



ภาคผนวก

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright © by Chiang Mai University

All rights reserved



ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright © by Chiang Mai University
All rights reserved

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1

เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ

จำนวน 1 คาบ

วิชาคณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค 012

ภาคเรียนที่ 2

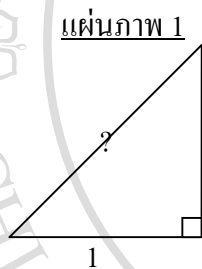
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถหาค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากได้ เมื่อกำหนดส่วนประกอบของรูปสามเหลี่ยมมาให้

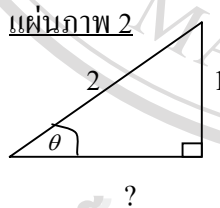
2. เนื้อหาและกิจกรรมการเรียนรู้

2.1 ครูทบทวนความรู้เรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัส โดยการติครูรูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปที่ 1 บนกระดานแล้วสนทนาซักถามนักเรียน



- ด้านที่ยาว 1 หน่วยเรียกว่าด้านอะไร ? [ด้านประกอบมุมฉาก]
- ด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมฉากยาวเท่าไร ? $[\sqrt{2}]$
- 1 - เราหาความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากได้อย่างไร?
[ทบ.พีทาโกรัส] จะได้ว่า $1^2 + 1^2 = x^2$
ดังนั้น $x = ?[\sqrt{2}]$

2.2 ครูทบทวนเรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ โดยการติครูรูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปที่ 2 บนกระดานแล้วสนทนาซักถามนักเรียน

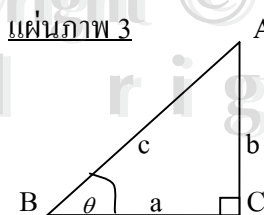


- ถ้าด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 2 หน่วย ถ้าด้านประกอบมุมฉากยาว 1 หน่วย ด้านประกอบมุมฉากอีกด้านหนึ่งยาวเท่าใด ? $[\sqrt{3}]$
หาได้จาก ? [ทบ.พีทาโกรัส คือ $\sqrt{4-1} = \sqrt{3}$]

- จากความรู้เดิมเรื่องตรีโกณมิติ จะได้ว่า $\frac{1}{2} = \sin \theta$

- จากที่เราทราบว่า $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ดังนั้น $\theta = ?$ $[30^\circ]$

2.3 ครูติครูรูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปที่ 3 บนกระดานแล้วสนทนาซักถามนักเรียน

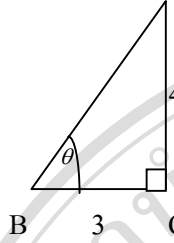


- A - $\triangle ABC$ มีด้านตรงข้ามมุม A ยาว a หน่วยด้านตรงข้ามมุม B ยาว b หน่วย และมีมุม C เป็นมุมฉากด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่าใด ? $[\sqrt{a^2 + b^2}]$
ถ้าให้ c แทนความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก(C) จะได้ว่า $c = ?[\sqrt{a^2 + b^2}]$
- $\sin \theta = ? \left[\frac{b}{c} \right] = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม}\theta}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$

$$\cos \theta = ? \left[\frac{a}{c} \right] = \frac{\text{ความยาวด้านประชิดมุม}\theta}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}, \quad \tan \theta = ? \left[\frac{b}{a} \right] = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม}\theta}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม}}$$

2.4 ครูคิดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปที่ 3 บนกระดานแล้วถามนักเรียนทีละคน

แผ่นภาพ 4 A - $\triangle ABC$ มีด้านตรงข้ามมุม B และด้านประชิดมุม B ยาว 4, 3 หน่วยตามลำดับ



และมีมุม C เป็นมุมฉาก ด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่าใด ?

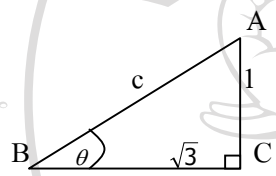
$a^2 = ? [9]$ $b^2 = ? [16]$ $c^2 = ? [25]$

- เมื่อ θ เป็นขนาดของมุม B ดังนั้น $\sin \theta = ? [\frac{4}{5}]$, $\cos \theta = ? [\frac{3}{5}]$

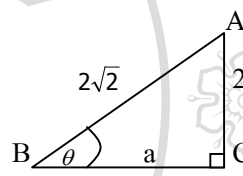
$\tan \theta = ? [\frac{4}{3}]$

2.5 แบ่งนักเรียนออกเป็น 3 กลุ่ม แล้วแจกเอกสารประกอบการเรียนการสอนให้นักเรียนทุกคน ซึ่งประกอบด้วยโจทย์ต่อไปนี้ดังแผ่นภาพ

แผ่นภาพ 5



แผ่นภาพ 6



$c = ? [2]$

$\sin \theta = ? [\frac{1}{2}]$

$\cos \theta = ? [\frac{\sqrt{3}}{2}]$

$\tan \theta = ? [\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}]$

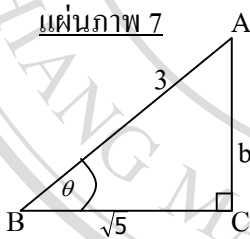
$a = ? [2]$

$\sin \theta = ? [\frac{1}{\sqrt{2}}]$

$\cos \theta = ? [\frac{1}{\sqrt{2}}]$

$\tan \theta = ? [1]$

แผ่นภาพ 7



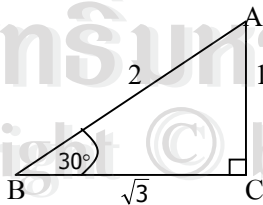
$b = ? [2]$

$\sin \theta = ? [\frac{2}{3}]$

$\cos \theta = ? [\frac{\sqrt{5}}{3}]$

$\tan \theta = ? [\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}]$

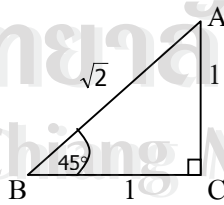
2.6 ครูคิดแผ่นภาพรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก แล้วให้นักเรียนช่วยกันสรุปค่าของ \sin , \cos , \tan ของมุม 30° , 45° , 60° แล้วครูเป็นคนเขียนค่าของ \sin , \cos , \tan ลงในแผ่นภาพ



$\sin 30^\circ = ? [\frac{1}{2}]$

$\cos 30^\circ = ? [\frac{\sqrt{3}}{2}]$

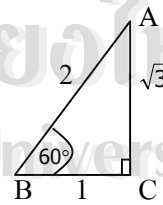
$\tan 30^\circ = ? [\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}]$



$\sin 45^\circ = ? [\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}]$

$\cos 45^\circ = ? [\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}]$

$\tan 45^\circ = ? [1]$



$\sin 60^\circ = ? [\frac{\sqrt{3}}{2}]$

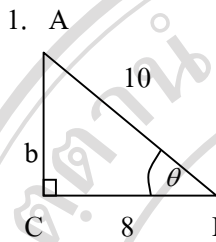
$\cos 60^\circ = ? [\frac{1}{2}]$

$\tan 60^\circ = ? [\sqrt{3}]$

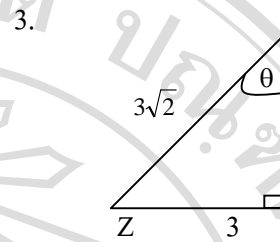
2.5 แจกเอกสารฝึกหัด 1.1 ให้นักเรียนทุกคนได้ทำเป็นการบ้าน กรุณาส่งในตอนเช้าของวันต่อไปก่อนทำกิจกรรมหน้าเสาธง

เอกสารฝึกหัด 1.1

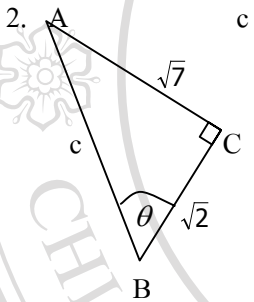
จงหาค่าของ $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ ของสามเหลี่ยมมุมฉากต่อไปนี้



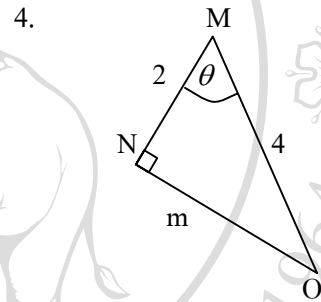
$b = [6]$
 $\sin \theta = [\frac{3}{5}]$
 $\cos \theta = [\frac{4}{5}]$
 $\tan \theta = [\frac{3}{4}]$



$XZ = [3]$
 $\sin \theta = [\frac{1}{\sqrt{2}}]$
 $\cos \theta = [\frac{1}{\sqrt{2}}]$
 $\tan \theta = [1]$



$c = [3]$
 $\sin \theta = [\frac{\sqrt{7}}{3}]$
 $\cos \theta = [\frac{\sqrt{2}}{3}]$
 $\tan \theta = [\frac{\sqrt{7}}{2}]$



$m = [2\sqrt{3}]$
 $\sin \theta = [\frac{\sqrt{3}}{2}]$
 $\cos \theta = [\frac{1}{2}]$
 $\tan \theta = [\sqrt{3}]$

3. สื่อการเรียนการสอน

- 3.1 แผนภาพ 1 - 7
- 3.2 แผนภาพสรุปค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติ
- 3.3 เอกสารฝึกหัด 1.1

4 การวัดและประเมินผล

การวัดผล

- 1. สังเกตจากการทำกิจกรรมร่วมกันในชั้นเรียน และการตอบคำถาม
- 2. จากการสรุปค่าของ \sin , \cos , \tan ของมุม 30, 45, 60 องศา
- 3. จากการทำเอกสารฝึกหัด 1.1

การประเมินผล

.....

.....

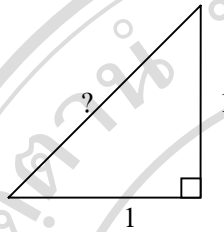
.....

.....

เอกสารประกอบการเรียนการสอน คาบที่ 1

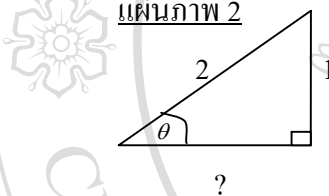
ชื่อ ชั้น ม. 4/1 เลขที่

แผ่นภาพ 1



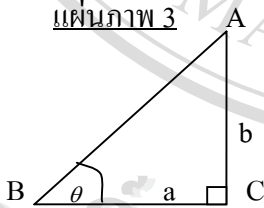
- ด้านที่ยาว 1 หน่วยเรียกว่าด้านอะไร ?
- ด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมฉากยาวเท่าไร ?
- เราหาความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากได้อย่างไร?
-
- ดังนั้น $x = \dots\dots\dots$

แผ่นภาพ 2



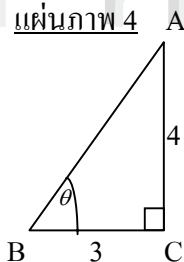
- ถ้าด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 2 หน่วย ด้านประกอบมุมฉากยาว 1 หน่วย ด้านประกอบมุมฉากอีกด้านหนึ่งยาวเท่าใด ?
- หาได้จาก ?
- จากความรู้เดิมเรื่องตรีโกณมิติ จะได้ว่า $\frac{1}{2} = \sin \theta$
- จากที่เราทราบว่า $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ดังนั้น $\theta = \dots\dots\dots$

แผ่นภาพ 3



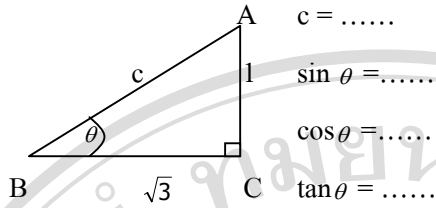
- $\triangle ABC$ มีด้านตรงข้ามมุม A ยาว a หน่วย ด้านตรงข้ามมุม B ยาว b หน่วย และมีมุม C เป็นมุมฉาก ด้านตรงข้ามมุมฉากยาว.....หน่วย
- ถ้าให้ c แทนความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก(C) จะได้ว่า $c = \dots\dots\dots$
- $\sin \theta = \dots\dots = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม}\theta}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$
- $\cos \theta = \dots\dots = \frac{\text{ความยาวด้านประชิดมุม}\theta}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$, $\tan \theta = \dots\dots = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม}\theta}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม}}$

แผ่นภาพ 4

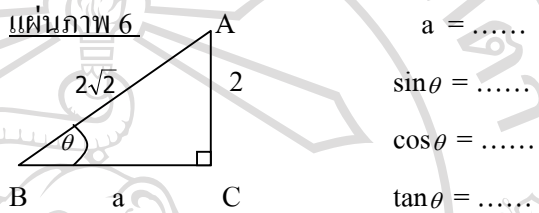


- $\triangle ABC$ มีด้านตรงข้ามมุม B และด้านประชิดมุม B ยาว 4, 3 หน่วยตามลำดับ และมีมุม C เป็นมุมฉาก ด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่าใด ?
- $a^2 = \dots\dots$ $b^2 = \dots\dots$ $c^2 = \dots\dots$ $c = \dots\dots$
- เมื่อ θ เป็นขนาดของมุม B ดังนั้น $\sin \theta = \dots\dots$, $\cos \theta = \dots\dots$
- $\tan \theta = \dots\dots$

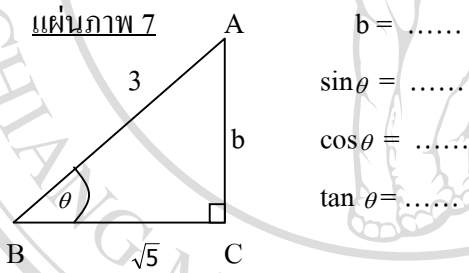
แผนภาพ 5



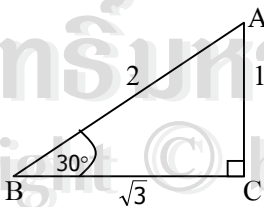
แผนภาพ 6



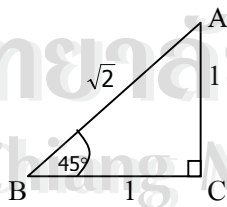
แผนภาพ 7



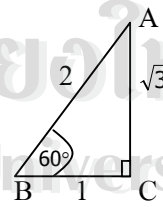
แผนภาพสรุปค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม 30 , 45 , 60 องศา



$\sin 30^\circ = \dots\dots$
 $\cos 30^\circ = \dots\dots$
 $\tan 30^\circ = \dots\dots$



$\sin 45^\circ = \dots\dots$
 $\cos 45^\circ = \dots\dots$
 $\tan 45^\circ = \dots\dots$



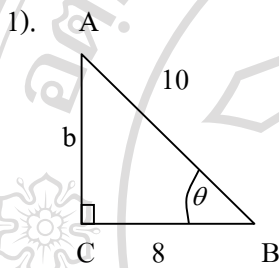
$\sin 60^\circ = \dots\dots$
 $\cos 60^\circ = \dots\dots$
 $\tan 60^\circ = \dots\dots$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
 Copyright © by Chiang Mai University
 All rights reserved

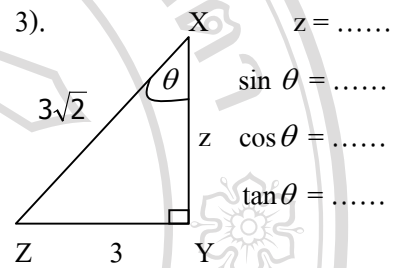
เอกสารฝึกหัด 1.1

ชื่อ ชั้น ม. 4/1 เลขที่

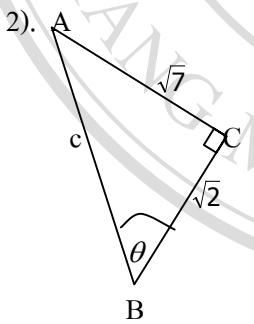
จงหาค่าของ $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ ของสามเหลี่ยมมุมฉากต่อไปนี้



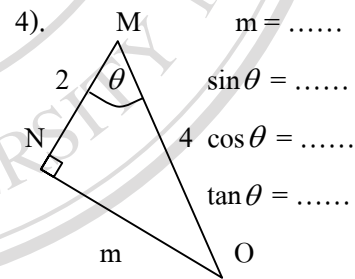
$b = \dots\dots$
 $\sin \theta = \dots\dots$
 $\cos \theta = \dots\dots$
 $\tan \theta = \dots\dots$



$z = \dots\dots$
 $\sin \theta = \dots\dots$
 $\cos \theta = \dots\dots$
 $\tan \theta = \dots\dots$



$c = \dots\dots$
 $\sin \theta = \dots\dots$
 $\cos \theta = \dots\dots$
 $\tan \theta = \dots\dots$



$m = \dots\dots$
 $\sin \theta = \dots\dots$
 $4 \cos \theta = \dots\dots$
 $\tan \theta = \dots\dots$

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2

เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ

จำนวน 1 คาบ

วิชาคณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค 012

ภาคเรียนที่ 2

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

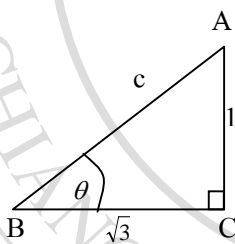
นักเรียนสามารถแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากได้โดยอาศัยฟังก์ชันตรีโกณมิติ

2. เนื้อหาและกิจกรรมการเรียนรู้

2.1 ครูแบ่งนักเรียนออกเป็น 3 กลุ่ม ครูเตรียมรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก 3 รูป บนกระดานแล้วให้แต่ละกลุ่มช่วยกันออกมาเขียนค่าของฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจน บนกระดาน เพื่อทบทวน

ความรู้เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ

แผนภาพ 1



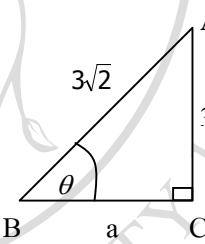
$$c = [2]$$

$$\sin \theta = \left[\frac{1}{2} \right]$$

$$\cos \theta = \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

$$\tan \theta = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \right]$$

แผนภาพ 2



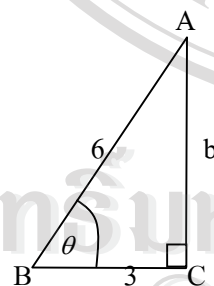
$$a = [3]$$

$$\sin \theta = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \right]$$

$$\cos \theta = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \right]$$

$$\tan \theta = [1]$$

แผนภาพ 3



$$b = [3\sqrt{3}]$$

$$\sin \theta = \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

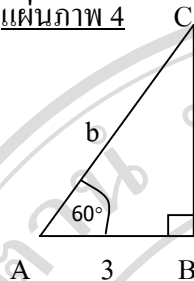
$$\cos \theta = \left[\frac{1}{2} \right]$$

$$\tan \theta = [\sqrt{3}]$$

2.2 ครูแจกเอกสารที่มีโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากให้นักเรียนทุกคน แล้วติดแผ่นภาพจากโจทย์บนกระดาน แล้ว สนทนาซักถามนักเรียน

โจทย์ที่ 1 กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุม B เป็นมุมฉาก มุม A มีขนาด 60 องศา AB ยาว 3 เซนติเมตร จงหาความยาวของด้านที่เหลือ

แผนภาพ 4



- โจทย์กำหนดอะไรให้บ้าง? [$A = 60^\circ$, $AB = 3$ เซนติเมตร]

- โจทย์ต้องการหาอะไร? [ความยาวของ AC, BC]

a - จากโจทย์สามารถหาอะไรได้บ้าง? [$\sin 60^\circ$, $\cos 60^\circ$, $\tan 60^\circ$]

- จากรูป $\cos 60^\circ = \frac{3}{b}$ และจากความรู้เดิมทราบว่า

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \text{ดังนั้น} \quad \frac{3}{b} = \frac{1}{2} \quad \text{แล้ว} \quad b = 6$$

- หา BC ได้อย่างไร? [จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส หรือ $\sin 60^\circ$, $\tan 60^\circ$]

- ถ้าใช้ ทฤษฎีบทพีทาโกรัสจะได้อะไร? [$6^2 - 3^2 = b^2$; $b = 3\sqrt{3}$]

$$\therefore BC = 3\sqrt{3} \text{ เซนติเมตร}$$

- ถ้าใช้ $\sin 60^\circ$ จะได้อะไร? [$\sin 60^\circ = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{6} \Rightarrow a = 3\sqrt{3}$]

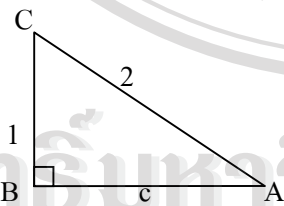
$$\therefore BC = 3\sqrt{3} \text{ เซนติเมตร}$$

- ถ้าใช้ $\tan 60^\circ$ จะได้อะไร? [$\tan 60^\circ = \frac{a}{3} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{a}{3} \Rightarrow a = 3\sqrt{3}$]

$$\therefore BC = 3\sqrt{3} \text{ เซนติเมตร}$$

โจทย์ที่ 2 กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุม B เป็นมุมฉาก BC ยาว 1 เมตร AC ยาว 2 เมตร จงหาความยาวของด้านที่เหลือ และขนาดของมุม A

แผนภาพที่ 5



- จากโจทย์เรารู้ว่าอะไรบ้าง? [$AC = 2$ เมตร $BC = 1$ เมตร]

- โจทย์ต้องการหาอะไร? [AB และขนาดของมุม A]

- จากโจทย์ และความรู้เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติพอจะหาอะไร

ได้บ้าง? [ขนาดของมุม A] หาได้อย่างไร?

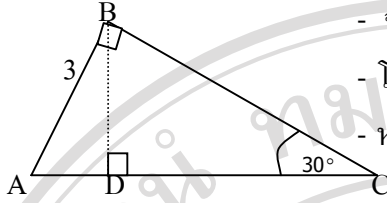
$$\left[\sin A = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 30^\circ \right] \therefore \text{ขนาดของมุม A} = ? [30^\circ]$$

- หา AB ได้อย่างไร? [$\cos A = \frac{c}{2} \Rightarrow \sin 30^\circ = \frac{c}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{c}{2} \Rightarrow c = \sqrt{3}$]

$$\therefore \text{ความยาวของ AB เท่ากับ } \sqrt{3} \text{ เมตร}$$

$$\text{ดังนั้นความยาวของ AB} = \sqrt{3} \text{ เมตร และขนาดของมุม A} = 30^\circ$$

โจทย์ที่ 3 กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุม B เป็นมุมฉากจาก AB ยาว 3 เมตร $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ ที่จุด D ขนาดของมุม C เท่ากับ 30° องศา จงหาความยาวของด้าน AC, BD



- จากโจทย์เรารู้อะไรบ้าง ? [$AB=3$ เมตร $C = 30^\circ, \overline{BD} \perp \overline{AC}$]

- โจทย์ต้องการหาอะไร ? [ความยาวของ AC, BD]

- หา AC ได้อย่างไร ? [พิจารณา $\triangle ABC$ จาก

$$\sin 30^\circ = \frac{3}{AC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3}{AC} \Rightarrow AC = 6]$$

- หา BD ได้อย่างไร ? [พิจารณา $\triangle ABD$]

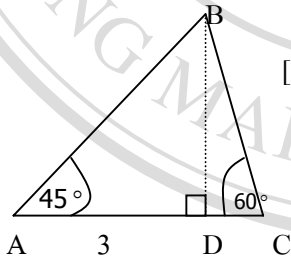
$$\frac{BD}{3} = \sin A ; A = 180^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

$$\sin 60^\circ = \frac{BD}{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BD}{3} \Rightarrow BD = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

ดังนั้นจะได้ว่า AC ยาว 6 เมตร และ BD ยาว $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ เมตร

2.3 ครูให้โจทย์แก่นักเรียนอีก 3 ข้อ แล้วแบ่งนักเรียนออกเป็น 3 กลุ่ม ครูคิดแผนภาพของ โจทย์แต่ละข้อบนกระดาน เสร็จแล้วให้นักเรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันคิดแก้ปัญหาแล้วออกมา แสดงวิธีหาคำตอบบนกระดาน แล้วครูและนักเรียนร่วมกันเฉลย

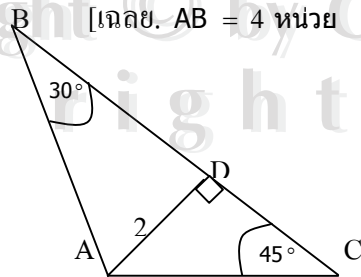
โจทย์ข้อ 1 กำหนดสามเหลี่ยม ABC โดยมีมุม $A = 45^\circ$ องศา , $C = 60^\circ$ องศา $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ ที่จุด D และ $AD = 3$ หน่วย จงหา AC, BC



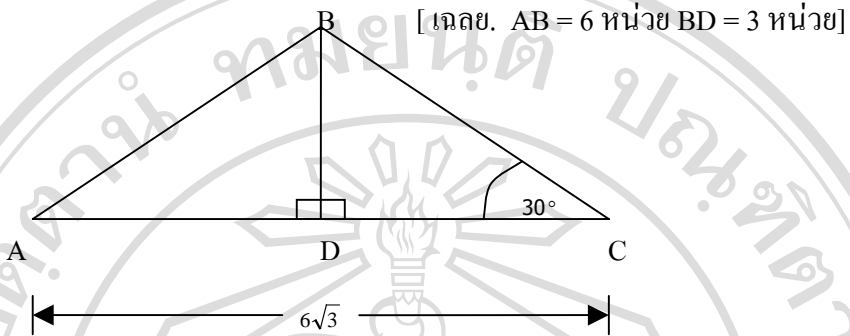
[เฉลย. $AC = 3 + \sqrt{3}$ หน่วย , $BC = 2\sqrt{3}$ หน่วย]

โจทย์ข้อ 2 กำหนดสามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมใดๆ โดยมีมุม C เท่ากับ 45° องศา , มุม B เท่ากับ 30° องศา $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ที่จุด D และ $AD = 2$ หน่วย จงหา AB, BC

[เฉลย. $AB = 4$ หน่วย , $BC = 2 + 2\sqrt{3}$ หน่วย]



โจทย์ข้อ 3 กำหนดสามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยมีมุม C เท่ากับ 30° องศา , $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ที่จุด D และ AC ยาว $6\sqrt{3}$ หน่วย จงหา AB , BD



2.4 ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปเกี่ยวกับขั้นตอนการดำเนินการทำโจทย์ปัญหา ว่ามีขั้นตอนดังต่อไปนี้

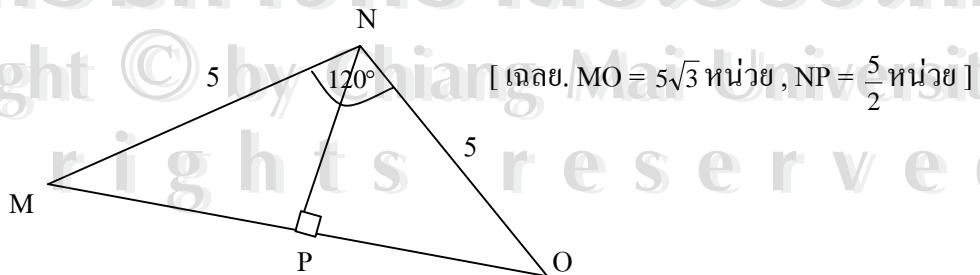
2.5 ครูแจกเอกสารฝึกหัด 2.1 ให้นักเรียนทำเป็นการบ้าน โดยเขียนลงในเอกสารที่ครูแจกให้ และส่งครูในตอนเช้าของวันต่อไปก่อนทำกิจกรรมหน้าเสาธง

เอกสารฝึกหัด 2.1

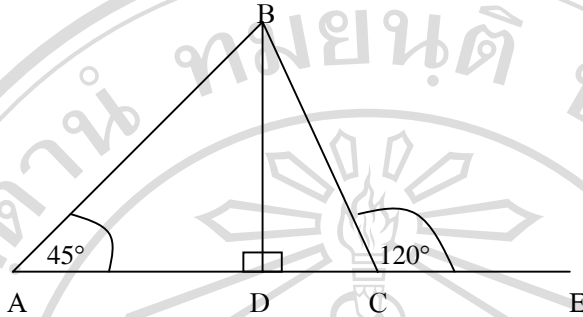
การวิเคราะห์โจทย์ปัญหา

1. กำหนดให้ MNO เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วมี MN , NO ยาวด้านละ 5 หน่วย

\overline{NP} ตัด \overline{MO} ที่จุด P มุม N มีขนาดเท่ากับ 120° จงหา MO , NP



2. กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมใดๆ ที่มี $BD \perp AC$ ที่จุด D , BC ยาว 4 หน่วย มุม $\angle BCE = 120^\circ$ และ $\angle BAD = 45^\circ$ จงหา AC และพื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC
 [เฉลย. $AC = 2 + 2\sqrt{3}$ หน่วย, พื้นที่ $\triangle ABC = 6 + 2\sqrt{3}$ ตารางหน่วย]



3. สื่อการเรียนการสอน

- 3.1 แผ่นภาพ 1-6
- 3.2 เอกสารประกอบการเรียนการสอน
- 3.3 เอกสารฝึกหัด 2.1

4. การวัดและประเมินผล

4.1 การวัดผล

- 4.1.1 สังเกตจากการทำกิจกรรมในชั้นเรียน และการตอบคำถาม
- 4.1.2 จากการทำเอกสารฝึกหัด 2.1
- 4.1.3 จากการสรุปขั้นตอนวิธีการดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

4.2 การประเมินผล

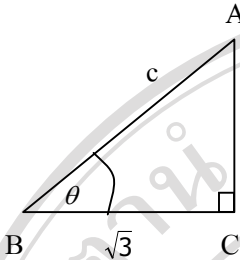
ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright © by Chiang Mai University

All rights reserved

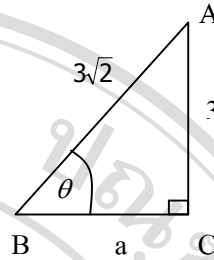
เอกสารประกอบการเรียนการสอน คาบที่ 2

แผนภาพ 1



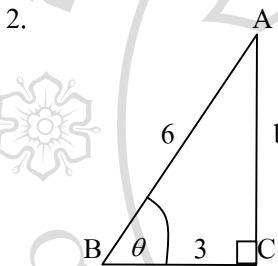
$c = \dots\dots$
 $\sin \theta = \dots\dots$
 $\cos \theta = \dots\dots$
 $\tan \theta = \dots\dots$

แผนภาพ 2



$a = \dots\dots$
 $\sin \theta = \dots\dots$
 $\cos \theta = \dots\dots$
 $\tan \theta = \dots\dots$

แผนภาพ 3



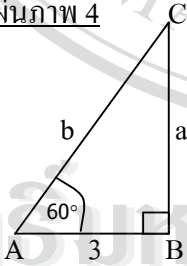
$b = \dots\dots$
 $\sin \theta = \dots\dots$
 $b \cos \theta = \dots\dots$
 $\tan \theta = \dots\dots$

ทำกันได้
หรือปล่าว
ครับ



โจทย์ที่ 1 กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากมีมุม B เป็นมุมฉาก มุม A มีขนาด 60 องศา AB ยาว 3 เซนติเมตร จงหาความยาวของด้านที่เหลือ

แผนภาพ 4



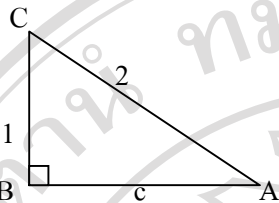
- โจทย์กำหนดอะไรให้บ้าง ?
- โจทย์ต้องการหาอะไร?
- จากโจทย์สามารถหาอะไรได้บ้าง?
- จากรูป $\cos 60^\circ = \dots\dots$ และจากความรู้เดิมทราบว่า $\cos 60^\circ = \dots\dots$ ดังนั้น $\frac{3}{b} = \dots\dots$ แล้ว $b = \dots\dots$

- หา BC ได้อย่างไร ?
- ถ้าใช้ ทฤษฎีบทพีทาโกรัสจะได้อย่างไร ?
- $\therefore BC = \dots\dots$ เซนติเมตร
- ถ้าใช้ $\sin 60^\circ$ จะได้อย่างไร ?
- $\therefore BC = \dots\dots$ เซนติเมตร
- ถ้าใช้ $\tan 60^\circ$ จะได้อย่างไร ?
- $\therefore BC = \dots\dots$ เซนติเมตร

ลิขสิทธิ์ © by Chiang Mai University
 All rights reserved

โจทย์ที่ 2 กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุม B เป็นมุมฉาก BC ยาว 1 เมตร AC ยาว 2 เมตร จงหาความยาวของด้านที่เหลือ และขนาดของมุม A

แผนภาพที่ 5



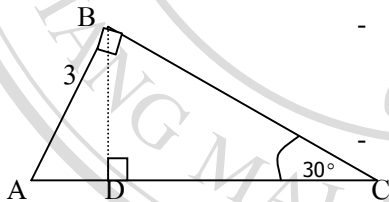
- จากโจทย์เราทราบอะไรบ้าง ?
- โจทย์ต้องการหาอะไร ?
- จากโจทย์ และความรู้เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติพอจะหาอะไรได้บ้าง ? หาได้อย่างไร ?
- ∴ ขนาดของมุม A =

- หา AB ได้อย่างไร ?

∴ ความยาวของ AB เท่ากับ.....เมตร

ดังนั้นความยาวของ AB = เมตร และขนาดของมุม A =

โจทย์ที่ 3 กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุม B เป็นมุมฉาก AB ยาว 3 เมตร $BD \perp AC$ ที่จุด D ขนาดของมุม C เท่ากับ 30° จงหาความยาวของด้าน AC , BD



- จากโจทย์เราทราบอะไรบ้าง ?
- โจทย์ต้องการหาอะไร ?

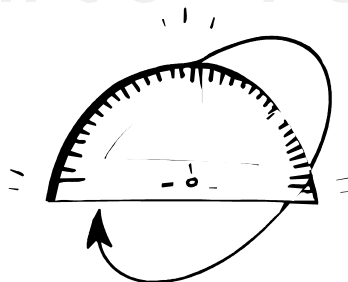
- หา AC ได้อย่างไร ?

- หา BD ได้อย่างไร ? [พิจารณารูป $\triangle ABD$]

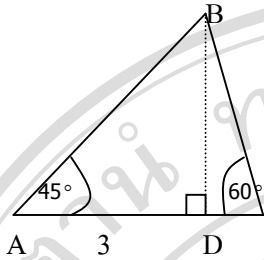
จะได้ $\frac{BD}{3} = \sin \dots$; $\hat{A} = \dots$

$\sin A = \frac{BD}{3} \Rightarrow \sin \dots = \frac{BD}{3} \Rightarrow \dots = \frac{BD}{3} \Rightarrow BD = \dots$

ดังนั้นจะได้ว่า AC ยาว เมตร และ BD ยาว เมตร



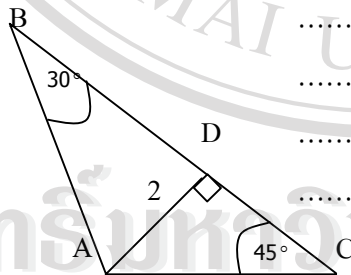
โจทย์ข้อ 4 กำหนดสามเหลี่ยม ABC โดยมีมุม A = 45 องศา , C = 60 องศา $BD \perp AC$ ที่จุด D และ AD = 3 หน่วย จงหา AC , BC



[เฉลย. AC = $3 + \sqrt{3}$ หน่วย , BC = $2\sqrt{3}$ หน่วย]

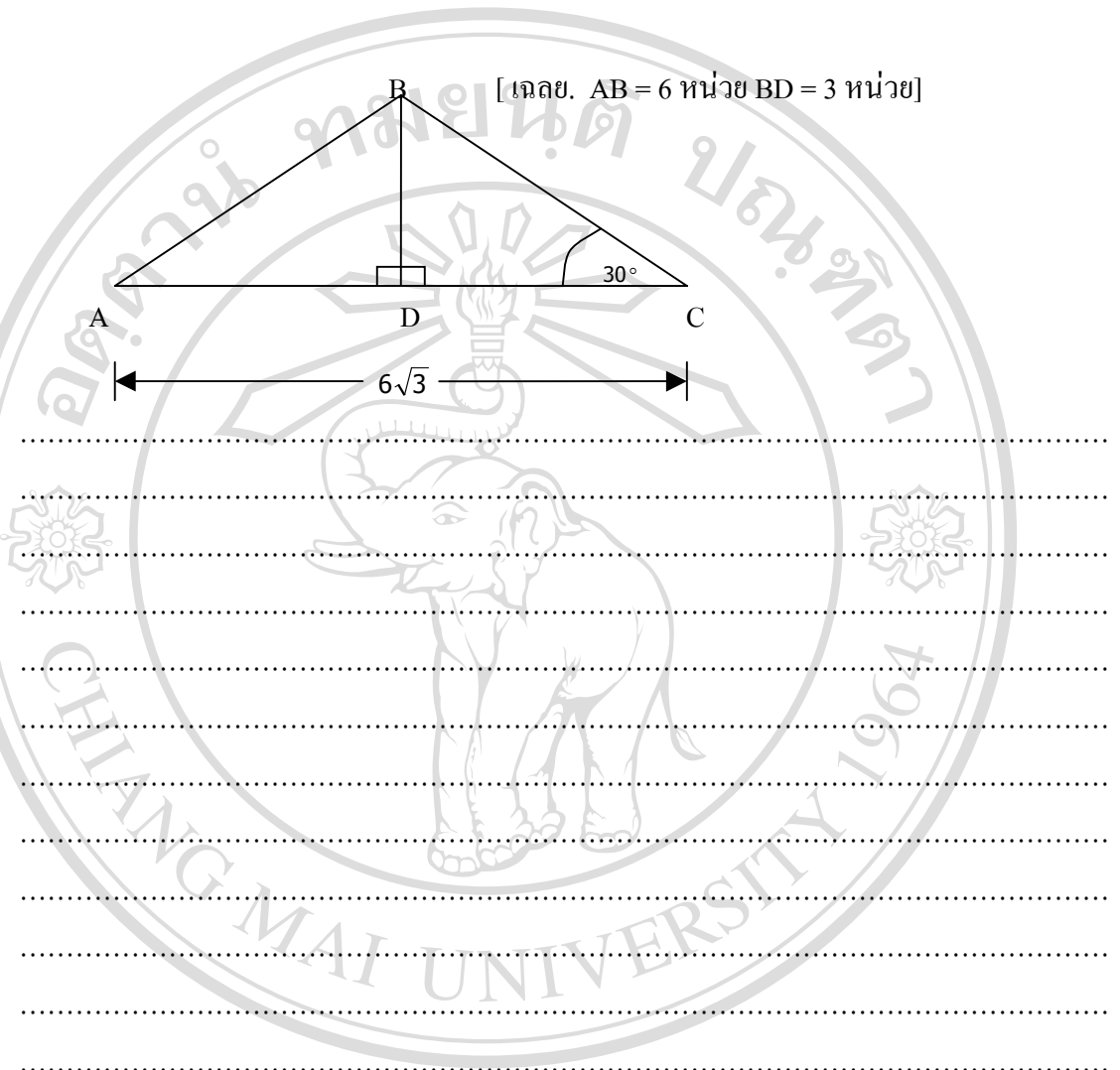
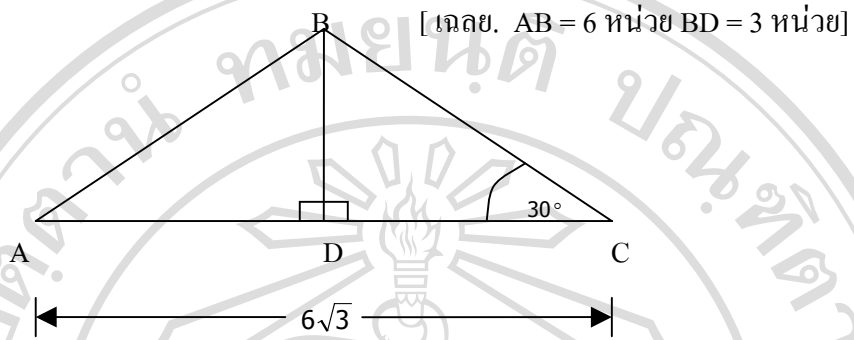
โจทย์ข้อ 5 กำหนดสามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมใดๆ โดยมีมุม C เท่ากับ 45 องศา , มุม B เท่ากับ 30 องศา $AD \perp BC$ ที่จุด D และ AD = 2 หน่วย จงหา AB , BC

[เฉลย. AB = 4 หน่วย , BC = $2 + 2\sqrt{3}$ หน่วย]



ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright © by Chiang Mai University
All rights reserved

โจทย์ข้อ 6 กำหนดสามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยมีมุม C เท่ากับ 30° องศา , $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ที่จุด D และ AC ยาว $6\sqrt{3}$ หน่วย จงหา AB , BD



ไม่มีอะไรยากเกินความ
สามารถของเราครับ

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright © by Chiang Mai University
All rights reserved



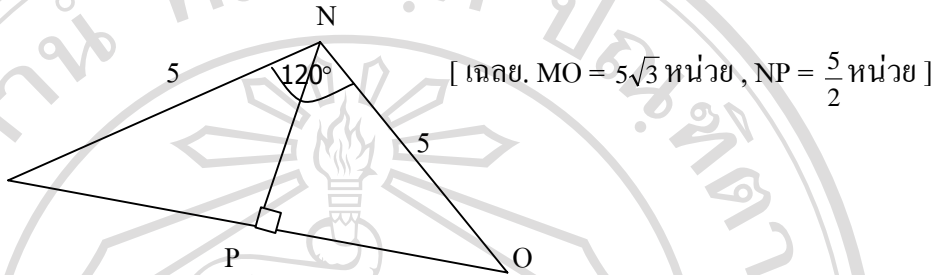
เอกสารฝึกหัด 2.1

ฝึกการวิเคราะห์โจทย์ปัญหา

ชื่อ
 ชั้น ม. 4/1 เลขที่.....

5. กำหนดให้ MNO เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วมี MN, NO ยาวด้านละ 5 หน่วย

NP ตัด MO ที่จุด P มุม N มีขนาดเท่ากับ 120° จงหา MO, NP

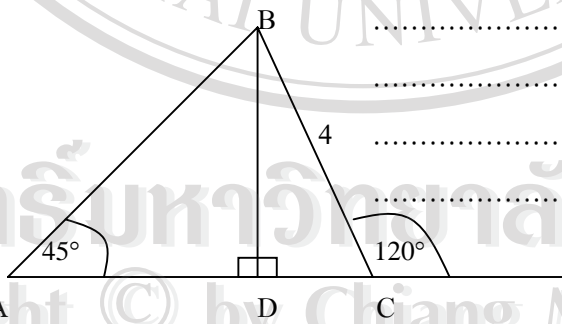


.....

6. กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมใดๆ ที่มี $BD \perp AC$ ที่จุด D, BC ยาว 4 หน่วย มุม

$BCE = 120^\circ$ และ $BAD = 45^\circ$ จงหา AC และพื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC

[เฉลย. AC = $2 + 2\sqrt{3}$ หน่วย, พื้นที่ $\triangle ABC = 6 + 2\sqrt{3}$ ตารางหน่วย]



ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright © by Chiang Mai University

All rights reserved

.....

