาค่าความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน

จากสมการ $(b)\times\varepsilon_{t-1}$ จะได้

$$\varepsilon_t\varepsilon_{t-1} = \rho_1\varepsilon_{t-1}^2 + \rho_2\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2} + u_t\varepsilon_{t-1}$$
$$E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}) = \rho_1 E(\varepsilon_{t-1}^2) + \rho_2 E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2}) + E(u_t\varepsilon_{t-1})$$
$$\upsilon_1 = \rho_1\upsilon_0 + \rho_2\upsilon_1 + 0$$
$$\phi_1 = \rho_1 + \rho_2\phi_1$$
$$\therefore \phi_1 = \frac{\rho_1}{1-\rho_2}$$

เมื่อ υ_s คือ ความแปรปรวนร่วมที่เวลา t และ $t-s$

และ ϕ คือสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ในตัวเอง โดยที่ $\phi_s = \dfrac{\upsilon_s}{\upsilon_0}$

จากสมการ $(\mathrm{b})\times\varepsilon_{t-2}$ จะได้

$$\varepsilon_t\varepsilon_{t-2} = \rho_1\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2} + \rho_2\varepsilon_{t-2}^2 + u_t\varepsilon_{t-2}$$
$$E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-2}) = \rho_1 E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2}) + \rho_2 E(\varepsilon_{t-2}^2) + E(u_t\varepsilon_{t-2})$$
$$\upsilon_2 = \rho_1\upsilon_1 + \rho_2\upsilon_0 + 0$$
$$\phi_2 = \rho_1\phi_1 + \rho_2$$

แทนค่า ϕ_1

$$\phi_2 = \rho_1\left(\frac{\rho_1}{1-\rho_2}\right) + \rho_2 = \frac{\rho_1^2}{1-\rho_2} + \rho_2$$

จากสมการ $(b)\times\varepsilon_t$ จะได้

$$\varepsilon_t\varepsilon_t = \rho_1\varepsilon_t\varepsilon_{t-1} + \rho_2\varepsilon_t\varepsilon_{t-2} + u_t\varepsilon_t$$
$$E(\varepsilon_t\varepsilon_t) = \rho_1 E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}) + \rho_2 E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-2}) + E(u_t\varepsilon_t)$$
$$E(\varepsilon_t\varepsilon_t) = \rho_1 E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}) + \rho_2 E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-2}) + E[u_t(\rho_1\varepsilon_{t-1} + \rho_2\varepsilon_{t-2} + u_t)]$$
$$\upsilon_0 = \rho_1\upsilon_1 + \rho_2\upsilon_2 + \sigma_u^2$$
$$1 = \rho_1\phi_1 + \rho_2\phi_2 + \frac{\sigma_u^2}{\upsilon_0}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\sigma_\varepsilon^2 = \upsilon_0 = \frac{\sigma_u^2}{1-\rho_1\left(\dfrac{\rho_1}{1-\rho_2}\right)-\rho_2\left(\dfrac{\rho_1^2}{1-\rho_2}+\rho_2\right)}$$

$$\mathrm{V}(\varepsilon_\mathrm{t}) = \frac{\sigma_\mathrm{u}^2}{\dfrac{1-\rho_2-\rho_1^2-\rho_2^2+\rho_2^3-\rho_1^2\rho_2}{1-\rho_2}}$$

$$= \frac{(1-\rho_2)\sigma_\mathrm{u}^2}{(1-\rho_2)-\rho_2^2(1-\rho_2)-\rho_1^2(1+\rho_2)}$$

$$= \frac{(1-\rho_2)\sigma_\mathrm{u}^2}{(1-\rho_2)(1-\rho_2^2)-\rho_1^2(1+\rho_2)}$$

$$= \frac{(1-\rho_2)\sigma_\mathrm{u}^2}{(1-\rho_2)^2(1+\rho_2)-\rho_1^2(1+\rho_2)}$$

$$= \frac{(1-\rho_2)\sigma_\mathrm{u}^2}{(1+\rho_2)[(1-\rho_2)^2-\rho_1^2]}$$

$$= \frac{(1-\rho_2)\sigma_\mathrm{u}^2}{(1+\rho_2)(1-\rho_2-\rho_1)(1-\rho_2+\rho_1)}$$

เนื่องจาก σ_ε^2 มีค่าเป็นบวก

$$\therefore -1<\rho_2<1$$
$$\rho_2+\rho_1<1$$
$$\rho_2-\rho_1<1$$

ดังนั้นค่าความแปรปรวนของค่าคลาดเคลื่อนเป็นดังนี้

$$V(\varepsilon_t) = \frac{(1-\rho_2)\sigma_u^2}{(1+\rho_2)(1-\rho_2-\rho_1)(1-\rho_2+\rho_1)}$$

การแปลงตัวแปรเพื่อแก้ปัญหาค่าคลาดเคลื่อนมีอัตตสหสัมพันธ์

จากตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นแบบพหุคูณเริ่มต้น (1)

และจากการกำหนดตัวแบบความสัมพันธ์ของค่าคลาดเคลื่อน จะได้ว่าตัวแบบเชิงเส้นมีช่วงเวลาก่อนหน้าทั้งหมด 2 ช่วงเวลาดังนี้

$$Y_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 X_{t-1,1} + \beta_2 X_{t-1,2} + \beta_3 X_{t-1,3} + \beta_4 X_{t-1,4} + \varepsilon_{t-1} \tag{7}$$

$$Y_{t-2} = \beta_0 + \beta_1 X_{t-2,1} + \beta_2 X_{t-2,2} + \beta_3 X_{t-2,3} + \beta_4 X_{t-2,4} + \varepsilon_{t-2} \tag{8}$$

นำสมการ (7) และ (8) คูณด้วย ρ_1 และ ρ_2 ตามลำดับ จะได้

$$\rho_1 Y_{t-1} = \rho_1\beta_0 + \rho_1\beta_1 X_{t-1,1} + \rho_1\beta_2 X_{t-1,2} + \rho_1\beta_3 X_{t-1,3} + \rho_1\beta_4 X_{t-1,4} + \rho_1\varepsilon_{t-1} \tag{9}$$

$$\rho_2 Y_{t-2} = \rho_2\beta_0 + \rho_2\beta_1 X_{t-2,1} + \rho_2\beta_2 X_{t-2,2} + \rho_2\beta_3 X_{t-2,3} + \rho_2\beta_4 X_{t-2,4} + \rho_2\varepsilon_{t-2} \tag{10}$$

นำสมการ (9) และ (10) ลบออกจากตัวแบบถดถอยเริ่มต้น (1) ดังนี้

$$\begin{aligned}
Y_t - \rho_1 Y_{t-1} - \rho_2 Y_{t-2} &= (\beta_0 - \rho_1\beta_0 - \rho_2\beta_0) + (\beta_1 X_{t1} - \rho_1\beta_1 X_{t-1,1} - \rho_2\beta_1 X_{t-2,1}) \\
&\quad + (\beta_2 X_{t2} - \rho_1\beta_2 X_{t-1,2} - \rho_2\beta_2 X_{t-2,2}) \\
&\quad + (\beta_3 X_{t3} - \rho_1\beta_3 X_{t-1,3} - \rho_2\beta_3 X_{t-2,3}) \\
&\quad + (\beta_4 X_{t4} - \rho_1\beta_4 X_{t-1,4} - \rho_2\beta_4 X_{t-2,4}) + (\varepsilon_t - \rho_1\varepsilon_{t-1} - \rho_2\varepsilon_{t-2}) \\
&= \beta_0(1 - \rho_1 - \rho_2) + \beta_1(X_{t1} - \rho_1 X_{t-1,1} - \rho_2 X_{t-2,1}) \\
&\quad + \beta_2(X_{t2} - \rho_1 X_{t-1,2} - \rho_2 X_{t-2,2}) + \beta_3(X_{t3} - \rho_1 X_{t-1,3} - \rho_2 X_{t-2,3}) \\
&\quad + \beta_4(X_{t4} - \rho_1 X_{t-1,4} - \rho_2 X_{t-2,4}) + (\varepsilon_t - \rho_1\varepsilon_{t-1} - \rho_2\varepsilon_{t-2})
\end{aligned}$$

ดังนั้นสมการแปลงเป็นดังนี้

$$Y_t^* = \beta_0^* + \beta_1 X_{t1}^* + \beta_2 X_{t2}^* + \beta_3 X_{t3}^* + \beta_4 X_{t4}^* + u_t \tag{11}$$