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3

เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ

จำนวน 1 คาบ

วิชาคณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค 012

ภาคเรียนที่ 2

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

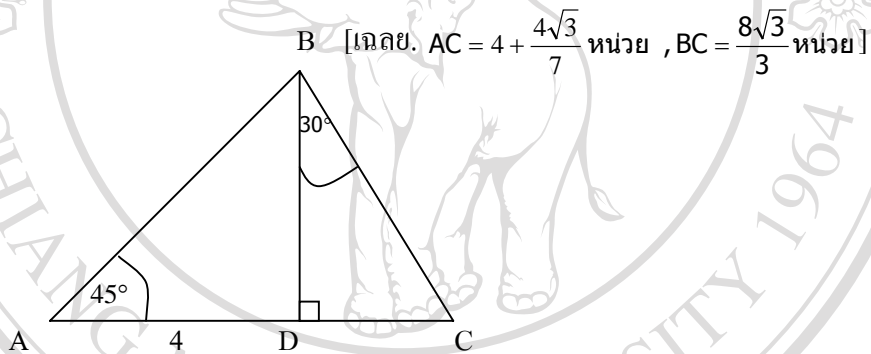
1. จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถนำความรู้เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวันได้

2. เนื้อหาและกิจกรรมการเรียนรู้การสอน

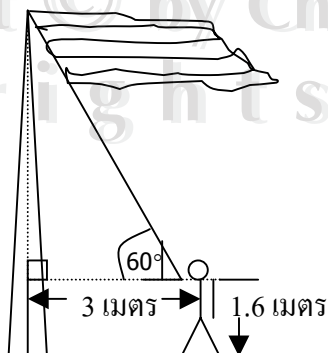
2.1 ครูแจกโจทย์ปัญหา และรูปภาพติดบนกระดาน แล้วให้นักเรียนหาคำตอบจากโจทย์ เพื่อเป็นการทบทวนความรู้เดิม ซึ่งโจทย์มีดังนี้

โจทย์ กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมใด ๆ มุม A มีขนาดเท่ากับ 45° และมุม B เท่ากับ 30° , AD ยาว 4 หน่วย จงหา AC, BC



2.2 ครูแบ่งนักเรียนออกเป็น 9 กลุ่ม แล้วครูอธิบายถึงกิจกรรมที่จะต้องทำต่อไป คือ การลงพื้นที่ในการหาความสูงหรือหาความยาวของวัสดุสิ่งของที่อยู่ในบริเวณโรงเรียน เช่น ความสูงของเสาธง ความสูงของอาคาร ความสูงของต้นไม้ เป็นต้น โดยครูกำหนดให้นักเรียนวัดมุมที่มีขนาด 45° , 60° เท่านั้น ครูแจกอุปกรณ์ช่วยในการหาคือรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุมเป็น 45° , 60° เพื่อจะได้หาระยะห่างได้สะดวกขึ้น

เช่น หาความยาวของเชือกที่ชักธงชาติ หรือ ความสูงของเสาธงชาติ



2.3 เมื่อนักเรียนแต่ละกลุ่มได้ข้อมูลเสร็จแล้ว ครูแจกกระดาษบรู๊ฟ และสีให้แต่ละกลุ่มได้ เขียนนำเสนอของของแต่ละกลุ่มแล้วติดชิ้นงานตามบริเวณห้องเรียนแล้วให้แต่ละกลุ่มได้ชื่นชมผลงานของแต่ละกลุ่มพร้อมกับติชม ครูแจกกระดาษ A4 ให้เลขากลุ่มเขียนส่งให้ครู เพื่อตรวจสอบความถูกต้อง

2.4 ครูสอบถามถึงปัญหาในการทำงาน และ ถามนักเรียนเกี่ยวกับมุมที่ใช้ในการวัดว่าควรจะใช้มุมใดจึงจะมีข้อจำกัดน้อยที่สุด? (60°) เพราะอะไร? [ระยะที่ยื่นกับวัตถุไม่ต้องห่างกันมากทำให้สะดวกในการวัด]

2.5 ครูส่งงานนักเรียนให้ใช้วิธีการเดียวกันที่ได้ทำไปกลับไปหาความสูงของบ้านของนักเรียนแต่ละคน และครูแจกกระดาษ A4 ให้นักเรียนเพื่อเขียนรูปคร่าวๆ และแสดงวิธีการหามาส่งครู แจกแบบบันทึกการเรียนรู้ให้นักเรียนเขียนเกี่ยวกับความรู้ที่ได้รับ ปัญหา/อุปสรรค ที่เกิดในการเรียนในหัวข้ออัตราส่วนตรีโกณมิติ และอยากให้ครูช่วยเหลืออย่างไร ข้อเสนอแนะอื่นๆ โดยเขียนเป็นการบ้าน กำหนดส่งในตอนเช้าของวันต่อไปก่อนทำ กิจกรรมหน้าเสาธง

3. สื่อการเรียนการสอน

- 3.1 แผ่นภาพรูปสามเหลี่ยมใดๆ
- 3.2 วัตถุ สิ่งของที่อยู๋ภายในบริเวณโรงเรียน
- 3.3 กระดาษ A4
- 3.4 กระดาษบรู๊ฟ และ สี

4. การวัดและประเมินผล

4.1 การวัดผล

- 4.1.1 สังเกตจากการทำกิจกรรมร่วมกัน
- 4.1.2 จากการทำโจทย์
- 4.1.3 จากการส่งผลงาน

4.2 การประเมินผล

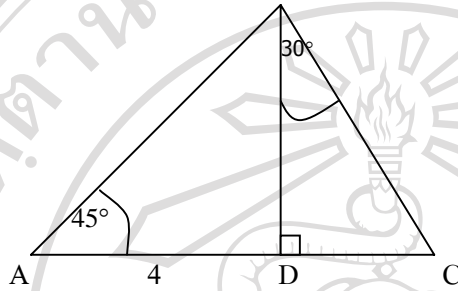
ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright © by Chiang Mai University
All rights reserved

เอกสารประกอบการเรียนการสอน คาบที่ 3

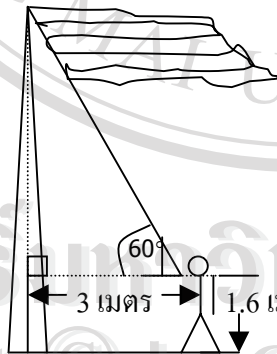
ชื่อ ชั้น ม. 4/1 เลขที่

โจทย์ 1 กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมใด ๆ มุม A มีขนาดเท่ากับ 45° และมุม B เท่ากับ 30° , AD ยาว 4 หน่วย จงหา AC, BC

[เฉลย. $AC = 4 + \frac{4\sqrt{3}}{7}$ หน่วย, $BC = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ หน่วย]



โจทย์ 2 จงหาความยาวของเชือกที่ชักธงชาติ และ ความสูงของเสาธงชาติ



ลิขสิทธิ์ © โดย Chiang Mai University
All rights reserved

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4

เรื่อง ฟังก์ชันของมุมในตำแหน่งมาตรฐาน

จำนวน 1 คาบ

วิชาคณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค 012

ภาคเรียนที่ 2

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

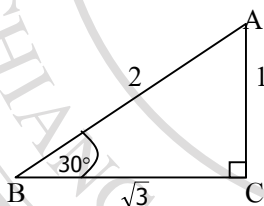
นักเรียนสามารถ

- 1.1 บอกความหมายของมุมในตำแหน่งมาตรฐานได้
- 1.2 เขียนมุมในตำแหน่งมาตรฐานได้
- 1.3 บอกนิยามฟังก์ชันของมุมในตำแหน่งมาตรฐานได้

2. เนื้อหาและกิจกรรมการเรียนรู้การสอน

2.1 ครูแจกทบทวนความรู้เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมในสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยครูดิ
 แผ่นภาพรูปสามเหลี่ยมมุมฉากติดบนกระดาน แล้วเรียนนักเรียนตาม – ตอบ ทีละคน

แผ่นภาพ 1

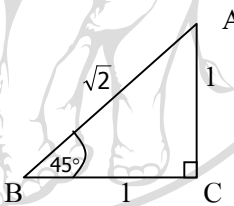


$$\sin 30^\circ = ? \left[\frac{1}{2} \right]$$

$$\cos 30^\circ = ? \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

$$\tan 30^\circ = ? \left[\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \right]$$

แผ่นภาพ 2

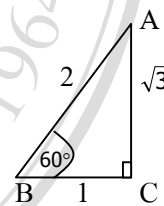


$$\sin 45^\circ = ? \left[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

$$\cos 45^\circ = ? \left[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

$$\tan 45^\circ = ? [1]$$

แผ่นภาพ 3



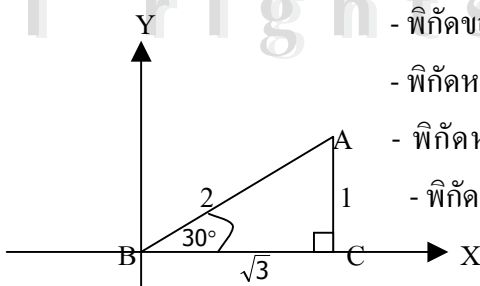
$$\sin 60^\circ = ? \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

$$\cos 60^\circ = ? \left[\frac{1}{2} \right]$$

$$\tan 60^\circ = ? [\sqrt{3}]$$

2.2 ครูนำแผ่นภาพของระบบพิกัดฉากติดบนกระดาน แล้วนำรูปภาพสามเหลี่ยมมุมฉากที่
 เขียนความยาวของด้านแต่ละด้านติดอยู่บนแกนระบบพิกัดฉากทีละรูป โดยให้จุดยอด
 ของมุมที่จุดเริ่มต้น(0,0)และด้านประชิดมุมที่ไปบนแกน X แล้วสนทนาซักถามนักเรียน

แผ่นภาพ 4

- พิกัดของจุด A คือจุดใด? $[(\sqrt{3}, 1)]$

- พิกัดหน้าได้มาจากอะไร? [ระยะจากจุด C ถึงจุด B]

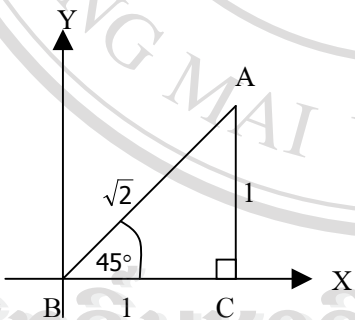
- พิกัดหลังได้มาจากอะไร? [ระยะจากจุด C ถึงจุด A]

- พิกัดจุด B คือจุดใด? $[(0, 0)]$ เรียกจุด B ว่า? [จุดเริ่มต้น]

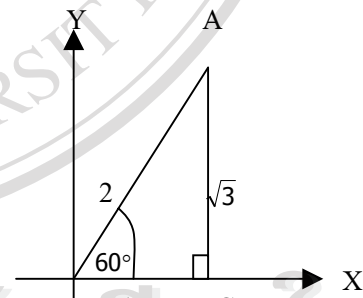
- ความยาวของด้าน AB หาได้อย่างไร ? [ทบ.พีทาโกรัส หรือ ระยะห่างระหว่างจุด A กับจุดB]
- ระยะห่างระหว่างจุด A กับจุดB หาได้อย่างไร? [$2 = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}$]
- จากความรู้เดิมทราบว่า $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ 1 คือ [พิภดหลังของจุด A หรือ ระยะห่างจากแกน X ไปยังจุด A] , 2 คือ [ความยาวของด้าน AB หรือ ระยะห่างระหว่างจุด A กับจุดB] ดังนั้น $\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \left[\frac{\text{พิภดหลังของจุดA}}{\text{ระยะห่างระหว่างจุดAกับจุดB}} \right]$
- $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sqrt{3}$ คือ [พิภดหน้าของจุด A หรือ ระยะห่างจากแกน Y ไปยังจุด A] 2 คือ [ความยาวของด้าน AB หรือ ระยะห่างระหว่างจุด A กับจุดB] ดังนั้น $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \left[\frac{\text{พิภดหน้าของจุดA}}{\text{ระยะห่างระหว่างจุดAกับจุดB}} \right]$
- $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 1 คือ [พิภดหลังของจุด A หรือระยะห่างจากแกน X ไปยังจุด A] $\sqrt{3}$ คือ [พิภดหน้าของจุด A หรือ ระยะห่างจากแกน Y ไปยังจุด A] ดังนั้น $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \left[\frac{\text{พิภดหลังของจุดA}}{\text{พิภดหน้าของจุดA}} \right]$

2.3 ครูนำรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุมเป็น 45° 60° ติดทับกับระบบแกนพิกัดฉากแล้ว สอนทบทวนให้นักเรียนในทำนองเดียวกับข้อ 2.2

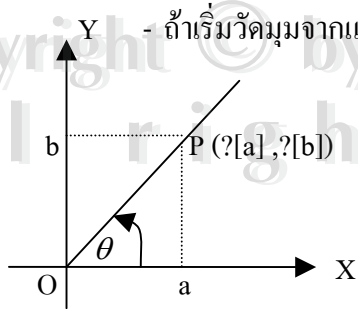
แผนภาพ 5



แผนภาพ 6



2.4 ครูดึงแผนภาพ 7 บนกระดาน แล้วสอนทบทวนให้นักเรียน



- ถ้าเริ่มวัดมุมจากแกน X โดยมีขนาด θ และบนด้านสิ้นสุดของมุม θ มีจุด P ใดๆ พิกัดของจุด P คือ ? [(a,b)] ระยะห่างจากจุด P ไปยังจุดกำเนิด คือ ? [$\sqrt{a^2 + b^2}$]
- ถ้ากำหนดให้ $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ จะได้ว่า $\sin \theta = \frac{b}{r}$

$\cos \theta = \frac{a}{r}$, $\tan \theta = \frac{b}{a}$

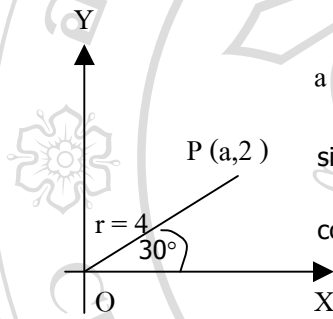
2.5 ครูบอกกับนักเรียนว่ามุมในลักษณะเช่นนี้ เรียกว่า “มุมในตำแหน่งมาตรฐาน” แล้วให้นิยามฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในตำแหน่งมาตรฐาน

นิยาม เมื่อ $P(a,b)$ เป็นจุดใด ๆ บนด้านสิ้นสุดของมุม θ (แขนของมุม θ) และ

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ แล้ว } \sin \theta = \frac{b}{r}, \cos \theta = \frac{a}{r}, \tan \theta = \frac{b}{a}; a \neq 0$$

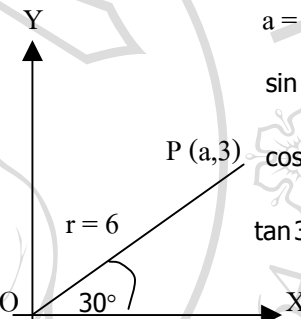
2.6 ครูแบ่งนักเรียนออกเป็น 9 กลุ่ม แล้วแจกเอกสารประกอบการเรียนการสอน ซึ่งประกอบด้วยแผ่นภาพฟังก์ชันของมุมในตำแหน่งมาตรฐาน พร้อมทั้งให้หาค่าของฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนของมุมในตำแหน่งมาตรฐานร่วมกัน ซึ่งแสดงดังแผ่นภาพต่อไปนี้

กลุ่ม 1



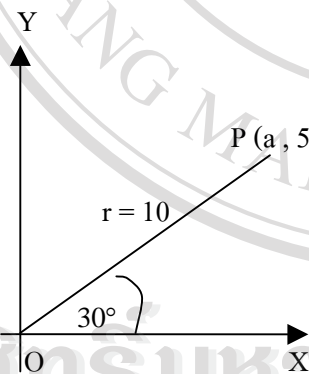
$$\begin{aligned} a &= ? [2\sqrt{3}] \\ \sin 30^\circ &= ? \left[\frac{1}{2}\right] \\ \cos 30^\circ &= ? \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \\ \tan 30^\circ &= ? \left[\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\right] \end{aligned}$$

กลุ่ม 2



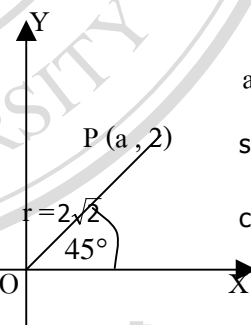
$$\begin{aligned} a &= ? [3\sqrt{3}] \\ \sin 30^\circ &= ? \left[\frac{1}{2}\right] \\ \cos 30^\circ &= ? \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \\ \tan 30^\circ &= ? \left[\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\right] \end{aligned}$$

กลุ่ม 3



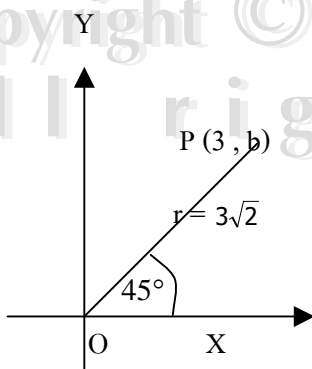
$$\begin{aligned} a &= ? [5\sqrt{3}] \\ \sin 30^\circ &= ? \left[\frac{1}{2}\right] \\ \cos 30^\circ &= ? \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \\ \tan 30^\circ &= ? \left[\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\right] \end{aligned}$$

กลุ่ม 4



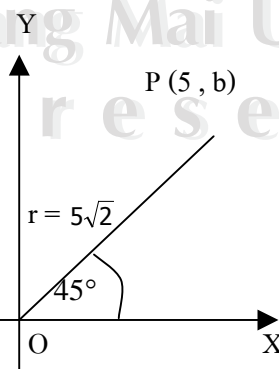
$$\begin{aligned} a &= ? [2] \\ \sin 45^\circ &= ? \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \\ \cos 45^\circ &= ? \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \\ \tan 45^\circ &= ? [1] \end{aligned}$$

กลุ่ม 5



$$\begin{aligned} b &= ? [3] \\ \sin 45^\circ &= ? \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \\ \cos 45^\circ &= ? \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \\ \tan 45^\circ &= ? [1] \end{aligned}$$

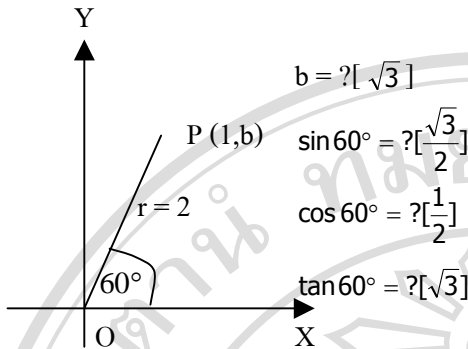
กลุ่ม 6



$$\begin{aligned} b &= ? [5] \\ \sin 45^\circ &= ? \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \\ \cos 45^\circ &= ? \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \\ \tan 45^\circ &= ? [1] \end{aligned}$$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright © by Chiang Mai University
All rights reserved

กลุ่ม 7



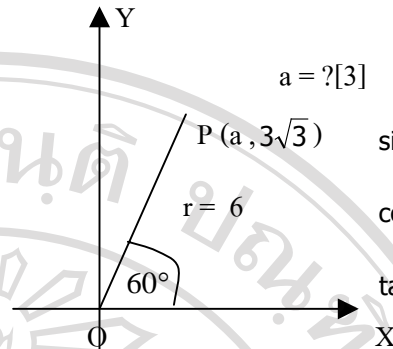
$$b = ?[\sqrt{3}]$$

$$\sin 60^\circ = ?\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$\cos 60^\circ = ?\left[\frac{1}{2}\right]$$

$$\tan 60^\circ = ?[\sqrt{3}]$$

กลุ่ม 8



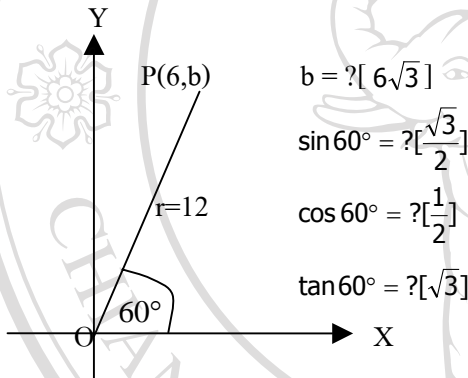
$$a = ?[3]$$

$$\sin 60^\circ = ?\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$\cos 60^\circ = ?\left[\frac{1}{2}\right]$$

$$\tan 60^\circ = ?[\sqrt{3}]$$

กลุ่ม 9



$$b = ?[6\sqrt{3}]$$

$$\sin 60^\circ = ?\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$\cos 60^\circ = ?\left[\frac{1}{2}\right]$$

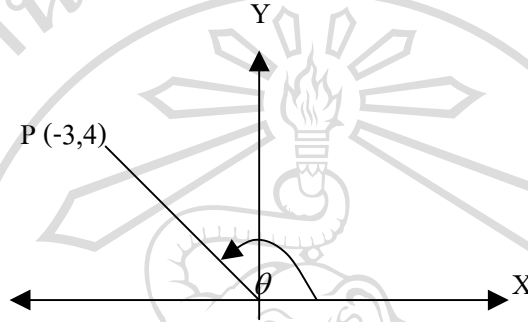
$$\tan 60^\circ = ?[\sqrt{3}]$$

เมื่อแต่ละกลุ่มทำเสร็จแล้วครูติดแผ่นสรุปค่าฟังก์ชันของมุมในตำแหน่งมาตรฐานไว้บนกระดานโดยปิดคำตอบไว้ก่อน แล้วเรียกถามนักเรียนทีละคน โดยค่าฟังก์ชันของมุม 30 องศา เรียกถามนักเรียนจากกลุ่มที่ 1 – 3 ค่าฟังก์ชันของมุม 45 องศา เรียกถามนักเรียนจากกลุ่มที่ 4 – 6 ค่าฟังก์ชันของมุม 60 องศา เรียกถามนักเรียนจากกลุ่มที่ 7 – 9 แล้วครูเปิดคำตอบเพื่อให้นักเรียนตรวจสอบความถูกต้อง ซึ่งแต่ละกลุ่มจะต้องเขียนเอกสารส่งให้ครู 1 ชุด แล้วครูและนักเรียนช่วยกันสรุปค่าฟังก์ชันของมุมในตำแหน่งมาตรฐานซึ่งสามารถสรุปได้ว่า

$$\begin{array}{lll} \sin 30^\circ = \frac{1}{2} & \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} & \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} & \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \\ \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} & \tan 45^\circ = 1 & \tan 60^\circ = \sqrt{3} \end{array}$$

2.7 ครูให้นักเรียนเปรียบเทียบค่าฟังก์ชันของมุมในตำแหน่งมาตรฐานที่ได้ กับ ค่าฟังก์ชันของมุมในสามเหลี่ยมมุมฉากที่ได้ในการเรียนคาบเรียนที่ 1 ว่าเหมือนหรือต่างกันอย่างไร ?

- 2.8 ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปความหมายของมุมในตำแหน่งมาตรฐาน ว่า “ เป็นมุมที่เขียนในแกนพิกัดฉากโดยด้านเริ่มต้นทับไปกับแกน X ที่มีค่าเป็นบวก จุดยอดของมุมทับกับจุดเริ่มต้น (0,0) และด้านสิ้นสุดของมุมอยู่ในระบบพิกัดฉาก”
- 2.9 ครูแจกเอกสาร โจทย์ให้กับนักเรียนโดยให้ทำเป็นการบ้าน แล้วส่งในคาบเรียนต่อไป
โจทย์ “ จงหาค่าของ \sin , \cos , \tan ของมุมต่อไปนี้ ”



$$r = ? [5]$$

$$\sin \theta = ? \left[\frac{4}{5} \right]$$

$$\cos \theta = ? \left[\frac{-3}{5} = -\frac{3}{5} \right]$$

$$\tan \theta = ? \left[\frac{4}{-3} = -\frac{4}{3} \right]$$

3. สื่อการเรียนการสอน

- 3.6 แผ่นภาพรูปสามมุมฉาก
- 3.7 แผ่นภาพสรุปค่าฟังก์ชันของมุมในสามเหลี่ยมมุมฉาก
- 3.8 แผ่นภาพรูปมุมในตำแหน่งมาตรฐาน
- 3.9 เอกสารประกอบการเรียนการสอน
- 3.10 แผ่นสรุปค่าฟังก์ชันของมุมในตำแหน่งมาตรฐาน

4. การวัดและประเมินผล

4.1 การวัดผล

- 4.1.1 สังเกตจากการทำกิจกรรมร่วมกันในชั้นเรียน
- 4.1.2 จากการทำโจทย์ของแต่ละกลุ่ม 9 กลุ่ม
- 4.1.3 จากการสรุปค่าฟังก์ชันของมุมในตำแหน่งมาตรฐาน
- 4.1.4 จากการสรุปความหมายของมุมในตำแหน่งมาตรฐาน
- 4.1.5 จากการทำโจทย์การบ้าน

4.2 การประเมินผล

.....

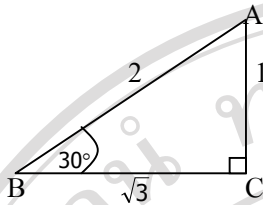
.....

.....

.....

เอกสารประกอบการเรียนการสอนคาบที่ 4

แผ่นภาพ 1

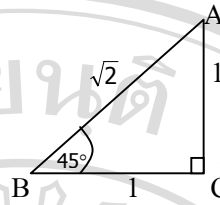


$\sin 30^\circ = \dots\dots$

$\cos 30^\circ = \dots\dots$

$\tan 30^\circ = \dots\dots$

แผ่นภาพ 2

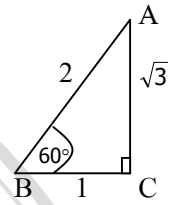


$\sin 45^\circ = \dots\dots$

$\cos 45^\circ = \dots\dots$

$\tan 45^\circ = \dots\dots$

แผ่นภาพ 3

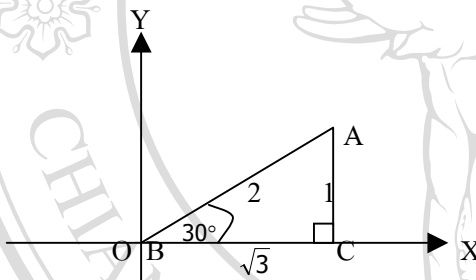


$\sin 60^\circ = \dots\dots$

$\cos 60^\circ = \dots\dots$

$\tan 60^\circ = \dots\dots$

แผ่นภาพ 4



- พิกัดของจุด A คือจุดใด ?
- พิกัดหน้าได้มาจากอะไร?
- พิกัดหลังได้มาจากอะไร?
- พิกัดจุด B คือจุดใด? (.....) เรียกจุด B ว่า?

- ความยาวของด้าน AB หาได้อย่างไร?
- ระยะห่างระหว่างจุด A กับจุด B หาได้อย่างไร?
- จากความรู้เดิมทราบว่า $\sin 30^\circ = \dots\dots$, 1 คือ พิกัด.....ของจุด A หรือ ระยะห่างจากแกน X ไปยัง..... , 2 คือ ความยาวของด้าน หรือ ระยะห่างระหว่างจุด A กับ.....

ดังนั้น $\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \left[\frac{\text{พิกัดหลังของจุด.....}}{\text{ระยะห่างระหว่างจุด A กับจุด....}} \right]$

- $\cos 30^\circ = \dots\dots$, $\sqrt{3}$ คือ พิกัดหน้าของ..... หรือ ระยะห่างจากแกน Y ไปยัง..... 2 คือ ความยาวของด้าน.....หรือ ระยะห่างระหว่าง.....

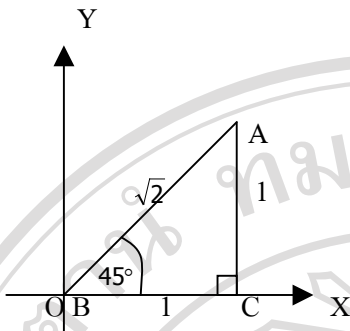
ดังนั้น $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \left[\frac{\text{พิกัดหน้าของจุด.....}}{\text{ระยะห่างระหว่างจุด....กับจุด....}} \right]$

- $\tan 30^\circ = \dots\dots$, 1 คือ พิกัดหลังของ..... หรือระยะห่างจากแกน ... ไปยังจุด ... $\sqrt{3}$ คือ พิกัดหน้าของ..... หรือ ระยะห่างจาก.....

ดังนั้น $\tan 30^\circ = \dots\dots = \left[\frac{\text{พิกัดหลังของจุด.....}}{\text{พิกัดหน้าของจุด.....}} \right]$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright © by Chiang Mai University
All rights reserved

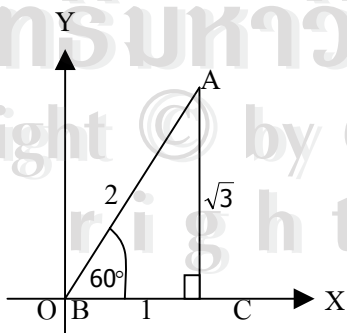
แผนภาพ 5



- พิกัดของจุด A คือจุดใด ?
- พิกัดหน้าได้มาจากอะไร?
- พิกัดหลังได้มาจากอะไร?
- พิกัดจุด B คือจุดใด? (.....) เรียกจุด B ว่า?

- ความยาวของด้าน AB หาได้อย่างไร?
- ระยะห่างระหว่างจุด A กับจุด B หาได้อย่างไร?
- จากความรู้เดิมทราบว่า $\sin 45^\circ = \dots\dots\dots$, 1 คือ พิกัด.....ของจุด A หรือ ระยะห่างจากแกน X ไปยัง..... , $\sqrt{2}$ คือ ความยาวของด้าน หรือ ระยะห่างระหว่างจุด A กับ..... ดังนั้น $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = \left[\frac{\text{พิกัดหลังของจุด.....}}{\text{ระยะห่างระหว่างจุด A กับจุด.....}} \right]$
- $\cos 45^\circ = \dots\dots\dots$, 1 คือ พิกัดหน้าของ.....หรือระยะห่างจากแกน Y ไปยัง..... $\sqrt{2}$ คือ ความยาวของด้าน.....หรือ ระยะห่างระหว่าง..... ดังนั้น $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = \left[\frac{\text{พิกัดหน้าของจุด.....}}{\text{ระยะห่างระหว่างจุด.....กับจุด.....}} \right]$
- $\tan 45^\circ = \dots\dots\dots$, 1 คือ พิกัดหลังของ..... หรือระยะห่างจากแกน ไปยังจุด..... 1 คือ พิกัดหน้าของ..... หรือ ระยะห่างจาก..... ดังนั้น $\tan 45^\circ = \dots\dots\dots = \left[\frac{\text{พิกัดหลังของจุด.....}}{\text{พิกัดหน้าของจุด.....}} \right]$

แผนภาพ 6

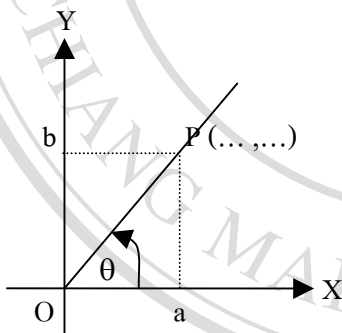


- พิกัดของจุด A คือจุดใด ?
- พิกัดหน้าได้มาจากอะไร?
- พิกัดหลังได้มาจากอะไร?
- พิกัดจุด B คือจุดใด? (.....) เรียกจุด B ว่า?
- ความยาวของด้าน AB หาได้อย่างไร?

- ระยะห่างระหว่างจุด A กับจุด B หาได้อย่างไร?

- จากความรู้เดิมทราบว่า $\sin 60^\circ = \dots\dots\dots$, $\sqrt{3}$ คือ พิกัด.....ของจุด A หรือ ระยะห่างจากแกน X ไปยัง..... , 2 คือ ความยาวของด้าน หรือ ระยะห่างระหว่างจุด A กับ..... ดังนั้น $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \left[\frac{\text{พิกัดหลังของจุด.....}}{\text{ระยะห่างระหว่างจุดAกับจุด.....}} \right]$
- $\cos 60^\circ = \dots\dots\dots$, 1 คือ พิกัดหน้าของ.....หรือระยะห่างจากแกน Y ไปยัง..... 2 คือ ความยาวของด้าน.....หรือ ระยะห่างระหว่าง.....
 ดังนั้น $\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \left[\frac{\text{พิกัดหน้าของจุด.....}}{\text{ระยะห่างระหว่างจุด.....กับจุด.....}} \right]$
- $\tan 60^\circ = \dots\dots\dots$, $\sqrt{3}$ คือ พิกัดหลังของ..... หรือระยะห่างจากแกนไปยังจุด..... 1 คือ พิกัดหน้าของ..... หรือ ระยะห่างจาก.....
 ดังนั้น $\tan 60^\circ = \dots\dots\dots = \left[\frac{\text{พิกัดหลังของจุด.....}}{\text{พิกัดหน้าของจุด.....}} \right]$

แผนภาพ 7



- ถ้าเริ่มวัดมุมจากแกน X โดยมีขนาด θ และบนด้านสิ้นสุดของมุม θ มีจุด P ใดๆ พิกัดของจุด P คือ ? (.....) ระยะห่างจากจุด P ไปยังจุดกำเนิด(0,0) คือ ?
- ถ้ากำหนดให้ $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ จะได้ว่า $\sin \theta = \dots\dots\dots$
 $\cos \theta = \dots\dots\dots$, $\tan \theta = \dots\dots\dots$

นิยาม เมื่อ P(a,b)เป็นจุดใด ๆ บนด้านสิ้นสุดของมุม θ (แขนของมุม θ) และ $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ แล้ว $\sin \theta = \frac{b}{r}$, $\cos \theta = \frac{a}{r}$, $\tan \theta = \frac{b}{a}$; $a \neq 0$

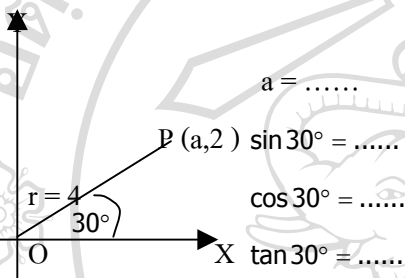
ใบงาน 4.1

กลุ่มที่

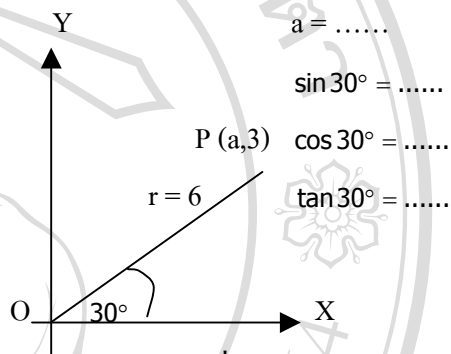
สมาชิกกลุ่ม

1.
2.
3.
4.
5.

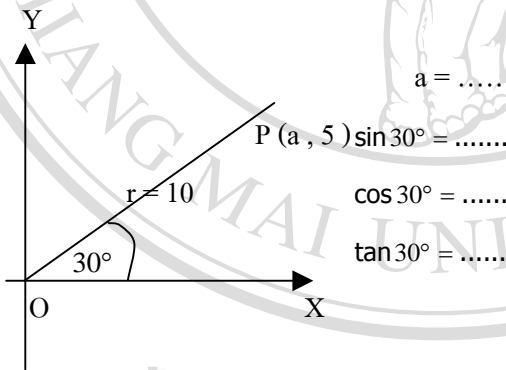
กลุ่ม 1



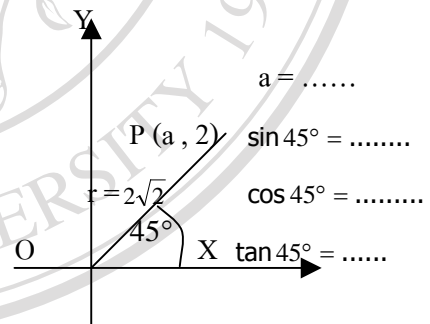
กลุ่ม 2



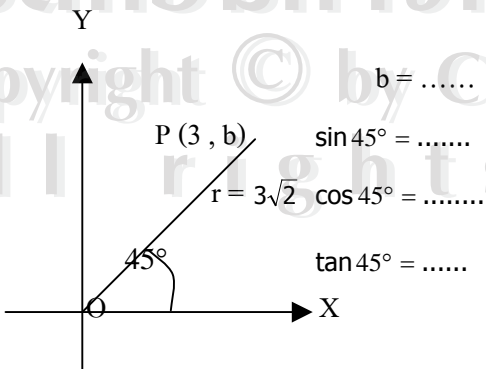
กลุ่ม 3



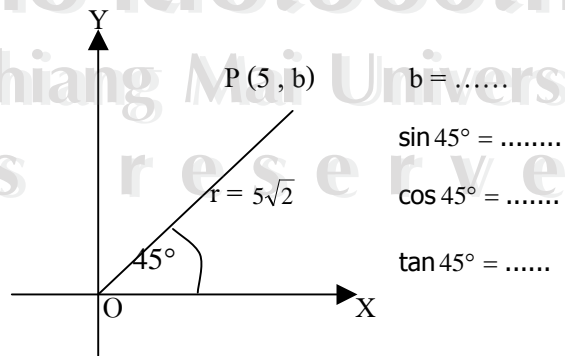
กลุ่ม 4



กลุ่ม 5

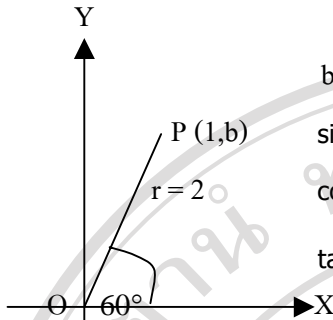


กลุ่ม 6



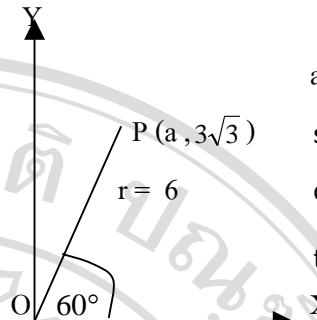
ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
 Copyright © by Chiang Mai University
 All rights reserved

กลุ่ม 7



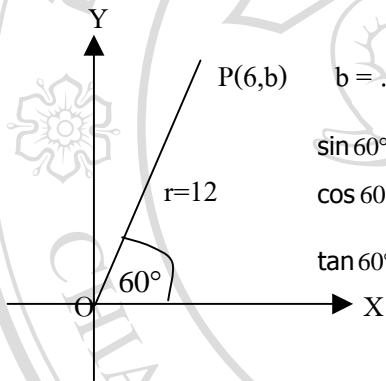
$b = \dots\dots$
 $\sin 60^\circ = \dots\dots$
 $\cos 60^\circ = \dots\dots$
 $\tan 60^\circ = \dots\dots$

กลุ่ม 8



$a = \dots\dots$
 $\sin 60^\circ = \dots\dots$
 $\cos 60^\circ = \dots\dots$
 $\tan 60^\circ = \dots\dots$

กลุ่ม 9



$b = \dots\dots$
 $\sin 60^\circ = \dots\dots$
 $\cos 60^\circ = \dots\dots$
 $\tan 60^\circ = \dots\dots$



สรุปค่าฟังก์ชันของมุมในตำแหน่งมาตรฐานได้ว่า

$\sin 30^\circ = \dots\dots$	$\sin 45^\circ = \dots\dots = \dots\dots$	$\sin 60^\circ = \dots\dots$
$\cos 30^\circ = \dots\dots$	$\cos 45^\circ = \dots\dots = \dots\dots$	$\cos 60^\circ = \dots\dots$
$\tan 30^\circ = \dots\dots = \dots\dots$	$\tan 45^\circ = \dots\dots$	$\tan 60^\circ = \dots\dots$

แผนการจัดการเรียนที่ 5

เรื่อง ค่าฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ แทนเจนของมุม 0 , 90 , 180 , 270 , 360

จำนวน 1 คาบ

วิชาคณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค 012

ภาคเรียนที่ 2

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

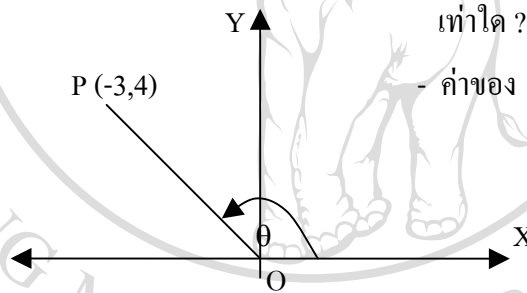
1. จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถบอกค่าของฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนของมุม 0 90 180 270 360 ได้

2. เนื้อหาและกิจกรรมการเรียนการสอน

2.1 ครูเฉลยโจทย์ที่ให้นักเรียนได้ทำการบ้านในคาบเรียนที่ผ่านมา โดยการสนทนาซักถามนักเรียนทีละคน

โจทย์ “ จงหาค่าของ sin cos tan ของมุมต่อไปนี้ ”



- ระยะห่างระหว่างจุด P กับจุดเริ่มต้นเท่ากับ

เท่าใด ? $[r = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5]$

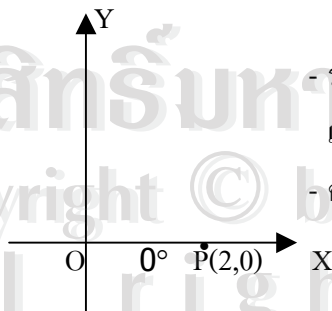
- ค่าของ $\sin \theta = ? [\frac{4}{5}]$

$\cos \theta = ? [\frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}]$

$\tan \theta = ? [\frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}]$

2.2 ครูคิดแผนภาพของมุม 0 , 90 องศา บนกระดาน แล้วสนทนาซักถามนักเรียน

แผนภาพ 1



- ระยะห่างระหว่างจุด P กับจุดเริ่มต้นเท่ากับ

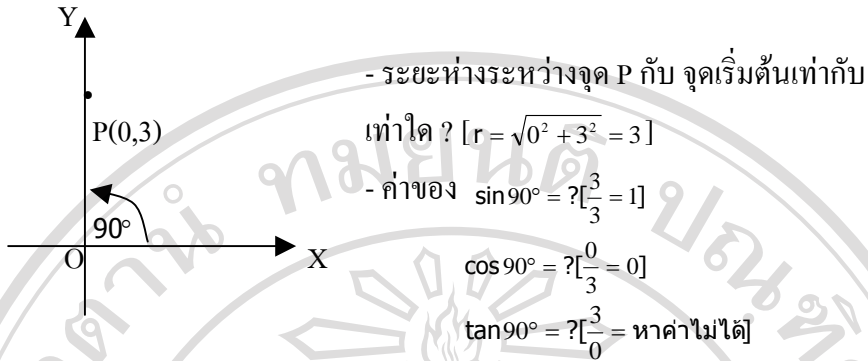
เท่าใด ? $[r = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2]$

- ค่าของ $\sin 0^\circ = ? [\frac{0}{2} = 0]$

$\cos 0^\circ = ? [\frac{2}{2} = 1]$

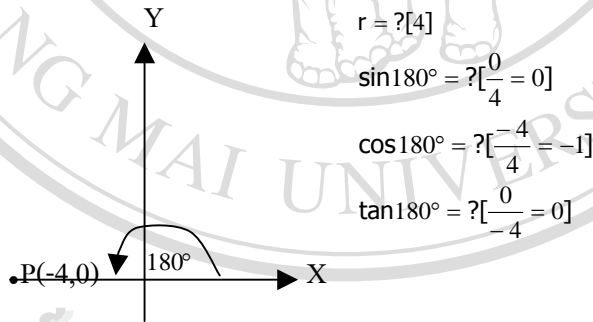
$\tan 0^\circ = ? [\frac{0}{2} = 0]$

แผนภาพ 2

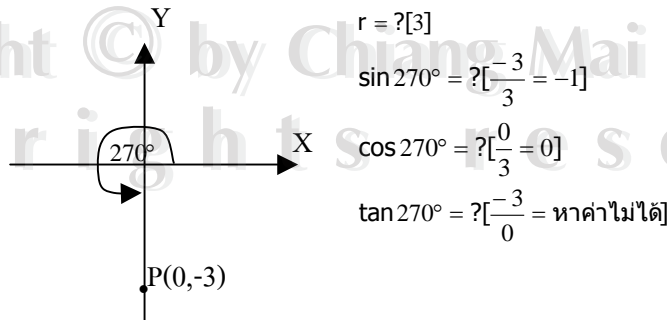


2.3 ครูแบ่งนักเรียนออกเป็น 3 กลุ่มแล้ว ให้แต่ละกลุ่มช่วยกันหาค่าไซน์ โคไซน์ และแทนเจน ของมุม 180 , 270 , 360 องศา โดยครูดัดแผนภาพของมุมบนกระดาน และให้แต่ละกลุ่มส่งตัวแทนออกมาเขียนค่าไซน์ โคไซน์ และ แทนเจน ของมุม 180 , 270 , 360 องศา บนกระดานตรงแผนภาพของแต่ละมุม นักเรียนเปรียบเทียบค่าที่ได้ของแต่ละกลุ่มว่าเท่ากันหรือไม่ แล้วครูแจกเอกสารประกอบการเรียนการสอนให้นักเรียนเพื่อให้นักเรียนได้เขียนค่าไซน์ โคไซน์ และ แทนเจน ของมุม 0 , 90 , 180 , 270 , 360 องศา

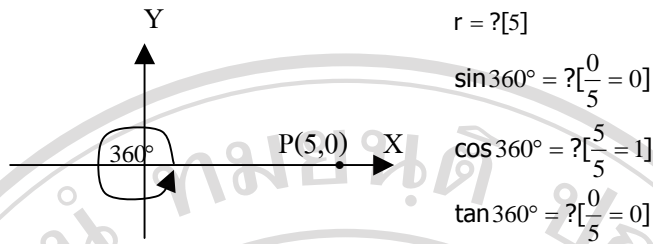
แผนภาพ 3



แผนภาพ 4

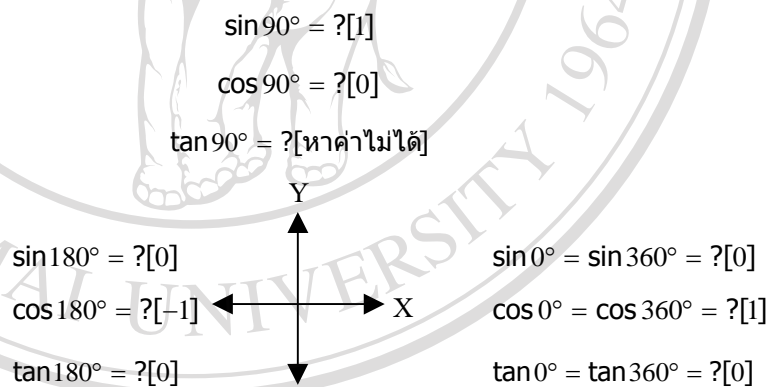


แผนภาพ 5



2.4 ครูคิดแผนภาพสรุปค่าไซน์ โคไซน์ และ แทนเจน ของมุม $0, 90, 180, 270, 360$ องศาบนกระดาน แล้วครูเรียกถาม - ตอบ ค่าไซน์ โคไซน์ และ แทนเจน ของมุม $0, 90, 180, 270, 360$ องศา ที่ละคน โดยครูเป็นผู้เขียนค่าที่ได้บนแผนภาพที่ติดบนกระดาน เสร็จแล้วครูแจกเอกสารประกอบการเรียนการสอนที่มีแผนภาพสรุปค่าไซน์ โคไซน์ และ แทนเจน ของมุม $0, 90, 180, 270, 360$ องศาให้นักเรียนเพื่อเขียนสรุปค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมดังกล่าว

แผนภาพ 6



$$\sin 270^\circ = -1$$

$$\cos 270^\circ = 0$$

$$\tan 270^\circ = \text{หาค่าไม่ได้}$$

3. สื่อการเรียนการสอน

3.1 แผ่นภาพของมุม 1 - 5

3.2 แผ่นภาพสรุปค่าไซน์ โคไซน์ แทนเจน ของมุม 0 , 90 , 180 , 270 , 360 องศา

3.3 เอกสารประกอบการเรียนการสอน

4. การวัดและประเมินผล

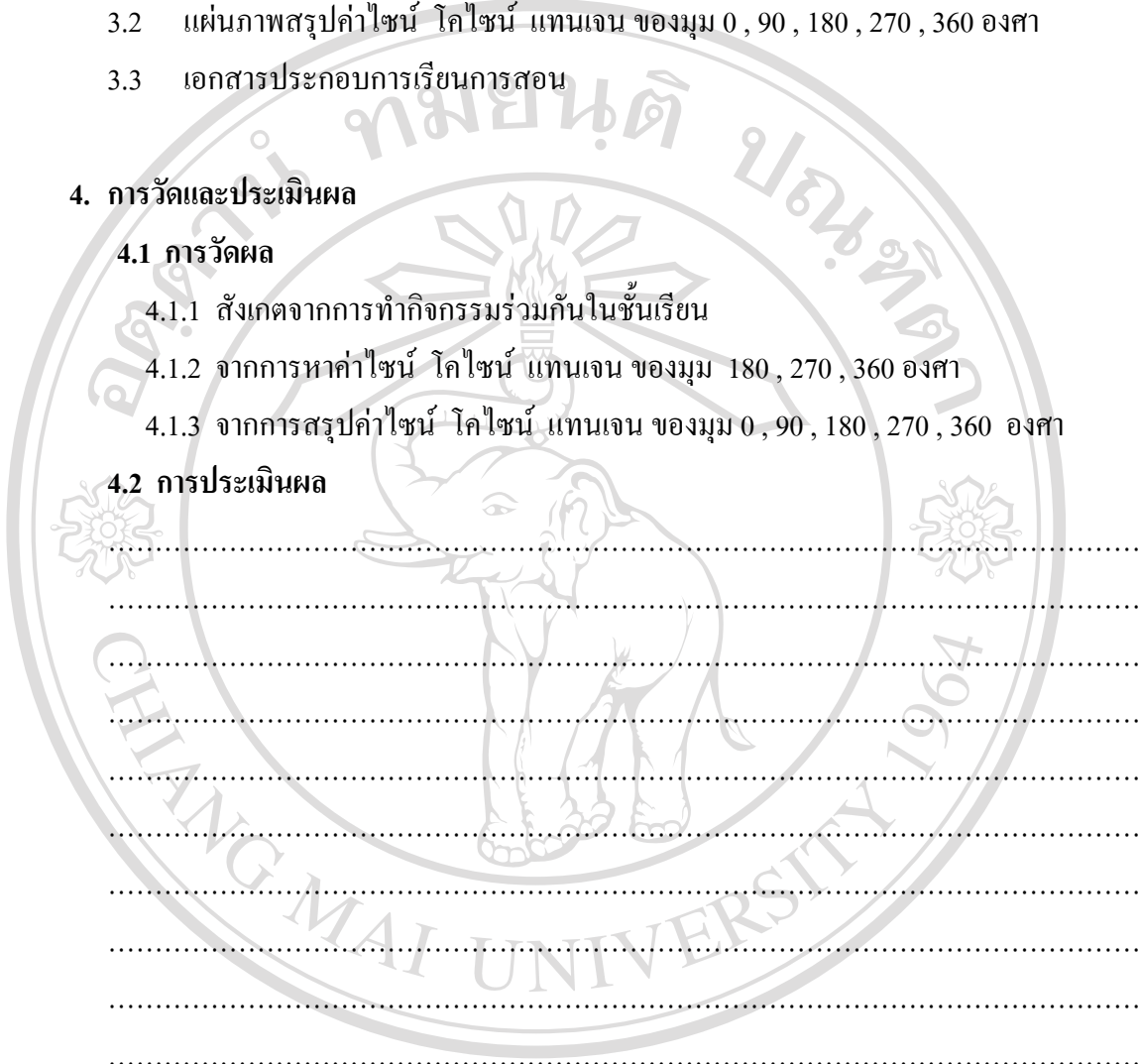
4.1 การวัดผล

4.1.1 สังกเกตจากการทำกิจกรรมร่วมกันในชั้นเรียน

4.1.2 จากการหาค่าไซน์ โคไซน์ แทนเจน ของมุม 180 , 270 , 360 องศา

4.1.3 จากการสรุปค่าไซน์ โคไซน์ แทนเจน ของมุม 0 , 90 , 180 , 270 , 360 องศา

4.2 การประเมินผล

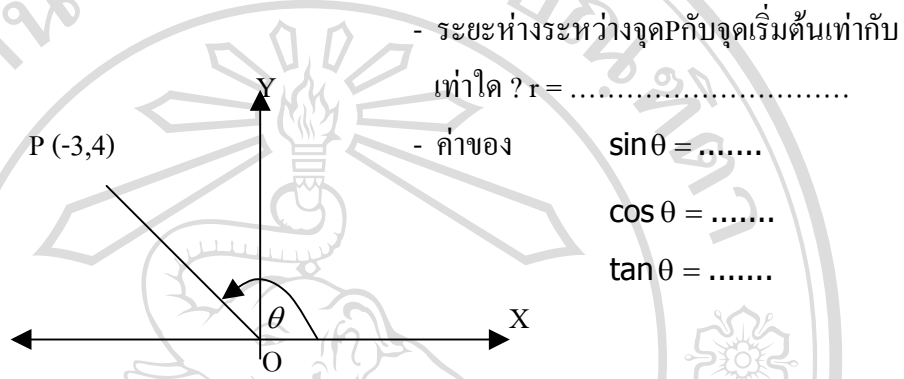


ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright © by Chiang Mai University
All rights reserved

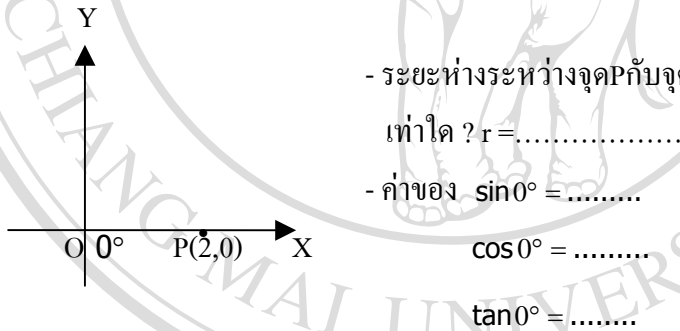
เอกสารประกอบการเรียนการสอน คาบที่ 5

“ค่าฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ แทนเจน ของมุม 0 , 90, 180, 270, 360 องศา”

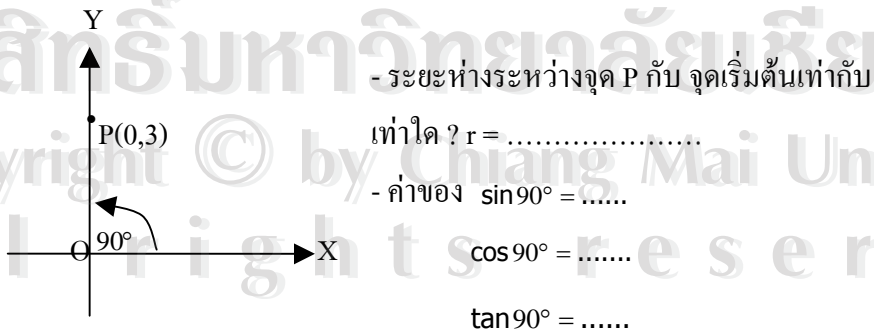
โจทย์ “จงหาค่าของ $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ ของมุมต่อไปนี้”



แผนภาพ 1

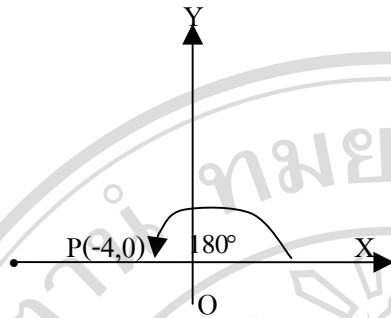


แผนภาพ 2



ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
 Copyright © by Chiang Mai University
 All rights reserved

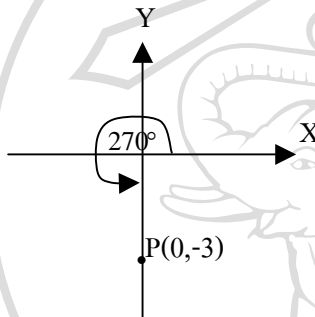
แผนภาพ 3



$r = \dots\dots$
 $\sin 180^\circ = \dots\dots$
 $\cos 180^\circ = \dots\dots$
 $\tan 180^\circ = \dots\dots$

สบายมาก ๆ ๆ

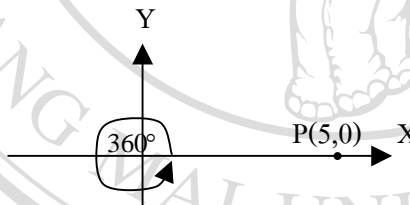
แผนภาพ 4



$r = \dots\dots$
 $\sin 270^\circ = \dots\dots$
 $\cos 270^\circ = \dots\dots$
 $\tan 270^\circ = \dots\dots$

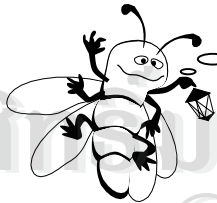


แผนภาพ 5



$r = \dots\dots$
 $\sin 360^\circ = \dots\dots$
 $\cos 360^\circ = \dots\dots$
 $\tan 360^\circ = \dots\dots$

ถูกไหมครับ

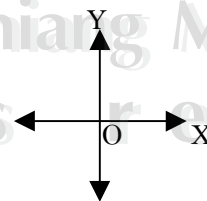


แผนภาพ 6

$\sin 90^\circ = \dots\dots$
 $\cos 90^\circ = \dots\dots$
 $\tan 90^\circ = \dots\dots$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
 Copyright © by Chiang Mai University
 All rights reserved

$\sin 180^\circ = \dots\dots$
 $\cos 180^\circ = \dots\dots$
 $\tan 180^\circ = \dots\dots$



$\sin 0^\circ = \sin 360^\circ = \dots\dots$
 $\cos 0^\circ = \cos 360^\circ = \dots\dots$
 $\tan 0^\circ = \tan 360^\circ = \dots\dots$

$\sin 270^\circ = \dots\dots$
 $\cos 270^\circ = \dots\dots \quad \tan 270^\circ = \dots\dots$

แผนการจัดการเรียนที่ 6

เรื่อง ค่าฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ แทนเจนของมุมบางมุม

จำนวน 1 คาบ

วิชาคณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค 012

ภาคเรียนที่ 2

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

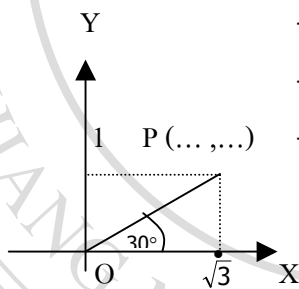
1. จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถบอกค่าของฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนของมุม 120 , 135 , 150 , 210 , 225 , 240 , 300 , 315 , 330 ได้

2. เนื้อหาและกิจกรรมการเรียนการสอน

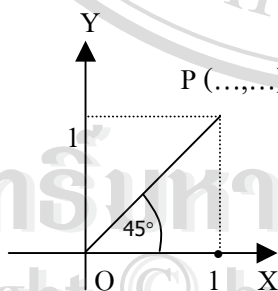
2.1 ครูคิดแผนภาพมุมในตำแหน่งมาตรฐานของมุม 30 , 45 , 60 องศา บนกระดานแล้วเรียกนักเรียนถาม – ตอบ ทีละคน แล้วครูเป็นคนเขียนตามทีนักเรียนตอบ (คำตอบที่ถูก ถ้าตอบผิด ครูใช้คำถามอีกครั้งเพื่อนำไปสู่คำตอบ)

แผนภาพ 1



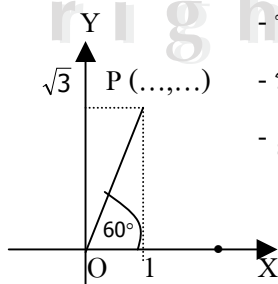
- พิกัดของจุด P คือ $[(\sqrt{3}, 1)]$
- ระยะห่างระหว่างจุด P กับจุดกำเนิด $(0,0)$ เท่ากับ? $[r=2]$
- $\sin 30^\circ = ?[\frac{1}{2}]$, $\cos 30^\circ = ?[\frac{\sqrt{3}}{2}]$, $\tan 30^\circ = ?[\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}]$

แผนภาพ 2



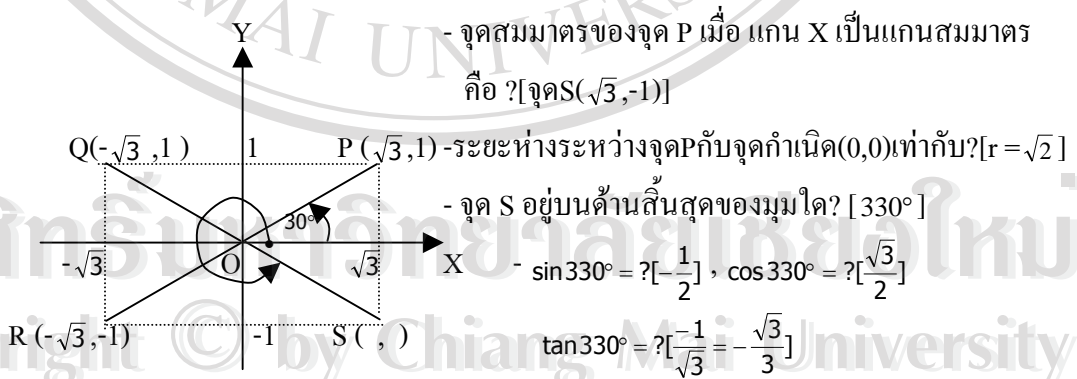
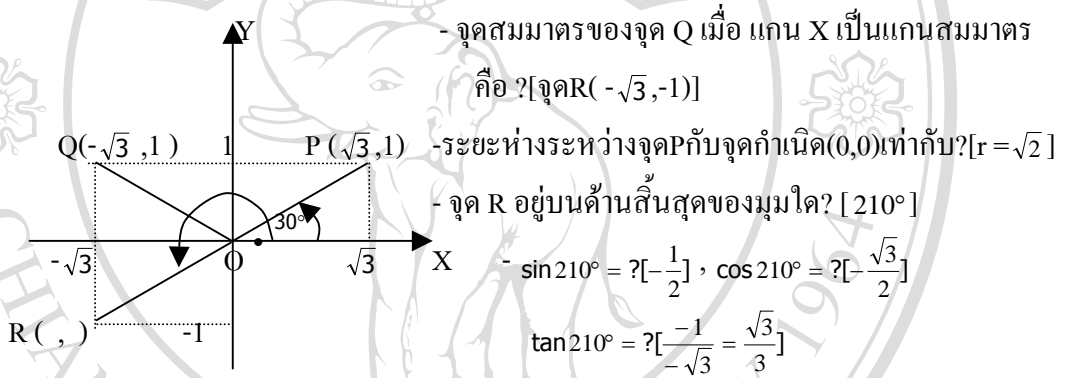
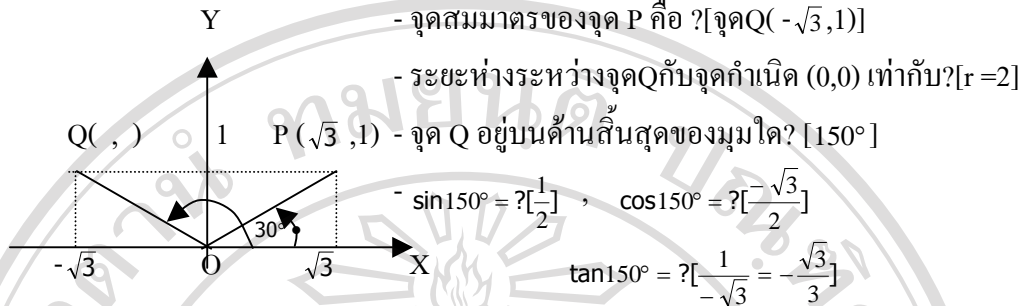
- พิกัดของจุด P คือ $[(1, 1)]$
- ระยะห่างระหว่างจุด P กับจุดกำเนิด $(0,0)$ เท่ากับ? $[r=\sqrt{2}]$
- $\sin 45^\circ = ?[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}]$, $\cos 45^\circ = ?[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}]$, $\tan 45^\circ = ?[\frac{1}{1} = 1]$

แผนภาพ 3

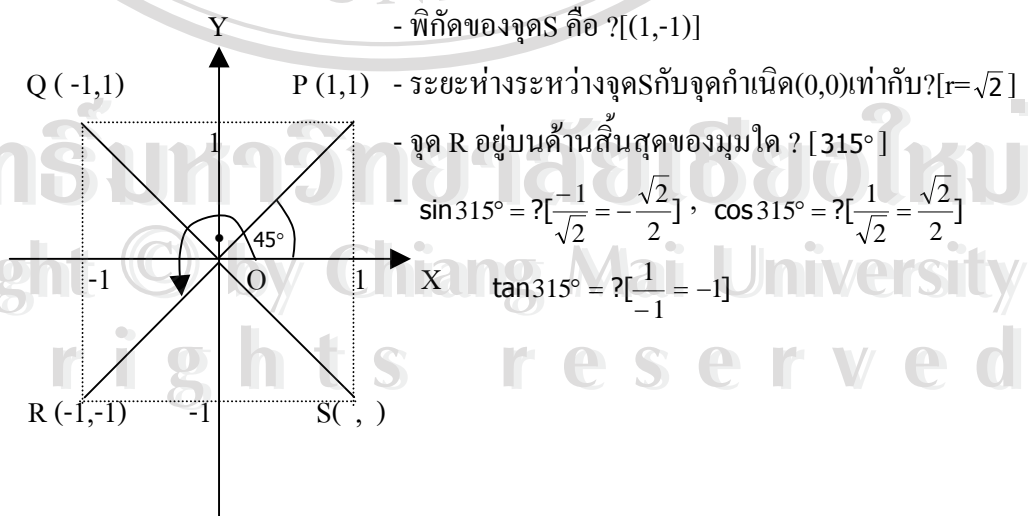
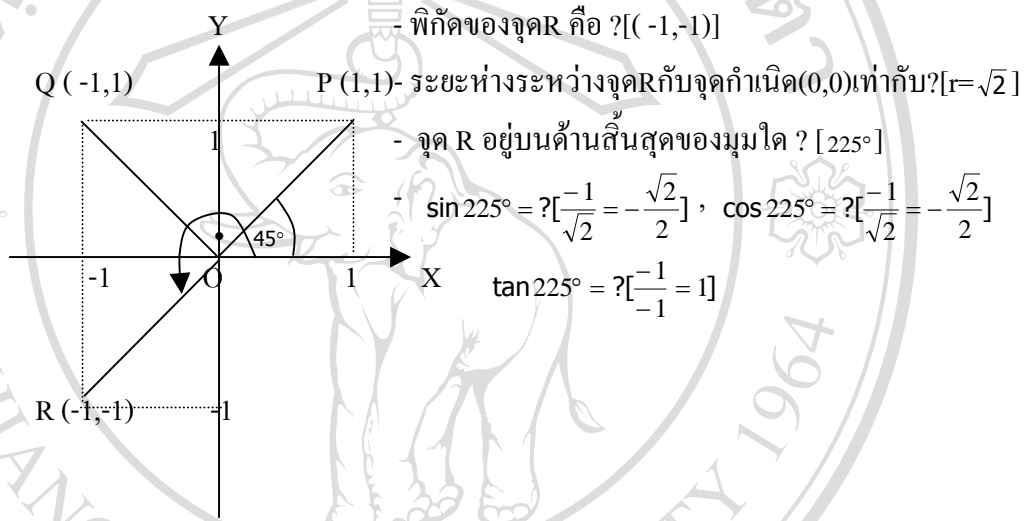
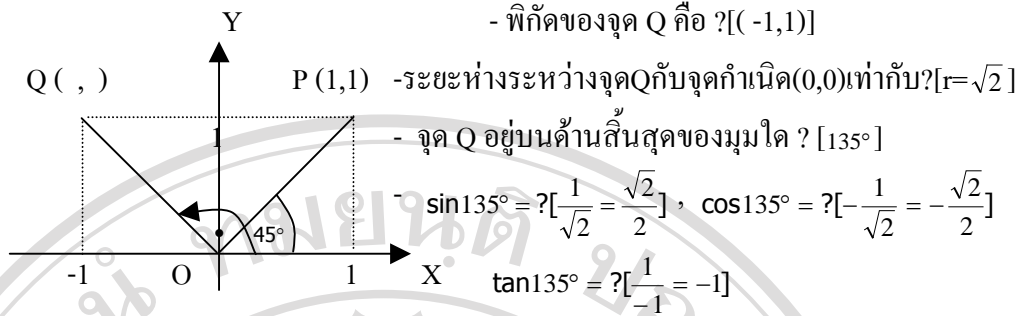


- พิกัดของจุด P คือ $[(1, \sqrt{3})]$
- ระยะห่างระหว่างจุด P กับจุดกำเนิด $(0,0)$ เท่ากับ? $[r=2]$
- $\sin 60^\circ = ?[\frac{\sqrt{3}}{2}]$, $\cos 60^\circ = ?[\frac{1}{2}]$, $\tan 60^\circ = ?[\frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}]$

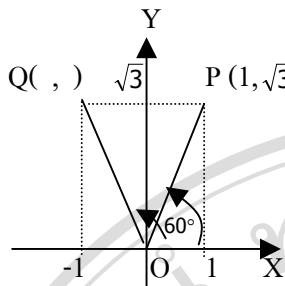
2.2 ครูสนทนา ซักถามนักเรียน โดยใช้แผ่นภาพเดิมในข้อ 2.1 โดยพิจารณาทีละภาพ ดังนี้



2.3 ครูแบ่งนักเรียนออกเป็น 9 กลุ่ม แล้วแจกเอกสารประกอบการเรียนให้นักเรียน และให้แต่ละกลุ่มพิจารณาแผ่นภาพของมุม 45 และ 60 องศา ดังต่อไปนี้



ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
 Copyright © Chiang Mai University
 All rights reserved

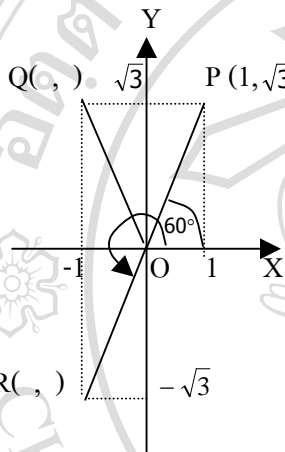


- พิกัดของจุด Q คือ ? $[(-1, \sqrt{3})]$

Q(,) $\sqrt{3}$ P(1, $\sqrt{3}$) - ระยะห่างระหว่างจุด Q กับจุดกำเนิด(0,0)เท่ากับ? $[r=2]$

- จุด Q อยู่บนด้านสิ้นสุดของมุมใด ? $[120^\circ]$

- $\sin 120^\circ = ? [\frac{\sqrt{3}}{2}]$, $\cos 120^\circ = ? [-\frac{1}{2}]$, $\tan 120^\circ = ? [\frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}]$

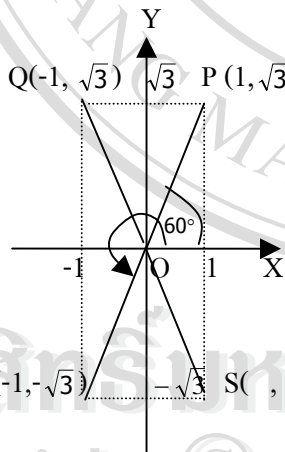


- พิกัดของจุด R คือ ? $[(-1, -\sqrt{3})]$

Q(,) $\sqrt{3}$ P(1, $\sqrt{3}$) - ระยะห่างระหว่างจุด R กับจุดกำเนิด(0,0)เท่ากับ? $[r=2]$

- จุด R อยู่บนด้านสิ้นสุดของมุมใด ? $[240^\circ]$

- $\sin 240^\circ = ? [-\frac{\sqrt{3}}{2}]$, $\cos 240^\circ = ? [-\frac{1}{2}]$, $\tan 240^\circ = ? [\frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}]$



- พิกัดของจุด S คือ ? $[(1, -\sqrt{3})]$

Q(-1, $\sqrt{3}$) $\sqrt{3}$ P(1, $\sqrt{3}$) - ระยะห่างระหว่างจุด S กับจุดกำเนิด(0,0)เท่ากับ? $[r=2]$

- จุด S อยู่บนด้านสิ้นสุดของมุมใด ? $[300^\circ]$

- $\sin 300^\circ = ? [-\frac{\sqrt{3}}{2}]$, $\cos 300^\circ = ? [\frac{1}{2}]$, $\tan 300^\circ = ? [\frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}]$

R(-1, $-\sqrt{3}$) $-\sqrt{3}$ S(,)

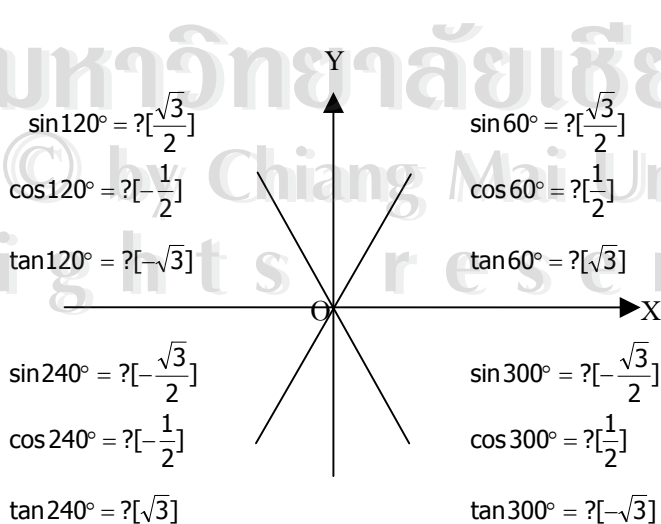
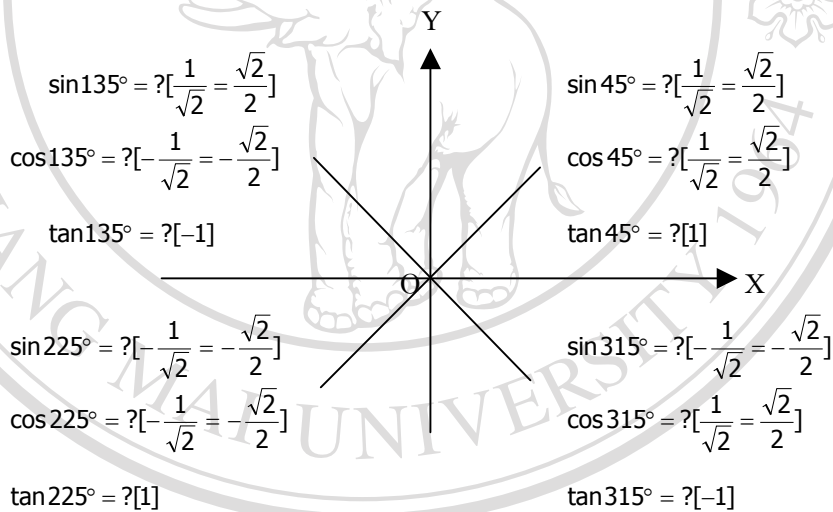
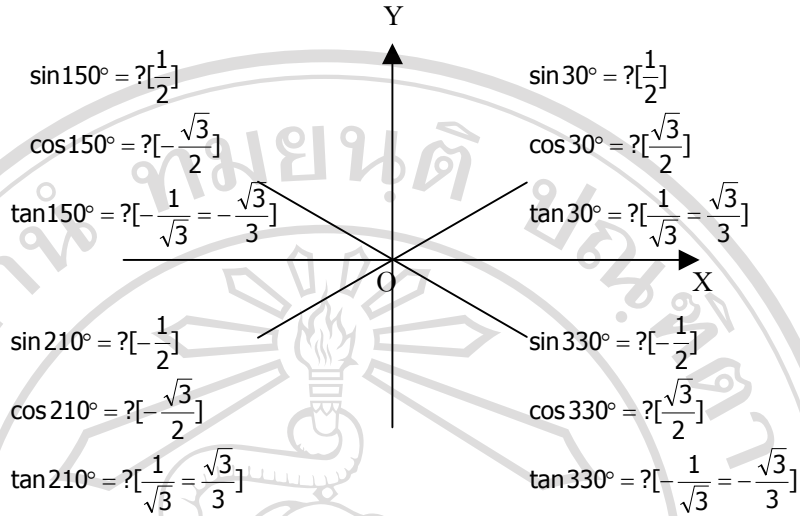
ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright © by Chiang Mai University
 2.4 ครูแจกเอกสารสรุปค่าฟังก์ชัน ไซน์ โคไซน์ และแทนเจน ของมุม 30 , 45 , 60 , 120 , 135

, 150 , 210 , 225 , 240 , 300 , 315 , 330 องศา และติดแผ่นภาพสรุปค่าฟังก์ชัน ไซน์ โคไซน์ และ

แทนเจน เมื่อนักเรียนสรุปเสร็จแล้ว ครูจึงใช้การถาม - ตอบ เป็นรายบุคคลเพื่อตรวจสอบความถูกต้องแล้ว ครูเปิดคำตอบบนแผ่นภาพที่ปิดไว้ให้นักเรียนได้ตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้งหนึ่ง

แผนภาพสรุปค่าฟังก์ชัน



ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
 Copyright © by Chiang Mai University
 All rights reserved

2.5 ครูแจกเอกสารฝึกหัด 6.1 ให้นักเรียนทำการบ้านและนัดส่งในตอนเช้าก่อนทำกิจกรรมหน้าเสาธง

เอกสารฝึกหัด 6.1

จงเปรียบเทียบค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$1. \sin 60^\circ = ? \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

$$\sin 300^\circ = ? \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

$$\text{จาก } \sin 300^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} = ? [-\sin 60^\circ]$$

$$\text{ดังนั้น } \sin 300^\circ = ? [-\sin 60^\circ]$$

$$2. \cos 60^\circ = ? \left[\frac{1}{2} \right]$$

$$\cos 300^\circ = ? \left[\frac{1}{2} \right]$$

$$\text{จาก } \cos 300^\circ = \frac{1}{2} = ? [\cos 60^\circ]$$

$$\text{ดังนั้น } \cos 300^\circ = \cos 60^\circ$$

$$3. \tan 45^\circ = ? [1]$$

$$\tan 315^\circ = ? [-1]$$

$$\text{จาก } \tan 315^\circ = -1 = ? [-\tan 45^\circ]$$

$$\text{ดังนั้น } \tan 315^\circ = ? [-\tan 45^\circ]$$

$$4. \cos 150^\circ = ? \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

$$\cos 210^\circ = ? \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

$$\text{จาก } \cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} = ? [\cos 210^\circ]$$

$$\text{ดังนั้น } \cos 210^\circ = ? [\cos 150^\circ]$$

$$5. \sin 135^\circ = ? \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

$$\sin 225^\circ = ? \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

$$\text{จาก } \sin 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sin 135^\circ$$

$$\text{ดังนั้น } \sin 225^\circ = -\sin 135^\circ$$

$$6. \tan 120^\circ = ? [-\sqrt{3}]$$

$$\tan 240^\circ = ? [\sqrt{3}]$$

$$\text{จาก } \tan 240^\circ = \sqrt{3} = ? [-\tan 120^\circ]$$

$$\text{ดังนั้น } \tan 240^\circ = ? [-\tan 120^\circ]$$

3. สื่อการเรียนการสอน

- 3.1 แผ่นภาพมุม 1 - 3
- 3.2 แผ่นภาพสรุปค่าไซน์ โคไซน์ แทนเจน ของมุม 30 , 45 , 60 ,120 , 135 , 150 , 210 , 225 , 240 , 300 , 315 , 330 องศา
- 3.3 เอกสารประกอบการเรียนการสอน
- 3.4 เอกสารฝึกหัด 6.1

4. การวัดและประเมินผล

4.1 การวัดผล

- 4.1.1 สังเกตจากการทำกิจกรรมร่วมกันในชั้นเรียน
- 4.1.2 จากการหาค่าไซน์ โคไซน์ แทนเจน ของมุม 30 , 45 , 60 ,120 , 135 , 150 , 210 , 225 , 240 , 300 , 315 , 330 องศา
- 4.1.3 จากการสรุปค่าไซน์ โคไซน์ แทนเจน ของมุม 0 , 90 , 180 , 270 , 360 องศา
- 4.1.4 ทำเอกสารฝึกหัด 6.1

4.2 การประเมินผล

.....

.....

.....

.....

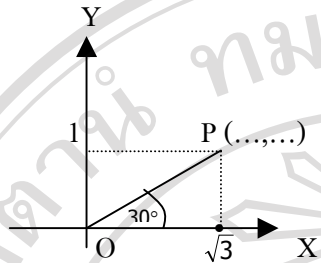
.....

.....

.....

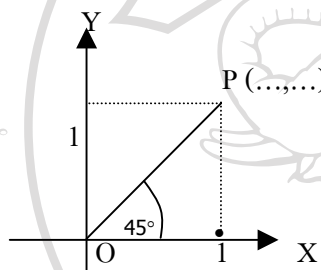
เอกสารประกอบการเรียนการสอน คาบที่ 6
 “ค่าฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ แทนเจน ของมุมบางมุม”

แผ่นภาพ 1



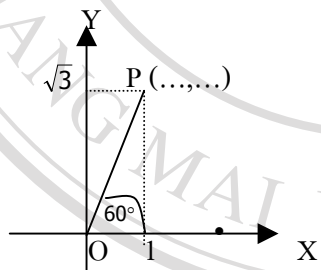
- พิกัดของจุด P คือ ?(.....)
- ระยะห่างระหว่างจุด P กับจุดกำเนิด(0,0) เท่ากับ?r=....
- $\sin 30^\circ = \dots\dots$, $\cos 30^\circ = \dots\dots$, $\tan 30^\circ = \dots\dots$

แผ่นภาพ 2



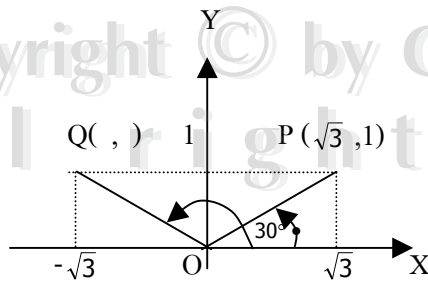
- พิกัดของจุด P คือ ?(.....)
- ระยะห่างระหว่างจุด P กับจุดกำเนิด(0,0) เท่ากับ?r=.....
- $\sin 45^\circ = \dots\dots\dots$, $\cos 45^\circ = \dots\dots\dots$, $\tan 45^\circ = \dots\dots$

แผ่นภาพ 3



- พิกัดของจุด P คือ?(.....)
- ระยะห่างระหว่างจุด P กับจุดกำเนิด(0,0) เท่ากับ?r=.....
- $\sin 60^\circ = \dots\dots$, $\cos 60^\circ = \dots\dots$, $\tan 60^\circ = \dots\dots$

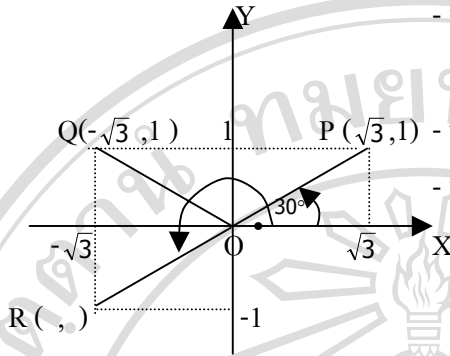
แผ่นภาพ 4



- จุดสมมาตรของจุด P คือ ?จุด Q(-sqrt(3),1)
- ระยะห่างระหว่างจุด Q กับจุดกำเนิด (0,0) เท่ากับ? r=2
- จุด Q อยู่บนด้านสิ้นสุดของมุมใด? 150°
- $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 150^\circ = \frac{-\sqrt{3}}{2}$
- $\tan 150^\circ = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

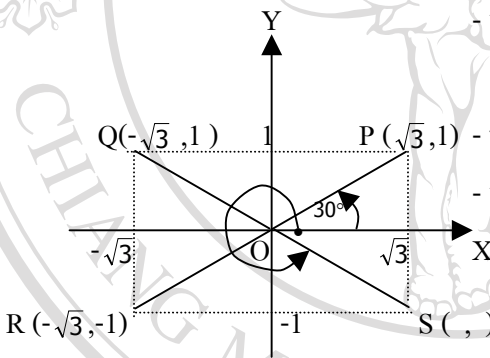
ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
 Copyright © by Chiang Mai University
 All rights reserved

แผนภาพ 5



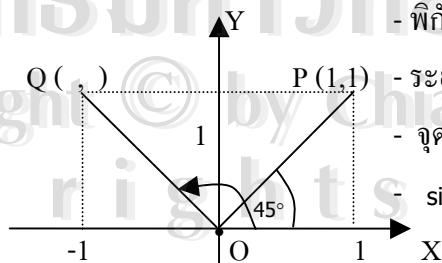
- จุดสมมาตรของจุด Q เมื่อ แกน X เป็นแกนสมมาตร คือ ? จุด R(-√3, -1)
- ระยะห่างระหว่างจุด P กับจุดกำเนิด(0,0) เท่ากับ r=2
- จุด R อยู่บนด้านสิ้นสุดของมุมใด? 210°
- $\sin 210^\circ = -\frac{1}{2}$, $\cos 210^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\tan 210^\circ = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

แผนภาพ 6



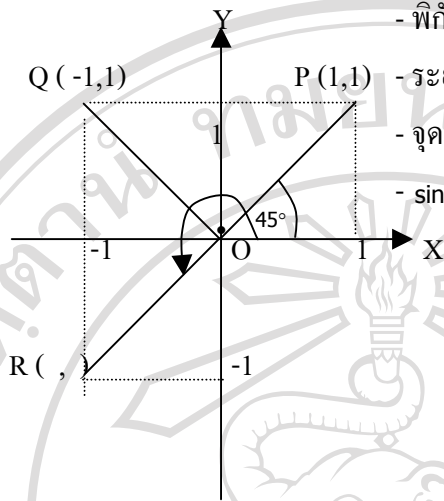
- จุดสมมาตรของจุด P เมื่อ แกน X เป็นแกนสมมาตร คือ ? จุด S(√3, -1)
- ระยะห่างระหว่างจุด P กับจุดกำเนิด(0,0) เท่ากับ r=2
- จุด S อยู่บนด้านสิ้นสุดของมุมใด? 330°
- $\sin 330^\circ = -\frac{1}{2}$, $\cos 330^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\tan 330^\circ = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

แผนภาพ 7



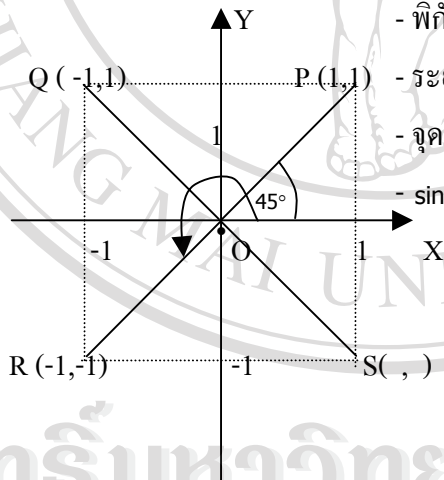
- พิกัดของจุด Q คือ ? (.....)
- ระยะห่างระหว่างจุด Q กับจุดกำเนิด(0,0) เท่ากับ r=.....
- จุด Q อยู่บนด้านสิ้นสุดของมุมใด ?
- $\sin \dots = \dots$, $\cos \dots = \dots$, $\tan \dots = \dots$

แผนภาพ 8



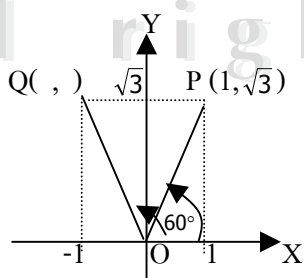
- พิกัดของจุด R คือ ?(....,....)
- ระยะห่างระหว่างจุด R กับจุดกำเนิด(0,0)เท่ากับ?r=.....
- จุด R อยู่บนด้านสิ้นสุดของมุมใด ?
- \sin=?....., \cos=....., \tan=.....

แผนภาพ 9



- พิกัดของจุด S คือ ?(....,....)
- ระยะห่างระหว่างจุด S กับจุดกำเนิด(0,0)เท่ากับ?r=.....
- จุด R อยู่บนด้านสิ้นสุดของมุมใด ?
- \sin=....., \cos=....., \tan=.....

แผนภาพ 10



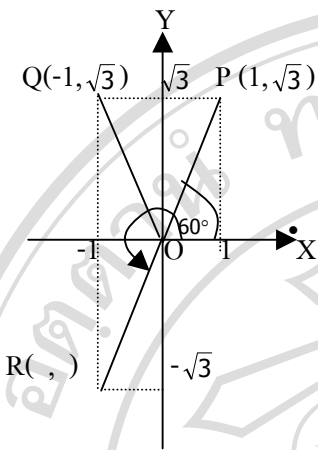
- พิกัดของจุด Q คือ ?(....,....)
- ระยะห่างระหว่างจุด Q กับจุดกำเนิด(0,0)เท่ากับ? r=.....
- จุด Q อยู่บนด้านสิ้นสุดของมุมใด ?
- \sin=....., \cos=....., \tan=.....