โดยที่

$$\begin{aligned}
Y_t^* &= Y_t - \rho_1 Y_{t-1} - \rho_2 Y_{t-2} \\
X_{t1}^* &= X_{t1} - \rho_1 X_{t-1,1} - \rho_2 X_{t-2,1} \\
X_{t2}^* &= X_{t2} - \rho_1 X_{t-1,2} - \rho_2 X_{t-2,2} \\
X_{t3}^* &= X_{t3} - \rho_1 X_{t-1,3} - \rho_2 X_{t-2,3} \\
X_{t4}^* &= X_{t4} - \rho_1 X_{t-1,4} - \rho_2 X_{t-2,4} \\
\beta_0^* &= \beta_0(1 - \rho_1 - \rho_2) \\
u_t &= \varepsilon_t - \rho_1\varepsilon_{t-1} - \rho_2\varepsilon_{t-2}
\end{aligned}$$

ได้สมการพยากรณ์ของตัวแปรการแปลงเป็น

$$\hat{Y}_t^* = \hat{\beta}_0^* + \hat{\beta}_1 X_{t1}^* + \hat{\beta}_2 X_{t2}^* + \hat{\beta}_3 X_{t3}^* + \hat{\beta}_4 X_{t4}^* \quad (12)$$

ถ้าตัวแบบการถดถอยเหมาะสม กล่าวคือ ไม่มีอัตตสหสัมพันธ์ จะสามารถแปลงสมการพยากรณ์กลับเป็นสมการพยากรณ์ของตัวแปรเริ่มต้นดังนี้

$$\hat{Y}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{t1} + \hat{\beta}_2 X_{t2} + \hat{\beta}_3 X_{t3} + \hat{\beta}_4 X_{t4} \quad (13)$$

โดยที่ $$\hat{\beta}_0 = \frac{\hat{\beta}_0^*}{1 - r_1 - r_2}$$

2.4.3 ตัวแบบอัตตสหสัมพันธ์การถดถอยอันดับที่ 3 : AR(3)

สำหรับ AR(3) จะกำหนดตัวแบบความสัมพันธ์ของ ε_t เป็นดังนี้

$$\varepsilon_t = \rho_1 \varepsilon_{t-1} + \rho_2 \varepsilon_{t-2} + \rho_3 \varepsilon_{t-3} + u_t \quad \text{..................(c)}$$

โดยกระบวนการนี้จะคงที่ (Stationary) เมื่อ $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 < 1, -\rho_1 + \rho_2 - \rho_3 < 1$, $\rho_3(\rho_3 - \rho_1) - \rho_2 < 1$ และ $-1 < \rho_3 < 1$ ซึ่งสามารถแสดงได้โดยประยุกต์ใช้ทฤษฎี Classical control ของ Routh - Harwitz criterion (ดูภาคผนวก ข) ดังตาราง (Sudhakar M. Pandit and Shien-Ming Wu, 1983)

ตาราง 2.1 แสดงค่าพารามิเตอร์สำหรับการหาเงื่อนไขความคงที่ของตัวแบบอัตตสหสัมพันธ์การถดถอยอันดับที่ 3

แถว	พารามิเตอร์			
1	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3
2	ρ_3	ρ_2	ρ_1	ρ_0
3	a_0	a_1	a_2	

เงื่อนไข $i)$ $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 < 1$

$ii)$ $-\rho_1 + \rho_2 - \rho_3 < 1$

$iii)$ $|\rho_3| < 1$

$|a_2| < |a_0|$

$$a_0 = \begin{vmatrix} \rho_0 & \rho_3 \\ \rho_3 & \rho_0 \end{vmatrix} = \rho_0^2 - \rho_3^2 = (-1)(-1) - \rho_3^2 = 1 - \rho_3^2$$

$$a_2 = \begin{vmatrix} \rho_0 & \rho_1 \\ \rho_3 & \rho_2 \end{vmatrix} = \rho_0 \rho_2 - \rho_1 \rho_3 = -\rho_2 - \rho_1 \rho_3$$

$$\therefore -\rho_2 - \rho_1 \rho_3 < 1 - \rho_3^2$$

$$-\rho_2 - \rho_1 \rho_3 + \rho_3^2 < 1$$

$$\rho_3(\rho_3 - \rho_1) - \rho_2 < 1$$

การหาค่าความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน

จากสมการ $(c) \times \varepsilon_{t-1}$ จะได้

$$\varepsilon_t \varepsilon_{t-1} = \rho_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \rho_2 \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2} + \rho_3 \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-3} + u_t \varepsilon_{t-1}$$

$$E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) = \rho_1 E(\varepsilon_{t-1}^2) + \rho_2 E(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2}) + \rho_3 E(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-3}) + E(u_t \varepsilon_{t-1})$$

$$\upsilon_1 = \rho_1 \upsilon_0 + \rho_2 \upsilon_1 + \rho_3 \upsilon_2 + 0$$

$$\phi_1 = \rho_1 + \rho_2 \phi_1 + \rho_3 \phi_2$$

$$\therefore \phi_2 = \frac{\phi_1 - \rho_1 - \rho_2 \phi_1}{\rho_3}$$

เมื่อ υ_s คือ ความแปรปรวนร่วมที่เวลา t และ $t - s$

และ ϕ คือสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ในตัวเอง โดยที่ $\phi_s = \dfrac{\upsilon_s}{\upsilon_0}$

จากสมการ $(c) \times \varepsilon_{t-2}$ จะได้

$$\varepsilon_t \varepsilon_{t-2} = \rho_1 \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2} + \rho_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \rho_3 \varepsilon_{t-2} \varepsilon_{t-3} + u_t \varepsilon_{t-2}$$

$$E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-2}) = \rho_1 E(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2}) + \rho_2 E(\varepsilon_{t-2}^2) + \rho_3 E(\varepsilon_{t-2} \varepsilon_{t-3}) + E(u_t \varepsilon_{t-2})$$

$$\upsilon_2 = \rho_1 \upsilon_1 + \rho_2 \upsilon_0 + \rho_3 \upsilon_1 + 0$$

$$\phi_2 = \rho_1 \phi_1 + \rho_2 + \rho_3 \phi_1$$

แทนค่า ϕ_2 จะได้

$$\frac{\phi_1 - \rho_1 - \rho_2 \phi_1}{\rho_3} = \rho_1 \phi_1 + \rho_2 + \rho_3 \phi_1$$

$$\phi_1 - \rho_1 - \rho_2 \phi_1 = \rho_1 \rho_3 \phi_1 + \rho_2 \rho_3 + \rho_3^2 \phi_1$$

$$\phi_1 - \rho_2 \phi_1 - \rho_1 \rho_3 \phi_1 - \rho_3^2 \phi_1 = \rho_1 + \rho_2 \rho_3$$

$$\therefore \phi_1 = \frac{\rho_1 + \rho_2 \rho_3}{1 - \rho_2 - \rho_1 \rho_3 - \rho_3^2}$$

แทนค่า ϕ_1

$$\phi_2 = \rho_1\left(\frac{\rho_1+\rho_2\rho_3}{1-\rho_2-\rho_1\rho_3-\rho_3^2}\right)+\rho_2+\rho_3\left(\frac{\rho_1+\rho_2\rho_3}{1-\rho_2-\rho_1\rho_3-\rho_3^2}\right)$$

$$= \frac{\rho_1(\rho_1+\rho_2\rho_3)+\rho_2(1-\rho_2-\rho_1\rho_3-\rho_3^2)+\rho_3(\rho_1+\rho_2\rho_3)}{1-\rho_2-\rho_1\rho_3-\rho_3^2}$$

$$= \frac{\rho_1^2+\rho_1\rho_2\rho_3+\rho_2-\rho_2^2-\rho_1\rho_2\rho_3-\rho_2\rho_3^2+\rho_1\rho_3+\rho_2\rho_3^2}{1-\rho_2-\rho_1\rho_3-\rho_3^2}$$

$$= \frac{\rho_1^2+\rho_2-\rho_2^2+\rho_1\rho_3}{1-\rho_2-\rho_1\rho_3-\rho_3^2}$$