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright © by Chiang Mai University

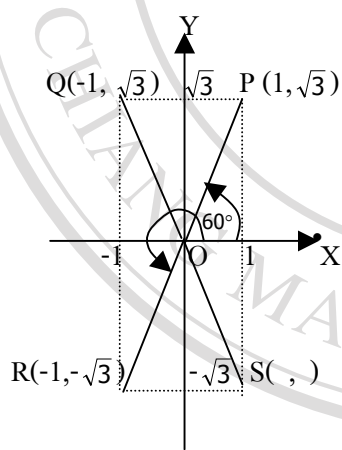
All rights reserved

แผนภาพ 11



- พิกัดของจุด R คือ ?(.....)
- ระยะห่างระหว่างจุด R กับจุดกำเนิด(0,0)เท่ากับ?r=.....
- จุด R อยู่บนด้านสิ้นสุดของมุมใด ?
- $\sin..... =$, $\cos..... =$, $\tan..... =$

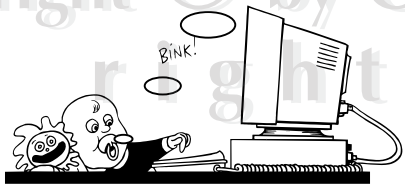
แผนภาพ 12



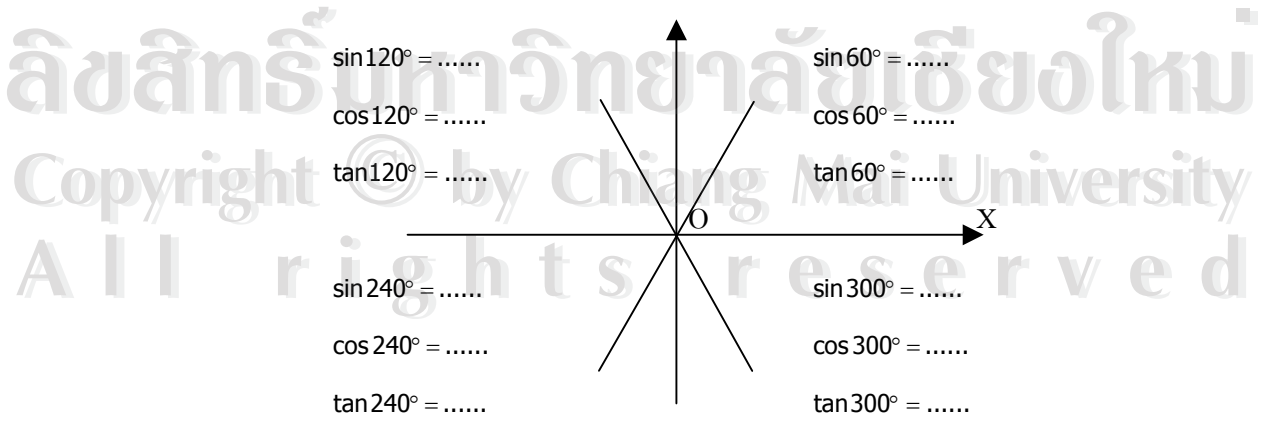
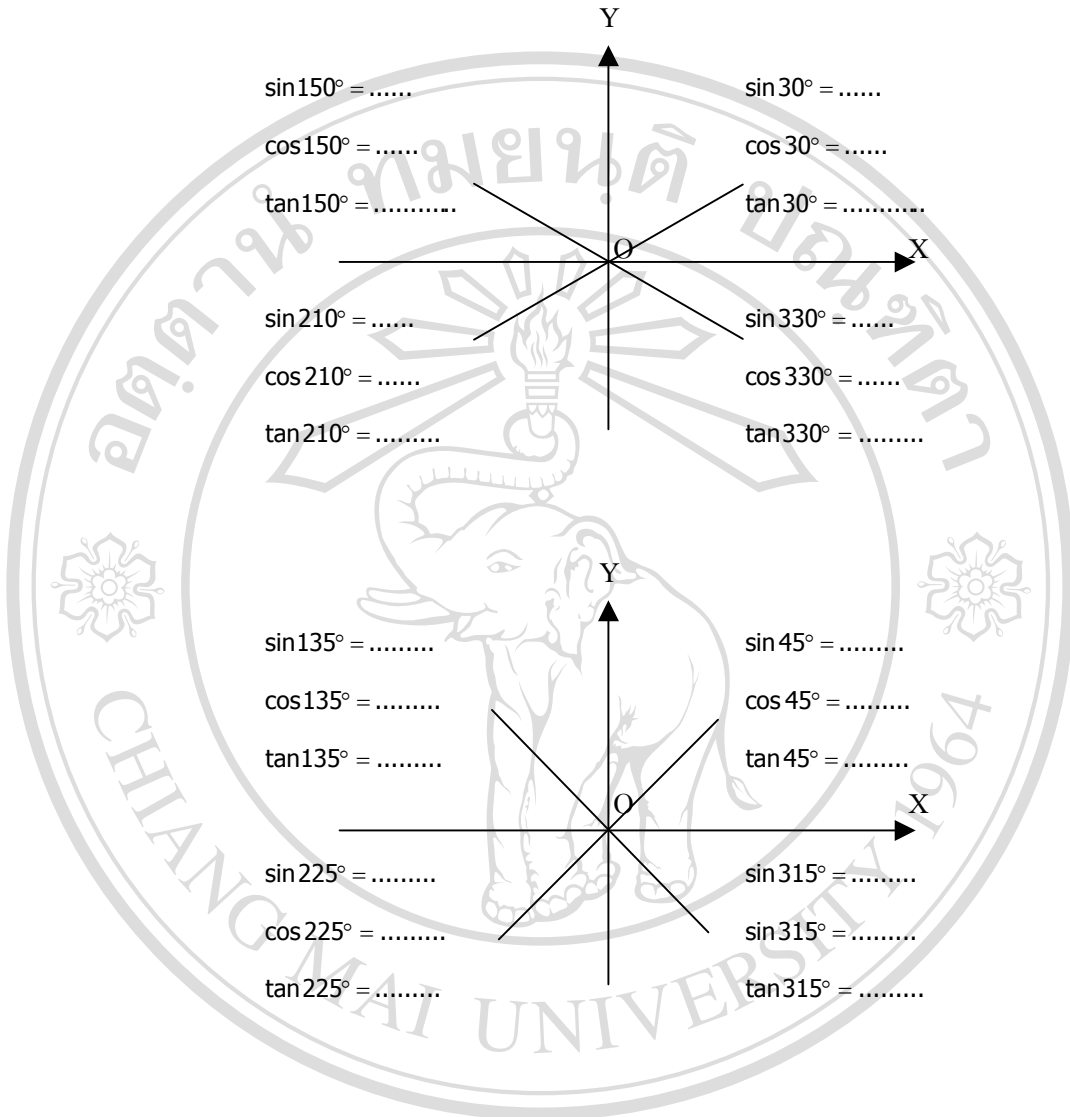
- พิกัดของจุด S คือ ?(.....)
- ระยะห่างระหว่างจุด S กับจุดกำเนิด(0,0)เท่ากับ?r=.....
- จุด S อยู่บนด้านสิ้นสุดของมุมใด ?
- $\sin..... =$, $\cos..... =$, $\tan..... =$

คิดไม่ออกจริง ๆ
จะทำไงดี

ก็ถามคุณครูสิ
ครับบบบ ๆ



แผนภาพสรุปค่าฟังก์ชัน



ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
 Copyright © by Chiang Mai University
 All rights reserved

เอกสารฝึกหัด 6.1

ชื่อ

ชั้น ม. / ... เลขที่

จงเปรียบเทียบค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

2. $\sin 60^\circ = \dots\dots$

2. $\cos 60^\circ = \dots\dots$

$\sin 300^\circ = \dots\dots$

$\cos 300^\circ = \dots\dots$

จาก $\sin 300^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\dots\dots$

จาก $\cos 300^\circ = \frac{1}{2} = \dots\dots$

ดังนั้น $\sin 300^\circ = \dots\dots$

ดังนั้น $\cos 300^\circ = \dots\dots$

3. $\tan 45^\circ = \dots\dots$

4. $\cos 150^\circ = \dots\dots$

$\tan 315^\circ = \dots\dots$

$\cos 210^\circ = \dots\dots$

จาก $\tan 315^\circ = -1 = -\dots\dots$

จาก $\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \dots\dots$

ดังนั้น $\sin 315^\circ = \dots\dots$

ดังนั้น $\cos 210^\circ = \dots\dots$

5. $\sin 135^\circ = \dots\dots$

6. $\tan 120^\circ = \dots\dots$

$\sin 225^\circ = \dots\dots$

$\tan 240^\circ = \dots\dots$

จาก $\sin 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\dots\dots$

จาก $\tan 240^\circ = \sqrt{3} = \dots\dots$

ดังนั้น $\sin 225^\circ = \dots\dots$

ดังนั้น $\tan 240^\circ = \dots\dots$

เข้าใจแล้วครับ

เข้าใจหรือยัง
เจ้าตัวเล็ก



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7

เรื่อง ค่าฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ แทนเจนของมุมใด ๆ

จำนวน 1 คาบ

วิชาคณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค 012

ภาคเรียนที่ 2

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

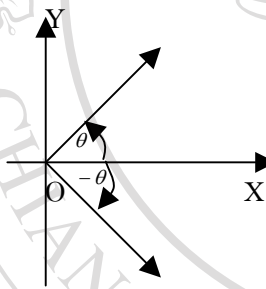
1. จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถบอกค่าของฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนของมุมในทิศทางตามเข็มนาฬิกาได้

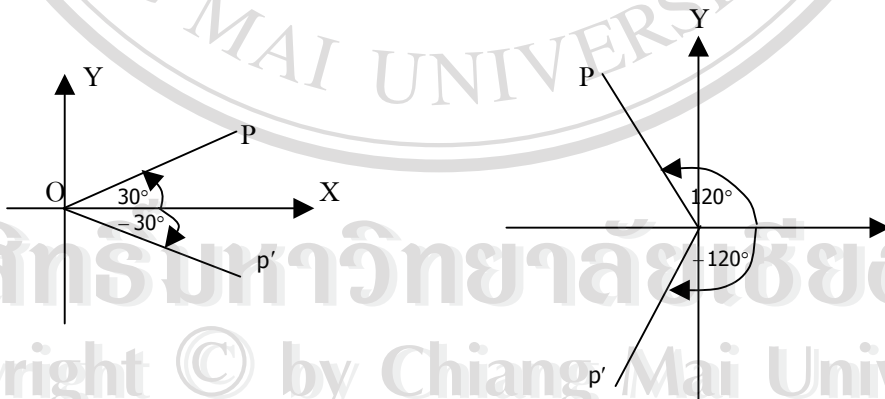
2. เนื้อหาและกิจกรรมการเรียนรู้

2.1 ครูคิดแผนภาพมุมในตำแหน่งมาตรฐานบนกระดาน แล้วสนทนาซักถามนักเรียน

แผนภาพ 1

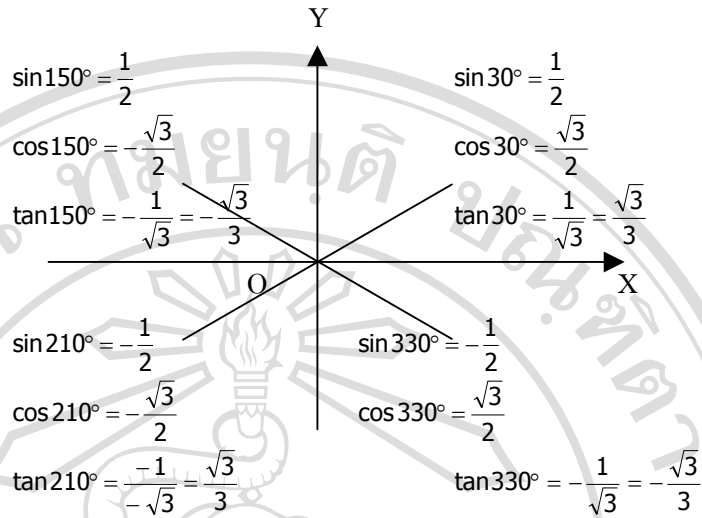


- มุม θ และ $-\theta$ ต่างกันอย่างไร ? [ทิศทางการวัดมุม]
- จากความรู้เดิมเราวัดมุมแบบใด ? θ หรือ $-\theta$ [แบบ θ]
- เพื่อไม่ให้เกิดความสับสนในการวัดมุมต่อไปจะใช้เครื่องหมาย (-) ลบ เป็นสัญลักษณ์แทนทิศทางการวัดมุมที่ตรงข้ามกับมุมเดิม หรือ การวัดมุมในทิศทางตามเข็มนาฬิกา เช่น



2.2 ครูคิดแผนภาพสรุปค่าฟังก์ชันของมุม $30^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 330^\circ$ องศา จากคาบที่ผ่านมาไว้บนกระดาน แล้วสนทนาซักถามนักเรียนเกี่ยวกับค่าฟังก์ชันของมุมที่วัดในทิศทางตามเข็มนาฬิกา ($-\theta$) และ เขียนค่าฟังก์ชันของมุมที่วัดในทิศทางตามเข็มนาฬิกา ($-\theta$) ของมุม $30^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 330^\circ$ องศา

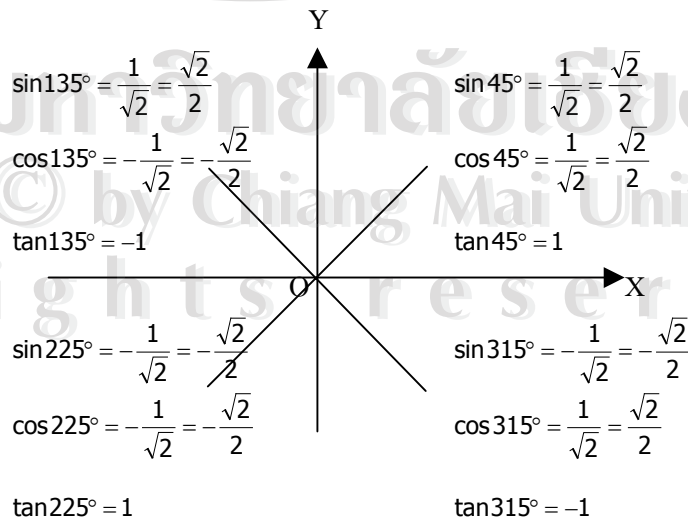
แผนภาพ 2



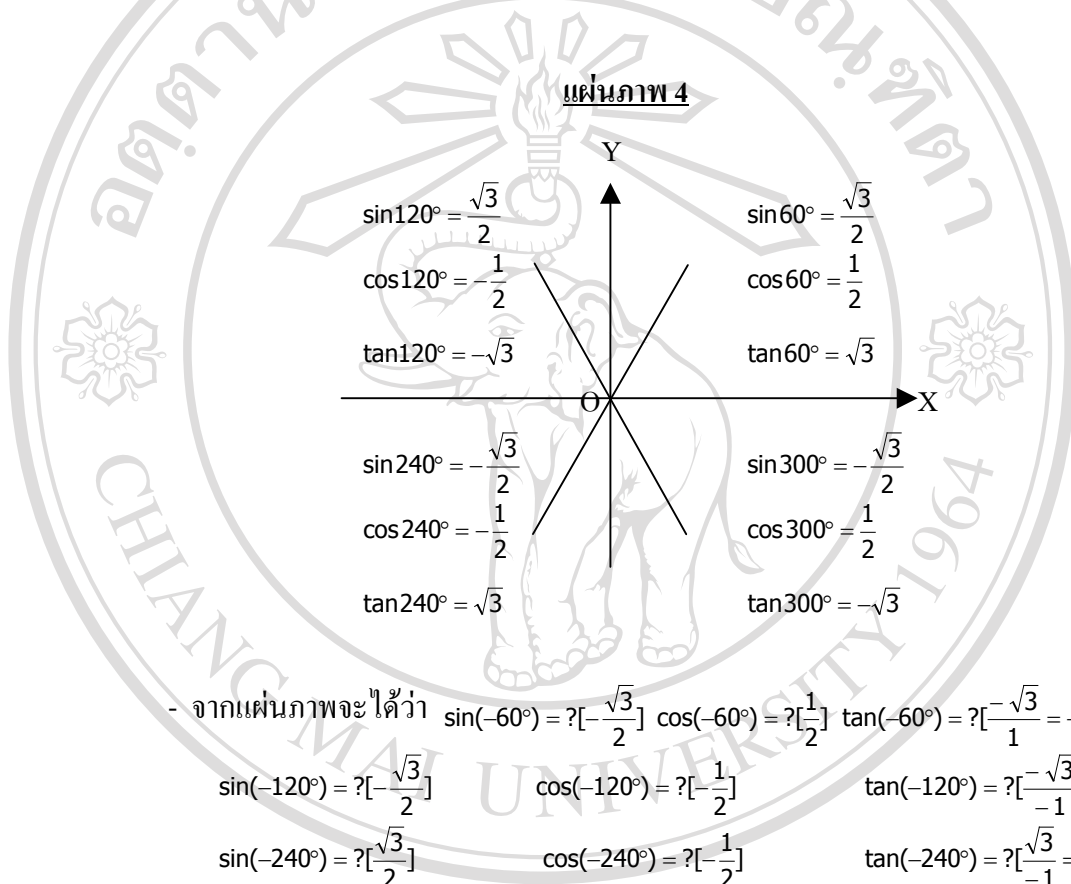
- จากแผนภาพจะได้ว่า $\sin(-30^\circ) = ?[\frac{-1}{2}]$ $\cos(-30^\circ) = ?[\frac{\sqrt{3}}{2}]$ $\tan(-30^\circ) = ?[\frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}]$
- $\sin(-150^\circ) = ?[\frac{-1}{2}]$ $\cos(-150^\circ) = ?[\frac{-\sqrt{3}}{2}]$ $\tan(-150^\circ) = ?[\frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}]$
- $\sin(-210^\circ) = ?[\frac{1}{2}]$ $\cos(-210^\circ) = ?[\frac{-\sqrt{3}}{2}]$ $\tan(-210^\circ) = ?[\frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}]$
- $\sin(330^\circ) = ?[\frac{1}{2}]$ $\cos(-330^\circ) = ?[\frac{\sqrt{3}}{2}]$ $\tan(-330^\circ) = ?[\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}]$

2.3 ครูดัดแผนภาพสรุปค่าฟังก์ชันของมุม 45 , 135 , 225 , 315 องศา และ 60 , 120 , 240 , 300 องศา จากคาบที่ผ่านมาไว้บนกระดาน แล้วเรียกถาม - ตอบนักเรียนเกี่ยวกับค่าฟังก์ชันของมุมที่วัดในทิศทางตามเข็มนาฬิกา (-θ) เป็นรายบุคคล

แผนภาพ 3



- จากแผนภาพจะได้ว่า $\sin(-45^\circ) = ?[-\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}]$ $\cos(-45^\circ) = ?[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}]$ $\tan(-45^\circ) = ?[-1]$
 $\sin(-135^\circ) = ?[-\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}]$ $\cos(-135^\circ) = ?[-\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}]$ $\tan(-135^\circ) = ?[1]$
 $\sin(-225^\circ) = ?[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}]$ $\cos(-225^\circ) = ?[-\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}]$ $\tan(-225^\circ) = ?[-1]$
 $\sin(-315^\circ) = ?[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}]$ $\cos(-315^\circ) = ?[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}]$ $\tan(-315^\circ) = ?[1]$



- จากแผนภาพจะได้ว่า $\sin(-60^\circ) = ?[-\frac{\sqrt{3}}{2}]$ $\cos(-60^\circ) = ?[\frac{1}{2}]$ $\tan(-60^\circ) = ?[\frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}]$
 $\sin(-120^\circ) = ?[-\frac{\sqrt{3}}{2}]$ $\cos(-120^\circ) = ?[-\frac{1}{2}]$ $\tan(-120^\circ) = ?[\frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}]$
 $\sin(-240^\circ) = ?[\frac{\sqrt{3}}{2}]$ $\cos(-240^\circ) = ?[-\frac{1}{2}]$ $\tan(-240^\circ) = ?[\frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}]$
 $\sin(-300^\circ) = ?[\frac{\sqrt{3}}{2}]$ $\cos(-300^\circ) = ?[\frac{1}{2}]$ $\tan(-300^\circ) = ?[\frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}]$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright © by Chiang Mai University

2.4 ครูแจกเอกสารฝึกทักษะ 7.1 ให้นักเรียนแต่ละคน โดยครูติดแผนภาพสรุปค่าฟังก์ชันของมุม 30, 150, 210, 330, 45, 135, 225, 315 องศา และ 60, 120, 240, 300 องศา จากค่าที่ผ่านมาไว้บนกระดาน

เอกสารฝึกทักษะ 7.1

จงเติมช่องว่างให้สมบูรณ์

ตัวอย่าง $\sin(-30^\circ) = \sin 330^\circ = -\frac{1}{2}$, $\cos(-30^\circ) = \cos 330^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan(-30^\circ) = \tan 330^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

1. $\sin(-150^\circ) = \dots\dots\dots = ?[-\frac{1}{2}]$ $\cos(-150^\circ) = \dots\dots\dots = ?[-\frac{\sqrt{3}}{2}]$

$\tan(-150^\circ) = \dots\dots\dots = ?[\frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}]$

2. $\sin(-210^\circ) = \dots\dots\dots = ?[\frac{1}{2}]$ $\cos(-210^\circ) = \dots\dots\dots = ?[-\frac{\sqrt{3}}{2}]$

$\tan(-210^\circ) = \dots\dots\dots = ?[-\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}]$

3. $\sin(330^\circ) = \dots\dots\dots = ?[\frac{1}{2}]$ $\cos(-330^\circ) = \dots\dots\dots = ?[\frac{\sqrt{3}}{2}]$

$\tan(-330^\circ) = \dots\dots\dots = ?[\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}]$

4. $\sin(-45^\circ) = \dots\dots\dots = ?[-\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}]$ $\cos(45^\circ) = \dots\dots\dots = ?[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}]$

$\tan(-45^\circ) = \dots\dots\dots = ?[-1]$

5. $\sin(-135^\circ) = \dots\dots\dots = ?[-\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}]$ $\cos(-135^\circ) = \dots\dots\dots = ?[-\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}]$

$\tan(-135^\circ) = \dots\dots\dots = ?[1]$

6. $\sin(-225^\circ) = \dots\dots\dots = ?[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}]$ $\cos(-225^\circ) = \dots\dots\dots = ?[-\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}]$

$\tan(-225^\circ) = \dots\dots\dots = ?[-1]$

7. $\sin(-315^\circ) = \dots\dots\dots = ?[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}]$ $\cos(-315^\circ) = \dots\dots\dots = ?[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}]$

$\tan(-315^\circ) = \dots\dots\dots = ?[1]$

8. $\sin(-60^\circ) = \dots\dots\dots = ?[-\frac{\sqrt{3}}{2}]$ $\cos(-60^\circ) = \dots\dots\dots = ?[\frac{1}{2}]$

$\tan(-60^\circ) = \dots\dots\dots = ?[-\sqrt{3}]$

9. $\sin(-120^\circ) = \dots\dots\dots = ?[-\frac{\sqrt{3}}{2}]$ $\cos(-120^\circ) = \dots\dots\dots = ?[-\frac{1}{2}]$

$\tan(-120^\circ) = \dots\dots\dots = ?[\sqrt{3}]$

10. $\sin(-240^\circ) = \dots\dots\dots = ?[\frac{\sqrt{3}}{2}]$ $\cos(-240^\circ) = \dots\dots\dots = ?[-\frac{1}{2}]$

$\tan(-240^\circ) = \dots\dots\dots = ?[-\sqrt{3}]$

11. $\sin(-300^\circ) = \dots\dots\dots = ?[\frac{\sqrt{3}}{2}]$ $\cos(-300^\circ) = \dots\dots\dots = ?[\frac{1}{2}]$

$\tan(-300^\circ) = \dots\dots\dots = ?[\sqrt{3}]$

2.5 ครูแจกเอกสารฝึกหัด 7.1 ให้นักเรียนทำเป็นการบ้าน แล้วนัดส่งในตอนเช้าก่อนเข้าแถว
ทำกิจกรรมหน้าเสาธง

เอกสารฝึกหัด 7.1

จงหาผลลัพธ์ต่อไปนี้

ตัวอย่าง ก. $\sin 120^\circ + \cos 330^\circ - \sin(-300^\circ)$

วิธีทำ จาก $\sin 120^\circ + \cos 330^\circ - \sin(-300^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ดังนั้น $\sin 120^\circ + \cos 330^\circ - \sin(-300^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ข. $\cos(-135^\circ)\sin 225^\circ + \tan 225^\circ \cos(-300^\circ)$

วิธีทำ จาก $\cos(-135^\circ)\sin 225^\circ + \tan 225^\circ \cos(-300^\circ) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(1 \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{2} = 1$

ดังนั้น $\cos(-135^\circ)\sin 225^\circ + \tan 225^\circ \cos(-300^\circ) = 1$

- $\sin 120^\circ + \cos 330^\circ - \tan(-315^\circ)$ [เฉลย. $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \sqrt{3} - 1$]
- $\cos(-150^\circ)\sin(-120^\circ) + \tan(-45^\circ)$ [เฉลย. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (-1) = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$]
- $\sin 240^\circ \cos(-30^\circ) - \tan(-120^\circ)\tan(-150^\circ)$ [เฉลย. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + (\sqrt{3}) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{3}{4} - 1 = -\frac{7}{4}$]
- $\sin(-225^\circ)\cos(-135^\circ) + \cos(-330^\circ)\sin 300^\circ$
[เฉลย. $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{2}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{5}{4}$]

3. สื่อการเรียนการสอน

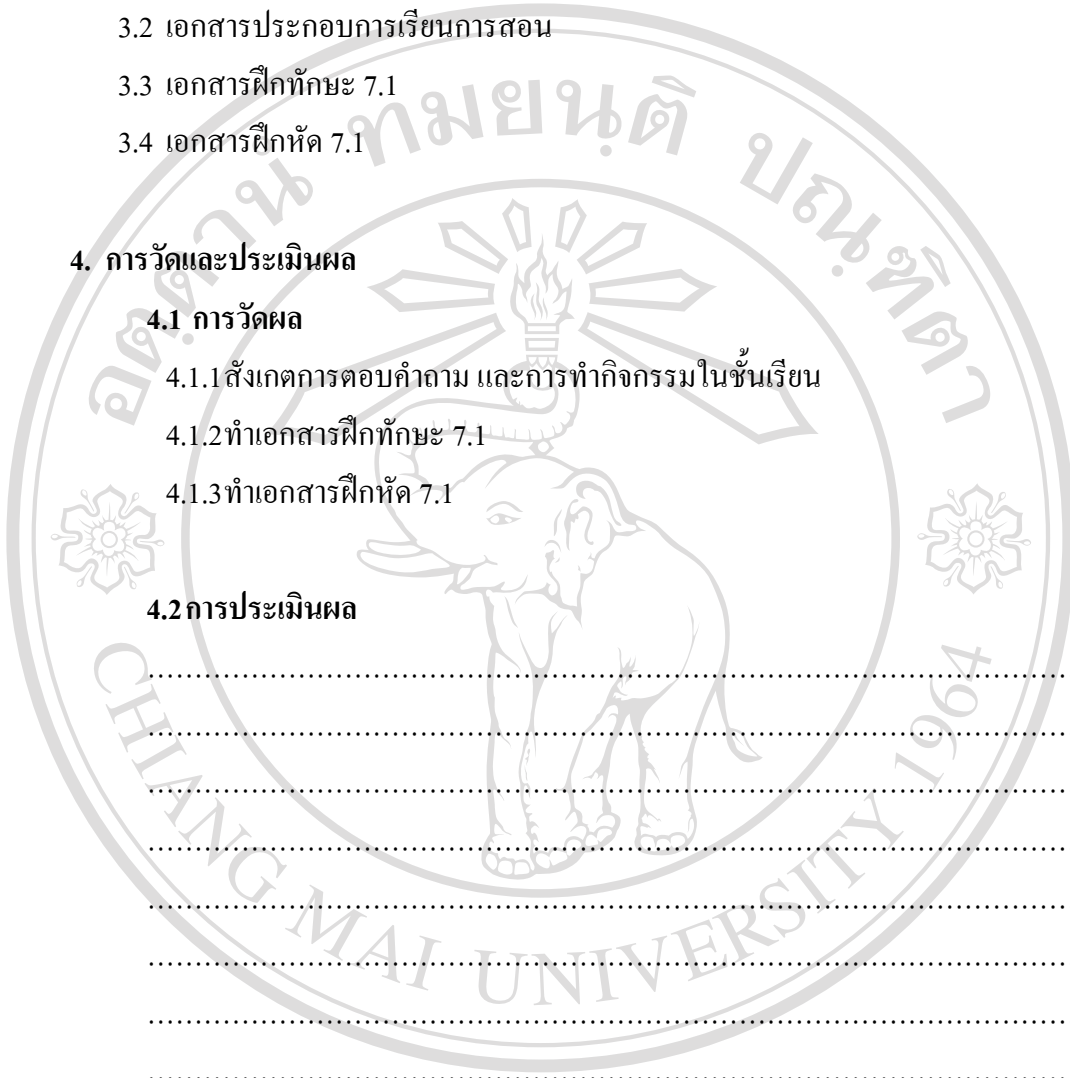
- 3.1 แผ่นภาพสรุปค่าฟังก์ชัน
- 3.2 เอกสารประกอบการเรียนการสอน
- 3.3 เอกสารฝึกทักษะ 7.1
- 3.4 เอกสารฝึกหัด 7.1

4. การวัดและประเมินผล

4.1 การวัดผล

- 4.1.1 สังเกตการตอบคำถาม และการทำงานกิจกรรมในชั้นเรียน
- 4.1.2 ทำเอกสารฝึกทักษะ 7.1
- 4.1.3 ทำเอกสารฝึกหัด 7.1

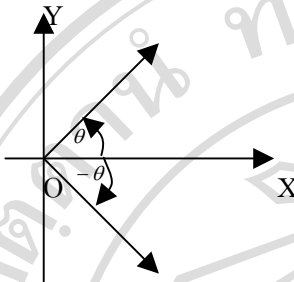
4.2 การประเมินผล



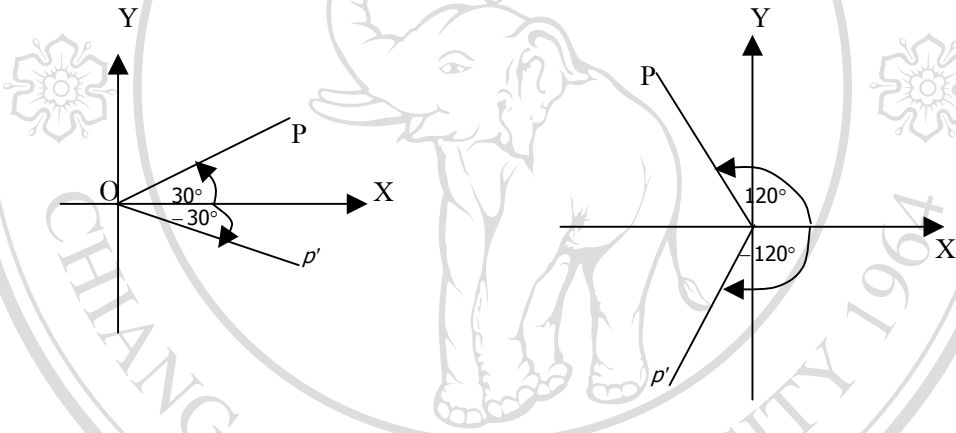
ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright © by Chiang Mai University
All rights reserved

เอกสารประกอบการเรียนการสอนคาบเรียนที่ 7
 “ ค่าฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนของมุมใด ๆ ”

แผ่นภาพ 1



- มุม θ และ $-\theta$ ต่างกันอย่างไร?
- จากความรู้เดิมเราวัดมุมแบบใด? θ หรือ $-\theta$
- เพื่อไม่ให้เกิดความสับสนในการวัดมุมต่อไปจะใช้เครื่องหมาย (-) ลบ เป็นสัญลักษณ์แทนทิศทางการวัดมุมที่ตรงข้ามกับมุมเดิม หรือ การวัดมุมในทิศทางตามเข็มนาฬิกา เช่น



แผ่นภาพ 2

$\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$

$\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sin 210^\circ = -\frac{1}{2}$

$\cos 210^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 210^\circ = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sin 330^\circ = -\frac{1}{2}$

$\cos 330^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

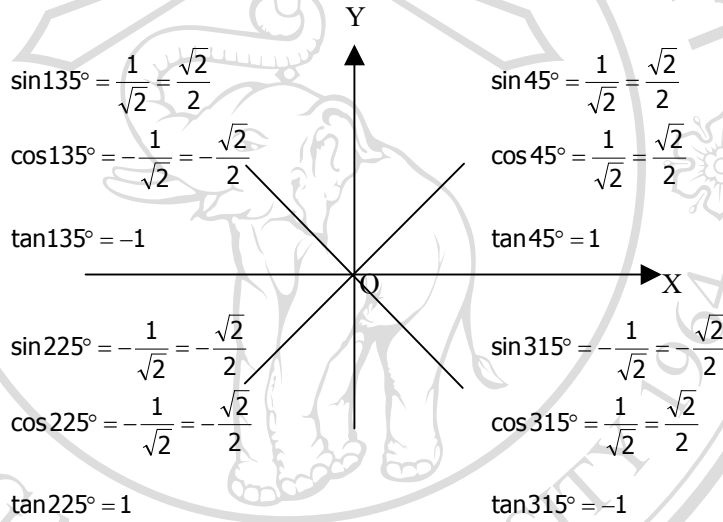
$\tan 330^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
 Copyright © by Chiang Mai University
 All rights reserved

- จากแผนภาพ 2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \sin(-30^\circ) &= -\frac{1}{2} & \cos(-30^\circ) &= \frac{\sqrt{3}}{2} & \tan(-30^\circ) &= -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \sin(-150^\circ) &= -\frac{1}{2} & \cos(-150^\circ) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} & \tan(-150^\circ) &= \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \sin(-210^\circ) &= \frac{1}{2} & \cos(-210^\circ) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} & \tan(-210^\circ) &= -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \sin(-330^\circ) &= \frac{1}{2} & \cos(-330^\circ) &= \frac{\sqrt{3}}{2} & \tan(-330^\circ) &= \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

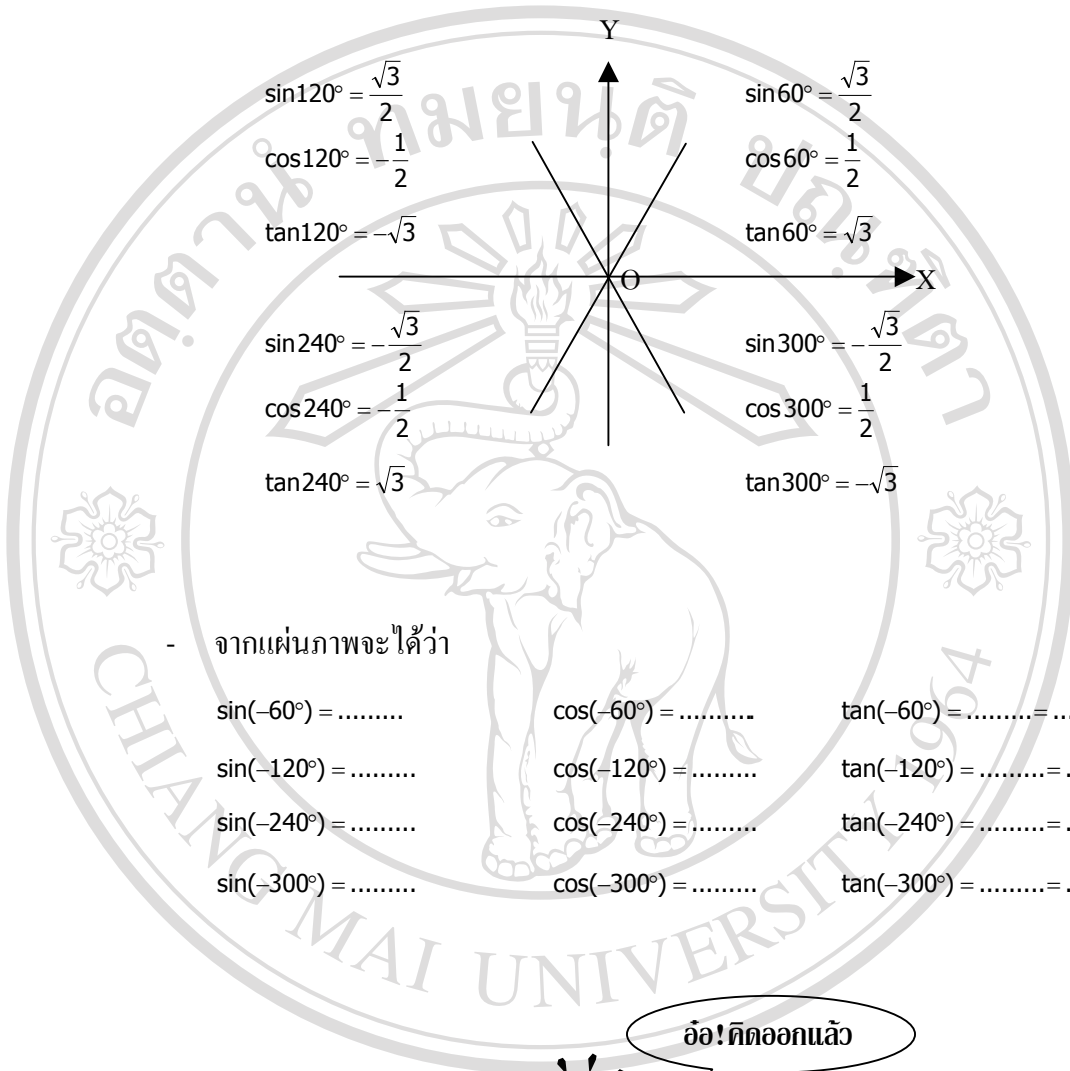
แผนภาพ 3



- จากแผนภาพจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \sin(-45^\circ) &= \dots\dots\dots = \dots\dots\dots & \cos(-45^\circ) &= \dots\dots\dots = \dots\dots\dots & \tan(-45^\circ) &= \dots\dots\dots \\ \sin(-135^\circ) &= \dots\dots\dots = \dots\dots\dots & \cos(-135^\circ) &= \dots\dots\dots = \dots\dots\dots & \tan(-135^\circ) &= \dots\dots\dots \\ \sin(-225^\circ) &= \dots\dots\dots = \dots\dots\dots & \cos(-225^\circ) &= \dots\dots\dots = \dots\dots\dots & \tan(-225^\circ) &= \dots\dots\dots \\ \sin(-315^\circ) &= \dots\dots\dots = \dots\dots\dots & \cos(-315^\circ) &= \dots\dots\dots = \dots\dots\dots & \tan(-315^\circ) &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

แผนภาพ 4



อ้อ! คิดออกแล้ว



ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
 Copyright © by Chiang Mai University
 All rights reserved

ชื่อ

ชั้น ม. ... / ... เลขที่

เอกสารฝึกทักษะ 7.1

จงเติมช่องว่างให้สมบูรณ์

1. $\sin(-30^\circ) = \dots = \dots$ $\cos(30^\circ) = \dots = \dots$

$\tan(-30^\circ) = \dots = \dots$

2. $\sin(-150^\circ) = \dots = \dots$ $\cos(-150^\circ) = \dots = \dots$

$\tan(-150^\circ) = \dots = \dots$

3. $\sin(-210^\circ) = \dots = \dots$ $\cos(-210^\circ) = \dots = \dots$

$\tan(-210^\circ) = \dots = \dots$

4. $\sin(330^\circ) = \dots = \dots$ $\cos(-330^\circ) = \dots = \dots$

$\tan(-330^\circ) = \dots = \dots$

5. $\sin(-45^\circ) = \dots = \dots$ $\cos(-45^\circ) = \dots = \dots$

$\tan(-45^\circ) = \dots = \dots$

6. $\sin(-135^\circ) = \dots = \dots$ $\cos(-135^\circ) = \dots = \dots$

$\tan(-135^\circ) = \dots = \dots$

7. $\sin(-225^\circ) = \dots = \dots$ $\cos(-225^\circ) = \dots = \dots$

$\tan(-225^\circ) = \dots = \dots$

8. $\sin(-315^\circ) = \dots = \dots$ $\cos(-315^\circ) = \dots = \dots$

$\tan(-315^\circ) = \dots = \dots$

9. $\sin(-60^\circ) = \dots = \dots$ $\cos(-60^\circ) = \dots = \dots$

$\tan(-60^\circ) = \dots = \dots$

10. $\sin(-120^\circ) = \dots = \dots$ $\cos(-120^\circ) = \dots = \dots$

$\tan(-120^\circ) = \dots = \dots$

11. $\sin(-240^\circ) = \dots = \dots$ $\cos(-240^\circ) = \dots = \dots$

$\tan(-240^\circ) = \dots = \dots$

12. $\sin(-300^\circ) = \dots = \dots$ $\cos(-300^\circ) = \dots = \dots$

$\tan(-300^\circ) = \dots = \dots$

➡➡❤ ตั้งใจหน่อยนะครับ ! ครูเอาใจช่วย ❤➡➡

เอกสารฝึกหัด 7.1

ชื่อ
ชั้น ม. ... / ... เลขที่

จงหาผลลัพธ์ต่อไปนี้

ตัวอย่าง ก. $\sin 120^\circ + \cos 330^\circ - \sin(-300^\circ)$

วิธีทำ จาก $\sin 120^\circ + \cos 330^\circ - \sin(-300^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ดังนั้น $\sin 120^\circ + \cos 330^\circ - \sin(-300^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ข. $\cos(-135^\circ)\sin 225^\circ + \tan 225^\circ \cos(-300^\circ)$

วิธีทำ จาก $\cos(-135^\circ)\sin 225^\circ + \tan 225^\circ \cos(-300^\circ) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(1 \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{2} = 1$

ดังนั้น $\cos(-135^\circ)\sin 225^\circ + \tan 225^\circ \cos(-300^\circ) = 1$

1. $\sin 120^\circ + \cos 330^\circ - \tan(-315^\circ)$

.....

.....

.....

.....

2. $\cos(-150^\circ)\sin(-120^\circ) + \tan(-45^\circ)$

.....

.....

.....

.....

3. $\sin 240^\circ \cos(-30^\circ) - \tan(-120^\circ) \tan(-150^\circ)$

.....

.....

.....

.....

4. $\sin(-225^\circ)\cos(-135^\circ) + \cos(-330^\circ)\sin 300^\circ$

.....

.....

.....

.....

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
 Copyright © by Chiang Mai University
 All rights reserved

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8

เรื่อง ค่าฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ แทนเจนของมุมใด ๆ

จำนวน 1 คาบ

วิชาคณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค 012

ภาคเรียนที่ 2

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

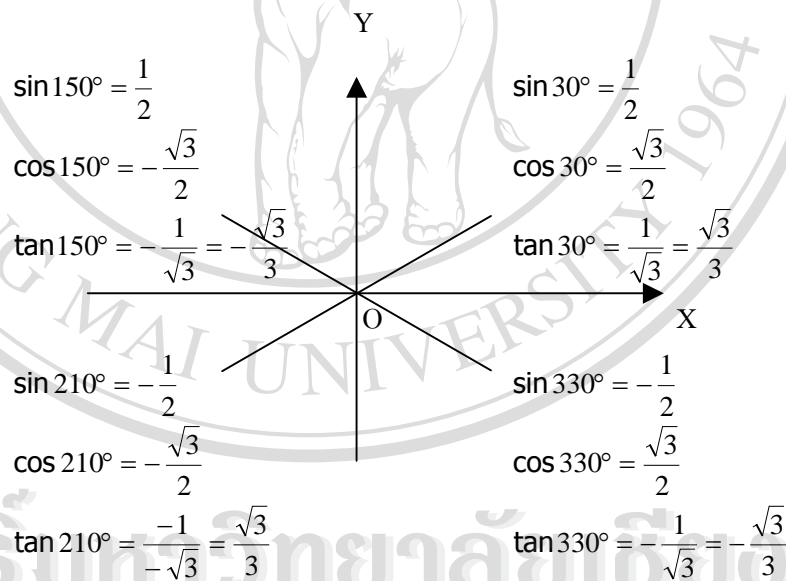
นักเรียนสามารถบอกได้ว่า $\sin(-\theta) = -\sin\theta$, $\cos(-\theta) = \cos\theta$, $\tan(-\theta) = -\tan\theta$

2. เนื้อหาและกิจกรรมการเรียนการสอน

2.1 ครูทบทวนความรู้เกี่ยวกับค่าของฟังก์ชันของมุมบางมุม โดยนำแบบฝึกหัด 7.1 มาเฉลย และครูสนทนาซักถามนักเรียนในคำตอบที่ได้

2.2 ครูคิดแผนภาพสรุปค่าฟังก์ชันของมุม 30° , 150° , 210° , 330° , 45° , 135° , 225° , 315° องศา และ 60° , 120° , 240° , 300° องศา จากคาบที่ 6 ไว้บนกระดาน แล้วสนทนาซักถามนักเรียน

แผนภาพ 1



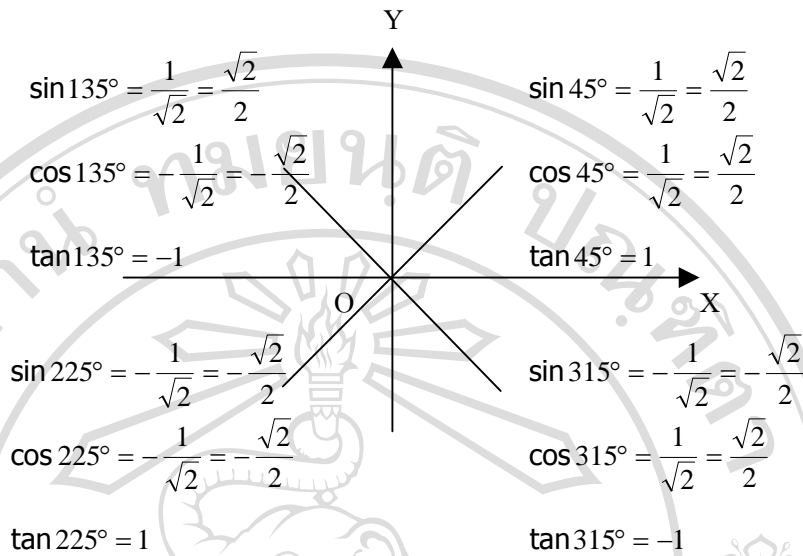
- จากแผนภาพจะได้ว่า

$$\sin 30^\circ = ?\left[\frac{1}{2}\right] \text{ และ } \sin(-30^\circ) = ?\left[-\frac{1}{2}\right] \text{ ดังนั้น } \sin(-30^\circ) = ?\left[-\frac{1}{2}\right] = ?[-\sin 30^\circ]$$

$$\sin 150^\circ = ?\left[\frac{1}{2}\right] \text{ และ } \sin(-150^\circ) = ?\left[-\frac{1}{2}\right] \text{ ดังนั้น } \sin(-150^\circ) = ?\left[-\frac{1}{2}\right] = ?[-\sin 150^\circ]$$

$$\sin 210^\circ = -\frac{1}{2} \text{ และ } \sin(-210^\circ) = ?\left[\frac{1}{2}\right] \text{ ดังนั้น } \sin[-210^\circ] = ?\left[\frac{1}{2}\right] = ?[-\sin 210^\circ]$$

$$\sin 330^\circ = ?\left[-\frac{1}{2}\right] \text{ และ } \sin(-330^\circ) = ?\left[\frac{1}{2}\right] \text{ ดังนั้น } \sin(-330^\circ) = ?\left[\frac{1}{2}\right] = ?[-\sin 330^\circ]$$

แผนภาพ 2

- จากแผนภาพจะได้ว่า

$$\sin(-45^\circ) = ? \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \right] \quad \text{และ} \quad \sin 45^\circ = ? \left[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \sin(-45^\circ) = ? \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} \right] = ? [-\sin 45^\circ]$$

$$\sin(-135^\circ) = ? \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \right] \quad \text{และ} \quad \sin 135^\circ = ? \left[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \sin(-135^\circ) = ? \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} \right] = ? [-\sin 135^\circ]$$

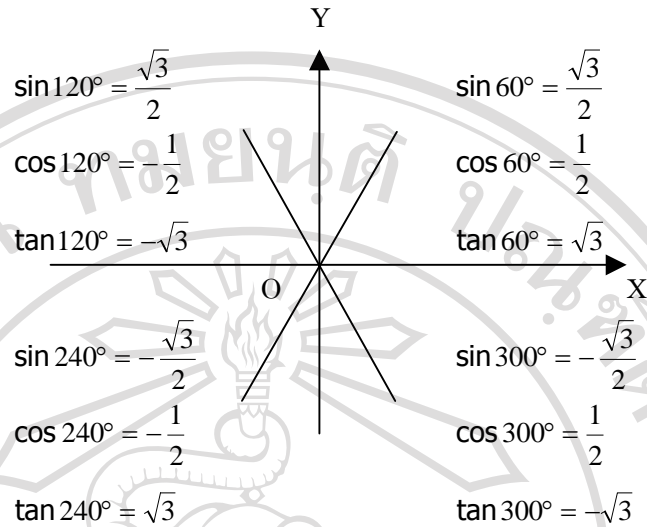
$$\sin(-225^\circ) = ? \left[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \quad \text{และ} \quad \sin 225^\circ = ? \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \sin(-225^\circ) = ? \left[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = ? [-\sin 225^\circ]$$

$$\sin(-315^\circ) = ? \left[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \quad \text{และ} \quad \sin 315^\circ = ? \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \sin(-315^\circ) = ? \left[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = ? [\sin 315^\circ]$$

แผนภาพ 3



จากแผนภาพจะได้ว่า

$$\sin(-60^\circ) = ?\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad \text{และ} \quad \sin 60^\circ = ?\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad \text{ดังนั้น} \quad \sin(-60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} = ?[-\sin 60^\circ]$$

$$\sin(-120^\circ) = ?\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad \text{และ} \quad \sin 120^\circ = ?\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad \text{ดังนั้น} \quad \sin(-120^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} = ?[-\sin 120^\circ]$$

$$\sin(-240^\circ) = ?\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad \text{และ} \quad \sin 240^\circ = ?\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad \text{ดังนั้น} \quad \sin(-240^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = ?[-\sin 240^\circ]$$

$$\sin(-300^\circ) = ?\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad \text{และ} \quad \sin 300^\circ = ?\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad \text{ดังนั้น} \quad \sin(-300^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = ?[-\sin 300^\circ]$$

2.3 ครูแบ่งนักเรียนออกเป็น 9 กลุ่ม และแจกเอกสารประกอบการเรียนการสอนให้แต่ละกลุ่ม ช่วยกันพิจารณาค่าฟังก์ชันโคไซน์ และ แทนเจน และ ร่วมกันสรุปค่าฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และ แทนเจนของมุมในทิศทางตามเข็มนาฬิกา

ดำเนินการในทำนองเดียวกันกับข้อ 2.2 จากแผนภาพจะได้อีกว่า

$$\cos(-30^\circ) = ?\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad \text{และ} \quad \cos 30^\circ = ?\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad \text{ดังนั้น} \quad \cos(-30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = ?[\cos 30^\circ]$$

$$\cos(-150^\circ) = ?\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad \text{และ} \quad \cos 150^\circ = ?\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad \text{ดังนั้น} \quad \cos(-150^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} = ?[\cos 150^\circ]$$

$$\cos(-210^\circ) = ?\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad \text{และ} \quad \cos 210^\circ = ?\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad \text{ดังนั้น} \quad \cos(-210^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} = ?[\cos 210^\circ]$$

$$\cos(-330^\circ) = ?\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad \text{และ} \quad \cos 330^\circ = ?\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad \text{ดังนั้น} \quad \cos(-330^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = ?[\cos 330^\circ]$$

$$\text{และ } \cos(-45^\circ) = ?\left[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \quad \text{และ } \cos 45^\circ = ?\left[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$\text{ดังนั้น } \cos(-45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = ?[\cos 45^\circ]$$

$$\cos(-135^\circ) = ?\left[-\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \quad \text{และ } \cos 135^\circ = ?\left[-\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$\text{ดังนั้น } \cos(-135^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = ?[\cos 135^\circ]$$

$$\cos(-225^\circ) = ?\left[-\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \quad \text{และ } \cos 225^\circ = ?\left[-\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$\text{ดังนั้น } \cos(-225^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = ?[\cos 225^\circ]$$

$$\cos(-315^\circ) = ?\left[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \quad \text{และ } \cos 315^\circ = ?\left[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$\text{ดังนั้น } \cos(-315^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = ?[\cos 315^\circ]$$

$$\text{และ } \cos(-60^\circ) = ?\left[\frac{1}{2}\right] \quad \text{และ } \cos 60^\circ = ?\left[\frac{1}{2}\right] \quad \text{ดังนั้น } \cos(-60^\circ) = \frac{1}{2} = ?[\cos 60^\circ]$$

$$\cos(-120^\circ) = ?\left[-\frac{1}{2}\right] \quad \text{และ } \cos 120^\circ = ?\left[-\frac{1}{2}\right] \quad \text{ดังนั้น } \cos(-120^\circ) = -\frac{1}{2} = ?[\cos 120^\circ]$$

$$\cos(-240^\circ) = ?\left[-\frac{1}{2}\right] \quad \text{และ } \cos 240^\circ = ?\left[-\frac{1}{2}\right] \quad \text{ดังนั้น } \cos(-240^\circ) = -\frac{1}{2} = ?[\cos 240^\circ]$$

$$\cos(-300^\circ) = ?\left[\frac{1}{2}\right] \quad \text{และ } \cos 300^\circ = ?\left[\frac{1}{2}\right] \quad \text{ดังนั้น } \cos(-300^\circ) = \frac{1}{2} = ?[\cos 300^\circ]$$

และจะได้อีกว่า

$$\tan(-30^\circ) = ?\left[-\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\right] \quad \text{และ } \tan 30^\circ = ?\left[\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$$

$$\text{ดังนั้น } \tan(-30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = ?[-\tan 30^\circ]$$

$$\tan(-150^\circ) = ?\left[\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\right] \quad \text{และ } \tan 150^\circ = ?\left[-\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$$

$$\text{ดังนั้น } \tan(-150^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = ?[-\tan 150^\circ]$$

$$\tan(-210^\circ) = ?\left[-\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\right] \quad \text{และ } \tan 210^\circ = ?\left[\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$$

$$\text{ดังนั้น } \tan(-210^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} = ?[-\tan 210^\circ]$$

$$\tan(-330^\circ) = ?\left[\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\right] \quad \text{และ } \tan 330^\circ = ?\left[-\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$$

$$\text{ดังนั้น } \tan(-330^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = ?[-\tan 330^\circ]$$

และ $\tan(-45^\circ) = ?[-1]$ และ $\tan 45^\circ = ?[1]$ ดังนั้น $\tan(-45^\circ) = -1 = ?[-\tan 45^\circ]$
 $\tan(-135^\circ) = ?[1]$ และ $\tan 135^\circ = ?[-1]$ ดังนั้น $\tan(-135^\circ) = 1 = ?[-\tan 135^\circ]$
 $\tan(-225^\circ) = ?[-1]$ และ $\tan 45^\circ = ?[1]$ ดังนั้น $\tan(-225^\circ) = -1 = ?[-\tan 225^\circ]$
 $\tan(-315^\circ) = ?[1]$ และ $\tan 315^\circ = ?[-1]$ ดังนั้น $\tan(-315^\circ) = -1 = ?[-\tan 315^\circ]$

และ $\tan(-60^\circ) = ?[-\sqrt{3}]$ และ $\tan 60^\circ = ?[\sqrt{3}]$ ดังนั้น $\tan(-60^\circ) = -\sqrt{3} = ?[-\tan 60^\circ]$
 $\tan(-120^\circ) = ?[\sqrt{3}]$ และ $\tan 120^\circ = ?[-\sqrt{3}]$ ดังนั้น $\tan(-120^\circ) = \sqrt{3} = ?[-\tan 120^\circ]$
 $\tan(-240^\circ) = ?[-\sqrt{3}]$ และ $\tan 240^\circ = ?[\sqrt{3}]$ ดังนั้น $\tan(-240^\circ) = -\sqrt{3} = ?[-\tan 240^\circ]$
 $\tan(-300^\circ) = ?[\sqrt{3}]$ และ $\tan 300^\circ = ?[-\sqrt{3}]$ ดังนั้น $\tan(-300^\circ) = \sqrt{3} = ?[-\tan 300^\circ]$

จากการหาค่าฟังก์ชันสรุปได้ว่า

$$\sin(-\theta) \dots (\text{เท่ากับ}) \dots -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) \dots (\text{เท่ากับ}) \dots \cos \theta$$

$$\tan(-\theta) \dots (\text{เท่ากับ}) \dots -\tan \theta$$

2.4 ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปอีกครั้งหนึ่งว่า

$$\sin(-\theta) \dots (\text{เท่ากับ}) \dots -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) \dots (\text{เท่ากับ}) \dots \cos \theta$$

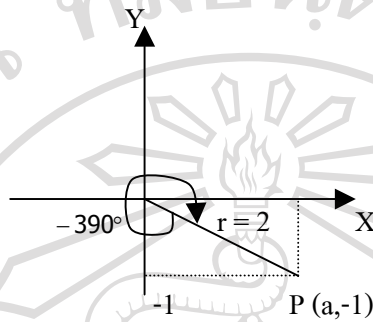
$$\tan(-\theta) \dots (\text{เท่ากับ}) \dots -\tan \theta$$

2.5 ครูแจกเอกสารฝึกหัด 8.1 ให้นักเรียนทำเป็นการบ้าน

เอกสารฝึกหัด 8.1

จงหาค่าฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนของมุมต่อไปนี้

1.



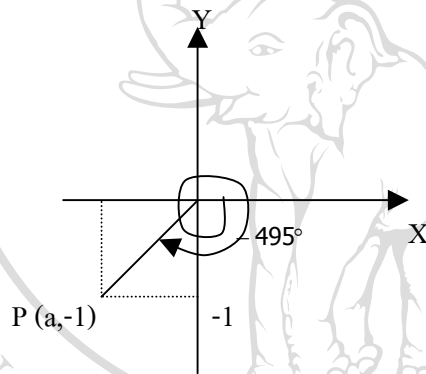
$$a = ?[\sqrt{3}]$$

$$\sin(-390^\circ) = ?\left[-\frac{1}{2}\right]$$

$$\cos(-390^\circ) = ?\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$\tan(-390^\circ) = ?\left[-\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$$

2.



$$a = ?[-1]$$

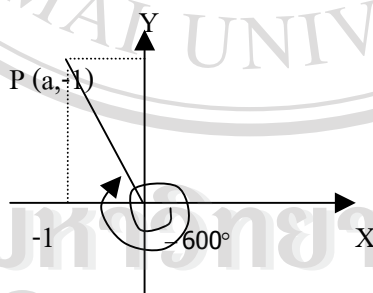
$$\sin(-495^\circ) = ?\left[-\frac{1}{2}\right]$$

$$\cos(-495^\circ) = ?\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$\tan(-495^\circ) = ?\left[-\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$$

$$r = ?[\sqrt{2}]$$

3.



$$a = ?[-1]$$

$$\sin(-600^\circ) = ?\left[-\frac{1}{2}\right]$$

$$\cos(-600^\circ) = ?\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$\tan(-600^\circ) = ?\left[-\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$$

$$r = ?[\sqrt{2}]$$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright © by Chiang Mai University
All rights reserved

3. สื่อการเรียนการสอน

3.1 เอกสารประกอบการเรียน

3.2 แผ่นภาพ 1- 3

3.3 เอกสารฝึกหัด 8.1

4. การวัดและประเมินผล

4.1 การวัดผล

4.1.1 การสังเกตการทำกิจกรรมในชั้นเรียน

4.1.2 สรุปรูปเนื้อหาทำคาบเรียน

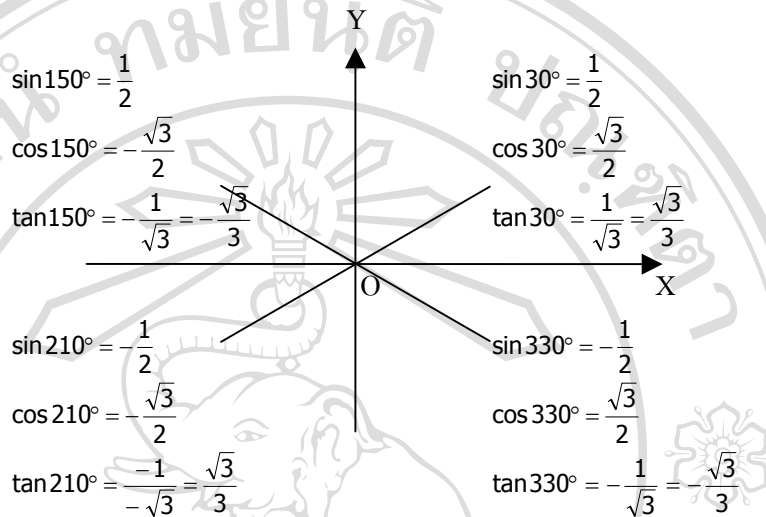
4.1.3 การทำเอกสารฝึกหัด

4.2 การประเมินผล

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright © by Chiang Mai University
All rights reserved

เอกสารประกอบการเรียนการสอน คาบที่ 8

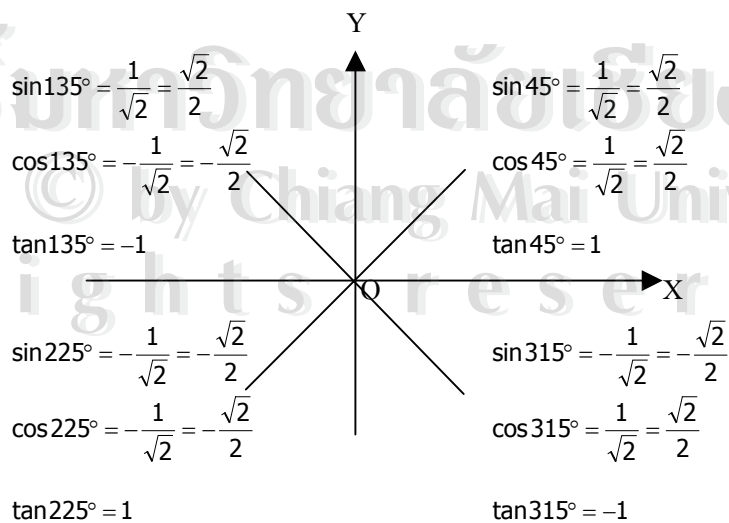
แผนภาพ 1



- จากแผนภาพจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \text{ และ } \sin(-30^\circ) &= -\frac{1}{2} \text{ ดังนั้น } \sin(-30^\circ) = -\frac{1}{2} = -\sin 30^\circ \\ \sin 150^\circ = \frac{1}{2} \text{ และ } \sin(-150^\circ) &= -\frac{1}{2} \text{ ดังนั้น } \sin(-150^\circ) = -\frac{1}{2} = -\sin 150^\circ \\ \sin 210^\circ = -\frac{1}{2} \text{ และ } \sin(-210^\circ) &= \frac{1}{2} \text{ ดังนั้น } \sin[-210^\circ] = \frac{1}{2} = -\sin 210^\circ \\ \sin 330^\circ = -\frac{1}{2} \text{ และ } \sin(-330^\circ) &= \frac{1}{2} \text{ ดังนั้น } \sin(-330^\circ) = \frac{1}{2} = -\sin 330^\circ \end{aligned}$$

แผนภาพ 2



- จากแผนภาพจะได้ว่า

$$\sin(-45^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{และ} \quad \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ดังนั้น $\sin(-45^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\sin 45^\circ$

$$\sin(-135^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{และ} \quad \sin 135^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ดังนั้น $\sin(-135^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\sin 135^\circ$

$$\sin(-225^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{และ} \quad \sin 225^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ดังนั้น $\sin(-225^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = -\sin 225^\circ$

$$\sin(-315^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{และ} \quad \sin 315^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ดังนั้น $\sin(-315^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin 315^\circ$

แผนภาพ 3

$$\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\sin 240^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 240^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 240^\circ = \sqrt{3}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

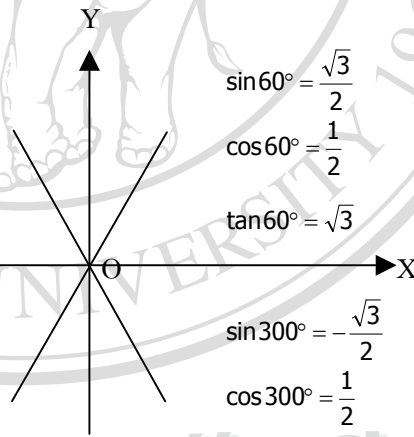
$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\sin 300^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 300^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 300^\circ = -\sqrt{3}$$



- จากแผนภาพจะได้ว่า

$$\sin(-60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{และ} \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ดังนั้น} \quad \sin(-60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sin 60^\circ$$

$$\sin(-120^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{และ} \quad \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ดังนั้น} \quad \sin(-120^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sin 120^\circ$$

$$\sin(-240^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{และ} \quad \sin 240^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ดังนั้น} \quad \sin(-240^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sin 240^\circ$$

$$\sin(-300^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{และ} \quad \sin 300^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ดังนั้น} \quad \sin(-300^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sin 300^\circ$$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright © Chiang Mai University

All rights reserved

ดำเนินการในทำนองเดียวกันจากแผนภาพ 1-3 จะได้อีกว่า

$$\begin{aligned} \cos(-30^\circ) &= \dots\dots\dots \text{ และ } \cos 30^\circ = \dots\dots\dots \text{ ดังนั้น } \cos(-30^\circ) = \dots\dots = \dots\dots\dots \\ \cos(-150^\circ) &= \dots\dots\dots \text{ และ } \cos 150^\circ = \dots\dots\dots \text{ ดังนั้น } \cos(-150^\circ) = \dots\dots = \dots\dots\dots \\ \cos(-210^\circ) &= \dots\dots\dots \text{ และ } \cos 210^\circ = \dots\dots\dots \text{ ดังนั้น } \cos(-210^\circ) = \dots\dots = \dots\dots\dots \\ \cos(-330^\circ) &= \dots\dots\dots \text{ และ } \cos 330^\circ = \dots\dots\dots \text{ ดังนั้น } \cos(-330^\circ) = \dots\dots = \dots\dots\dots \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} \cos(-45^\circ) &= \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ และ } \cos 45^\circ = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \\ \text{ดังนั้น } \cos(-45^\circ) &= \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(-135^\circ) &= \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ และ } \cos 135^\circ = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \\ \text{ดังนั้น } \cos(-135^\circ) &= \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(-225^\circ) &= \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ และ } \cos 225^\circ = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \\ \text{ดังนั้น } \cos(-225^\circ) &= \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(-315^\circ) &= \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ และ } \cos 315^\circ = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \\ \text{ดังนั้น } \cos(-315^\circ) &= \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} \cos(-60^\circ) &= \dots\dots\dots \text{ และ } \cos 60^\circ = \dots\dots\dots \text{ ดังนั้น } \cos(-60^\circ) = \dots\dots = \dots\dots\dots \\ \cos(-120^\circ) &= \dots\dots\dots \text{ และ } \cos 120^\circ = \dots\dots\dots \text{ ดังนั้น } \cos(-120^\circ) = \dots\dots = \dots\dots\dots \\ \cos(-240^\circ) &= \dots\dots\dots \text{ และ } \cos 240^\circ = \dots\dots\dots \text{ ดังนั้น } \cos(-240^\circ) = \dots\dots = \dots\dots\dots \\ \cos(-300^\circ) &= \dots\dots\dots \text{ และ } \cos 300^\circ = \dots\dots\dots \text{ ดังนั้น } \cos(-300^\circ) = \dots\dots = \dots\dots\dots \end{aligned}$$

และจะได้อีกว่า

$$\begin{aligned} \tan(-30^\circ) &= \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ และ } \tan 30^\circ = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \\ \text{ดังนั้น } \tan(-30^\circ) &= \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan(-150^\circ) &= \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ และ } \tan 150^\circ = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \\ \text{ดังนั้น } \tan(-150^\circ) &= \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan(-210^\circ) &= \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ และ } \tan 210^\circ = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \\ \text{ดังนั้น } \tan(-210^\circ) &= \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan(-330^\circ) &= \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ และ } \tan 330^\circ = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \\ \text{ดังนั้น } \tan(-330^\circ) &= \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \end{aligned}$$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright © by Chiang Mai University
All rights reserved

และ

$\tan(-45^\circ) = \dots$ และ $\tan 45^\circ = \dots$ ดังนั้น $\tan(-45^\circ) = \dots = \dots$

$\tan(-135^\circ) = \dots$ และ $\tan 135^\circ = \dots$ ดังนั้น $\tan(-135^\circ) = \dots = \dots$

$\tan(-225^\circ) = \dots$ และ $\tan 45^\circ = \dots$ ดังนั้น $\tan(-225^\circ) = \dots = \dots$

$\tan(-315^\circ) = \dots$ และ $\tan 315^\circ = \dots$ ดังนั้น $\tan(-315^\circ) = \dots = \dots$

และ

$\tan(-60^\circ) = \dots$ และ $\tan 60^\circ = \dots$ ดังนั้น $\tan(-60^\circ) = \dots = \dots$

$\tan(-120^\circ) = \dots$ และ $\tan 120^\circ = \dots$ ดังนั้น $\tan(-120^\circ) = \dots = \dots$

$\tan(-240^\circ) = \dots$ และ $\tan 240^\circ = \dots$ ดังนั้น $\tan(-240^\circ) = \dots = \dots$

$\tan(-300^\circ) = \dots$ และ $\tan 300^\circ = \dots$ ดังนั้น $\tan(-300^\circ) = \dots = \dots$

จากการหาค่าฟังก์ชันสรุปได้ว่า

$\sin(-\theta) = -\sin \theta$

$\cos(-\theta) = \cos \theta$

$\tan(-\theta) = -\tan \theta$

สูตรนี้ง่ายจัง

ใช่แล้วจ้ะก็ไม่ยาก

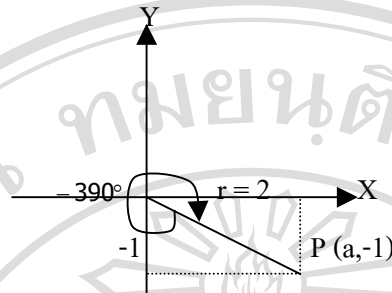


ลิขสิทธิ์เนื้อหาวิทยาลัยเทคโนโลยีใหม่
Copyright © by Chiang Mai University
All rights reserved

เอกสารฝึกหัด 8.1

จงหาค่าฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจน ของมุมต่อไปนี้

1.



$a = \dots\dots$

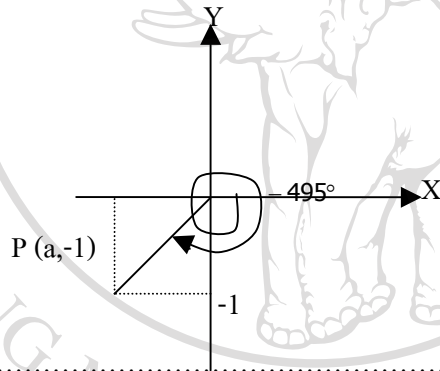
$\sin(-390^\circ) = \dots\dots\dots$

$\cos(-390^\circ) = \dots\dots\dots$

$\tan(-390^\circ) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

.....

2.



$a = \dots\dots\dots$

$\sin(-495^\circ) = \dots\dots\dots$

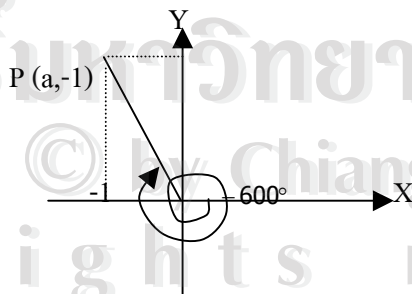
$\cos(-495^\circ) = \dots\dots\dots$

$\tan(-495^\circ) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

$r = \dots\dots\dots$

.....

3.



$a = \dots\dots\dots$

$\sin(-600^\circ) = \dots\dots\dots$

$\cos(-600^\circ) = \dots\dots\dots$

$\tan(-600^\circ) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

$r = \dots\dots\dots$

.....

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 9

เรื่อง ค่าฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ แทนเจนของมุมใด ๆ

จำนวน 1 คาบ

วิชาคณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค 012

ภาคเรียนที่ 2

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

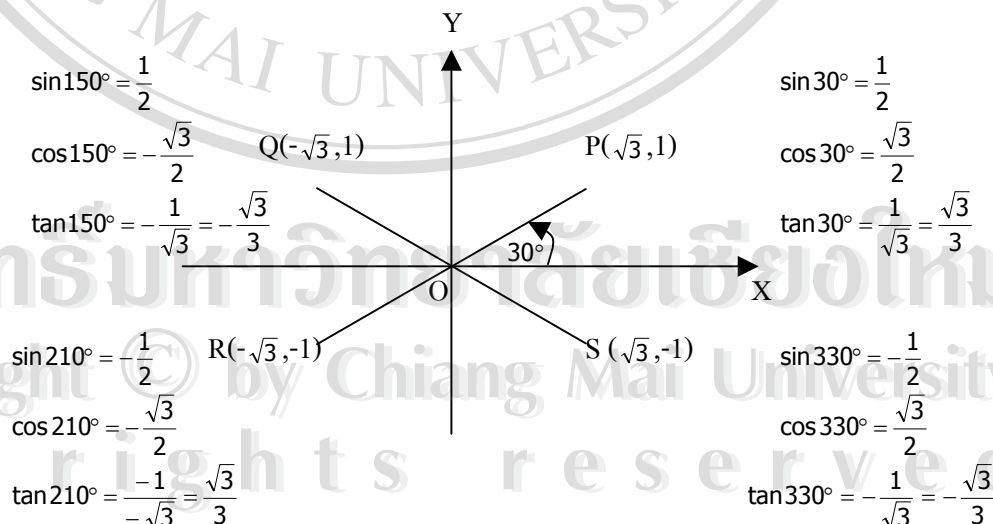
นักเรียนสามารถเขียนฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจน ของมุมที่กำหนดให้อยู่ในรูปฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนของมุมตั้งแต่ 0 องศา ถึง 90 องศา ได้

2. เนื้อหาและกิจกรรมการเรียนการสอน

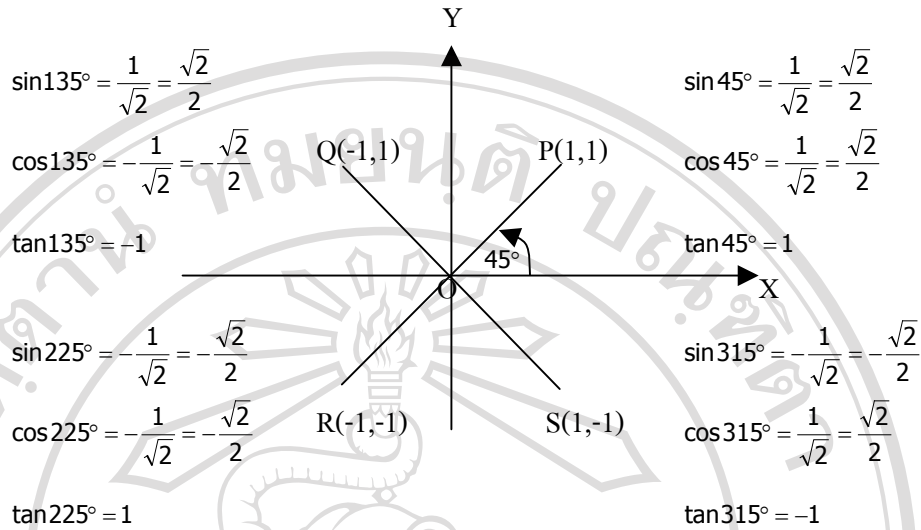
2.1 ครูคิดแผนภาพสรุปค่าฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนของมุม 30 , 150 , 210 , 330 , 45 , 135 , 225 , 315 องศา และ 60 , 120 , 240 , 300 องศา จากคาบที่ 6 ไว้บนกระดาน แต่ครูปิดคำตอบบนแผนภาพไว้ แล้วสนทนากลุ่มนักเรียนเกี่ยวกับค่าของฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจน

2.2 ครูเปิดกระดานที่ปิดคำตอบบนแผนภาพ 1 – 3 ออก แล้วครูสนทนากลุ่มนักเรียนโดยให้นักเรียนพิจารณาจากแผนภาพประกอบ ซึ่งครูถามนักเรียนทีละฟังก์ชันดังนี้

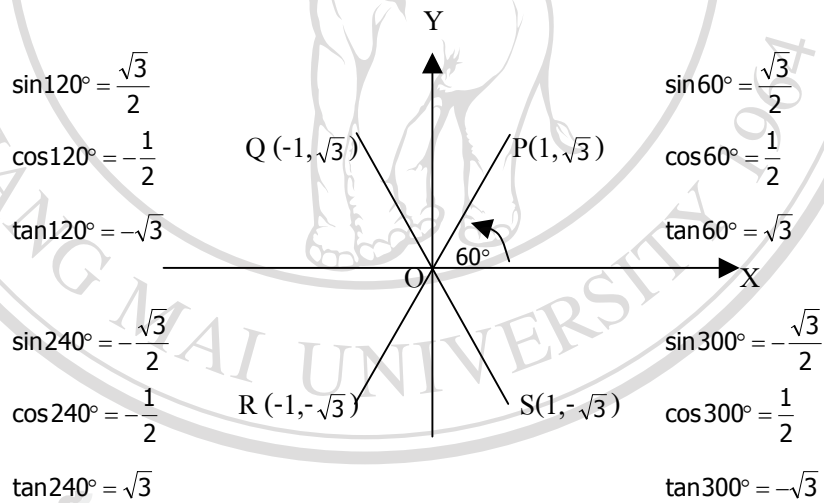
แผนภาพ 1



แผนภาพ 2



แผนภาพ 3



พิจารณาฟังก์ชันไซน์จากแผนภาพจะได้ว่า

$\sin 150^\circ = ?[\frac{1}{2}]$ และ $\sin 30^\circ = ?[\frac{1}{2}]$ ดังนั้น $\sin 150^\circ = ?[\sin 30^\circ] = ?[\frac{1}{2}]$

$\sin 135^\circ = ?[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}]$ และ $\sin 45^\circ = ?[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}]$ ดังนั้น

$\sin 135^\circ = ?[\sin 45^\circ] = ?[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}]$

$\sin 120^\circ = ?[\frac{\sqrt{3}}{2}]$ และ $\sin 60^\circ = ?[\frac{\sqrt{3}}{2}]$ ดังนั้น $\sin 120^\circ = ?[\sin 60^\circ] = ?[\frac{\sqrt{3}}{2}]$

- มุมใน 1 รอบเท่ากับเท่าใด? [360°] และมุมครึ่งรอบเท่ากับเท่าใด? [180°]

- ณ จุด Q ของแผ่นภาพทั้ง 3 อยู่บนด้านสิ้นสุดของมุมอะไรบ้าง ? $[120^\circ, 135^\circ, 150^\circ]$ มุม $180^\circ, 60^\circ, 45^\circ, 30^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ$ มีความสัมพันธ์กันอย่างไร ? $[180^\circ - 60^\circ = 120^\circ, 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ, 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ]$

- จาก $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$ จะได้ว่า $\sin(180^\circ - 30^\circ) = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ$ จาก $\sin 135^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ จะได้ว่า

$$\sin(180^\circ - 45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin 45^\circ \text{ และ จาก } \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ จะได้ว่า}$$

$$\sin(180^\circ - 60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ$$

ดังนั้นเราจะได้ว่า ถ้า $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ แล้ว $\sin(180^\circ - \theta) = ?[\sin \theta]$

- ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า ถ้า $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ แล้ว $\cos(180^\circ - \theta) = ?[-\cos \theta]$ และ

$$\tan(180^\circ - \theta) = ?[-\tan \theta]$$

2.3 ครูแบ่งนักเรียนออกเป็น 9 กลุ่ม แล้วแจกใบงาน 9.1 ให้แต่ละกลุ่มช่วยกันพิจารณาค่าของฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจน ของมุมในควอร์แดนต์ที่ 3 และ 4 โดยให้พิจารณาจากแผ่นภาพ และทำในทำนองเดียวกับข้อ 2.2

ใบงาน 9.1

จงพิจารณาค่าของฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจน ของมุมในควอร์แดนต์ที่ 3 และ 4 พร้อมทั้งสรุปให้อยู่ในรูปทั่วไป

$$1. \sin 210^\circ = -\frac{1}{2} = -\sin 30^\circ$$

$$\sin 225^\circ = ?[-\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}] = ?[-\sin 45^\circ]$$

$$\sin 120^\circ = ?[-\frac{\sqrt{3}}{2}] = ?[-\sin 60^\circ]$$

$$\text{ดังนั้น } \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\frac{1}{2} = ?[-\sin 30^\circ]$$

$$\sin(180^\circ + 45^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = ?[-\sin 45^\circ]$$

$$\sin(180^\circ + 60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} = ?[-\sin 60^\circ]$$

$$\text{ดังนั้น ถ้า } 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ \text{ แล้ว } \sin(180^\circ + \theta) = ?[-\sin \theta]$$

$$2. \cos 210^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} = ?[-\cos 30^\circ]$$

$$\cos 225^\circ = ?[-\sin 45^\circ] = ?[-\frac{1}{\sqrt{2}}]$$

$$\cos 240^\circ = ?[-\cos 60^\circ] = ?[-\frac{1}{2}]$$

$$\text{ดังนั้น} \cos(180^\circ + 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} = ?[-\cos 30^\circ]$$

$$\cos(180^\circ + 45^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = ?[-\cos 45^\circ]$$

$$\cos(180^\circ + 60^\circ) = -\frac{1}{2} = ?[-\cos 60^\circ]$$

$$\text{ดังนั้น} \text{ ถ้า } 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ \text{ แล้ว } \cos(180^\circ + \theta) = ?[-\cos \theta]$$

$$3. \tan 210^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = ?[\tan 30^\circ]$$

$$\tan 225^\circ = ?[1] = ?[\tan 45^\circ]$$

$$\tan 240^\circ = ?[\sqrt{3}] = ?[\tan 60^\circ]$$

$$\text{ดังนั้น} \tan(180^\circ + 30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}} = ?[\tan 30^\circ]$$

$$\tan(180^\circ + 45^\circ) = 1 = ?[\tan 45^\circ]$$

$$\tan(180^\circ + 60^\circ) = \sqrt{3} = ?[\tan 60^\circ]$$

$$\text{ดังนั้น} \text{ ถ้า } 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ \text{ แล้ว } \tan(180^\circ + \theta) = ?[\tan \theta]$$

$$4. \sin 330^\circ = -\frac{1}{2} = -\sin 30^\circ$$

$$\sin 315^\circ = ?[-\frac{1}{\sqrt{2}}] = ?[-\frac{\sqrt{2}}{2}] = ?[-\sin 45^\circ]$$

$$\sin 300^\circ = ?[-\frac{\sqrt{3}}{2}] = ?[-\sin 60^\circ]$$

$$\text{ดังนั้น} \sin(360^\circ - 30^\circ) = -\frac{1}{2} = ?[-\sin 30^\circ]$$

$$\sin(360^\circ - 45^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = ?[-\sin 45^\circ]$$

$$\sin(360^\circ - 60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} = ?[-\sin 60^\circ]$$

$$\text{ดังนั้น} \text{ ถ้า } 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ \text{ แล้ว } \sin(360^\circ - \theta) = ?[-\sin \theta]$$

$$5. \cos 330^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = ?[\cos 30^\circ]$$

$$\cos 315^\circ = ?\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = ?[\sin 45^\circ]$$

$$\cos 300^\circ = ?\left[\frac{1}{2}\right] = ?[\cos 60^\circ]$$

$$\text{ดังนั้น} \cos(360^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = ?[\cos 30^\circ]$$

$$\cos(360^\circ - 45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = ?[\cos 45^\circ]$$

$$\cos(360^\circ - 60^\circ) = \frac{1}{2} = ?[\cos 60^\circ]$$

$$\text{ดังนั้น} \text{ ถ้า } 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ \text{ แล้ว } \cos(360^\circ - \theta) = ?[\cos \theta]$$

$$6. \tan 330^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}} = ?[-\tan 30^\circ]$$

$$\tan 315^\circ = ?[-1] = ?[-\tan 45^\circ]$$

$$\tan 300^\circ = ?[-\sqrt{3}] = ?[-\tan 60^\circ]$$

$$\text{ดังนั้น} \tan(360^\circ - 30^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{3}} = ?[-\tan 30^\circ]$$

$$\tan(360^\circ - 45^\circ) = -1 = ?[-\tan 45^\circ]$$

$$\tan(360^\circ - 60^\circ) = -\sqrt{3} = ?[-\tan 60^\circ]$$

$$\text{ดังนั้น} \text{ ถ้า } 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ \text{ แล้ว } \tan(360^\circ - \theta) = ?[-\tan \theta]$$

$$7. \sin 390^\circ = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ$$

$$\sin 405^\circ = ?\left[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = ?[\sin 45^\circ]$$

$$\sin 420^\circ = ?\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = ?[\sin 60^\circ]$$

$$\text{ดังนั้น} \sin(360^\circ + 30^\circ) = \frac{1}{2} = ?[\sin 30^\circ]$$

$$\sin(360^\circ + 45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = ?[\sin 45^\circ]$$

$$\sin(360^\circ + 60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = ?[\sin 60^\circ]$$

$$\text{ดังนั้น} \text{ ถ้า } 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ \text{ แล้ว } \sin(360^\circ + \theta) = ?[\sin \theta]$$

$$8. \cos 390^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = ?[\cos 30^\circ]$$

$$\cos 405^\circ = ?\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = ?[\sin 45^\circ]$$

$$\cos 420^\circ = ?\left[\frac{1}{2}\right] = ?[\cos 60^\circ]$$

$$\text{ดังนั้น} \cos(360^\circ + 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = ?[\cos 30^\circ]$$

$$\cos(360^\circ + 45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = ?[\cos 45^\circ]$$

$$\cos(360^\circ + 60^\circ) = \frac{1}{2} = ?[\cos 60^\circ]$$

$$\text{ดังนั้น} \text{ ถ้า } 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ \text{ แล้ว } \cos(360^\circ + \theta) = ?[\cos \theta]$$

$$9. \tan 390^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = ?[\tan 30^\circ]$$

$$\tan 405^\circ = ?[1] = ?[\tan 45^\circ]$$

$$\tan 420^\circ = ?[\sqrt{3}] = ?[\tan 60^\circ]$$

$$\text{ดังนั้น} \tan(360^\circ + 30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}} = ?[\tan 30^\circ]$$

$$\tan(360^\circ + 45^\circ) = 1 = ?[\tan 45^\circ]$$

$$\tan(360^\circ + 60^\circ) = \sqrt{3} = ?[\tan 60^\circ]$$

$$\text{ดังนั้น} \text{ ถ้า } 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ \text{ แล้ว } \tan(360^\circ + \theta) = ?[\tan \theta]$$

2.4 ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปว่า ถ้า $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta \quad \cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta \quad \tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta$$

$$\sin(180^\circ + \theta) = -\sin \theta \quad \cos(180^\circ + \theta) = -\cos \theta \quad \tan(180^\circ + \theta) = \tan \theta$$

$$\sin(360^\circ - \theta) = -\sin \theta \quad \cos(360^\circ - \theta) = \cos \theta \quad \tan(360^\circ - \theta) = -\tan \theta$$