จากสมการ $(c)\times\varepsilon_{t-3}$ จะได้

$$\varepsilon_t\varepsilon_{t-3} = \rho_1\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-3}+\rho_2\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-3}+\rho_3\varepsilon_{t-3}^2+u_t\varepsilon_{t-3}$$

$$E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-3}) = \rho_1E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-3})+\rho_2E(\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-3})+\rho_3E(\varepsilon_{t-3}^2)+E(u_t\varepsilon_{t-3})$$

$$\upsilon_3 = \rho_1\upsilon_2+\rho_2\upsilon_1+\rho_3\upsilon_0$$

$$\phi_3 = \rho_1\phi_2+\rho_2\phi_1+\rho_3$$

แทนค่า ϕ_1 และ ϕ_2

$$\therefore \phi_3 = \rho_1\left(\frac{\rho_1^2+\rho_2-\rho_2^2+\rho_1\rho_3}{1-\rho_2-\rho_1\rho_3-\rho_3^2}\right)+\rho_2\left(\frac{\rho_1+\rho_2\rho_3}{1-\rho_2-\rho_1\rho_3-\rho_3^2}\right)+\rho_3$$

$$= \frac{\rho_1^3+\rho_1\rho_2-\rho_1\rho_2^2+\rho_1^2\rho_3+\rho_1\rho_2+\rho_2^2\rho_3+\rho_3-\rho_2\rho_3-\rho_1\rho_3^2-\rho_3^3}{1-\rho_2-\rho_1\rho_3-\rho_3^2}$$

$$= \frac{\rho_1^3+2\rho_1\rho_2-\rho_1\rho_2^2+\rho_1^2\rho_3+\rho_2^2\rho_3+\rho_3-\rho_2\rho_3-\rho_1\rho_3^2-\rho_3^3}{1-\rho_2-\rho_1\rho_3-\rho_3^2}$$

$$= \frac{\rho_1(\rho_1^2-\rho_3^2)-\rho_2^2(\rho_1-\rho_3)+\rho_3(\rho_1^2-\rho_3^2)+2\rho_1\rho_2-\rho_2\rho_3+\rho_3}{1-\rho_2-\rho_1\rho_3-\rho_3^2}$$

$$= \frac{(\rho_1+\rho_3)(\rho_1^2-\rho_3^2)-\rho_2^2(\rho_1-\rho_3)+2\rho_1\rho_2-\rho_2\rho_3+\rho_3}{1-\rho_2-\rho_1\rho_3-\rho_3^2}$$

$$\phi_3 = \frac{(\rho_1+\rho_3)^2(\rho_1-\rho_3)-\rho_2^2(\rho_1-\rho_3)+2\rho_1\rho_2-\rho_2\rho_3+\rho_3}{1-\rho_2-\rho_1\rho_3-\rho_3^2}$$

$$= \frac{(\rho_1-\rho_3)\left[(\rho_1+\rho_3)^2-\rho_2^2\right]+2\rho_1\rho_2-\rho_2\rho_3+\rho_3}{1-\rho_2-\rho_1\rho_3-\rho_3^2}$$

$$= \frac{(\rho_1-\rho_3)(\rho_1-\rho_2+\rho_3)(\rho_1+\rho_2+\rho_3)+2\rho_1\rho_2-\rho_2\rho_3+\rho_3}{1-\rho_2-\rho_1\rho_3-\rho_3^2}$$

หาค่า υ_0 จากสมการ $(c)\times\varepsilon_t$ จะได้

$$\begin{aligned}
\varepsilon_t\varepsilon_t &= \rho_1\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}+\rho_2\varepsilon_t\varepsilon_{t-2}+\rho_3\varepsilon_t\varepsilon_{t-3}+u_t\varepsilon_t \\
E(\varepsilon_t\varepsilon_t) &= \rho_1E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1})+\rho_2E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-2})+\rho_3E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-3})+E(u_t\varepsilon_t) \\
E(\varepsilon_t\varepsilon_t) &= \rho_1E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1})+\rho_2E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-2})+\rho_3E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-3})+E[u_t(\rho_1\varepsilon_{t-1}+\rho_2\varepsilon_{t-2}+\rho_3\varepsilon_{t-3}+u_t)] \\
\upsilon_0 &= \rho_1\upsilon_1+\rho_2\upsilon_2+\rho_3\upsilon_3+\sigma_u^2 \\
1 &= \rho_1\phi_1+\rho_2\phi_2+\rho_3\phi_3+\frac{\sigma_u^2}{\upsilon_0}
\end{aligned}$$

จาก $\frac{\sigma_u^2}{\upsilon_0} = 1-\rho_1\phi_1-\rho_2\phi_2-\rho_3\phi_3$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\therefore \sigma_\varepsilon^2 = \upsilon_0 = \frac{\sigma_u^2}{1-\rho_1\phi_1-\rho_2\phi_2-\rho_3\phi_3}$$

พิจารณา $1-\rho_1\phi_1-\rho_2\phi_2-\rho_3\phi_3$ แล้วแทนค่า ϕ_1,ϕ_2,ϕ_3 จะได้

$$1-\rho_1\phi_1-\rho_2\phi_2-\rho_3\phi_3$$

$$=1-\rho_1\left(\frac{\rho_1+\rho_2\rho_3}{1-\rho_2-\rho_1\rho_3-\rho_3^2}\right)-\rho_2\left(\frac{\rho_1^2+\rho_2-\rho_2^2+\rho_1\rho_3}{1-\rho_2-\rho_1\rho_3-\rho_3^2}\right)$$

$$-\rho_3\left(\frac{((\rho_1-\rho_3)(\rho_1-\rho_2+\rho_3)(\rho_1+\rho_2+\rho_3)+2\rho_1\rho_2-\rho_2\rho_3+\rho_3)}{1-\rho_2-\rho_1\rho_3-\rho_3^2}\right)$$

$$=\left[\begin{array}{l}(1-\rho_2-\rho_1\rho_3-\rho_3^2)-\rho_1(\rho_1+\rho_2\rho_3)-\rho_2(\rho_1^2-\rho_2^2+\rho_2+\rho_1\rho_3)\\ -\rho_3(\rho_1(\rho_1^2-\rho_2^2)+2\rho_1\rho_2+\rho_1^2\rho_3+\rho_2^2\rho_3+\rho_3-\rho_2\rho_3-\rho_1\rho_3^2-\rho_3^3)\end{array}\right]\Big/(1-\rho_2-\rho_1\rho_3-\rho_3^2)$$

$$=\left[\begin{array}{l}1-\rho_2-\rho_1\rho_3-\rho_3^2-\rho_1^2-\rho_1\rho_2\rho_3-\rho_2(\rho_1^2-\rho_2^2)-\rho_2^2-\rho_1\rho_2\rho_3\\ -\rho_1\rho_3(\rho_1^2-\rho_2^2)-2\rho_1\rho_2\rho_3-\rho_1^2\rho_3^2-\rho_2^2\rho_3^2-\rho_3^2+\rho_2\rho_3^2+\rho_1\rho_3^3+\rho_3^4\end{array}\right]\Big/(1-\rho_2-\rho_1\rho_3-\rho_3^2)$$

$$=\left[\begin{array}{l}1-\rho_2-\rho_1\rho_3-\rho_3^2-(\rho_1^2+\rho_2^2)-(\rho_1^2-\rho_2^2)(\rho_2+\rho_1\rho_3)\\ -(\rho_1^2\rho_3^2+\rho_2^2\rho_3^2)+(\rho_2\rho_3^2+\rho_1\rho_3^3)-4\rho_1\rho_2\rho_3-\rho_3^2+\rho_3^4\end{array}\right]\Big/(1-\rho_2-\rho_1\rho_3-\rho_3^2)$$

$$=\left[\begin{array}{l}1-\rho_2-\rho_1\rho_3-\rho_3^2-(\rho_1^2+\rho_2^2)-(\rho_1^2-\rho_2^2)(\rho_2+\rho_1\rho_3)\\ -\rho_3^2(\rho_1^2+\rho_2^2)+\rho_3^2(\rho_2+\rho_1\rho_3)-4\rho_1\rho_2\rho_3-\rho_3^2+\rho_3^4\end{array}\right]\Big/(1-\rho_2-\rho_1\rho_3-\rho_3^2)$$

$$=\left[\begin{array}{l}1-\rho_2-\rho_1\rho_3-\rho_3^2-(\rho_1^2+\rho_2^2)(1+\rho_3^2)-(\rho_1^2-\rho_2^2)(\rho_2+\rho_1\rho_3)\\ +\rho_3^2(\rho_2+\rho_1\rho_3)-4\rho_1\rho_2\rho_3-\rho_3^2+\rho_3^4\end{array}\right]\Big/(1-\rho_2-\rho_1\rho_3-\rho_3^2)$$

$$=\left[\begin{array}{l}(1-\rho_2-\rho_1\rho_3-\rho_3^2)-(\rho_1^2+\rho_2^2)(1+\rho_3^2)-(\rho_1^2-\rho_2^2)(\rho_2+\rho_1\rho_3)\\ +\rho_3^2(\rho_2+\rho_1\rho_3)-4\rho_1\rho_2\rho_3-\rho_3^2(1-\rho_3^2)\end{array}\right]\Big/(1-\rho_2-\rho_1\rho_3-\rho_3^2)$$

$$=\left[\begin{array}{l}(1-\rho_2-\rho_1\rho_3-\rho_3^2)-(\rho_1^2+\rho_2^2)(1+\rho_3^2)-(\rho_1^2-\rho_2^2)(\rho_2+\rho_1\rho_3)\\ -\rho_3^2(1-\rho_2-\rho_1\rho_3-\rho_3^2)-4\rho_1\rho_2\rho_3\end{array}\right]\Big/(1-\rho_2-\rho_1\rho_3-\rho_3^2)$$

$$=\left[\begin{array}{l}(1-\rho_3^2)(1-\rho_2-\rho_1\rho_3-\rho_3^2)-(\rho_1^2+\rho_2^2)(1+\rho_3^2)\\ -(\rho_1^2-\rho_2^2)(\rho_2+\rho_1\rho_3)-4\rho_1\rho_2\rho_3\end{array}\right]\Big/(1-\rho_2-\rho_1\rho_3-\rho_3^2)$$