2.5 ครูแจกเอกสารฝึกหัด 9.1 และแบบบันทึกการเรียนรู้ให้นักเรียนทำเป็นการบ้านและนัด

ส่งในตอนเช้าก่อนทำกิจกรรมหน้าเสาธง

เอกสารฝึกหัด 9.1

จงเขียนฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจน ของมุมที่กำหนดให้อยู่ในรูปฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนของมุมตั้งแต่ 0 องศา ถึง 90 องศา

ตัวอย่าง $340^\circ = 360^\circ - 20^\circ$

ดังนั้น $\sin 340^\circ = \sin(360^\circ - 20^\circ)$ $\cos 340^\circ = \cos(360^\circ - 20^\circ)$ $\tan 340^\circ = \tan(360^\circ - 20^\circ)$

จาก $\sin(360^\circ - \theta) = -\sin \theta$ $\cos(360^\circ - \theta) = \cos \theta$ $\tan(360^\circ - \theta) = -\tan \theta$

จะได้ $\sin 340^\circ = \sin(360^\circ - 20^\circ) = -\sin 20^\circ$ $\cos 340^\circ = \cos(360^\circ - 20^\circ) = \cos 20^\circ$

$\tan 340^\circ = \tan(360^\circ - 20^\circ) = -\tan 20^\circ$

1. 160°

[เกลย. $160^\circ = 180^\circ - 20^\circ$

ดังนั้น $\sin 160^\circ = \sin(180^\circ - 20^\circ)$, $\cos 160^\circ = \cos(180^\circ - 20^\circ)$, $\tan 160^\circ = \tan(180^\circ - 20^\circ)$

จาก $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$, $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$, $\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta$

จะได้ $\sin 160^\circ = \sin(180^\circ - 20^\circ) = \sin 20^\circ$, $\cos 160^\circ = \cos(180^\circ - 20^\circ) = -\cos 20^\circ$,

$\tan 160^\circ = \tan(180^\circ - 20^\circ) = -\tan 20^\circ$]

2. 230°

[เกลย. $230^\circ = 180^\circ + 50^\circ$

ดังนั้น $\sin 230^\circ = \sin(180^\circ + 50^\circ)$, $\cos 230^\circ = \cos(180^\circ + 50^\circ)$, $\tan 230^\circ = \tan(180^\circ + 50^\circ)$

จาก $\sin(180^\circ + \theta) = -\sin \theta$, $\cos(180^\circ + \theta) = -\cos \theta$, $\tan(180^\circ + \theta) = \tan \theta$

จะได้ $\sin 230^\circ = \sin(180^\circ + 50^\circ) = -\sin 50^\circ$, $\cos 230^\circ = \cos(180^\circ + 50^\circ) = -\cos 50^\circ$,

$\tan 230^\circ = \tan(180^\circ + 50^\circ) = \tan 50^\circ$]

3. -145°

[เกลย. จาก $\sin(-\theta) = -\sin \theta$, $\cos(-\theta) = \cos \theta$, $\tan(-\theta) = -\tan \theta$ และ

$145^\circ = 180^\circ - 35^\circ$

ดังนั้น $\sin(-145^\circ) = -\sin 145^\circ = -\sin(180^\circ - 35^\circ)$,

$\cos(-145^\circ) = \cos 145^\circ = \cos(180^\circ - 35^\circ)$ $\tan(-145^\circ) = -\tan 145^\circ = -\tan(180^\circ - 35^\circ)$

จาก $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$, $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$, $\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta$

จะได้ $\sin(-145^\circ) = -\sin(180^\circ - 35^\circ) = -\sin 35^\circ$

$\cos(-145^\circ) = \cos(180^\circ - 35^\circ) = -\cos 35^\circ$

$\tan(-145^\circ) = -\tan(180^\circ - 35^\circ) = \tan 35^\circ$]

4. -440°

[เฉลย. จาก $\sin(-\theta) = -\sin \theta$, $\cos(-\theta) = \cos \theta$, $\tan(-\theta) = -\tan \theta$ และ

$$440^\circ = 360^\circ + 80^\circ$$

$$\text{ดังนั้น } \sin(-440^\circ) = -\sin 440^\circ = -\sin(360^\circ + 80^\circ) ,$$

$$\cos(-440^\circ) = \cos 440^\circ = \cos(360^\circ + 80^\circ) \quad \tan(-440^\circ) = -\tan 440^\circ = -\tan(360^\circ + 80^\circ)$$

จาก $\sin(360^\circ + \theta) = \sin \theta$, $\cos(360^\circ + \theta) = \cos \theta$, $\tan(360^\circ + \theta) = \tan \theta$

$$\text{จะได้ } \sin(-440^\circ) = -\sin(360^\circ + 80^\circ) = -\sin 80^\circ$$

$$\cos(-440^\circ) = \cos(360^\circ + 80^\circ) = \cos 80^\circ$$

$$\tan(-440^\circ) = -\tan(360^\circ + 80^\circ) = -\tan 80^\circ]$$

3. สื่อการเรียนการสอน

3.1 เอกสารประกอบการเรียนการสอน

3.2 แผ่นภาพสรุปค่าฟังก์ชัน

3.3 ใบงาน 9.1

3.4 เอกสารฝึกหัด 9.1

4. การวัดและประเมินผล

4.1 การวัดผล

4.1.1 สังเกตการทำกิจกรรมร่วมกันในชั้นเรียน

4.1.2 การทำใบงาน 9.1

4.1.3 การสรุปเนื้อหา

4.1.4 การทำเอกสารฝึกหัด 9.1

4.2 การประเมินผล

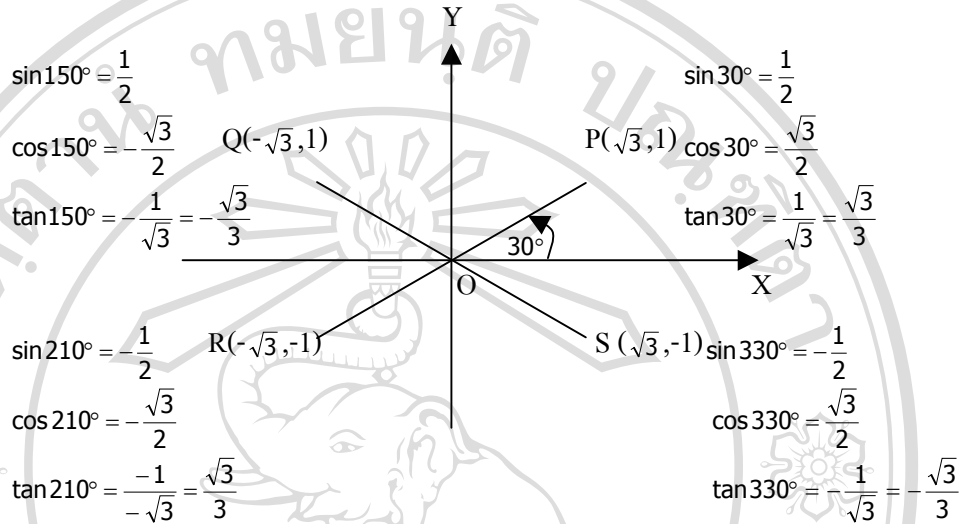
ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright © by Chiang Mai University

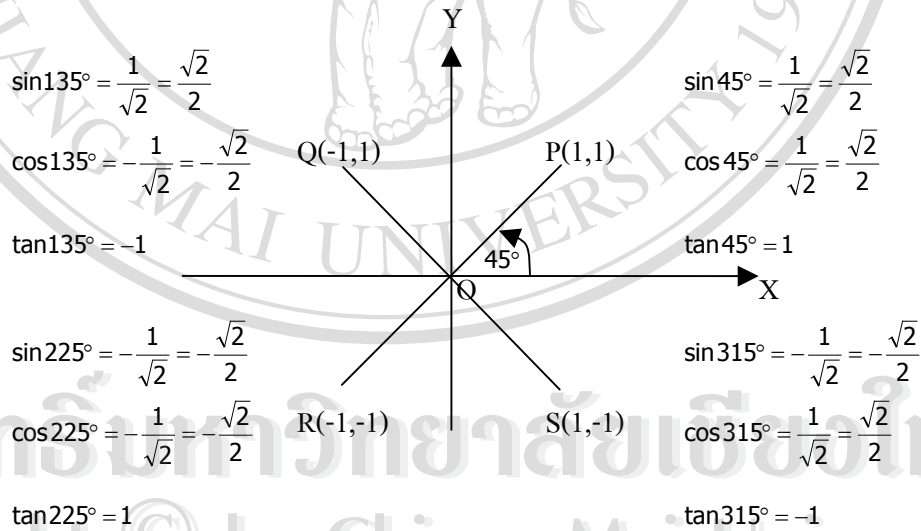
All rights reserved

เอกสารประกอบการเรียนการสอน คาบที่ 9

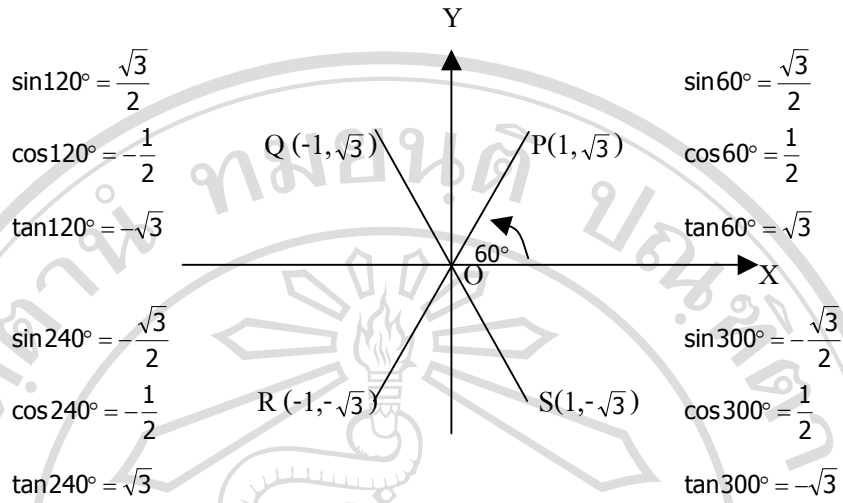
แผนภาพ 1



แผนภาพ 2



แผนภาพ 3



- พิจารณาฟังก์ชันไซน์จากแผนภาพจะได้ว่า

$\sin 150^\circ = ?[\frac{1}{2}]$ และ $\sin 30^\circ = ?[\frac{1}{2}]$ ดังนั้น $\sin 150^\circ = ?[\sin 30^\circ] = ?[\frac{1}{2}]$

$\sin 135^\circ = ?[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}]$ และ $\sin 45^\circ = ?[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}]$ ดังนั้น $\sin 135^\circ = ?[\sin 45^\circ] = ?[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}]$

$\sin 120^\circ = ?[\frac{\sqrt{3}}{2}]$ และ $\sin 60^\circ = ?[\frac{\sqrt{3}}{2}]$ ดังนั้น $\sin 120^\circ = ?[\sin 60^\circ] = ?[\frac{\sqrt{3}}{2}]$

- มุมใน 1 รอบเท่ากับเท่าใด? $[360^\circ]$ และมุมครึ่งรอบเท่ากับเท่าใด? $[180^\circ]$

- ณ จุด Q ของแผนภาพทั้ง 3 อยู่บนด้านสิ้นสุดของมุมอะไรบ้าง? $[120^\circ, 135^\circ, 150^\circ]$ มุม $180^\circ, 60^\circ, 45^\circ, 30^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ$ มีความสัมพันธ์กันอย่างไร? $[180^\circ - 60^\circ = 120^\circ, 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ, 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ]$

- จาก $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$ จะได้ว่า $\sin(180^\circ - 30^\circ) = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ$ จาก $\sin 135^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ จะได้ว่า

$\sin(180^\circ - 45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin 45^\circ$ และ จาก $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ จะได้ว่า

$\sin(180^\circ - 60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ$

ดังนั้นเราจะได้ว่า ถ้า $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ แล้ว $\sin(180^\circ - \theta) = ?[\sin \theta]$

- ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า ถ้า $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ แล้ว $\cos(180^\circ - \theta) = ?[-\cos \theta]$ และ $\tan(180^\circ - \theta) = ?[-\tan \theta]$

ใบงาน 9.1

จงพิจารณาค่าของฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจน ของมุมในควอเตอร์รันที่ 3 และ 4 พร้อมทั้งสรุปให้อยู่ในรูปทั่วไป

1. $\sin 210^\circ = -\frac{1}{2} = -\sin 30^\circ$

$\sin 225^\circ = \dots = \dots = \dots$

$\sin 120^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sin 60^\circ$

ดังนั้น $\sin(180^\circ + 30^\circ) = -\frac{1}{2} = \dots$

$\sin(180^\circ + 45^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \dots$

$\sin(180^\circ + 60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \dots$

ดังนั้น ถ้า $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ แล้ว $\sin(180^\circ + \theta) = \dots$

2. $\cos 210^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \dots$

$\cos 225^\circ = \dots = \dots$

$\cos 240^\circ = \dots = \dots$

ดังนั้น $\cos(180^\circ + 30^\circ) = \dots = \dots$

$\cos(180^\circ + 45^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \dots$

$\cos(180^\circ + 60^\circ) = -\frac{1}{2} = \dots$

ดังนั้น ถ้า $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ แล้ว $\cos(180^\circ + \theta) = \dots$

3. $\tan 210^\circ = \dots = \dots$

$\tan 225^\circ = \dots = \dots$

$\tan 240^\circ = \dots = \dots$

ดังนั้น $\tan(180^\circ + 30^\circ) = \dots = \dots$

$\tan(180^\circ + 45^\circ) = \dots = \dots$

$\tan(180^\circ + 60^\circ) = \dots = \dots$

ดังนั้น ถ้า $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ แล้ว $\tan(180^\circ + \theta) = \dots$

4. $\sin 330^\circ = \dots = \dots$

$\sin 315^\circ = \dots = \dots$]

$\sin 300^\circ = \dots = \dots$

ดังนั้น $\sin(360^\circ - 30^\circ) = \dots = \dots$

$\sin(360^\circ - 45^\circ) = \dots = \dots$, $\sin(360^\circ - 60^\circ) = \dots = \dots$

ดังนั้น ถ้า $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ แล้ว $\sin(360^\circ - \theta) = \dots$

5. $\cos 330^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \dots$

$\cos 315^\circ = \dots = \dots$

$\cos 300^\circ = \dots = \dots$

ดังนั้น $\cos(360^\circ - 30^\circ) = \dots = \dots$

$\cos(360^\circ - 45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \dots$

$\cos(360^\circ - 60^\circ) = \frac{1}{2} = \dots$

ดังนั้น ถ้า $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ แล้ว $\cos(360^\circ - \theta) = \dots$

6. $\tan 330^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}} = \dots$

$\tan 315^\circ = \dots = \dots$

$\tan 300^\circ = \dots = \dots$

ดังนั้น $\tan(360^\circ - 30^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{3}} = \dots$

$\tan(360^\circ - 45^\circ) = \dots = \dots$

$\tan(360^\circ - 60^\circ) = \dots = \dots$

ดังนั้น ถ้า $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ แล้ว $\tan(360^\circ - \theta) = \dots$

7. $\sin 390^\circ = \dots = \dots$

$\sin 405^\circ = \dots = \dots$

$\sin 420^\circ = \dots = \dots$

ดังนั้น $\sin(360^\circ + 30^\circ) = \dots = \dots$

$\sin(360^\circ + 45^\circ) = \dots = \dots$

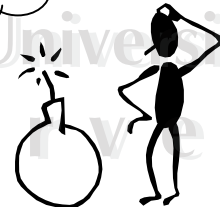
$\sin(360^\circ + 60^\circ) = \dots = \dots$

ดังนั้น ถ้า $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ แล้ว $\sin(360^\circ + \theta) = \dots$

ช่วยคิดหน่อย



อะไรกันนี่ขอ
คิดก่อน



ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright © by Chiang Mai University
All rights reserved

8. $\cos 390^\circ = \dots = \dots$

$\cos 405^\circ = \dots = \dots$

$\cos 420^\circ = \dots = \dots$

ดังนั้น $\cos(360^\circ + 30^\circ) = \dots = \dots$

$\cos(360^\circ + 45^\circ) = \dots = \dots$

$\cos(360^\circ + 60^\circ) = \dots = \dots$

ดังนั้น ถ้า $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ แล้ว $\cos(360^\circ + \theta) = \dots$

9. $\tan 390^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \dots$

$\tan 405^\circ = \dots = \dots$

$\tan 420^\circ = \dots = \dots$

ดังนั้น $\tan(360^\circ + 30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \dots$

$\tan(360^\circ + 45^\circ) = 1 = \dots$

$\tan(360^\circ + 60^\circ) = \sqrt{3} = \dots$

ดังนั้น ถ้า $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ แล้ว $\tan(360^\circ + \theta) = \dots$

ดูซิทำถูกต้องหรือป่าว



จากใบงานสรุปได้ว่า ถ้า $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$

$\sin(180^\circ - \theta) = \dots$ $\cos(180^\circ - \theta) = \dots$ $\tan(180^\circ - \theta) = \dots$

$\sin(180^\circ + \theta) = \dots$ $\cos(180^\circ + \theta) = \dots$ $\tan(180^\circ + \theta) = \dots$

$\sin(360^\circ - \theta) = \dots$ $\cos(360^\circ - \theta) = \dots$ $\tan(360^\circ - \theta) = \dots$

$\sin(360^\circ + \theta) = \dots$ $\cos(360^\circ + \theta) = \dots$ $\tan(360^\circ + \theta) = \dots$

ไชโย ทำได้แล้ว



ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright © by Chiang Mai University
All rights reserved

ชื่อ.....
 ชั้น ม. 4 / 1 เลขที่

เอกสารฝึกหัด 9.1

จงเขียนฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจน ของมุมที่กำหนดให้อยู่ในรูปฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนของมุมตั้งแต่ 0 องศา ถึง 90 องศา

ตัวอย่าง $340^\circ = 360^\circ - 20^\circ$

ดังนั้น $\sin 340^\circ = \sin(360^\circ - 20^\circ)$, $\cos 340^\circ = \cos(360^\circ - 20^\circ)$, $\tan 340^\circ = \tan(360^\circ - 20^\circ)$

จาก $\sin(360^\circ - \theta) = -\sin \theta$, $\cos(360^\circ - \theta) = \cos \theta$, $\tan(360^\circ - \theta) = -\tan \theta$

จะได้ $\sin 340^\circ = \sin(360^\circ - 20^\circ) = -\sin 20^\circ$, $\cos 340^\circ = \cos(360^\circ - 20^\circ) = \cos 20^\circ$,

$\tan 340^\circ = \tan(360^\circ - 20^\circ) = -\tan 20^\circ$

1. 160°

.....

2. 230°

.....

3. -145°

.....

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright © by Chiang Mai University

All rights reserved

4. -440°

.....

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 10

เรื่อง ค่าฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนของมุมใดๆ

จำนวน 1 คาบ

วิชาคณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค 012

ภาคเรียนที่ 2

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถ

- 1.1 เขียนฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจน ของมุมที่กำหนดให้อยู่ในรูปตั้งแต่ 0° ถึง 360° ได้
- 1.2 หาค่าฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจน ของมุมใดๆ ได้

2. เนื้อหาและกิจกรรมการเรียนรู้การสอน

- 2.1 ครูทบทวนเรื่องค่าฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนของมุมใดๆ ด้วยการแบ่งนักเรียนออกเป็น 9 กลุ่ม แล้วแจกแผ่นภาพสรุปค่าฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนของมุมตั้งแต่ 0° ถึง 360° และเขียนแผ่นภาพสรุป สูตร การหาค่าฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนของมุม ใด ๆ โดยไม่ให้นักเรียนดูจากเอกสารเดิมที่เรียนผ่านมา โดยครูใช้เวลา 10 นาที กลุ่มใดทำเสร็จก่อน และถูกต้อง จะเป็นกลุ่มชนะ แล้วครูแจกรางวัลให้กับกลุ่มที่ชนะ จากนั้นครูนำแผ่นภาพของกลุ่มที่ชนะคิดไว้บนผนังห้องให้นักเรียนได้ดูในการหาค่าฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และ แทนเจนของมุม ยังไม่ได้ หรือจำสูตรการหาค่าฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนของมุมใดๆไม่ได้

แผ่นภาพ สรุป 1

$$\sin 150^\circ = ? \left[\frac{1}{2} \right]$$

$$\cos 150^\circ = ? \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

$$\tan 150^\circ = ? \left[-\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \right]$$

$$\sin 210^\circ = ? \left[-\frac{1}{2} \right]$$

$$\cos 210^\circ = ? \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

$$\tan 210^\circ = ? \left[\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \right]$$

$$\sin 30^\circ = ? \left[\frac{1}{2} \right]$$

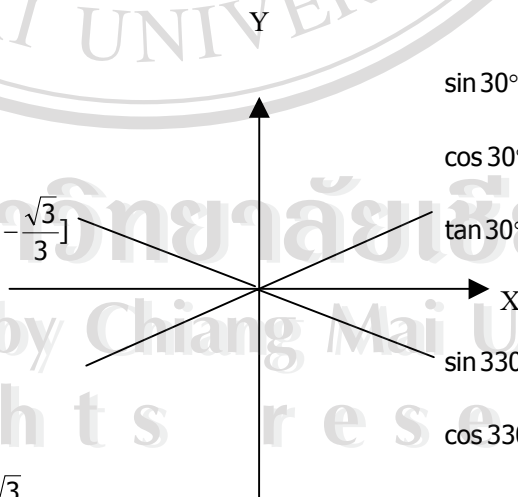
$$\cos 30^\circ = ? \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

$$\tan 30^\circ = ? \left[\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \right]$$

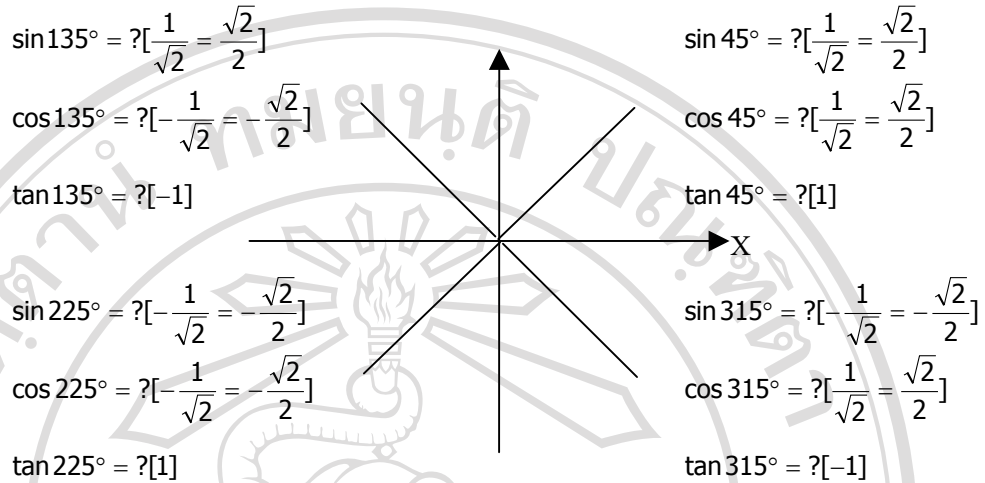
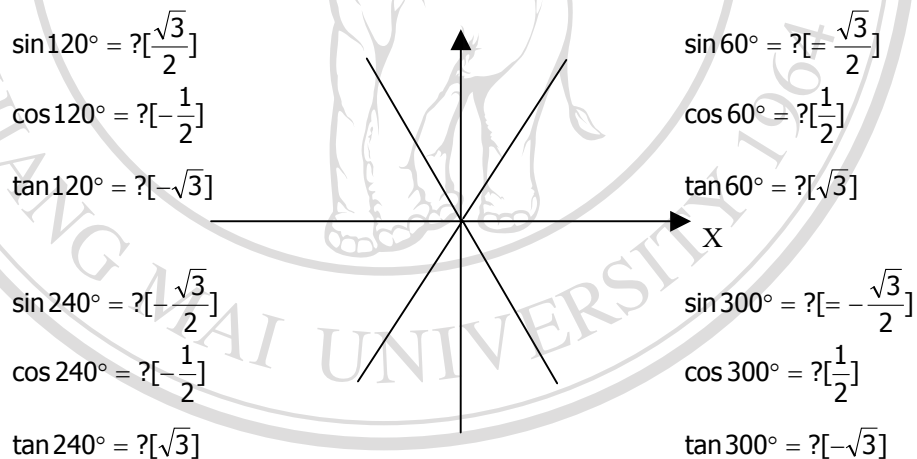
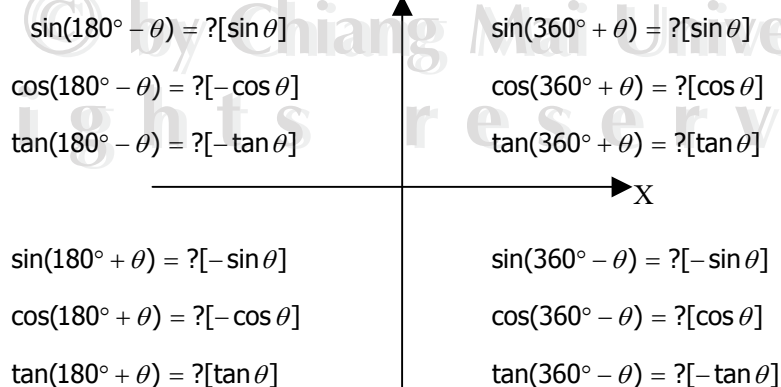
$$\sin 330^\circ = ? \left[-\frac{1}{2} \right]$$

$$\cos 330^\circ = ? \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

$$\tan 330^\circ = ? \left[-\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \right]$$



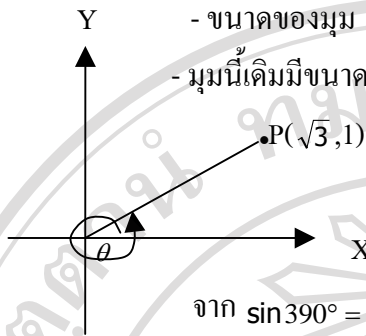
ลิขสิทธิ์ในมหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright © by Chiang Mai University
All rights reserved

แผนภาพสรุป 2แผนภาพสรุป 3แผนภาพสรุปสูตร

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright © by Chiang Mai University
All rights reserved

2.2 ครูดิดแผนภาพ 1 แล้วสนทนาซักถามนักเรียน

แผนภาพ 1

- ขนาดของมุม θ เท่ากับเท่าใด ? [390°]

- มุมนี้เดิมมีขนาดเป็นเท่าใด ? [30°]

- เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ของมุม 390° กับ 30° ได้

อย่างไร ? [360° + 30° = 390°]

- นักเรียนคิดว่า $\sin 390^\circ = \sin 30^\circ$ หรือไม่ ? [เท่า]

จาก $\sin 390^\circ = ?[\frac{1}{2}]$ และ $\sin 30^\circ = ?[\frac{1}{2}]$

จากความสัมพันธ์ของมุม 390° กับ 30° จะได้ว่า

$$\sin 390^\circ = \sin(360^\circ + 30^\circ) = ?[\frac{1}{2}]$$

$$\text{ดังนั้น } \sin(360^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ$$

- นักเรียนคิดว่า $\cos 390^\circ = \cos 30^\circ$ หรือไม่ ? [เท่า]

จาก $\cos 390^\circ = ?[\frac{\sqrt{3}}{2}]$ และ $\cos 30^\circ = ?[\frac{\sqrt{3}}{2}]$

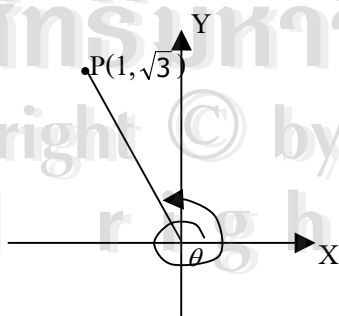
จากความสัมพันธ์ของมุม 390° กับ 30° จะได้ว่า

$$\cos 390^\circ = \cos(360^\circ + 30^\circ) = ?[\frac{\sqrt{3}}{2}]$$

$$\text{ดังนั้น } \cos(360^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ$$

- ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $\tan 390^\circ = \tan(360^\circ + 30^\circ) = ?[\frac{1}{\sqrt{3}}]$

$$\text{ดังนั้น } \tan(360^\circ + 30^\circ) = \tan 30^\circ$$

แผนภาพ 2

- ขนาดของมุม θ เท่ากับเท่าใด ? [480°]

- มุมนี้เดิมมีขนาดเป็นเท่าใด ? [120°]

- เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ของมุม 480° กับ 120° ได้

อย่างไร ? [360° + 120° = 480°]

- นักเรียนคิดว่า $\sin 480^\circ = \sin 120^\circ$ หรือไม่ ? [เท่า]

จาก $\sin 480^\circ = ?[\frac{\sqrt{3}}{2}]$ และ $\sin 120^\circ = ?[\frac{\sqrt{3}}{2}]$

จากความสัมพันธ์ของมุม 480° กับ 120° จะได้ว่า $\sin 480^\circ = \sin(360^\circ + 120^\circ) = ?[\frac{\sqrt{3}}{2}]$

$$\text{ดังนั้น } \sin(360^\circ + 120^\circ) = \sin 120^\circ$$

- นักเรียนคิดว่า $\cos 480^\circ = \cos 120^\circ$ หรือไม่? [เท่า]

จาก $\cos 480^\circ = ?[-\frac{1}{2}]$ และ $\cos 120^\circ = ?[-\frac{1}{2}]$

จากความสัมพันธ์ของมุม 480° กับ 120° จะได้ว่า

$\cos 480^\circ = \cos(360^\circ + 120^\circ) = ?[-\frac{1}{2}]$

ดังนั้น $\cos(360^\circ + 120^\circ) = \cos 120^\circ$

- ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $\tan 480^\circ = \tan(360^\circ + 120^\circ) = ?[-\sqrt{3}]$

ดังนั้น $\tan(360^\circ + 120^\circ) = \tan 120^\circ$

2.3 ครูแจกใบงาน 10.1 ให้นักเรียน และแบ่งนักเรียนออกเป็น 9 กลุ่ม โดยให้แต่ละกลุ่มช่วยกันสรุปลักษณะทั่วไปของค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่วัดเกิน 360°

ใบงาน 10.1

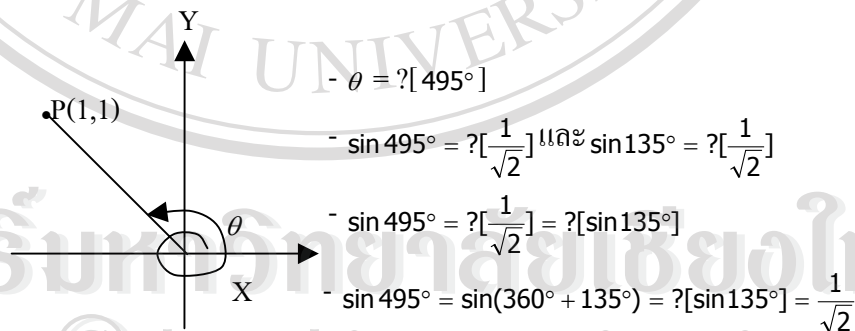
กลุ่มที่

สมาชิกกลุ่ม

- 1. 2.
- 3. 4.
- 5.

จงพิจารณาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากกราฟต่อไปนี้

1.



ดังนั้น $\sin(360^\circ + 135^\circ) = ?[\sin 135^\circ]$

- ในทำนองเดียวกัน $\cos 495^\circ = ?[-\frac{1}{\sqrt{2}}] = ?[\cos 135^\circ]$

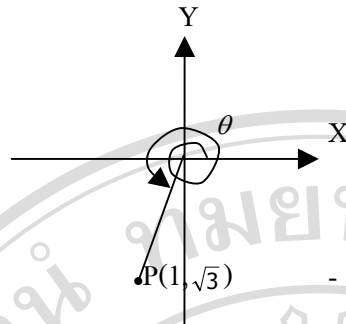
- $\cos 495^\circ = \cos(360^\circ + 135^\circ) = ?[\cos 135^\circ] = ?[-\frac{1}{\sqrt{2}}]$

ดังนั้น $\cos(360^\circ + 135^\circ) = ?[\cos 135^\circ]$

- $\tan 495^\circ = ?[-1] = ?[\tan 135^\circ]$ และ $\tan 495^\circ = \tan(360^\circ + 135^\circ) = ?[\tan 135^\circ] = ?[-1]$ ดังนั้น

ดังนั้น $\tan(360^\circ + 135^\circ) = ?[\tan 135^\circ]$

2.



$$- \theta = ? [600^\circ]$$

$$- \sin 600^\circ = ? \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \text{ และ } \sin 240^\circ = ? \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$- \sin 600^\circ = ? \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = ? [\sin 240^\circ]$$

$$- \sin 600^\circ = \sin(360^\circ + 240^\circ) = ? [\sin 240^\circ] = ? \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$\text{ดังนั้น } \sin(360^\circ + 240^\circ) = ? [\sin 240^\circ]$$

$$- \text{ในทำนองเดียวกัน } \cos 600^\circ = ? \left[-\frac{1}{2}\right] = ? [\cos 240^\circ]$$

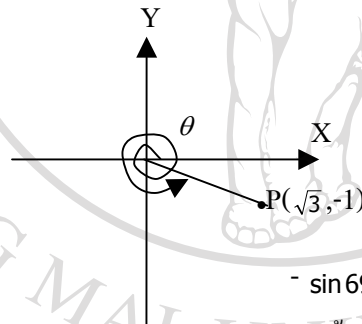
$$- \cos 600^\circ = \cos(360^\circ + 240^\circ) = ? [\cos 240^\circ] = ? \left[-\frac{1}{2}\right]$$

$$\text{ดังนั้น } \cos(360^\circ + 240^\circ) = ? [\cos 240^\circ]$$

$$- \tan 600^\circ = ? [\sqrt{3}] = ? [\tan 240^\circ] \text{ และ } \tan 600^\circ = \tan(360^\circ + 240^\circ) = ? [\tan 240^\circ] = ? [\sqrt{3}]$$

$$\text{ดังนั้น } \tan(360^\circ + 240^\circ) = ? [\tan 240^\circ]$$

3.



$$- \theta = ? [690^\circ]$$

$$- \sin 690^\circ = ? \left[-\frac{1}{2}\right] \text{ และ } \sin 330^\circ = ? \left[-\frac{1}{2}\right]$$

$$- \sin 690^\circ = ? \left[-\frac{1}{2}\right] = ? [\sin 330^\circ]$$

$$- \sin 690^\circ = \sin(360^\circ + 330^\circ) = ? [\sin 330^\circ] = ? \left[-\frac{1}{2}\right]$$

$$\text{ดังนั้น } \sin(360^\circ + 330^\circ) = ? [\sin 330^\circ]$$

$$- \text{ในทำนองเดียวกัน } \cos 690^\circ = ? \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = ? [\cos 330^\circ]$$

$$- \cos 690^\circ = \cos(360^\circ + 330^\circ) = ? [\cos 330^\circ] = ? \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$\text{ดังนั้น } \cos(360^\circ + 330^\circ) = ? [\cos 330^\circ]$$

$$- \tan 690^\circ = ? \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}\right] = ? [\tan 330^\circ] \text{ และ}$$

$$\tan 690^\circ = \tan(360^\circ + 330^\circ) = ? [\tan 330^\circ] = ? \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$$

$$\text{ดังนั้น } \tan(360^\circ + 330^\circ) = ? [\tan 330^\circ]$$

จากใบงานสรุปได้ว่า $\sin(n \cdot 360^\circ + \theta) = \sin \theta$, $\cos(n \cdot 360^\circ + \theta) = \cos \theta$

$\tan(n \cdot 360^\circ + \theta) = \tan \theta$ เมื่อ n เป็นจำนวนรอบของการวัดมุม

2.4 ครูแจกเอกสารฝึกหัด 10.1 ให้นักเรียนทำเป็นการบ้าน และนัดส่งในตอนเช้าของวันต่อไปก่อนทำกิจกรรมหน้าเสาธง

เอกสารฝึกหัด 10.1

จงหาค่าของฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจน ของมุมต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1. $420^\circ = 360^\circ + 60^\circ$

ดังนั้น $\sin 420^\circ = \sin(360^\circ + 60^\circ)$, $\cos 420^\circ = \cos(360^\circ + 60^\circ)$, $\tan 420^\circ = \tan(360^\circ + 60^\circ)$

จาก $\sin(n \cdot 360^\circ + \theta) = \sin \theta$, $\cos(n \cdot 360^\circ + \theta) = \cos \theta$ และ $\tan(n \cdot 360^\circ + \theta) = \tan \theta$

จะได้ว่า $\sin 420^\circ = \sin(360^\circ + 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 420^\circ = \cos(360^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$\tan 420^\circ = \tan(360^\circ + 60^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

$\therefore \sin 420^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 420^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ และ $\tan 420^\circ = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

ตัวอย่าง 2 $840^\circ = (2 \cdot 360^\circ + 120^\circ)$

ดังนั้น $\sin 840^\circ = \sin(2 \cdot 360^\circ + 120^\circ)$, $\cos 840^\circ = \cos(2 \cdot 360^\circ + 120^\circ)$,

$\tan 840^\circ = \tan(2 \cdot 360^\circ + 120^\circ)$

จาก $\sin(n \cdot 360^\circ + \theta) = \sin \theta$, $\cos(n \cdot 360^\circ + \theta) = \cos \theta$ และ $\tan(n \cdot 360^\circ + \theta) = \tan \theta$

จะได้ว่า $\sin 840^\circ = \sin(2 \cdot 360^\circ + 120^\circ) = \sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 840^\circ = \cos(2 \cdot 360^\circ + 120^\circ) = \cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

$\tan 840^\circ = \tan(2 \cdot 360^\circ + 120^\circ) = \tan 120^\circ = \tan(180^\circ - 60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$

$\therefore \sin 840^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 840^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$ และ $\tan 840^\circ = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$

1. 510° [เฉลย. $\sin 510^\circ = \sin(360^\circ + 150^\circ) = \sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$,

$\cos 510^\circ = \cos(360^\circ + 150^\circ) = \cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ และ

$\tan 510^\circ = \tan(360^\circ + 150^\circ) = \tan 150^\circ = \tan(180^\circ - 30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$]

2. 585° [เฉลย.

$\sin 585^\circ = \sin(360^\circ + 225^\circ) = \sin 225^\circ = \sin(180^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$\cos 585^\circ = \cos(360^\circ + 225^\circ) = \cos 225^\circ = \cos(180^\circ + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ และ

$\tan 585^\circ = \tan(360^\circ + 225^\circ) = \tan 225^\circ = \tan(180^\circ + 45^\circ) = \tan 45^\circ = 1$]

3. 1290° [เฉลย.

$$\sin 1290^\circ = \sin(3 \cdot 360^\circ + 210^\circ) = \sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2} ,$$

$$\cos 1290^\circ = \cos(3 \cdot 360^\circ + 210^\circ) = \cos 210^\circ = \cos(180^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{และ } \tan 1290^\circ = \tan(3 \cdot 360^\circ + 210^\circ) = \tan 210^\circ = \tan(180^\circ + 30^\circ) = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}]$$

4. -585° [เฉลย. จาก $\sin(-\theta) = -\sin \theta$, $\cos(-\theta) = \cos \theta$, $\tan(-\theta) = -\tan \theta$

$$\sin(-585^\circ) = -\sin 585^\circ = -\sin(360^\circ + 225^\circ) = -\sin 225^\circ = -\sin(180^\circ + 45^\circ) = -(-\sin 45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} ,$$

$$\cos(-585^\circ) = \cos 585^\circ = \cos(360^\circ + 225^\circ) = \cos 225^\circ = \cos(180^\circ + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ และ}$$

$$\tan(-585^\circ) = -\tan 585^\circ = -\tan(360^\circ + 225^\circ) = -\tan 225^\circ = -\tan(180^\circ + 45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1]$$

3. สื่อการเรียนการสอน

3.1 เอกสารประกอบการเรียนการสอน

3.2 แผ่นภาพ 1 – 2

3.3 ใบงาน 10.1

3.4 เอกสารฝึกหัด 10.1

4. การวัดและประเมินผล

4.1 การวัดผล

4.1.1 สังเกตจากการทำกิจกรรมในชั้นเรียน และการตอบคำถาม

4.1.2 จากการทำใบงาน 10.1

4.1.3 จากการทำเอกสารฝึกหัด 10.1

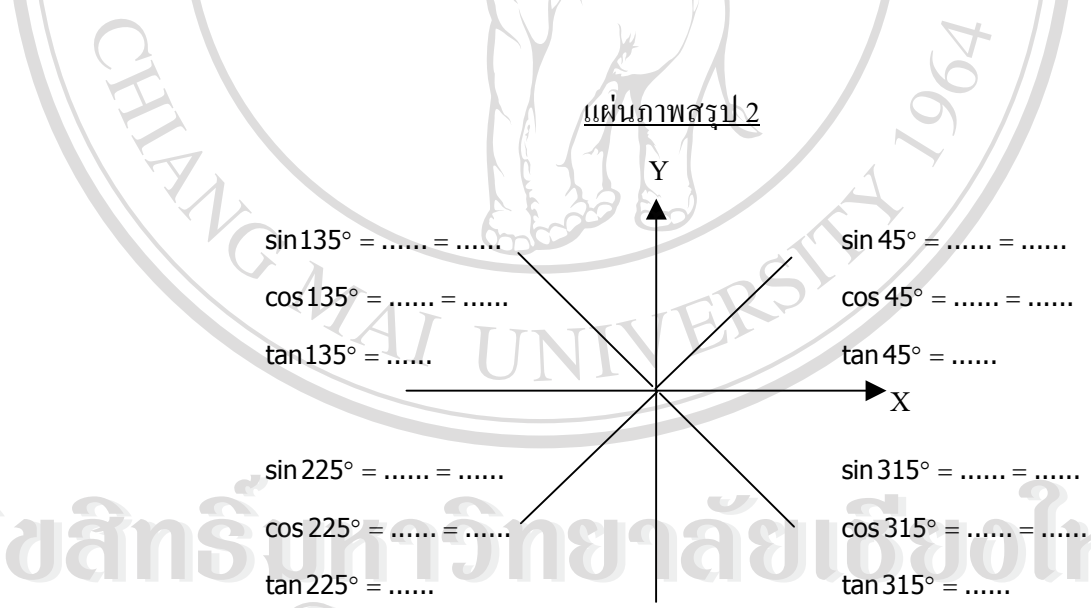
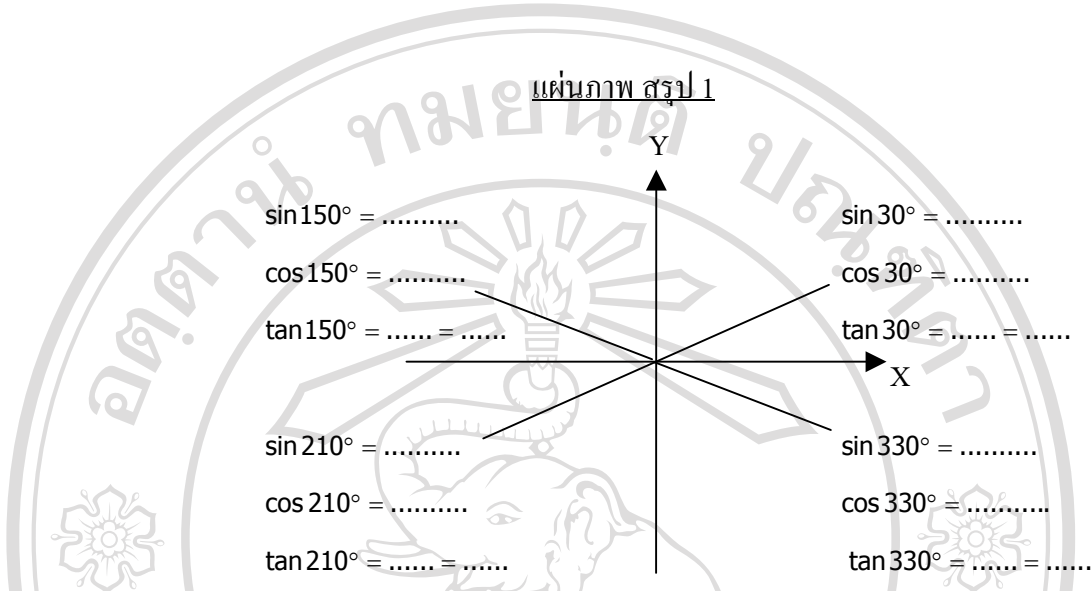
4.2 การประเมินผล

ลิขสิทธิ์ © โดย Chiang Mai University

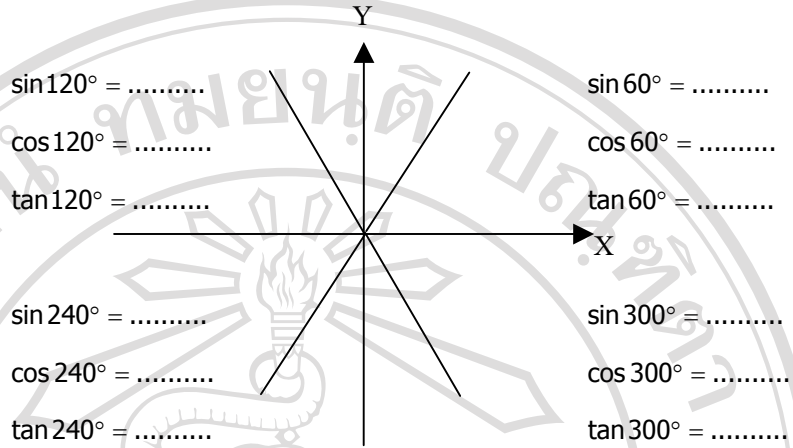
Copyright © by Chiang Mai University

All rights reserved

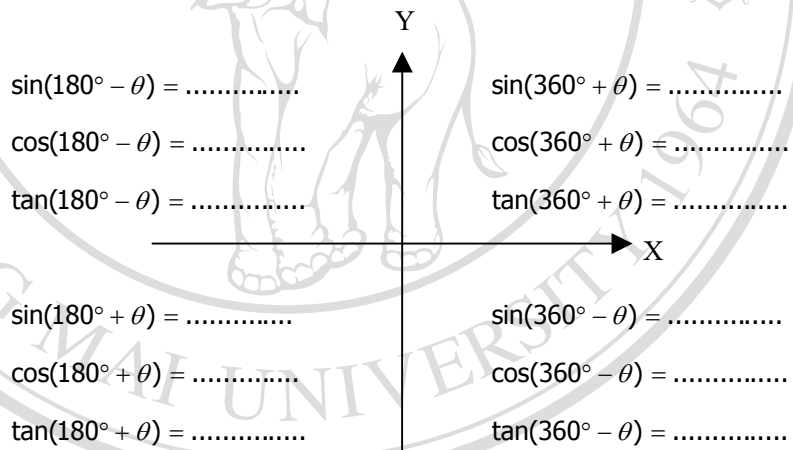
เอกสารประกอบการเรียนการสอน คาบที่ 10
หัวข้อ ค่าฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจน ของมุมใดๆ



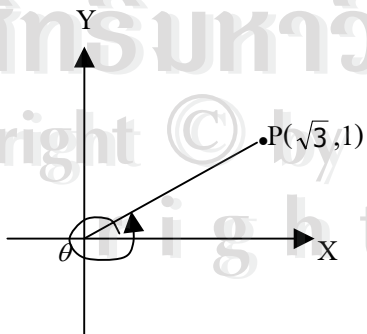
แผนภาพรูป 3



แผนภาพรูปสูตร



แผนภาพ 1



- ขนาดของมุม θ เท่ากับเท่าใด ? [390°]
 - มุมนี้เดิมมีขนาดเป็นเท่าใด ? [30°]
 - เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ของมุม 390° กับ 30° ได้อย่างไร ? [360° + 30° = 390°]
 - นักเรียนคิดว่า $\sin 390^\circ = \sin 30^\circ$ หรือไม่ ? [เท่า]
- จาก $\sin 390^\circ = ?[\frac{1}{2}]$ และ $\sin 30^\circ = ?[\frac{1}{2}]$
- จากความสัมพันธ์ของมุม 390° กับ 30° จะได้ว่า
- $\sin 390^\circ = \sin(360^\circ + 30^\circ) = ?[\frac{1}{2}]$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
 Copyright © by Chiang Mai University
 All rights reserved

$$\text{ดังนั้น } \sin(360^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ$$

- นักเรียนคิดว่า $\cos 390^\circ = \cos 30^\circ$ หรือไม่? [เท่า]

$$\text{จาก } \cos 390^\circ = ?\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \text{ และ } \cos 30^\circ = ?\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

จากความสัมพันธ์ของมุม 390° กับ 30° จะได้ว่า

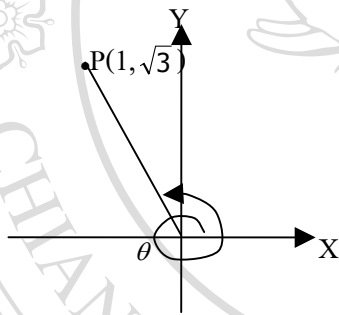
$$\cos 390^\circ = \cos(360^\circ + 30^\circ) = ?\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$\text{ดังนั้น } \cos(360^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ$$

- ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $\tan 390^\circ = \tan(360^\circ + 30^\circ) = ?\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

$$\text{ดังนั้น } \tan(360^\circ + 30^\circ) = \tan 30^\circ$$

แผ่นภาพ 2



- ขนาดของมุม θ เท่ากับเท่าใด? [480°]

- มุมนี้เดิมมีขนาดเป็นเท่าใด? [120°]

- เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ของมุม 480° กับ 120° ได้อย่างไร? [$360^\circ + 120^\circ = 480^\circ$]

- นักเรียนคิดว่า $\sin 480^\circ = \sin 120^\circ$ หรือไม่? [เท่า]

$$\text{จาก } \sin 480^\circ = ?\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \text{ และ } \sin 120^\circ = ?\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

จากความสัมพันธ์ของมุม 480° กับ 120° จะได้ว่า

$$\sin 480^\circ = \sin(360^\circ + 120^\circ) = ?\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$\text{ดังนั้น } \sin(360^\circ + 120^\circ) = \sin 120^\circ$$

- นักเรียนคิดว่า $\cos 480^\circ = \cos 120^\circ$ หรือไม่? [เท่า]

$$\text{จาก } \cos 480^\circ = ?\left[-\frac{1}{2}\right] \text{ และ } \cos 120^\circ = ?\left[-\frac{1}{2}\right]$$

จากความสัมพันธ์ของมุม 480° กับ 120° จะได้ว่า

$$\cos 480^\circ = \cos(360^\circ + 120^\circ) = ?\left[-\frac{1}{2}\right]$$

$$\text{ดังนั้น } \cos(360^\circ + 120^\circ) = \cos 120^\circ$$

- ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $\tan 480^\circ = \tan(360^\circ + 120^\circ) = ?\left[-\sqrt{3}\right]$

$$\text{ดังนั้น } \tan(360^\circ + 120^\circ) = \tan 120^\circ$$

ใบงาน10.1

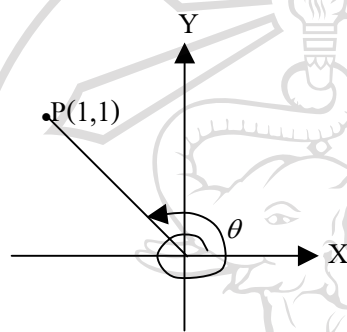
กลุ่มที่

สมาชิกกลุ่ม

1. 2. 3.
 4. 5.

จงพิจารณาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากกราฟต่อไปนี้

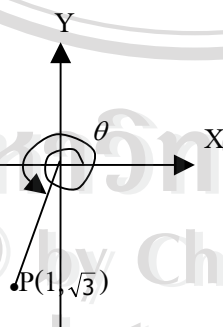
1.



- $\theta = \dots\dots\dots$
- $\sin 495^\circ = \dots\dots$ และ $\sin 135^\circ = \dots\dots$
- $\sin 495^\circ = \dots\dots = \dots\dots\dots$
- $\sin 495^\circ = \sin(360^\circ + 135^\circ) = \sin 135^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$
- ดังนั้น $\sin(360^\circ + 135^\circ) = \dots\dots\dots$

- ในทำนองเดียวกัน $\cos 495^\circ = \dots\dots = \dots\dots\dots$
- $\cos 495^\circ = \cos(360^\circ + 135^\circ) = \dots\dots\dots = \dots\dots$
- ดังนั้น $\cos(360^\circ + 135^\circ) = \dots\dots\dots$
- $\tan 495^\circ = \dots\dots = \dots\dots\dots$ และ $\tan 495^\circ = \tan(360^\circ + 135^\circ) = \dots\dots\dots = \dots\dots$
- ดังนั้น $\tan(360^\circ + 135^\circ) = \dots\dots\dots$

2.

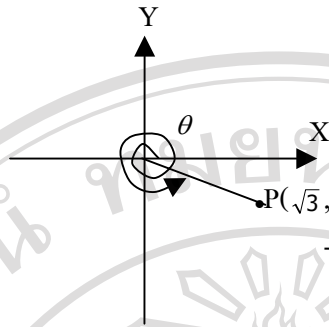


- $\theta = \dots\dots\dots$
- $\sin 600^\circ = \dots\dots$ และ $\sin 240^\circ = \dots\dots$
- $\sin 600^\circ = \dots\dots\dots = \dots\dots$
- $\sin 600^\circ = \sin(360^\circ + \dots\dots) = \dots\dots\dots = \dots\dots$
- ดังนั้น $\sin(\dots\dots + \dots\dots) = \dots\dots\dots$

- ในทำนองเดียวกัน $\cos 600^\circ = \dots\dots = \dots\dots\dots$
- $\cos 600^\circ = \dots\dots\dots(\dots\dots + \dots\dots) = \dots\dots\dots = \dots\dots$
- ดังนั้น $\cos(\dots\dots + \dots\dots) = \dots\dots\dots$
- $\tan 600^\circ = \dots\dots = \dots\dots\dots$ และ $\tan 600^\circ = \tan(\dots\dots + \dots\dots) = \dots\dots\dots = \dots\dots$
- ดังนั้น $\tan(\dots\dots + \dots\dots) = \dots\dots\dots$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
 Copyright © by Chiang Mai University
 All rights reserved

3.



- $\theta = \dots\dots\dots$

- $\sin 690^\circ = \dots\dots$ และ $\sin 330^\circ = \dots\dots$

- $\sin 690^\circ = \dots\dots = \dots\dots\dots$

- $\sin 690^\circ = \sin(\dots\dots + \dots\dots) = \dots\dots\dots = \dots\dots$

ดังนั้น $\sin(\dots\dots + \dots\dots) = \dots\dots\dots$

- ในทำนองเดียวกัน $\cos 690^\circ = \dots\dots = \dots\dots\dots$

- $\cos 690^\circ = \cos(\dots\dots + \dots\dots) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

ดังนั้น $\cos(\dots\dots + \dots\dots) = \dots\dots\dots$

- $\tan 690^\circ = \dots\dots = \dots\dots\dots$ และ $\tan 690^\circ = \tan(\dots\dots + \dots\dots) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

ดังนั้น $\tan(\dots\dots + \dots\dots) = \dots\dots\dots$

จากใบงานสรุปได้ว่า $\sin(n \cdot 360^\circ + \theta) = \dots\dots\dots$ $\cos(n \cdot 360^\circ + \theta) = \dots\dots\dots$
 $\tan(n \cdot 360^\circ + \theta) = \dots\dots\dots$ เมื่อ n เป็นจำนวนรอบของการวัดมุม

เอกสารฝึกหัด 10.1

ชื่อ ชั้น ม. 4 / 1 เลขที่

จงหาค่าของฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ ของมุมต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1. $420^\circ = 360^\circ + 60^\circ$ ดังนั้น $\sin 420^\circ = \sin(360^\circ + 60^\circ)$, $\cos 420^\circ = \cos(360^\circ + 60^\circ)$, $\tan 420^\circ = \tan(360^\circ + 60^\circ)$ จาก $\sin(n \cdot 360^\circ + \theta) = \sin \theta$, $\cos(n \cdot 360^\circ + \theta) = \cos \theta$ และ $\tan(n \cdot 360^\circ + \theta) = \tan \theta$ จะได้ว่า $\sin 420^\circ = \sin(360^\circ + 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 420^\circ = \cos(360^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ $\tan 420^\circ = \tan(360^\circ + 60^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$ $\therefore \sin 420^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 420^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ และ $\tan 420^\circ = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$ **ตัวอย่าง 2** $840^\circ = (2 \cdot 360^\circ + 120^\circ)$ ดังนั้น $\sin 840^\circ = \sin(2 \cdot 360^\circ + 120^\circ)$, $\cos 840^\circ = \cos(2 \cdot 360^\circ + 120^\circ)$, $\tan 840^\circ = \tan(2 \cdot 360^\circ + 120^\circ)$ จาก $\sin(n \cdot 360^\circ + \theta) = \sin \theta$, $\cos(n \cdot 360^\circ + \theta) = \cos \theta$ และ $\tan(n \cdot 360^\circ + \theta) = \tan \theta$ จะได้ว่า $\sin 840^\circ = \sin(2 \cdot 360^\circ + 120^\circ) = \sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 840^\circ = \cos(2 \cdot 360^\circ + 120^\circ) = \cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$ $\tan 840^\circ = \tan(2 \cdot 360^\circ + 120^\circ) = \tan 120^\circ = \tan(180^\circ - 60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$ $\therefore \sin 840^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 840^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$ และ $\tan 840^\circ = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$ 5. 510°

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright © by Chiang Mai University

All rights reserved

6. 585°

.....
.....

.....
.....

.....
.....

.....
.....

.....
.....

7. 1290°

.....
.....

.....
.....

.....
.....

.....
.....

8. -585°

.....
.....

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright © by Chiang Mai University

All rights reserved

.....
.....

แผนการจัดการเรียนที่ 6

เรื่อง ค่าฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ แทนเจนของมุมบางมุม

จำนวน 1 คาบ

วิชาคณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค 012

ภาคเรียนที่ 2

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

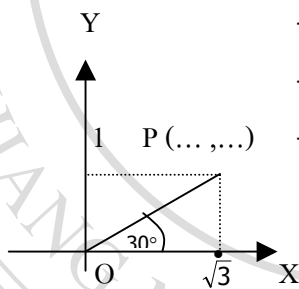
1. จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถบอกค่าของฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนของมุม 120 , 135 , 150 , 210 , 225 , 240 , 300 , 315 , 330 ได้

2. เนื้อหาและกิจกรรมการเรียนการสอน

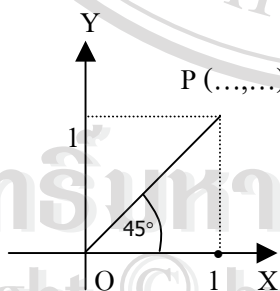
2.1 ครูคิดแผนภาพมุมในตำแหน่งมาตรฐานของมุม 30 , 45 , 60 องศา บนกระดานแล้วเรียกนักเรียนถาม – ตอบ ทีละคน แล้วครูเป็นคนเขียนตามที่นักเรียนตอบ (คำตอบที่ถูก ถ้าตอบผิด ครูใช้คำถามอีกครั้งเพื่อนำไปสู่คำตอบ)

แผนภาพ 1



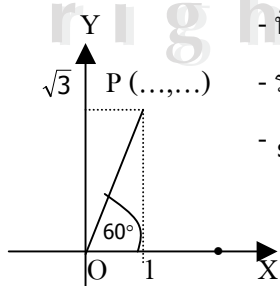
- พิกัดของจุด P คือ $[(\sqrt{3}, 1)]$
- ระยะห่างระหว่างจุด P กับจุดกำเนิด $(0,0)$ เท่ากับ? $[r=2]$
- $\sin 30^\circ = ?[\frac{1}{2}]$, $\cos 30^\circ = ?[\frac{\sqrt{3}}{2}]$, $\tan 30^\circ = ?[\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}]$

แผนภาพ 2



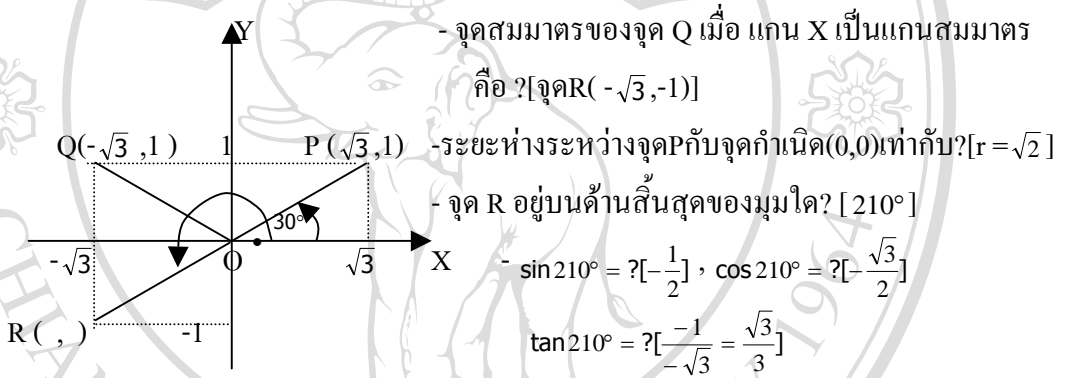
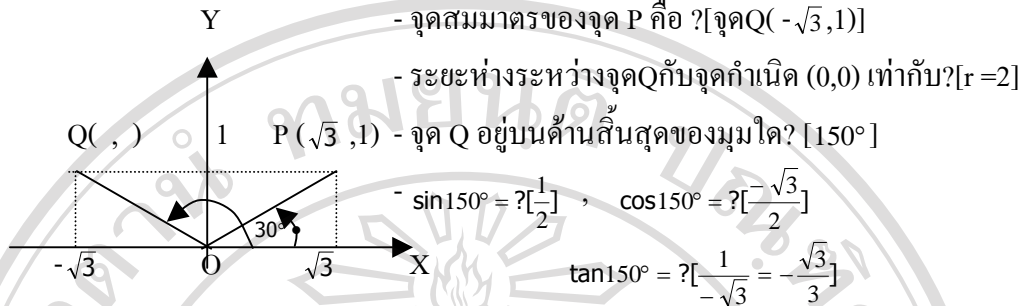
- พิกัดของจุด P คือ $[(1, 1)]$
- ระยะห่างระหว่างจุด P กับจุดกำเนิด $(0,0)$ เท่ากับ? $[r=\sqrt{2}]$
- $\sin 45^\circ = ?[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}]$, $\cos 45^\circ = ?[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}]$, $\tan 45^\circ = ?[\frac{1}{1} = 1]$

แผนภาพ 3

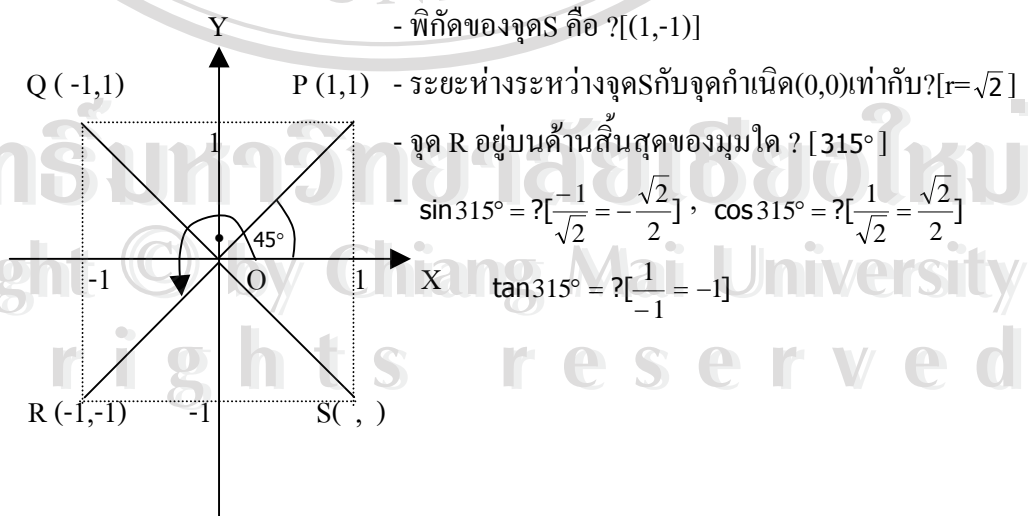
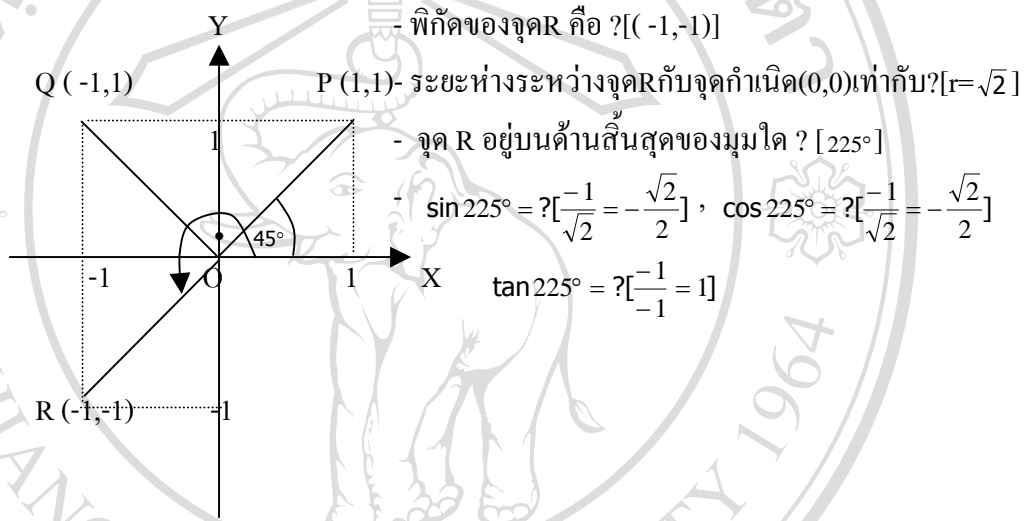
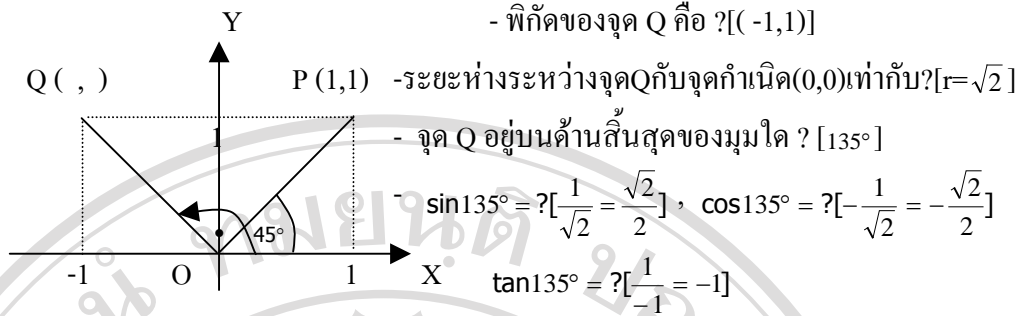


- พิกัดของจุด P คือ $[(1, \sqrt{3})]$
- ระยะห่างระหว่างจุด P กับจุดกำเนิด $(0,0)$ เท่ากับ? $[r=2]$
- $\sin 60^\circ = ?[\frac{\sqrt{3}}{2}]$, $\cos 60^\circ = ?[\frac{1}{2}]$, $\tan 60^\circ = ?[\frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}]$

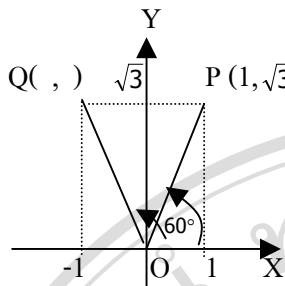
2.2 ครูสนทนา ซักถามนักเรียน โดยใช้แผ่นภาพเดิมในข้อ 2.1 โดยพิจารณาทีละภาพ ดังนี้



2.3 ครูแบ่งนักเรียนออกเป็น 9 กลุ่ม แล้วแจกเอกสารประกอบการเรียนให้นักเรียน และให้แต่ละกลุ่มพิจารณาแผ่นภาพของมุม 45 และ 60 องศา ดังต่อไปนี้



ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
 Copyright © Chiang Mai University
 All rights reserved

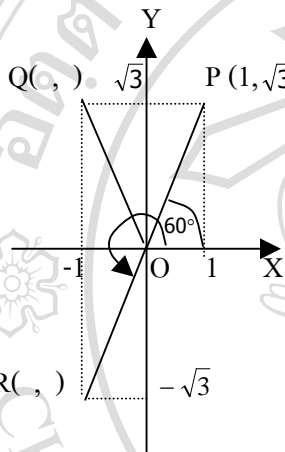


- พิกัดของจุด Q คือ ? $[(-1, \sqrt{3})]$

Q (,) $\sqrt{3}$ P (1, $\sqrt{3}$) - ระยะห่างระหว่างจุด Q กับจุดกำเนิด(0,0)เท่ากับ? $[r=2]$

- จุด Q อยู่บนด้านสิ้นสุดของมุมใด ? $[120^\circ]$

- $\sin 120^\circ = ? [\frac{\sqrt{3}}{2}]$, $\cos 120^\circ = ? [-\frac{1}{2}]$, $\tan 120^\circ = ? [\frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}]$

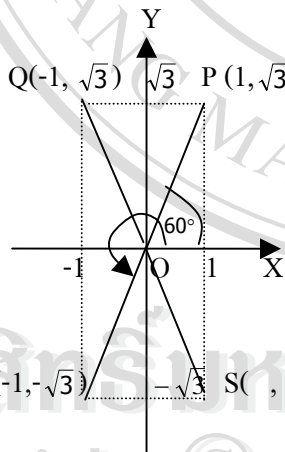


- พิกัดของจุด R คือ ? $[(-1, -\sqrt{3})]$

Q (,) $\sqrt{3}$ P (1, $\sqrt{3}$) - ระยะห่างระหว่างจุด R กับจุดกำเนิด(0,0)เท่ากับ? $[r=2]$

- จุด R อยู่บนด้านสิ้นสุดของมุมใด ? $[240^\circ]$

- $\sin 240^\circ = ? [-\frac{\sqrt{3}}{2}]$, $\cos 240^\circ = ? [-\frac{1}{2}]$, $\tan 240^\circ = ? [\frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}]$



- พิกัดของจุด S คือ ? $[(1, -\sqrt{3})]$

Q (-1, $\sqrt{3}$) $\sqrt{3}$ P (1, $\sqrt{3}$) - ระยะห่างระหว่างจุด S กับจุดกำเนิด(0,0)เท่ากับ? $[r=2]$

- จุด S อยู่บนด้านสิ้นสุดของมุมใด ? $[300^\circ]$

- $\sin 300^\circ = ? [-\frac{\sqrt{3}}{2}]$, $\cos 300^\circ = ? [\frac{1}{2}]$, $\tan 300^\circ = ? [\frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}]$

R (-1, $-\sqrt{3}$) $-\sqrt{3}$ S (,)

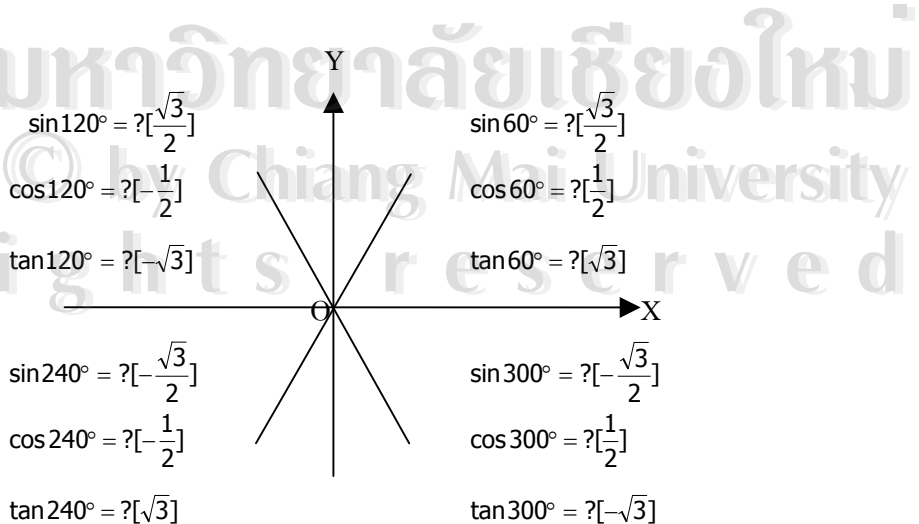
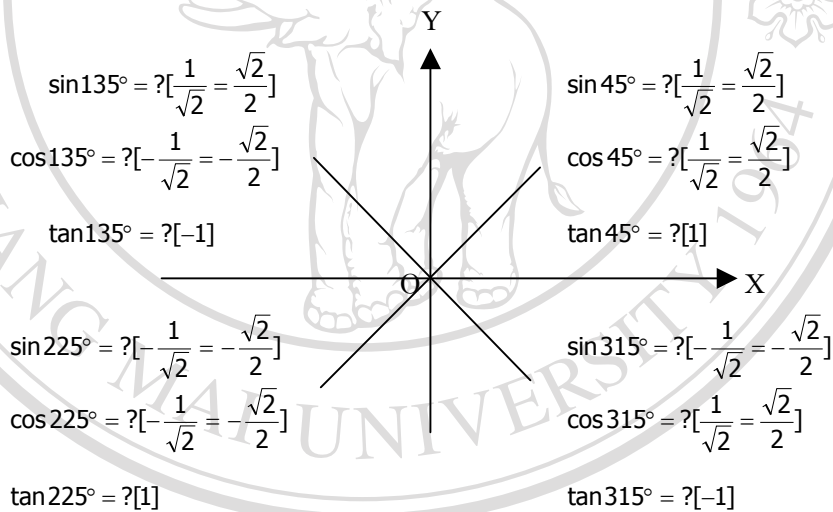
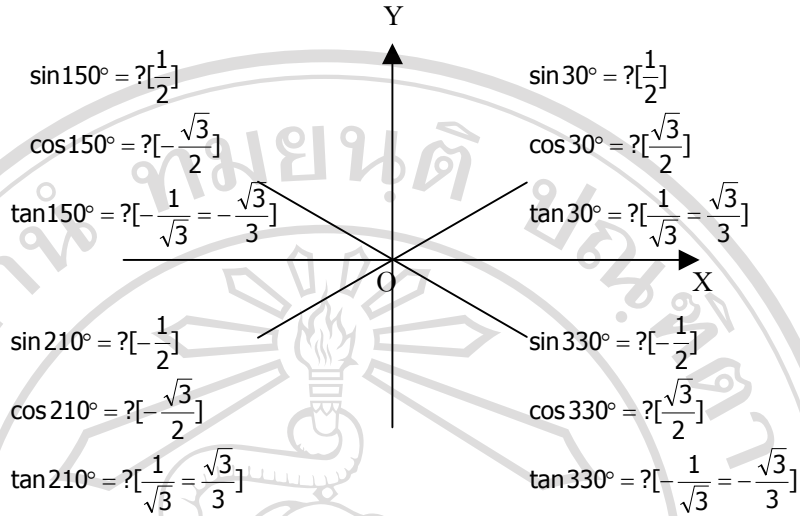
ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright © by Chiang Mai University

All rights reserved

2.4 ครูแจกเอกสารสรุปค่าฟังก์ชัน ไซน์ โคไซน์ และแทนเจน ของมุม 30 , 45 , 60 , 120 , 135 , 150 , 210 , 225 , 240 , 300 , 315 , 330 องศา และติดแผ่นภาพสรุปค่าฟังก์ชัน ไซน์ โคไซน์ และแทนเจน เมื่อนักเรียนสรุปเสร็จแล้ว ครูจึงใช้การถาม - ตอบ เป็นรายบุคคลเพื่อตรวจสอบความถูกต้องแล้ว ครูเปิดคำตอบบนแผ่นภาพที่ปิดไว้ให้นักเรียนได้ตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้งหนึ่ง

แผนภาพสรุปค่าฟังก์ชัน



ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
 Copyright © by Chiang Mai University
 All rights reserved

2.5 ครูแจกเอกสารฝึกหัด 6.1 ให้นักเรียนทำเป็นการบ้านและนัดส่งในตอนเช้าก่อนทำกิจกรรมหน้าเสาธง

เอกสารฝึกหัด 6.1

จงเปรียบเทียบค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$1. \sin 60^\circ = ? \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

$$\sin 300^\circ = ? \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

$$\text{จาก } \sin 300^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} = ? [-\sin 60^\circ]$$

$$\text{ดังนั้น } \sin 300^\circ = ? [-\sin 60^\circ]$$

$$2. \cos 60^\circ = ? \left[\frac{1}{2} \right]$$

$$\cos 300^\circ = ? \left[\frac{1}{2} \right]$$

$$\text{จาก } \cos 300^\circ = \frac{1}{2} = ? [\cos 60^\circ]$$

$$\text{ดังนั้น } \cos 300^\circ = \cos 60^\circ$$

$$3. \tan 45^\circ = ? [1]$$

$$\tan 315^\circ = ? [-1]$$

$$\text{จาก } \tan 315^\circ = -1 = ? [-\tan 45^\circ]$$

$$\text{ดังนั้น } \tan 315^\circ = ? [-\tan 45^\circ]$$

$$4. \cos 150^\circ = ? \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

$$\cos 210^\circ = ? \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

$$\text{จาก } \cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} = ? [\cos 210^\circ]$$

$$\text{ดังนั้น } \cos 210^\circ = ? [\cos 150^\circ]$$

$$5. \sin 135^\circ = ? \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

$$\sin 225^\circ = ? \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

$$\text{จาก } \sin 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sin 135^\circ$$

$$\text{ดังนั้น } \sin 225^\circ = -\sin 135^\circ$$

$$6. \tan 120^\circ = ? [-\sqrt{3}]$$

$$\tan 240^\circ = ? [\sqrt{3}]$$

$$\text{จาก } \tan 240^\circ = \sqrt{3} = ? [-\tan 120^\circ]$$

$$\text{ดังนั้น } \tan 240^\circ = ? [-\tan 120^\circ]$$

3. สื่อการเรียนการสอน

- 3.1 แผ่นภาพมุม 1 - 3
- 3.2 แผ่นภาพสรุปค่าไซน์ โคไซน์ แทนเจน ของมุม 30 , 45 , 60 ,120 , 135 , 150 , 210 , 225 , 240 , 300 , 315 , 330 องศา
- 3.3 เอกสารประกอบการเรียนการสอน
- 3.4 เอกสารฝึกหัด 6.1

4. การวัดและประเมินผล

4.1 การวัดผล

- 4.1.1 สังเกตจากการทำกิจกรรมร่วมกันในชั้นเรียน
- 4.1.2 จากการหาค่าไซน์ โคไซน์ แทนเจน ของมุม 30 , 45 , 60 ,120 , 135 , 150 , 210 , 225 , 240 , 300 , 315 , 330 องศา
- 4.1.3 จากการสรุปค่าไซน์ โคไซน์ แทนเจน ของมุม 0 , 90 , 180 , 270 , 360 องศา
- 4.1.4 ทำเอกสารฝึกหัด 6.1

4.2 การประเมินผล

.....

.....

.....

.....

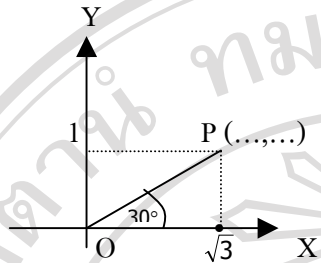
.....

.....

.....

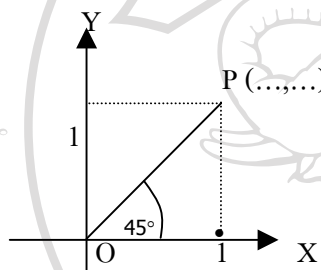
เอกสารประกอบการเรียนการสอน คาบที่ 6
 “ค่าฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ แทนเจน ของมุมบางมุม”

แผ่นภาพ 1



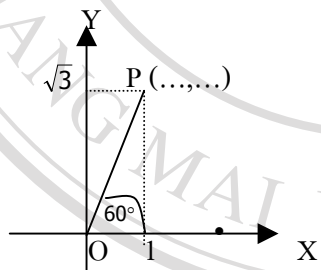
- พิกัดของจุด P คือ ?(.....)
- ระยะห่างระหว่างจุด P กับจุดกำเนิด(0,0) เท่ากับ?r=....
- $\sin 30^\circ = \dots\dots$, $\cos 30^\circ = \dots\dots$, $\tan 30^\circ = \dots\dots$

แผ่นภาพ 2



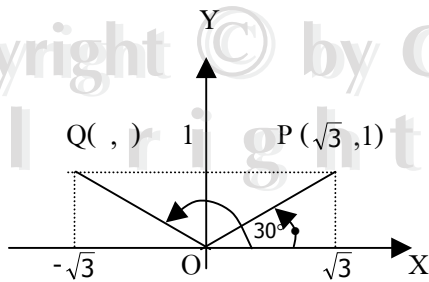
- พิกัดของจุด P คือ ?(.....)
- ระยะห่างระหว่างจุด P กับจุดกำเนิด(0,0) เท่ากับ?r=.....
- $\sin 45^\circ = \dots\dots\dots$, $\cos 45^\circ = \dots\dots\dots$, $\tan 45^\circ = \dots\dots$

แผ่นภาพ 3



- พิกัดของจุด P คือ?(.....)
- ระยะห่างระหว่างจุด P กับจุดกำเนิด(0,0) เท่ากับ?r=.....
- $\sin 60^\circ = \dots\dots$, $\cos 60^\circ = \dots\dots$, $\tan 60^\circ = \dots\dots$

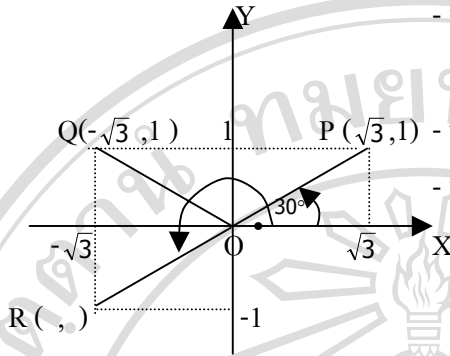
แผ่นภาพ 4



- จุดสมมาตรของจุด P คือ ?จุด Q(-sqrt(3),1)
- ระยะห่างระหว่างจุด Q กับจุดกำเนิด (0,0) เท่ากับ? r=2
- จุด Q อยู่บนด้านสิ้นสุดของมุมใด? 150°
- $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 150^\circ = \frac{-\sqrt{3}}{2}$
- $\tan 150^\circ = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

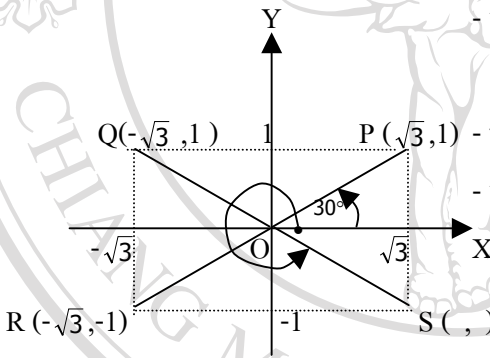
ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
 Copyright © by Chiang Mai University
 All rights reserved

แผนภาพ 5



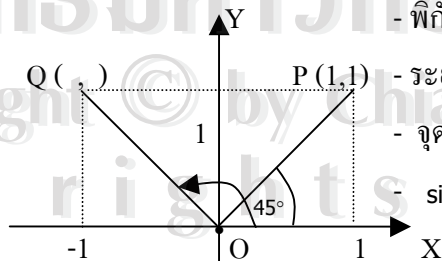
- จุดสมมาตรของจุด Q เมื่อ แกน X เป็นแกนสมมาตร คือ ? จุด R(-√3,-1)
- ระยะห่างระหว่างจุด P กับจุดกำเนิด(0,0)เท่ากับ r=2
- จุด R อยู่บนด้านสิ้นสุดของมุมใด? 210°
- $\sin 210^\circ = -\frac{1}{2}$, $\cos 210^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\tan 210^\circ = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

แผนภาพ 6



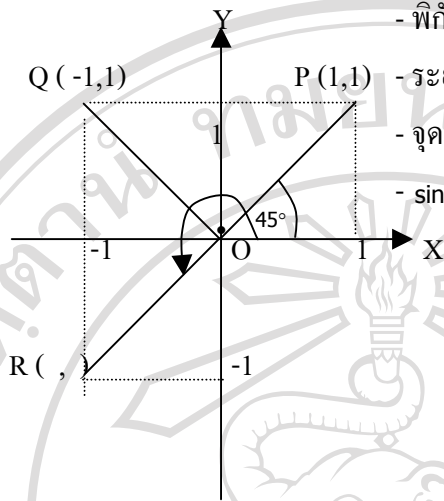
- จุดสมมาตรของจุด P เมื่อ แกน X เป็นแกนสมมาตร คือ ? จุด S(√3,-1)
- ระยะห่างระหว่างจุด P กับจุดกำเนิด(0,0)เท่ากับ r=2
- จุด S อยู่บนด้านสิ้นสุดของมุมใด? 330°
- $\sin 330^\circ = -\frac{1}{2}$, $\cos 330^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\tan 330^\circ = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

แผนภาพ 7



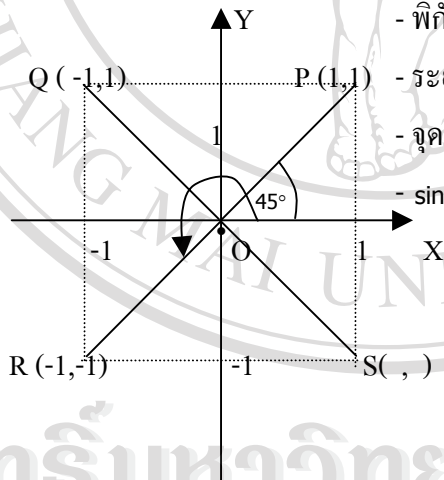
- พิกัดของจุด Q คือ ?(.....)
- ระยะห่างระหว่างจุด Q กับจุดกำเนิด(0,0)เท่ากับ r=.....
- จุด Q อยู่บนด้านสิ้นสุดของมุมใด ?
- $\sin \dots = \dots$, $\cos \dots = \dots$, $\tan \dots = \dots$

แผนภาพ 8



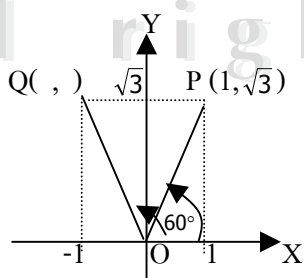
- พิกัดของจุด R คือ ?(....,....)
- ระยะห่างระหว่างจุด R กับจุดกำเนิด(0,0)เท่ากับ?r=.....
- จุด R อยู่บนด้านสิ้นสุดของมุมใด ?
- \sin=?....., \cos=....., \tan=.....

แผนภาพ 9



- พิกัดของจุด S คือ ?(....,....)
- ระยะห่างระหว่างจุด S กับจุดกำเนิด(0,0)เท่ากับ?r=.....
- จุด R อยู่บนด้านสิ้นสุดของมุมใด ?
- \sin=....., \cos=....., \tan=.....

แผนภาพ 10



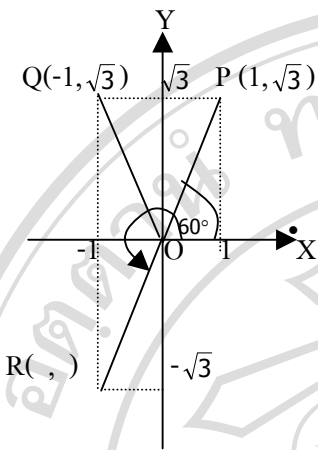
- พิกัดของจุด Q คือ ?(....,....)
- ระยะห่างระหว่างจุด Q กับจุดกำเนิด(0,0)เท่ากับ? r=.....
- จุด Q อยู่บนด้านสิ้นสุดของมุมใด ?
- \sin=....., \cos=....., \tan=.....