ดังนั้นค่าความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน เป็นดังนี้

$$V(\varepsilon_t) = \frac{(1-\rho_2-\rho_1\rho_3-\rho_3^2)\,\sigma_u^2}{(1-\rho_3^2)(1-\rho_2-\rho_1\rho_3-\rho_3^2)-(\rho_1^2+\rho_2^2)(1+\rho_3^2)-(\rho_1^2-\rho_2^2)(\rho_2+\rho_1\rho_3)-4\rho_1\rho_2\rho_3}$$

การแปลงตัวแปรเพื่อแก้ปัญหาค่าคลาดเคลื่อนมีอัตตสหสัมพันธ์

จากการกำหนดสมการถดถอยเริ่มต้น จะได้ว่าตัวแบบเชิงเส้นมีช่วงเวลาก่อนหน้าทั้งหมด 3 ช่วงเวลา จะได้ตัวแบบเชิงเส้นทั้งหมดดังนี้

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \beta_2 X_{t2} + \beta_3 X_{t3} + \beta_4 X_{t4} + \varepsilon_t$$

$$Y_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 X_{t-1,1} + \beta_2 X_{t-1,2} + \beta_3 X_{t-1,3} + \beta_4 X_{t-1,4} + \varepsilon_{t-1} \tag{14}$$

$$Y_{t-2} = \beta_0 + \beta_1 X_{t-2,1} + \beta_2 X_{t-2,2} + \beta_3 X_{t-2,3} + \beta_4 X_{t-2,4} + \varepsilon_{t-2} \tag{15}$$

$$Y_{t-3} = \beta_0 + \beta_1 X_{t-3,1} + \beta_2 X_{t-3,2} + \beta_3 X_{t-3,3} + \beta_4 X_{t-3,4} + \varepsilon_{t-3} \tag{16}$$

นำสมการ (14), (15) และ (16) คูณด้วย ρ_1, ρ_2 และ ρ_3 ตามลำดับ ดังนี้

$$\rho_1 Y_{t-1} = \rho_1\beta_0 + \rho_1\beta_1 X_{t-1,1} + \rho_1\beta_2 X_{t-1,2} + \rho_1\beta_3 X_{t-1,3} + \rho_1\beta_4 X_{t-1,4} + \rho_1\varepsilon_{t-1} \tag{17}$$

$$\rho_2 Y_{t-2} = \rho_2\beta_0 + \rho_2\beta_1 X_{t-2,1} + \rho_2\beta_2 X_{t-2,2} + \rho_2\beta_3 X_{t-2,3} + \rho_2\beta_4 X_{t-2,4} + \rho_2\varepsilon_{t-2} \tag{18}$$

$$\rho_3 Y_{t-3} = \rho_3\beta_0 + \rho_3\beta_1 X_{t-3,1} + \rho_3\beta_2 X_{t-3,2} + \rho_3\beta_3 X_{t-3,3} + \rho_3\beta_4 X_{t-3,4} + \rho_3\varepsilon_{t-3} \tag{19}$$

จากตัวแบบถดถอยเริ่มต้น (1) ลบออกด้วยสมการ (17), (18) และ (19) ตามลำดับ

$$\begin{aligned}
Y_t - \rho_1 Y_{t-1} - \rho_2 Y_{t-2} - \rho_3 Y_{t-3} &= (\beta_0 - \rho_1\beta_0 - \rho_2\beta_0 - \rho_3\beta_0) \\
&\quad + (\beta_1 X_{t1} - \rho_1\beta_1 X_{t-1,1} - \rho_2\beta_1 X_{t-2,1} - \rho_3\beta_1 X_{t-3,1}) \\
&\quad + (\beta_2 X_{t2} - \rho_1\beta_2 X_{t-1,2} - \rho_2\beta_2 X_{t-2,2} - \rho_3\beta_2 X_{t-3,2}) \\
&\quad + (\beta_3 X_{t3} - \rho_1\beta_3 X_{t-1,3} - \rho_2\beta_3 X_{t-2,3} - \rho_3\beta_3 X_{t-3,3}) \\
&\quad + (\beta_4 X_{t4} - \rho_1\beta_4 X_{t-1,4} - \rho_2\beta_4 X_{t-2,4} - \rho_3\beta_4 X_{t-3,4}) \\
&\quad + (\varepsilon_t - \rho_1\varepsilon_{t-1} - \rho_2\varepsilon_{t-2} - \rho_3\varepsilon_{t-3}) \\
&= \beta_0(1-\rho_1-\rho_2-\rho_3) + \beta_1(X_{t1} - \rho_1 X_{t-1,1} - \rho_2 X_{t-2,1} - \rho_3 X_{t-3,1}) \\
&\quad + \beta_2(X_{t2} - \rho_1 X_{t-1,2} - \rho_2 X_{t-2,2} - \rho_3 X_{t-3,2}) \\
&\quad + \beta_3(X_{t3} - \rho_1 X_{t-1,3} - \rho_2 X_{t-2,3} - \rho_3 X_{t-3,3}) \\
&\quad + \beta_3(X_{t4} - \rho_1 X_{t-1,4} - \rho_2 X_{t-2,4} - \rho_3 X_{t-3,4}) \\
&\quad + (\varepsilon_t - \rho_1\varepsilon_{t-1} - \rho_2\varepsilon_{t-2} - \rho_3\varepsilon_{t-3})
\end{aligned}$$

ดังนั้นสมการแปลงเป็นดังนี้

$$Y_t^* = \beta_0^* + \beta_1 X_{t1}^* + \beta_2 X_{t2}^* + \beta_3 X_{t3}^* + \beta_4 X_{t4}^* + u_t \tag{20}$$

โดยที่

$$Y_t^* = Y_t - \rho_1 Y_{t-1} - \rho_2 Y_{t-2} - \rho_3 Y_{t-3}$$
$$X_{t1}^* = X_{t1} - \rho_1 X_{t-1,1} - \rho_2 X_{t-2,1} - \rho_3 X_{t-3,1}$$
$$X_{t2}^* = X_{t2} - \rho_1 X_{t-1,2} - \rho_2 X_{t-2,2} - \rho_3 X_{t-3,2}$$
$$X_{t3}^* = X_{t3} - \rho_1 X_{t-1,3} - \rho_2 X_{t-2,3} - \rho_3 X_{t-3,3}$$
$$X_{t4}^* = X_{t4} - \rho_1 X_{t-1,4} - \rho_2 X_{t-2,4} - \rho_3 X_{t-3,4}$$
$$\beta_0^* = \beta_0(1 - \rho_1 - \rho_2 - \rho_3)$$
$$u_t = \varepsilon_t - \rho_1 \varepsilon_{t-1} - \rho_2 \varepsilon_{t-2} - \rho_3 \varepsilon_{t-3}$$

ได้สมการพยากรณ์ของตัวแปรการแปลงเป็น

$$\hat{Y}_t^* = \hat{\beta}_0^* + \hat{\beta}_1 X_{t1}^* + \hat{\beta}_2 X_{t2}^* + \hat{\beta}_3 X_{t3}^* + \hat{\beta}_4 X_{t4}^* \qquad (21)$$

ถ้าตัวแบบการถดถอยเหมาะสม กล่าวคือ ไม่มีอัตตสหสัมพันธ์ จะสามารถแปลงสมการพยากรณ์กลับเป็นสมการพยากรณ์ของตัวแปรเริ่มต้นดังนี้

$$\hat{Y}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{t1} + \hat{\beta}_2 X_{t2} + \hat{\beta}_3 X_{t3} + \hat{\beta}_4 X_{t4} \qquad (22)$$

โดยที่ $$\hat{\beta}_0 = \frac{\hat{\beta}_0^*}{1 - r_1 - r_2 - r_3}$$

2.5 วิธีทดสอบอัตตสหสัมพันธ์ของค่าคลาดเคลื่อน

วิธีตัวคูณลากรานจ์ (Lagrange Multiplier Test) เป็นการทดสอบว่ามีอัตตสหสัมพันธ์ของความคลาดเคลื่อนหรือไม่ (Yin Feng Gau, 2002)โดยทดสอบสมมติฐานดังนี้

$H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_p = 0$

$H_1 :$ มี ρ_j อย่างน้อย 1 ตัวที่ไม่เท่ากับ 0, $j = 1, 2, \dots, p$

ซึ่งจะใช้ค่าประมาณความคลาดเคลื่อน $e_{t-1}, e_{t-2}, \dots, e_{t-p}$ แทนค่าพารามิเตอร์ค่าคลาดเคลื่อน $\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_{t-p}$ ตามลำดับ

ขั้นตอนในการทดสอบเป็นดังนี้

1. ประมาณค่าตัวแบบการถดถอยเริ่มต้น (1) ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด จะได้ค่าประมาณความคลาดเคลื่อน e_t
2. คำนวณหาค่า $e_{t-1}, e_{t-2}, \dots, e_{t-p}$ ตามอันดับที่ต้องการทดสอบ

3. หา e_t บนตัวแปรอิสระ X_{t1}, X_{t2}, X_{t3} และ X_{t4} กับ $e_{t-1}, e_{t-2}, \ldots, e_{t-p}$

4. คำนวณสถิติทดสอบ $(n-p)R_e^2$ จากตัวแปรช่วยในข้อ 3 สำหรับการตัดสินใจจะได้ว่า

ถ้า $(n-p)R_e^2 > \chi^2_{\alpha,p}$ จะปฏิเสธสมมติฐาน $H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_p = 0$

$(n-p)R_e^2 < \chi^2_{\alpha,p}$ ไม่สามารถปฏิเสธสมมติฐาน $H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_p = 0$

สำหรับสถิติทดสอบตัวคูณลากรานจ์จะนำไปใช้ในการตรวจสอบการมีอัตตสหสัมพันธ์ของความคลาดเคลื่อน เมื่อขจัดปัญหาอัตตสหสัมพันธ์ด้วยวิธีคอคแครนและออร์คัต และ วิธีฮิลเดรธและลู แล้วว่าค่าคลาดเคลื่อนไม่มีอัตตสหสัมพันธ์

2.6 วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์

ในการวิจัยครั้งนี้จะเสนอวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ 3 วิธีคือ วิธี คอคแครนและออร์คัต, วิธีฮิลเดรธและลู และวิธีผลต่างอันดับที่หนึ่ง (John Neter และคณะ, 1996) ซึ่งมีรายละเอียดแต่ละวิธีดังนี้

2.6.1 วิธีคอคแครนและออร์คัต (Cochrane-Orcutt method)

เป็นวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยใช้ข้อมูลจากค่าประมาณที่มีพารามิเตอร์ความคลาดเคลื่อนตามช่วงเวลา เพื่อช่วยประมาณค่า r ซึ่งเป็นค่าประมาณสัมประสิทธ์สหสัมพันธ์ (ρ) ซึ่งจะถูกนำไปใช้ในการแปลงสมการถดถอย (Cochrane and Orcutt, 1949)

ขั้นตอนของวิธีคอคแครนและออร์คัต

ขั้นตอนที่ 1 ประมาณสมการเริ่มต้น (1) โดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด แต่เนื่องจากเราไม่ทราบค่า $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \ldots, \varepsilon_{t-p}$ ดังนั้นจะใช้ค่าประมาณ $e_t, e_{t-1}, \ldots, e_{t-p}$

ขั้นตอนที่ 2 ประมาณพารามิเตอร์อัตตสหสัมพันธ์ (ρ) ดังนี้

กรณี AR(1) จะประมาณค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ จากค่า r ดังสูตร

$$r = \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^2}$$

กรณี AR(2) และ AR(3) จะประมาณค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ จากการหาสมการถดถอยของค่าคลาดเคลื่อนด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Ramu Ramanathan, 2002) ดังสมการ

$$e_t = \rho_1 e_{t-1} + \rho_2 e_{t-2}$$

และ $$e_t = \rho_1 e_{t-1} + \rho_2 e_{t-2} + \rho_3 e_{t-3}$$ ตามลำดับ

ขั้นตอนที่ 3 แปลงตัวแปรเป็น $Y_t^*, X_{t1}^*, X_{t2}^*, X_{t3}^*$ และ X_{t4}^* โดยที่

$$Y_t^* = Y_t - \sum_{j=1}^{p} \rho_j Y_{t-j}\ , \quad X_{ti}^* = X_{ti} - \sum_i \sum_j \rho_j X_{ti-j}$$

สำหรับ $t = 2,3,\ldots,n$, $j = 1,2,\ldots,p$ และ $i = 1,2,3,4$ ตามตัวแบบค่าคลาดเคลื่อนที่กำหนด

ขั้นตอนที่ 4 คำนวณหาค่าประมาณพารามิเตอร์ β' โดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด จาก

$$\hat{\beta}' = (X^{*'} X^*)^{-1} (X^{*'} Y^*)$$

ขั้นตอนที่ 5 ใช้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์การถดถอย $\beta's$ และ $\beta_0 = \beta_0^*(1 - \sum_{j=1}^{p} r_j)$ จากขั้นตอนที่ 4 กลับไปหาค่าประมาณ $e_{t-1}, e_{t-2}, \ldots, e_{t-p}$ จากสมการเริ่มต้น (1) จากนั้นกลับไปทำขั้นตอนที่ 2 เพื่อประมาณค่า r ใหม่ต่อไป

ขั้นตอนที่ 6 กระบวนการจะสิ้นสุดเมื่อค่าประมาณ r ใน AR(1) หรือค่า SSE ใน AR(2) และ AR(3) ลู่เข้าสู่ค่าใดค่าหนึ่งและทดสอบแล้วว่าค่าคลาดเคลื่อนไม่เกิดอัตตสหสัมพันธ์

2.6.2 วิธีฮิลเดรธและลู (Hildreth-Lu method)

ฮิลเดรธและลูได้เสนอกระบวนการค้นหาค่าประมาณของค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (ρ) โดยใช้เทคนิคการค้นหาแบบกริด (Grid Search) ซึ่งมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 เลือกค่า ρ แล้วใช้ค่า ρ ที่เลือกแปลงตัวแปร $Y_t^*, X_{t1}^*, X_{t2}^*, X_{t3}^*$ และ X_{t4}^* โดยที่

$$Y_t^* = Y_t - \sum_{j=1}^{p} \rho_j Y_{t-j}\ , \quad X_{ti}^* = X_{ti} - \sum_i \sum_j \rho_j X_{ti-j}$$

สำหรับ $t = 2,3,\ldots,n$, $j = 1,2,\ldots,p$ และ $i = 1,2,3,4$ ตามตัวแบบค่าคลาดเคลื่อนที่กำหนด

ขั้นตอนที่ 2 หาค่าประมาณสัมประสิทธิ์การถดถอย $\hat{\beta}'$

ขั้นตอนที่ 3 คำนวณผลรวมกำลังสองของความคลาดเคลื่อนจาก

$$\begin{aligned} \boldsymbol{SSE} &= \sum (\boldsymbol{Y_t^*} - \boldsymbol{\hat{Y}_t^*})^2 \\ &= \sum (Y_t^* - \hat{\beta}_0^* - \hat{\beta}_1' X_{t1}^* - \hat{\beta}_2 X_{t2}^* - \hat{\beta}_3 X_{t3}^* - \hat{\beta}_4 X_{t4}^*)^2 \end{aligned}$$

ขั้นตอนที่ 4 เลือกค่า ρ อีกค่าหนึ่ง แล้วทำซ้ำในขั้นตอนที่ 1 ถึง 3

ขั้นตอนที่ 5 จากเซตของ ρ ที่แตกต่างกันตั้งแต่ –1 ถึง 1 เราจะได้ค่า SSE_{ρ_i} ตามลำดับ เลือกค่า ρ ที่ทำให้ค่า SSE_{ρ_i} น้อยที่สุด ซึ่งค่า ρ ที่ได้นี้จะตรงกับค่า ρ ของฟังก์ชันการถดถอยที่เหมาะสม (ดูการเขียนโปรแกรมในภาคผนวก ก)

ขั้นตอนที่ 6 ประมาณค่าพารามิเตอร์จากตัวแบบการถดถอยที่เหมาะสมของตัวแปรที่แปลงแล้ว

2.6.3 วิธีผลต่างอันดับที่หนึ่ง (First Difference method)

เนื่องจากค่าพารามิเตอร์อัตตสหสัมพันธ์มีค่ามาก และ SSE เป็นฟังก์ชันของ ρ ซึ่งมักจะคงที่ สำหรับค่า ρ ที่มากขึ้นจนเกือบเท่ากับ 1

ขั้นตอนที่ 1 กำหนดค่าอัตตสหสัมพันธ์เป็นค่าคงที่ซึ่งมีความสัมพันธ์ในระดับสูง ถ้า $\rho = 1$ แล้ว

$\beta_0^* = \beta_0(1-\rho) = 0$ และ จะได้ตัวแบบการถดถอยดังนี้

$$Y_t^* = \beta_1 X_{t1}^* + \beta_2 X_{t2}^* + \beta_3 X_{t3}^* + \beta_4 X_{t4}^* + u_t$$

โดยที่

$$Y_t^* = Y_t - Y_{t-1}$$
$$X_{t1}^* = X_{t1} - X_{t-1,1}$$
$$X_{t2}^* = X_{t2} - X_{t-1,2}$$
$$X_{t3}^* = X_{t3} - X_{t-1,3}$$
$$X_{t4}^* = X_{t4} - X_{t-1,4}$$

ขั้นตอนที่ 2 ประมาณค่าพารามิเตอร์จากตัวแบบการถดถอยที่เหมาะสมของตัวแปรที่แปลงแล้ว

2.7 ค่าสถิติที่ใช้วัดประสิทธิภาพของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์

2.6.1 ค่าเฉลี่ยกำลังสองของความคลาดเคลื่อน (Mean Square Error : MSE) เป็นค่าวัดความถูกต้องของการพยากรณ์

2.6.2 ค่าสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ (Coefficient of Determination : R^2) เป็นค่าที่วัดว่าตัวแปรอิสระที่กำหนดในตัวแบบมีส่วนในการอธิบายความผันแปรของตัวแปรตามมากน้อยเพียงใด

2.8 ตัวอย่างการวิเคราะห์ข้อมูล

ในการวิเคราะห์อัตราการตายอันเนื่องมาจากโรคหัวใจในประเทศสหรัฐอเมริกา ตั้งแต่ปี ค.ศ.1947-1971 เชื่อว่ามีสาเหตุมาจากปริมาณการสูบบุหรี่, การบริโภคอาหารประเภทไขมัน, การดื่มสุรา และการดื่มเบียร์ โดยกำหนดให้

Y_t แทน อัตราการตายต่อประชากร 100,000 คน

X_{t1} แทน ปริมาณการสูบบุหรี่ต่อน้ำหนักของใบยาสูบ (ปอนด์)

X_{t2} แทน ปริมาณการบริโภคอาหารประเภทไขมัน (ปอนด์)

X_{t3} แทน ปริมาณการดื่มสุรา (แกลลอน)

X_{t4} แทน ปริมาณการดื่มเบียร์ (แกลลอน)

มีข้อมูลดังตาราง

ตาราง 2.2 แสดงข้อมูลอัตราการตายและสาเหตุของการเกิดโรคหัวใจของประชากรประเทศสหรัฐอเมริกา

t	Y_t	X_{t1}	X_{t2}	X_{t3}	X_{t4}
1	321.2	9.16	42.0	1.28	18.08
2	322.7	9.35	42.6	1.06	18.58
3	349.1	9.33	42.6	1.02	18.05
4	355.5	9.36	45.9	1.02	17.41
5	355.8	9.98	42.1	1.23	16.97
6	356.4	10.41	44.1	1.00	16.94
7	360.2	10.46	44.1	1.10	16.71
8	347.5	9.73	45.4	1.12	16.68
9	355.8	9.48	45.9	1.07	16.13
10	350.5	9.34	45.3	1.13	16.04
11	369.1	9.20	44.4	1.17	15.54
12	367.9	9.45	45.3	1.12	15.22
13	363.4	9.45	46.2	1.14	15.28
14	369.0	9.65	45.4	1.20	15.53
15	362.6	9.85	45.2	1.19	15.04
16	370.3	9.68	45.7	1.23	15.26
17	375.4	9.70	46.1	1.25	15.17
18	365.8	9.20	47.3	1.28	15.74
19	367.4	9.45	48.5	1.35	16.19
20	371.2	9.27	49.6	1.43	16.21
21	364.5	9.12	49.2	2.29	26.27
22	372.6	8.65	51.0	2.37	25.88
23	366.0	8.20	51.5	2.48	26.42
24	362.0	7.78	53.3	2.61	28.35
25	361.5	7.70	52.2	2.63	28.38

2.8.1 การประมาณค่าพารามิเตอร์โดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด

คำนวณหาค่า $\hat{\beta}$ โดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด จากข้อมูลข้างต้นจะได้

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y = \begin{bmatrix} 124.8314 \\ 11.3244 \\ 3.3786 \\ 33.1487 \\ -4.0760 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นสมการถดถอยเป็นดังนี้

$$\hat{Y}_t = 124.8314 + 11.3244X_{t1} + 3.3786X_{t2} + 33.1487X_{t3} - 4.076X_{t4}$$

$$R^2 = 0.6890,\ \text{MSE} = 67.5259$$

ทดสอบการเกิดอัตตสหสัมพันธ์ของค่าคลาดเคลื่อนด้วยสถิติทดสอบตัวคูณลากรานจ์โดยตั้งสมมติฐานดังนี้

$$H_0 : \rho = 0$$
$$H_1 : \rho \neq 0$$

หาค่าประมาณของ e บนตัวแปรอิสระ $X_{t1}, X_{t2}, X_{t3}, X_{t4}$ และ e_{t-1} จะได้ค่า $\hat{\beta}_{LM}$ โดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดดังนี้

$$\hat{\beta}_{LM} = \begin{bmatrix} 166.7335 \\ -5.5702 \\ -2.5462 \\ 11.6726 \\ -0.6536 \\ 0.2905 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นสมการถดถอยเป็นดังนี้

$$e_t = 166.7335 - 5.5702X_{t1} - 2.5462X_{t2} + 11.6726X_{t3} - 0.6536X_{t4} + 0.2905e_{t-1}$$

$$R_e^2 = 0.2712$$

คำนวณค่าสถิติทดสอบตัวคูณลากรานจ์ดังนี้

$$LM = (n-1)R_e^2 = (25-1) \times 0.2712 = 6.5088$$

เนื่องจาก LM > $\chi^2_{0.05,1} = 3.84$ ดังนั้นจะปฏิเสธ H_0 นั่นคือ เกิดปัญหาอัตตสหสัมพันธ์อันดับที่ 1 ของค่าคลาดเคลื่อน จึงทำการขจัดปัญหาอัตตสหสัมพันธ์ของค่าคลาดเคลื่อนด้วยวิธีการต่างๆ ดังนี้

2.8.2 การประมาณค่าพารามิเตอร์โดยวิธีคอคแครนและออร์คัต

เริ่มจากการคำนวณหาค่า r จากค่าประมาณ e_t และ e_{t-1}

ตาราง 2.3 แสดงค่า e_t จากสมการถดถอยโดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด

t	e_t	e_{t-1}	$e_t e_{t-1}$	e_{t-1}^2
1	-18.0021	-	-	-
2	-11.3502	-18.0021	204.3267	324.0745
3	14.4420	-11.3502	-163.9189	128.8265
4	6.7441	14.4420	97.3975	208.5705
5	4.1071	6.7441	27.6986	45.4823
6	0.5822	4.1071	2.3913	16.8684
7	-0.4363	0.5822	-0.2540	0.3390
8	-10.0470	-0.4363	4.3838	0.1904
9	-1.1896	-10.0470	11.9519	100.9423
10	-5.2328	-1.1896	6.2249	1.4151
11	14.6295	-5.2328	-76.5526	27.3818
12	7.9107	14.6295	115.7296	214.0218
13	-0.0485	7.9107	-0.3835	62.5794
14	5.0196	-0.0485	-0.2434	0.0024
15	-4.6353	5.0196	-23.2674	25.1968
16	2.8713	-4.6353	-13.3094	21.4858
17	5.3636	2.8713	15.4006	8.2445
18	-1.2997	5.3636	-6.9712	28.7678
19	-7.0714	-1.2997	9.1910	1.6893
20	-7.5199	-7.0714	53.1764	50.0049
21	1.3270	-7.5199	-9.9792	56.5490
22	4.4264	1.3270	5.8740	1.7610
23	-0.2122	4.4264	-0.9394	19.5931
24	-1.9802	-0.2122	0.4203	0.0450
25	1.6016	-1.9802	-3.1714	3.9211
		รวม	255.1761	1347.9529

ดังนั้น
$$r = \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^2} = \frac{255.1761}{1347.9529} = 0.1893$$

ตาราง 2.4 แสดงข้อมูล $Y_t^*, X_{t1}^*, X_{t2}^*, X_{t3}^*$ และ X_{t4}^* ที่ได้จากการแปลง

t	Y_t^*	X_{t1}^*	X_{t2}^*	X_{t3}^*	X_{t4}^*
1	-	-	-	-	-
2	261.8948	7.6160	34.6491	0.8177	15.1573
3	288.0108	7.5600	34.5355	0.8193	14.5327
4	289.4131	7.5938	37.8355	0.8269	13.9930
5	288.5016	8.2081	33.4108	1.0369	13.6742
6	289.0448	8.5207	36.1302	0.7672	13.7275
7	292.7312	8.4893	35.7516	0.9107	13.5032
8	279.3118	7.7499	37.0516	0.9118	13.5167
9	290.0160	7.6380	37.3055	0.8580	12.9724
10	283.1448	7.5454	36.6108	0.9274	12.9865
11	302.7481	7.4319	35.8244	0.9561	12.5035
12	298.0270	7.7084	36.8948	0.8985	12.2782
13	293.7542	7.6611	37.6244	0.9280	12.3988
14	300.2061	7.8611	36.6540	0.9842	12.6374
15	292.7459	8.0232	36.6055	0.9628	12.1001
16	301.6575	7.8153	37.1434	1.0047	12.4128
17	305.2998	7.8675	37.4487	1.0172	12.2812
18	294.7344	7.3637	38.5730	1.0434	12.8682
19	298.1517	7.7084	39.5458	1.1077	13.2103
20	301.6488	7.4811	40.4186	1.1744	13.1451
21	294.2295	7.3651	39.8104	2.0193	23.2013
22	303.5978	6.9235	41.6861	1.9365	20.9069
23	295.4644	6.5625	41.8454	2.0313	21.5208
24	292.7139	6.2277	43.5507	2.1405	23.3485
25	292.9711	6.2272	42.1100	2.1359	23.0132

คำนวณหาค่า $\hat{\beta}^*$ โดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด จากข้อมูลข้างต้นจะได้

$$\hat{\beta}^* = (X^{*'} X^*)^{-1} X^{*'} Y^*$$
$$= \begin{bmatrix} 233.2871 \\ 5.7402 \\ 0.9431 \\ 43.0945 \\ -4.6477 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นสมการถดถอยเป็นดังนี้

$$\hat{Y}_t^* = 233.2871 + 5.7402 X_{t1}^* + 0.9431 X_{t2}^* + 43.0945 X_{t3}^* - 4.6477 X_{t4}^*$$

จากนั้นจะทำการแปลงกลับเป็นตัวแปรเริ่มต้นใหม่เพื่อประมาณค่า r โดยค่าสัมประสิทธิ์การถดถอยเป็นดังนี้

$$\beta_0 = \frac{\beta_0^*}{(1-r)} = \frac{233.2871}{(1-0.1893)} = 287.7601$$
$$\beta_1 = 5.7402, \beta_2 = 0.9431, \beta_3 = 43.0945, \beta_4 = -4.6477$$

ดังนั้นสมการถดถอยเริ่มต้นเป็น

$$\hat{Y}_t = 287.7601 + 5.7402 X_{t1} + 0.9431 X_{t2} + 43.0945 X_{t3} - 4.6477 X_{t4}$$

ประมาณค่า r ครั้งที่ 2 จากค่าประมาณ e_t และ e_{t-1}

$$r = \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^2} = \frac{404.0577}{1746.8041} = 0.2313$$

จากนั้นทำการแปลงข้อมูล หาสมการถดถอยของตัวแปรที่แปลงแล้ว แปลงสมการกลับเป็นตัวแปรเริ่มต้นเพื่อประมาณค่า r ครั้งที่ 3 ต่อไป ทำเช่นนี้ไปเรื่อยๆ จนกระทั่งค่าประมาณ r ลู่เข้าสู่ค่าใดค่าหนึ่งและทดสอบแล้วว่าค่าคลาดเคลื่อนไม่เกิดอัตตสหสัมพันธ์ แสดงกระบวนการได้ดังนี้

Iteration	r	SSE
1	0.1893	764.7099
2	0.2313	760.7927
3	0.2426	760.4992
4	0.2459	760.4732
5	0.2469	760.4708
6	0.2472	760.4706

คำนวณหาค่า $\hat{\beta}^*$ ของสมการถดถอยจากค่า r สุดท้ายโดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดได้

$$\hat{\beta}^* = (X^{*'}X^*)^{-1}X^{*'}Y^*$$
$$= \begin{bmatrix} 219.9520 \\ 5.4065 \\ 0.9026 \\ 41.5271 \\ -4.4888 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นสมการถดถอยเป็นดังนี้

$$\hat{Y}_t^* = 219.9520 + 5.4065X_{t1}^* + 0.9026X_{t2}^* + 41.5271X_{t3}^* - 4.4888X_{t4}^*$$
$$R^2 = 0.5664, \ \text{MSE} = 40.0248$$

2.8.3 การประมาณค่าพารามิเตอร์โดยวิธีฮิลเดรธและลู

กำหนดเซตของ ρ ขึ้นแล้วใช้ค่า ρ_i ที่เลือกแปลงสมการถดถอย (4) คำนวณค่า SSE จาก

$$\boldsymbol{SSE} = \sum(\boldsymbol{Y}_t^* - \hat{\boldsymbol{Y}}_t^*)^2$$
$$= \sum(Y_t^* - \hat{\beta}_0^* - \hat{\beta}_1'X_{t1}^* - \hat{\beta}_2X_{t2}^* - \hat{\beta}_3X_{t3}^* - \hat{\beta}_4X_{t4}^*)^2$$

ได้ดังตาราง

ตาราง 2.5 แสดงค่า SSE ที่ได้จากการแปลงข้อมูลของค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แต่ละค่า

ρ	SSE	ρ	SSE	ρ	SSE
-1.00	2822.6354	0	839.8070	0.28	761.7866
-0.90	2509.2354	0.10	788.1986	0.29	762.7132
-0.80	2221.2221	0.20	763.2871	0.30	763.8831
-0.70	1958.3940	0.21	762.2205	0.40	788.7203
-0.60	1720.6496	0.22	761.4078	0.50	836.9940
-0.50	1508.0679	0.23	760.8476	0.60	909.1250
-0.40	1320.9753	0.24	760.5384	0.70	1007.5025
-0.30	1159.9499	***0.25***	***760.4791***	0.80	1136.8075
-0.20	1025.7119	0.26	760.6683	0.90	305.2659
-0.10	918.8998	0.27	761.1045	1.00	1529.3952

เนื่องจาก SSE มีค่าต่ำสุด เมื่อ $\rho = 0.25$ จึงแปลงข้อมูลได้ดังตารางที่ 2.6

คำนวณหาค่า $\hat{\beta}^*$ โดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด จากข้อมูลข้างต้นจะได้

$$\hat{\beta}^* = (X^{*'} X^*)^{-1} X^{*'} Y^*$$

$$= \begin{bmatrix} 219.3087 \\ 5.3902 \\ 0.9006 \\ 41.4463 \\ -4.4807 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นสมการถดถอยเป็นดังนี้

$$\hat{Y}_t^* = 219.3087 + 5.3902 X_{t1}^* + 0.9006 X_{t2}^* + 41.4463 X_{t3}^* - 4.4807 X_{t4}^*$$

$$R^2 = 0.5642,\ \text{MSE} = 40.0252$$

ตาราง 2.6 แสดงข้อมูลที่ได้จากการแปลง เมื่อ $\rho = 0.25$

t	Y_t^*	X_{t1}^*	X_{t2}^*	X_{t3}^*	X_{t4}^*
1	-	-	-	-	-
2	242.400	7.0600	32.100	0.7400	14.0600
3	268.425	6.9925	31.950	0.7550	13.4050
4	268.225	7.0275	35.250	0.7650	12.8975
5	266.925	7.6400	30.625	0.9750	12.6175
6	267.450	7.9150	33.575	0.6925	12.6975
7	271.100	7.8575	33.075	0.8500	12.4750
8	257.450	7.1150	34.375	0.8450	12.5025
9	268.925	7.0475	34.550	0.7900	11.9600
10	261.550	6.9700	33.825	0.8625	12.0075
11	281.475	6.8650	33.075	0.8875	11.5300
12	275.625	7.1500	34.200	0.8275	11.3350
13	271.425	7.0875	34.875	0.8600	11.4750
14	278.150	7.2875	33.850	0.9150	11.7100
15	270.350	7.4375	33.850	0.8900	11.1575
16	279.650	7.2175	34.400	0.9325	11.5000
17	282.825	7.2800	34.675	0.9425	11.3550
18	271.950	6.7750	35.775	0.9675	11.9475
19	275.950	7.1500	36.675	1.0300	12.2550
20	279.350	6.9075	37.475	1.0925	12.1625
21	271.700	6.8025	36.800	1.9325	22.2175
22	281.475	6.3700	38.700	1.7975	19.3125
23	272.850	6.0375	38.750	1.8875	19.9500
24	270.500	5.7300	40.425	1.9900	21.7450
25	271.000	5.7550	38.875	1.9775	21.2925

2.8.4 การประมาณค่าพารามิเตอร์โดยวิธีผลต่างอันดับที่หนึ่ง

สมมติ $\rho = 1$ แล้วทำการแปลงข้อมูลได้ดังตาราง

ตาราง 2.7 แสดงข้อมูลที่ได้จากการแปลง เมื่อ $\rho = 1$

t	Y_t^*	X_{t1}^*	X_{t2}^*	X_{t3}^*	X_{t4}^*
1	-	-	-	-	-
2	1.5	0.19	0.6	-0.22	0.50
3	26.4	-0.02	0.0	-0.04	-0.53
4	6.4	0.03	3.3	0.00	-0.64
5	0.3	0.62	-3.8	0.21	-0.44
6	0.6	0.43	2.0	-0.23	-0.03
7	3.8	0.05	0.0	0.10	-0.23
8	-12.7	-0.73	1.3	0.02	-0.03
9	8.3	-0.25	0.5	-0.05	-0.55
10	-5.3	-0.14	-0.6	0.06	-0.09
11	18.6	-0.14	-0.9	0.04	-0.50
12	-1.2	0.25	0.9	-0.05	-0.32
13	-4.5	0.00	0.9	0.02	0.06
14	5.6	0.20	-0.8	0.06	0.25
15	-6.4	0.20	-0.2	-0.01	-0.49
16	7.7	-0.17	0.5	0.04	0.22
17	5.1	0.02	0.4	0.02	-0.09
18	-9.6	-0.50	1.2	0.03	0.57
19	1.6	0.25	1.2	0.07	0.45
20	3.8	-0.18	1.1	0.08	0.02
21	-6.7	-0.15	-0.4	0.86	10.06
22	8.1	-0.47	1.8	0.08	-0.39
23	-6.6	-0.45	0.5	0.11	0.54
24	-4.0	-0.42	1.8	0.13	1.93
25	-0.5	-0.08	-1.1	0.02	0.03

คำนวณหาค่า $\hat{\beta}^*$ โดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด จากข้อมูลข้างต้นจะได้

$$\hat{\beta}^* = (X^{*'}X^*)^{-1}X^{*'}Y^*$$

$$= \begin{bmatrix} 5.6431 \\ 0.8462 \\ 16.3692 \\ -2.2321 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นสมการถดถอยเป็นดังนี้

$$\hat{Y}_t^* = 5.6431X_{t1}^* + 0.8462X_{t2}^* + 16.3692X_{t3}^* - 2.2321X_{t4}^*$$

$$R^2 = 0.1075,\ \text{MSE} = 81.1354$$

2.9 ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

1. เกษศิริ โมรา (2536) ได้ศึกษาเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์เพื่อพยากรณ์เมื่อความคลาดเคลื่อนมีอัตตสหสัมพันธ์ของวิธีการประมาณ 3 วิธี คือ วิธีกำลังสองน้อยที่สุด วิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบไม่เชิงเส้นและวิธีแปลงข้อมูลโดยใช้ผลต่างอันดับหนึ่ง การเปรียบเทียบกระทำภายใต้เงื่อนไขของค่าอัตตสหสัมพันธ์ ขนาดตัวอย่างและรูปแบบของตัวแปรอิสระ 3 รูปแบบ แล้วคำนวณค่ารากที่สองของค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (RMSE) ของค่าพยากรณ์ของวิธีการพยากรณ์ทั้งสาม พบว่า ในทุกขนาดตัวอย่างและทุกรูปแบบตัวแปรอิสระ กรณีอัตตสหสัมพันธ์ระดับต่ำ (0.3 และ 0.4) วิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบไม่เชิงเส้นและวิธีกำลังสองน้อยที่สุดมีค่า RMSE อยู่ในระดับใกล้เคียงกัน และวิธีการแปลงข้อมูลโดยใช้ผลต่างอันดับหนึ่งมีค่า RMSE สูงสุด กรณีอัตตสหสัมพันธ์ระดับกลาง (0.5, 0.6 และ 0.7) วิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบไม่เชิงเส้นมีค่า RMSE ต่ำสุด รองลงมาคือ วิธีกำลังสองน้อยที่สุดและวิธีการแปลงข้อมูลโดยใช้ผลต่างอันดับหนึ่ง ตามลำดับ กรณีอัตตสหสัมพันธ์ระดับสูง (0.8 และ 0.9) วิธีการแปลงข้อมูลโดยใช้ผลต่างอันดับหนึ่งมีค่า RMSE ต่ำสุด รองลงมาคือ วิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบไม่เชิงเส้นและวิธีกำลังสองน้อยที่สุด ตามลำดับ

2. สิริพรรณ เฉลิมงาม (2536) ได้ศึกษาเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์เพื่อพยากรณ์ ในสมการถดถอยเชิงเส้นแบบพหุ เมื่อค่าคลาดเคลื่อนมีอัตตสหสัมพันธ์ วิธีการประมาณ 3 วิธี คือ วิธีกำลังสองน้อยที่สุด วิธีการแปลงข้อมูลของเพรสและวินส์แทน และวิธีของฮิลเดรธและลู การเปรียบเทียบใช้ค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (RMSE) จากค่าพยากรณ์วิธีการประมาณค่าทั้ง 3 วิธี การเปรียบเทียบกระทำภายใต้เงื่อนไขของค่าอัตตสหสัมพันธ์ ขนาดตัวอย่างและรูปแบบของตัวแปรอิสระ 3 รูปแบบ พบว่า ในทุกขนาดตัวอย่าง (15, 30, 45 และ

60) และทุกรูปแบบตัวแปรอิสระ กรณีอัตตสหสัมพันธ์ระดับต่ำ (0.2, 0.3 และ 0.4) วิธีของฮิลเดรธและลู และวิธีการแปลงข้อมูลของเพรสและวินส์แทน มีค่า RMSE อยู่ในระดับใกล้เคียงกันและวิธีกำลังสองน้อยที่สุดมีค่า RMSE สูงสุด กรณีอัตตสหสัมพันธ์ระดับสูงและสูงมาก (0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 0.95 และ 0.99) วิธีของฮิลเดรธและลูมีค่า RMSE ต่ำสุด รองลงมาคือ วิธีกำลังสองน้อยที่สุดและวิธีการแปลงข้อมูลของเพรสและวินส์แทน ตามลำดับ

3. ฝน เทพวัฒนะ (2535) ได้ศึกษาเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์เพื่อการพยากรณ์ในสมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย เมื่อความคลาดเคลื่อนมีอัตตสหสัมพันธ์ของวิธีการประมาณค่า 3 วิธี คือ วิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบสามัญ วิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบทั่วไปและวิธีการแปลงของคอคแครนและออร์คัต การเปรียบเทียบใช้ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) การเปรียบเทียบกระทำภายใต้เงื่อนไขของค่าอัตตสหสัมพันธ์ ขนาดตัวอย่างและรูปแบบของตัวแปรอิสระ 4 รูปแบบ พบว่า ในทุกรูปแบบตัวแปรอิสระและตัวอย่างขนาดเล็ก (10 และ 15) กรณีอัตตสหสัมพันธ์ระดับต่ำ (0.3 และ 0.4) วิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบสามัญ วิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบทั่วไปและวิธีการแปลงของคอคแครนและออร์คัตมีค่า MSE อยู่ในระดับใกล้เคียงกัน แต่วิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบทั่วไปมีค่า MSE ต่ำสุดในตัวอย่างขนาดใหญ่ (30, 50 และ 70) ในทุกรูปแบบตัวแปรอิสระ กรณีอัตตสหสัมพันธ์ระดับปานกลางและสูง (0.5, 0.6, 0.7, 0.8 และ 0.9) วิธีการแปลงคอคแครนและออร์คัตมีค่า MSE ต่ำสุด รองลงมาคือ วิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบทั่วไปและวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบสามัญ ตามลำดับ