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright © by Chiang Mai University

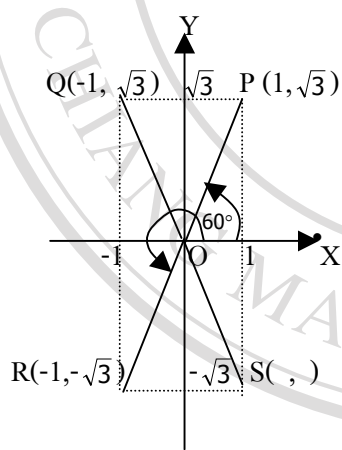
All rights reserved

แผนภาพ 11



- พิกัดของจุด R คือ ?(.....)
- ระยะห่างระหว่างจุด R กับจุดกำเนิด(0,0)เท่ากับ?r=.....
- จุด R อยู่บนด้านสิ้นสุดของมุมใด ?
- $\sin..... =$, $\cos..... =$, $\tan..... =$

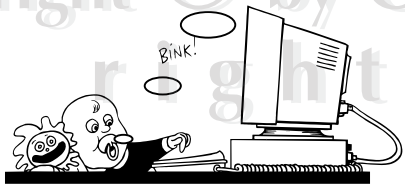
แผนภาพ 12



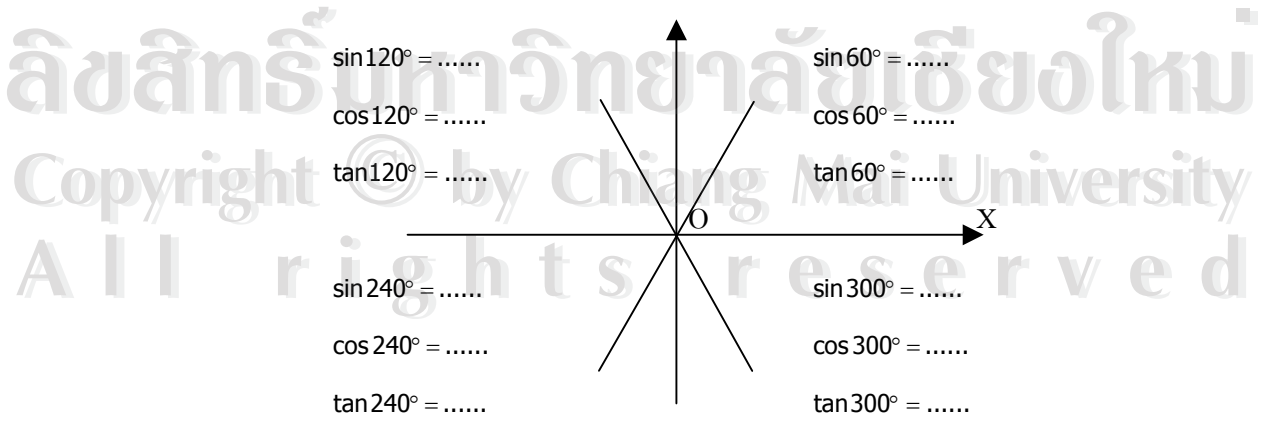
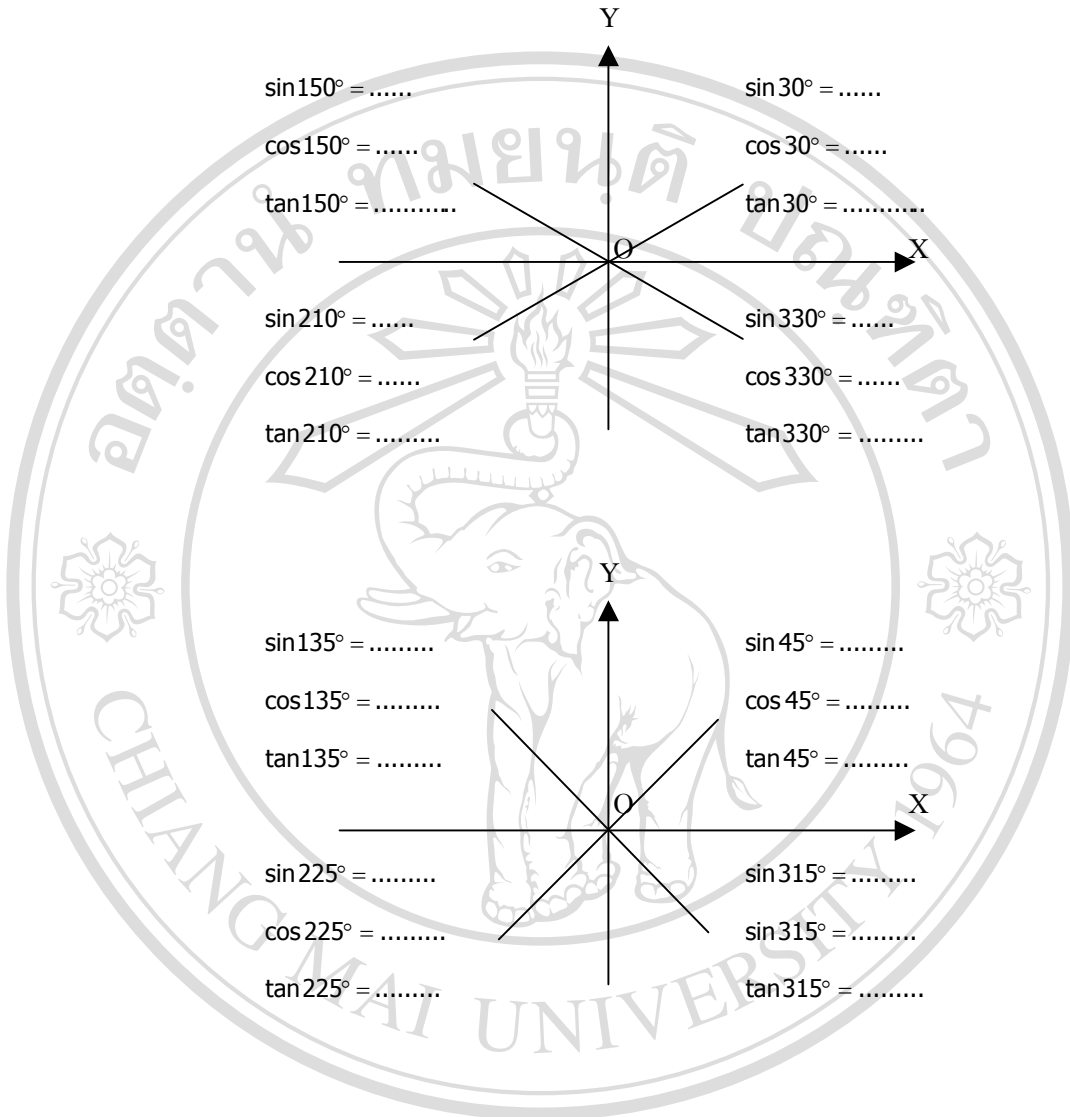
- พิกัดของจุด S คือ ?(.....)
- ระยะห่างระหว่างจุด S กับจุดกำเนิด(0,0)เท่ากับ?r=.....
- จุด S อยู่บนด้านสิ้นสุดของมุมใด ?
- $\sin..... =$, $\cos..... =$, $\tan..... =$

คิดไม่ออกจริง ๆ
จะทำไงดี

ก็ถามคุณครูสิ
ครับบบบบ



แผนภาพสรุปค่าฟังก์ชัน



ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
 Copyright © by Chiang Mai University
 All rights reserved

เอกสารฝึกหัด 6.1

ชื่อ

ชั้น ม. / ... เลขที่

จงเปรียบเทียบค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

2. $\sin 60^\circ = \dots\dots$

2. $\cos 60^\circ = \dots\dots$

$\sin 300^\circ = \dots\dots$

$\cos 300^\circ = \dots\dots$

จาก $\sin 300^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\dots\dots$

จาก $\cos 300^\circ = \frac{1}{2} = \dots\dots$

ดังนั้น $\sin 300^\circ = \dots\dots$

ดังนั้น $\cos 300^\circ = \dots\dots$

3. $\tan 45^\circ = \dots\dots$

4. $\cos 150^\circ = \dots\dots$

$\tan 315^\circ = \dots\dots$

$\cos 210^\circ = \dots\dots$

จาก $\tan 315^\circ = -1 = -\dots\dots$

จาก $\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \dots\dots$

ดังนั้น $\sin 315^\circ = \dots\dots$

ดังนั้น $\cos 210^\circ = \dots\dots$

5. $\sin 135^\circ = \dots\dots$

6. $\tan 120^\circ = \dots\dots$

$\sin 225^\circ = \dots\dots$

$\tan 240^\circ = \dots\dots$

จาก $\sin 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\dots\dots$

จาก $\tan 240^\circ = \sqrt{3} = \dots\dots$

ดังนั้น $\sin 225^\circ = \dots\dots$

ดังนั้น $\tan 240^\circ = \dots\dots$

เข้าใจแล้วครับ

เข้าใจหรือยัง
เจ้าตัวเล็ก

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7

เรื่อง ค่าฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ แทนเจนของมุมใด ๆ

จำนวน 1 คาบ

วิชาคณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค 012

ภาคเรียนที่ 2

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

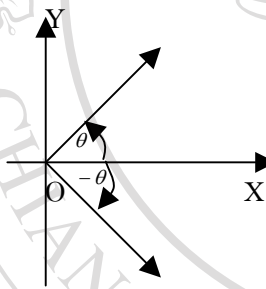
1. จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถบอกค่าของฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนของมุมในทิศทางตามเข็มนาฬิกาได้

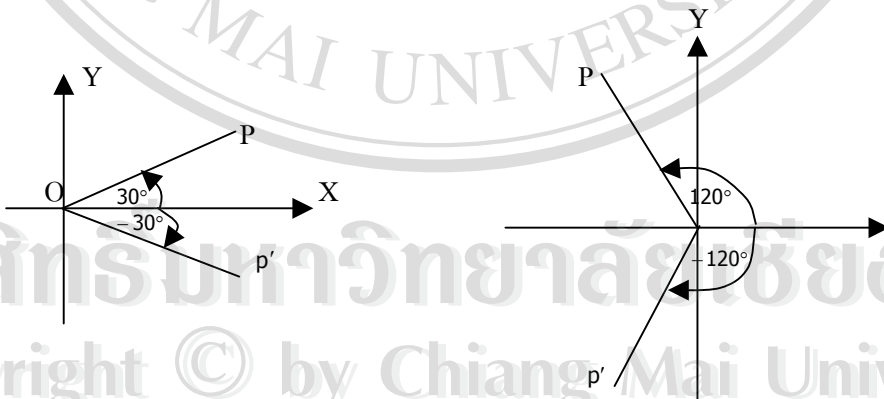
2. เนื้อหาและกิจกรรมการเรียนรู้การสอน

2.1 ครูคิดแผนภาพมุมในตำแหน่งมาตรฐานบนกระดาน แล้วสนทนาซักถามนักเรียน

แผนภาพ 1

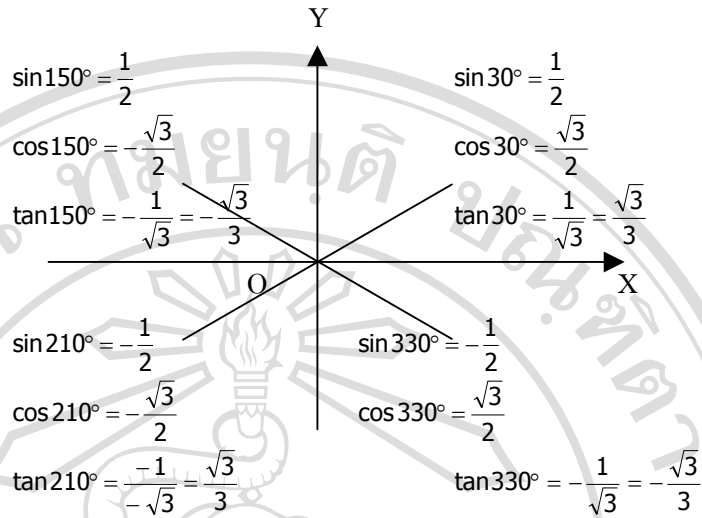


- มุม θ และ $-\theta$ ต่างกันอย่างไร ? [ทิศทางการวัดมุม]
- จากความรู้เดิมเราวัดมุมแบบใด ? θ หรือ $-\theta$ [แบบ θ]
- เพื่อไม่ให้เกิดความสับสนในการวัดมุมต่อไปจะใช้เครื่องหมาย (-) ลบ เป็นสัญลักษณ์แทนทิศทางการวัดมุมที่ตรงข้ามกับมุมเดิม หรือ การวัดมุมในทิศทางตามเข็มนาฬิกา เช่น



2.2 ครูคิดแผนภาพสรุปค่าฟังก์ชันของมุม 30° , 150° , 210° , 330° องศา จากคาบที่ผ่านมาไว้บนกระดาน แล้วสนทนาซักถามนักเรียนเกี่ยวกับค่าฟังก์ชันของมุมที่วัดในทิศทางตามเข็มนาฬิกา ($-\theta$) และ เขียนค่าฟังก์ชันของมุมที่วัดในทิศทางตามเข็มนาฬิกา ($-\theta$) ของมุม 30° , 150° , 210° , 330° องศา

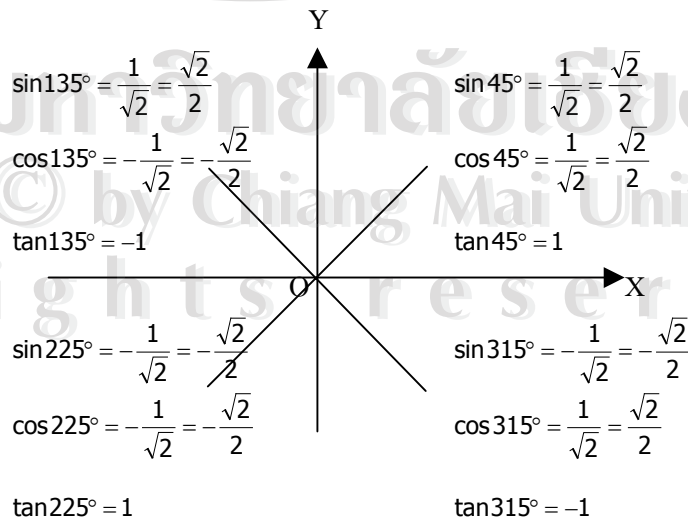
แผนภาพ 2



- จากแผนภาพจะได้ว่า $\sin(-30^\circ) = ?[\frac{-1}{2}]$ $\cos(-30^\circ) = ?[\frac{\sqrt{3}}{2}]$ $\tan(-30^\circ) = ?[\frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}]$
- $\sin(-150^\circ) = ?[\frac{-1}{2}]$ $\cos(-150^\circ) = ?[\frac{-\sqrt{3}}{2}]$ $\tan(-150^\circ) = ?[\frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}]$
 $\sin(-210^\circ) = ?[\frac{1}{2}]$ $\cos(-210^\circ) = ?[\frac{-\sqrt{3}}{2}]$ $\tan(-210^\circ) = ?[\frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}]$
 $\sin(330^\circ) = ?[\frac{1}{2}]$ $\cos(-330^\circ) = ?[\frac{\sqrt{3}}{2}]$ $\tan(-330^\circ) = ?[\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}]$

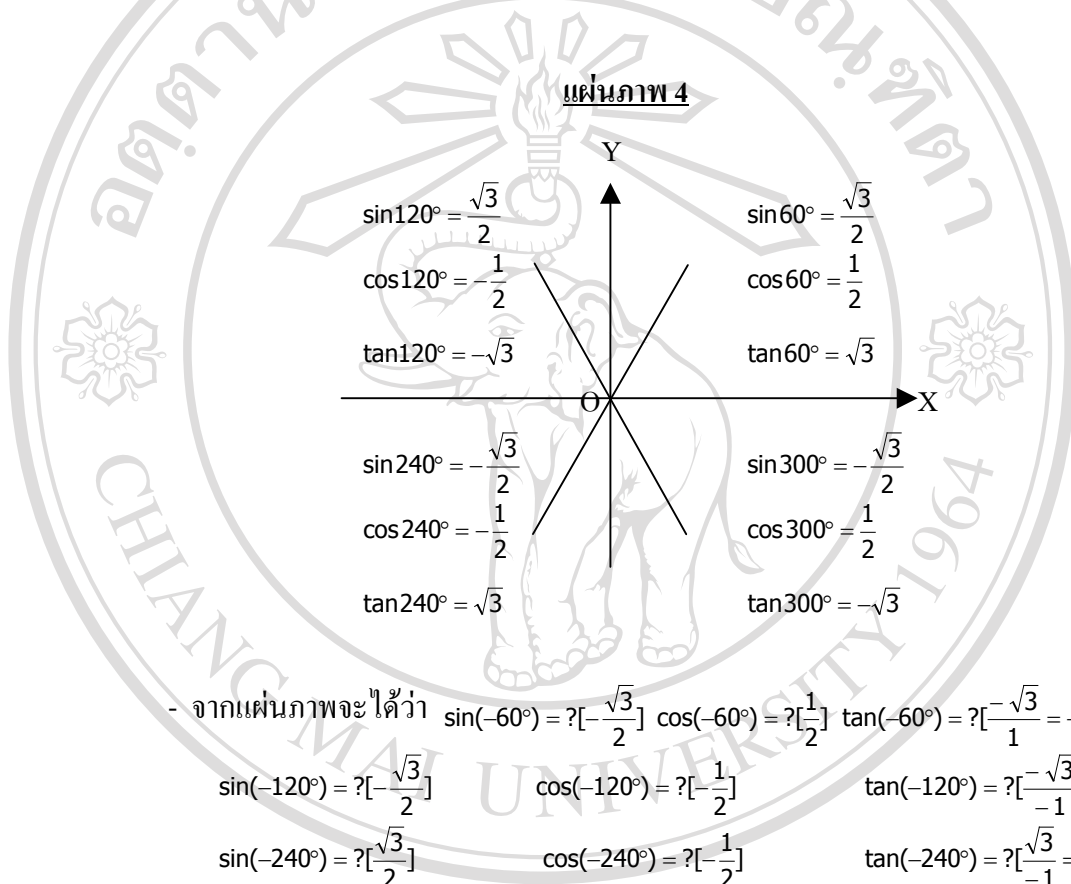
2.3 ครูดัดแผนภาพสรุปค่าฟังก์ชันของมุม 45 , 135 , 225 , 315 องศา และ 60 , 120 , 240 , 300 องศา จากคาบที่ผ่านมาไว้บนกระดาน แล้วเรียกถาม - ตอบนักเรียนเกี่ยวกับค่าฟังก์ชันของมุมที่วัดในทิศทางตามเข็มนาฬิกา (-θ) เป็นรายบุคคล

แผนภาพ 3



ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
 Copyright © by Chiang Mai University
 All rights reserved

- จากแผนภาพจะได้ว่า $\sin(-45^\circ) = ?[-\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}]$ $\cos(-45^\circ) = ?[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}]$ $\tan(-45^\circ) = ?[-1]$
 $\sin(-135^\circ) = ?[-\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}]$ $\cos(-135^\circ) = ?[-\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}]$ $\tan(-135^\circ) = ?[1]$
 $\sin(-225^\circ) = ?[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}]$ $\cos(-225^\circ) = ?[-\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}]$ $\tan(-225^\circ) = ?[-1]$
 $\sin(-315^\circ) = ?[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}]$ $\cos(-315^\circ) = ?[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}]$ $\tan(-315^\circ) = ?[1]$



- จากแผนภาพจะได้ว่า $\sin(-60^\circ) = ?[-\frac{\sqrt{3}}{2}]$ $\cos(-60^\circ) = ?[\frac{1}{2}]$ $\tan(-60^\circ) = ?[\frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}]$
 $\sin(-120^\circ) = ?[-\frac{\sqrt{3}}{2}]$ $\cos(-120^\circ) = ?[-\frac{1}{2}]$ $\tan(-120^\circ) = ?[\frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}]$
 $\sin(-240^\circ) = ?[\frac{\sqrt{3}}{2}]$ $\cos(-240^\circ) = ?[-\frac{1}{2}]$ $\tan(-240^\circ) = ?[\frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}]$
 $\sin(-300^\circ) = ?[\frac{\sqrt{3}}{2}]$ $\cos(-300^\circ) = ?[\frac{1}{2}]$ $\tan(-300^\circ) = ?[\frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}]$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright © by Chiang Mai University

2.4 ครูแจกเอกสารฝึกทักษะ 7.1 ให้นักเรียนแต่ละคน โดยครูติดแผนภาพสรุปค่าฟังก์ชันของมุม 30, 150, 210, 330, 45, 135, 225, 315 องศา และ 60, 120, 240, 300 องศา จากภาพที่ผ่าน มาไว้บนกระดาน

เอกสารฝึกทักษะ 7.1

จงเติมช่องว่างให้สมบูรณ์

ตัวอย่าง $\sin(-30^\circ) = \sin 330^\circ = -\frac{1}{2}$, $\cos(-30^\circ) = \cos 330^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan(-30^\circ) = \tan 330^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

1. $\sin(-150^\circ) = \dots = ?[-\frac{1}{2}]$ $\cos(-150^\circ) = \dots = ?[-\frac{\sqrt{3}}{2}]$

$\tan(-150^\circ) = \dots = ?[\frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}]$

2. $\sin(-210^\circ) = \dots = ?[\frac{1}{2}]$ $\cos(-210^\circ) = \dots = ?[-\frac{\sqrt{3}}{2}]$

$\tan(-210^\circ) = \dots = ?[-\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}]$

3. $\sin(330^\circ) = \dots = ?[\frac{1}{2}]$ $\cos(-330^\circ) = \dots = ?[\frac{\sqrt{3}}{2}]$

$\tan(-330^\circ) = \dots = ?[\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}]$

4. $\sin(-45^\circ) = \dots = ?[-\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}]$ $\cos(45^\circ) = \dots = ?[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}]$

$\tan(-45^\circ) = \dots = ?[-1]$

5. $\sin(-135^\circ) = \dots = ?[-\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}]$ $\cos(-135^\circ) = \dots = ?[-\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}]$

$\tan(-135^\circ) = \dots = ?[1]$

6. $\sin(-225^\circ) = \dots = ?[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}]$ $\cos(-225^\circ) = \dots = ?[-\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}]$

$\tan(-225^\circ) = \dots = ?[-1]$

7. $\sin(-315^\circ) = \dots = ?[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}]$ $\cos(-315^\circ) = \dots = ?[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}]$

$\tan(-315^\circ) = \dots = ?[1]$

8. $\sin(-60^\circ) = \dots = ?[-\frac{\sqrt{3}}{2}]$ $\cos(-60^\circ) = \dots = ?[\frac{1}{2}]$

$\tan(-60^\circ) = \dots = ?[-\sqrt{3}]$

9. $\sin(-120^\circ) = \dots = ?[-\frac{\sqrt{3}}{2}]$ $\cos(-120^\circ) = \dots = ?[-\frac{1}{2}]$

$\tan(-120^\circ) = \dots = ?[\sqrt{3}]$

10. $\sin(-240^\circ) = \dots = ?[\frac{\sqrt{3}}{2}]$ $\cos(-240^\circ) = \dots = ?[-\frac{1}{2}]$

$\tan(-240^\circ) = \dots = ?[-\sqrt{3}]$

11. $\sin(-300^\circ) = \dots = ?[\frac{\sqrt{3}}{2}]$ $\cos(-300^\circ) = \dots = ?[\frac{1}{2}]$

$\tan(-300^\circ) = \dots = ?[\sqrt{3}]$

2.5 ครูแจกเอกสารฝึกหัด 7.1 ให้นักเรียนทำเป็นการบ้าน แล้วนัดส่งในตอนเช้าก่อนเข้าแถว
ทำกิจกรรมหน้าเสาธง

เอกสารฝึกหัด 7.1

จงหาผลลัพธ์ต่อไปนี้

ตัวอย่าง ก. $\sin 120^\circ + \cos 330^\circ - \sin(-300^\circ)$

วิธีทำ จาก $\sin 120^\circ + \cos 330^\circ - \sin(-300^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ดังนั้น $\sin 120^\circ + \cos 330^\circ - \sin(-300^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ข. $\cos(-135^\circ)\sin 225^\circ + \tan 225^\circ \cos(-300^\circ)$

วิธีทำ จาก $\cos(-135^\circ)\sin 225^\circ + \tan 225^\circ \cos(-300^\circ) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(1 \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{2} = 1$

ดังนั้น $\cos(-135^\circ)\sin 225^\circ + \tan 225^\circ \cos(-300^\circ) = 1$

- $\sin 120^\circ + \cos 330^\circ - \tan(-315^\circ)$ [เฉลย. $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \sqrt{3} - 1$]
- $\cos(-150^\circ)\sin(-120^\circ) + \tan(-45^\circ)$ [เฉลย. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (-1) = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$]
- $\sin 240^\circ \cos(-30^\circ) - \tan(-120^\circ)\tan(-150^\circ)$ [เฉลย. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + (\sqrt{3}) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{3}{4} - 1 = -\frac{7}{4}$]
- $\sin(-225^\circ)\cos(-135^\circ) + \cos(-330^\circ)\sin 300^\circ$
[เฉลย. $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{2}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{5}{4}$]

3. สื่อการเรียนการสอน

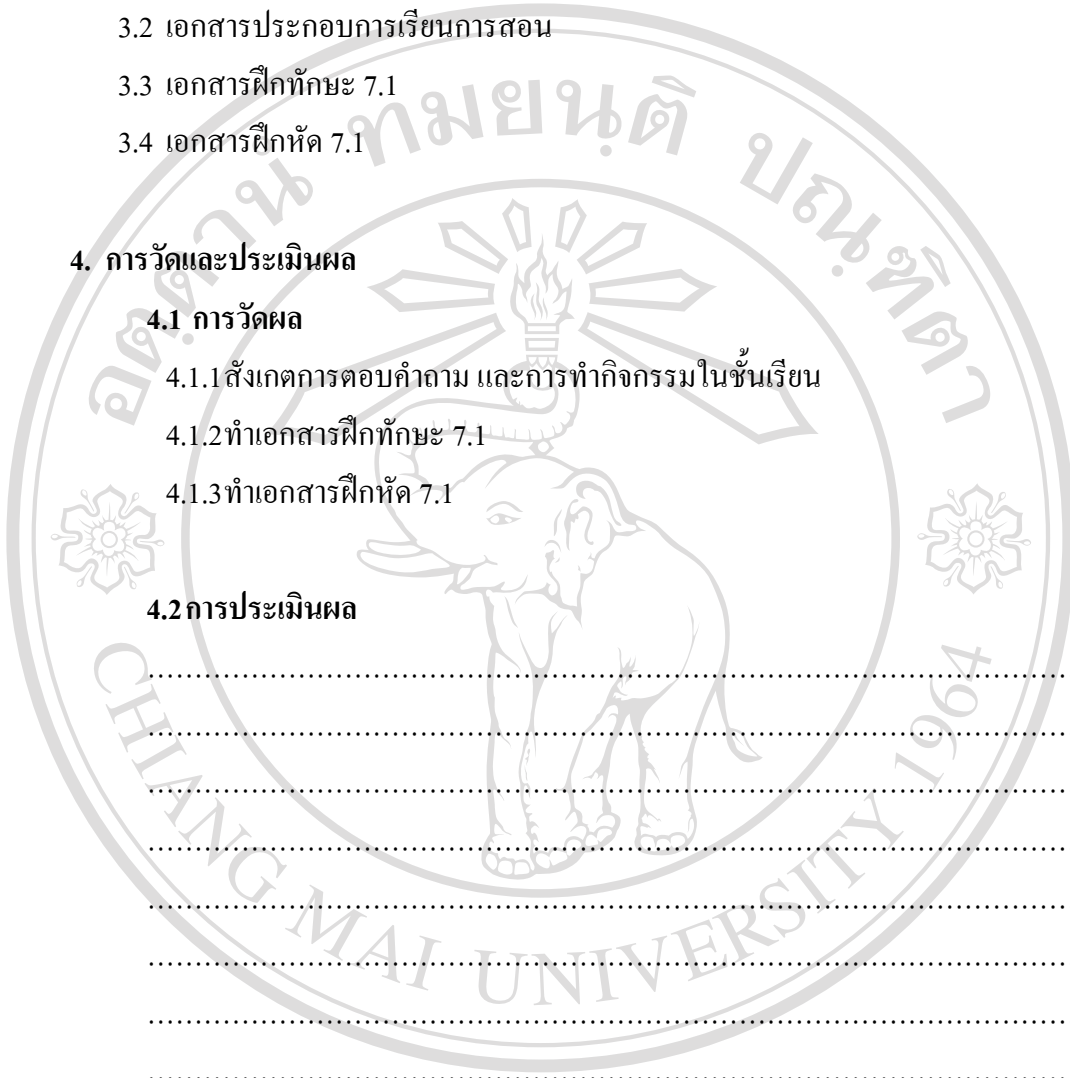
- 3.1 แผ่นภาพสรุปค่าฟังก์ชัน
- 3.2 เอกสารประกอบการเรียนการสอน
- 3.3 เอกสารฝึกทักษะ 7.1
- 3.4 เอกสารฝึกหัด 7.1

4. การวัดและประเมินผล

4.1 การวัดผล

- 4.1.1 สังเกตการตอบคำถาม และการทำงานกิจกรรมในชั้นเรียน
- 4.1.2 ทำเอกสารฝึกทักษะ 7.1
- 4.1.3 ทำเอกสารฝึกหัด 7.1

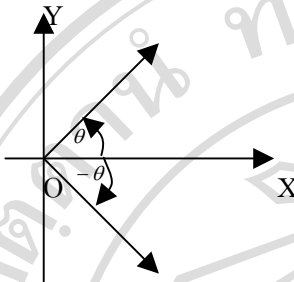
4.2 การประเมินผล



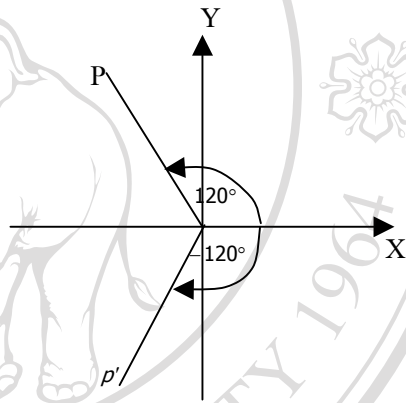
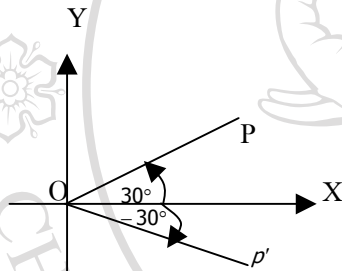
ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright © by Chiang Mai University
All rights reserved

เอกสารประกอบการเรียนการสอนคาบเรียนที่ 7
 “ ค่าฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนของมุมใด ๆ ”

แผ่นภาพ 1



- มุม θ และ $-\theta$ ต่างกันอย่างไร?
- จากความรู้เดิมเราวัดมุมแบบใด? θ หรือ $-\theta$
- เพื่อไม่ให้เกิดความสับสนในการวัดมุมต่อไปจะใช้เครื่องหมาย (-) ลบ เป็นสัญลักษณ์แทนทิศทางการวัดมุมที่ตรงข้ามกับมุมเดิม หรือ การวัดมุมในทิศทางตามเข็มนาฬิกา เช่น



แผ่นภาพ 2

$\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$

$\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sin 210^\circ = -\frac{1}{2}$

$\cos 210^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 210^\circ = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sin 330^\circ = -\frac{1}{2}$

$\cos 330^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

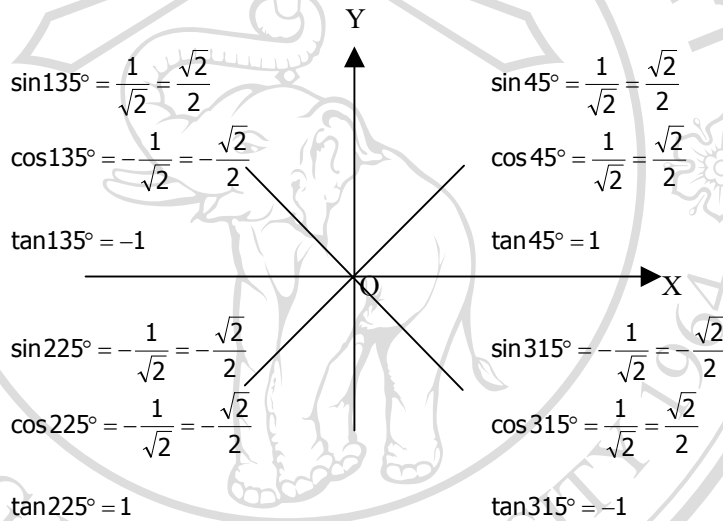
$\tan 330^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
 Copyright © by Chiang Mai University
 All rights reserved

- จากแผนภาพ 2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \sin(-30^\circ) &= -\frac{1}{2} & \cos(-30^\circ) &= \frac{\sqrt{3}}{2} & \tan(-30^\circ) &= -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \sin(-150^\circ) &= -\frac{1}{2} & \cos(-150^\circ) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} & \tan(-150^\circ) &= \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \sin(-210^\circ) &= \frac{1}{2} & \cos(-210^\circ) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} & \tan(-210^\circ) &= -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \sin(-330^\circ) &= \frac{1}{2} & \cos(-330^\circ) &= \frac{\sqrt{3}}{2} & \tan(-330^\circ) &= \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

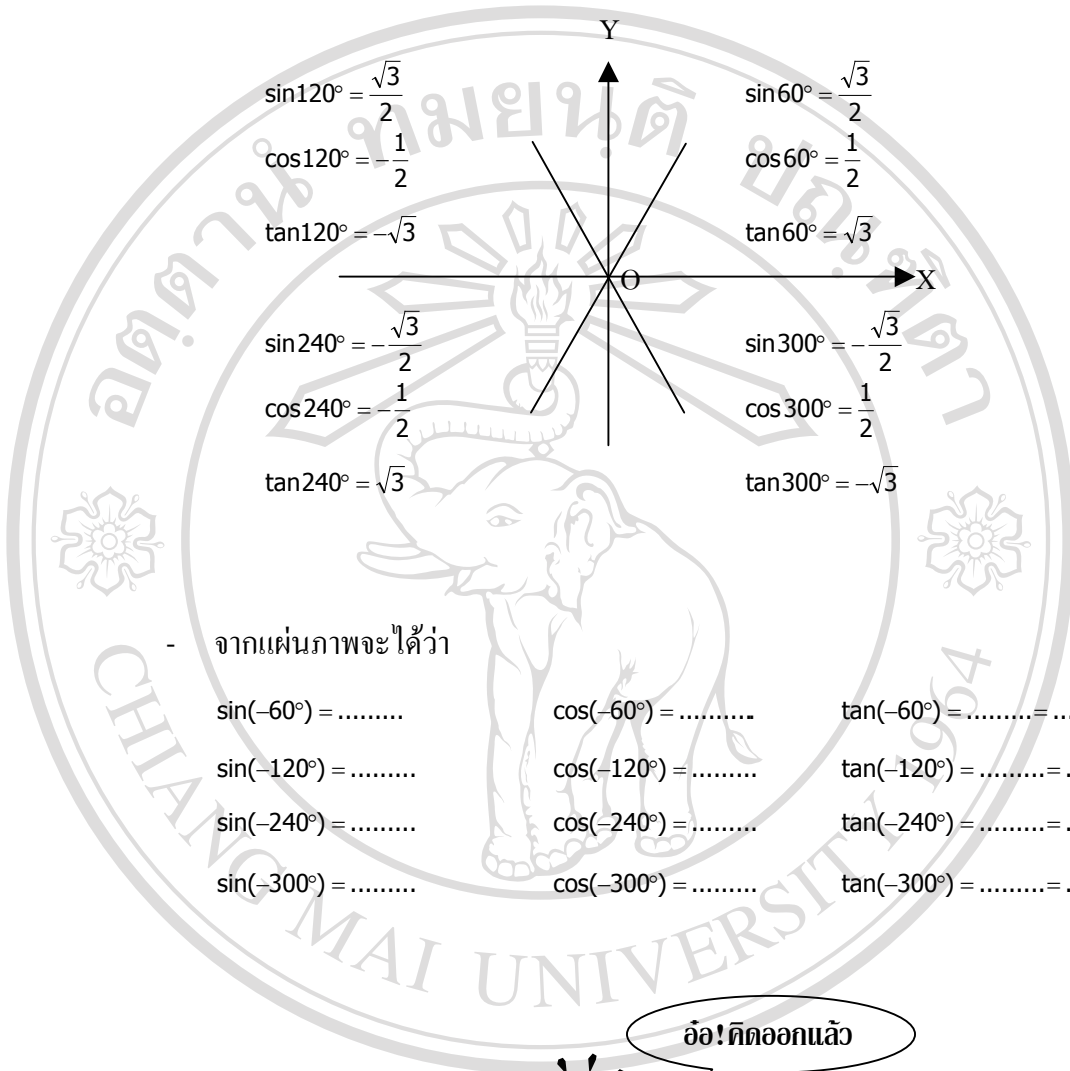
แผนภาพ 3



- จากแผนภาพจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \sin(-45^\circ) &= \dots\dots\dots = \dots\dots\dots & \cos(-45^\circ) &= \dots\dots\dots = \dots\dots\dots & \tan(-45^\circ) &= \dots\dots\dots \\ \sin(-135^\circ) &= \dots\dots\dots = \dots\dots\dots & \cos(-135^\circ) &= \dots\dots\dots = \dots\dots\dots & \tan(-135^\circ) &= \dots\dots\dots \\ \sin(-225^\circ) &= \dots\dots\dots = \dots\dots\dots & \cos(-225^\circ) &= \dots\dots\dots = \dots\dots\dots & \tan(-225^\circ) &= \dots\dots\dots \\ \sin(-315^\circ) &= \dots\dots\dots = \dots\dots\dots & \cos(-315^\circ) &= \dots\dots\dots = \dots\dots\dots & \tan(-315^\circ) &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

แผนภาพ 4



อ้อ! คิดออกแล้ว



ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
 Copyright © by Chiang Mai University
 All rights reserved

ชื่อ

ชั้น ม. ... / ... เลขที่

เอกสารฝึกทักษะ 7.1

จงเติมช่องว่างให้สมบูรณ์

1. $\sin(-30^\circ) = \dots = \dots$ $\cos(30^\circ) = \dots = \dots$

$\tan(-30^\circ) = \dots = \dots$

2. $\sin(-150^\circ) = \dots = \dots$ $\cos(-150^\circ) = \dots = \dots$

$\tan(-150^\circ) = \dots = \dots$

3. $\sin(-210^\circ) = \dots = \dots$ $\cos(-210^\circ) = \dots = \dots$

$\tan(-210^\circ) = \dots = \dots$

4. $\sin(330^\circ) = \dots = \dots$ $\cos(-330^\circ) = \dots = \dots$

$\tan(-330^\circ) = \dots = \dots$

5. $\sin(-45^\circ) = \dots = \dots$ $\cos(-45^\circ) = \dots = \dots$

$\tan(-45^\circ) = \dots = \dots$

6. $\sin(-135^\circ) = \dots = \dots$ $\cos(-135^\circ) = \dots = \dots$

$\tan(-135^\circ) = \dots = \dots$

7. $\sin(-225^\circ) = \dots = \dots$ $\cos(-225^\circ) = \dots = \dots$

$\tan(-225^\circ) = \dots = \dots$

8. $\sin(-315^\circ) = \dots = \dots$ $\cos(-315^\circ) = \dots = \dots$

$\tan(-315^\circ) = \dots = \dots$

9. $\sin(-60^\circ) = \dots = \dots$ $\cos(-60^\circ) = \dots = \dots$

$\tan(-60^\circ) = \dots = \dots$

10. $\sin(-120^\circ) = \dots = \dots$ $\cos(-120^\circ) = \dots = \dots$

$\tan(-120^\circ) = \dots = \dots$

11. $\sin(-240^\circ) = \dots = \dots$ $\cos(-240^\circ) = \dots = \dots$

$\tan(-240^\circ) = \dots = \dots$

12. $\sin(-300^\circ) = \dots = \dots$ $\cos(-300^\circ) = \dots = \dots$

$\tan(-300^\circ) = \dots = \dots$

➡➡❤ ตั้งใจหน่อยนะครับ ! ครูเอาใจช่วย ❤➡➡

เอกสารฝึกหัด 7.1

ชื่อ
ชั้น ม. ... / ... เลขที่

จงหาผลลัพธ์ต่อไปนี้

ตัวอย่าง ก. $\sin 120^\circ + \cos 330^\circ - \sin(-300^\circ)$

วิธีทำ จาก $\sin 120^\circ + \cos 330^\circ - \sin(-300^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ดังนั้น $\sin 120^\circ + \cos 330^\circ - \sin(-300^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ข. $\cos(-135^\circ)\sin 225^\circ + \tan 225^\circ \cos(-300^\circ)$

วิธีทำ จาก $\cos(-135^\circ)\sin 225^\circ + \tan 225^\circ \cos(-300^\circ) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(1 \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{2} = 1$

ดังนั้น $\cos(-135^\circ)\sin 225^\circ + \tan 225^\circ \cos(-300^\circ) = 1$

1. $\sin 120^\circ + \cos 330^\circ - \tan(-315^\circ)$

.....

.....

.....

.....

2. $\cos(-150^\circ)\sin(-120^\circ) + \tan(-45^\circ)$

.....

.....

.....

.....

3. $\sin 240^\circ \cos(-30^\circ) - \tan(-120^\circ) \tan(-150^\circ)$

.....

.....

.....

.....

4. $\sin(-225^\circ)\cos(-135^\circ) + \cos(-330^\circ)\sin 300^\circ$

.....

.....

.....

.....

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
 Copyright © by Chiang Mai University
 All rights reserved

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8

เรื่อง ค่าฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ แทนเจนของมุมใด ๆ

จำนวน 1 คาบ

วิชาคณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค 012

ภาคเรียนที่ 2

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

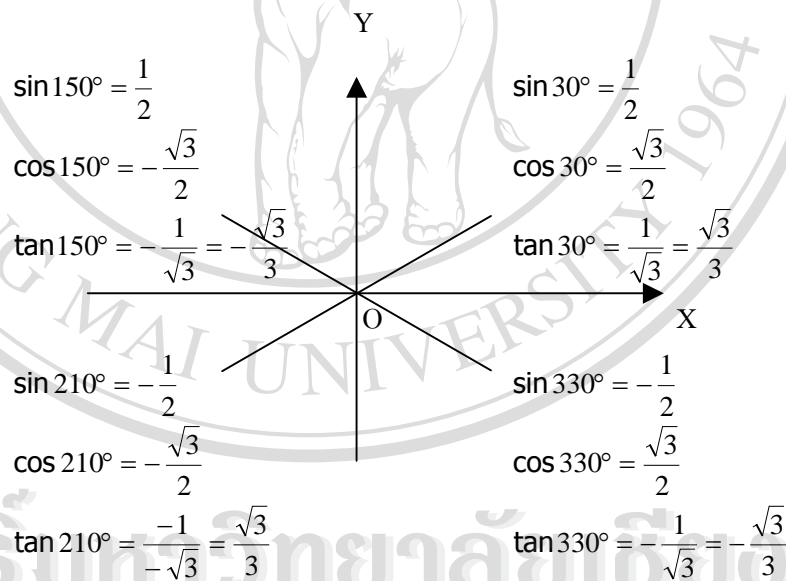
นักเรียนสามารถบอกได้ว่า $\sin(-\theta) = -\sin\theta$, $\cos(-\theta) = \cos\theta$, $\tan(-\theta) = -\tan\theta$

2. เนื้อหาและกิจกรรมการเรียนการสอน

2.1 ครูทบทวนความรู้เกี่ยวกับค่าของฟังก์ชันของมุมบางมุม โดยนำแบบฝึกหัด 7.1 มาเฉลย และครูสนทนาซักถามนักเรียนในคำตอบที่ได้

2.2 ครูคิดแผนภาพสรุปค่าฟังก์ชันของมุม 30° , 150° , 210° , 330° , 45° , 135° , 225° , 315° องศา และ 60° , 120° , 240° , 300° องศา จากคาบที่ 6 ไว้บนกระดาน แล้วสนทนาซักถามนักเรียน

แผนภาพ 1



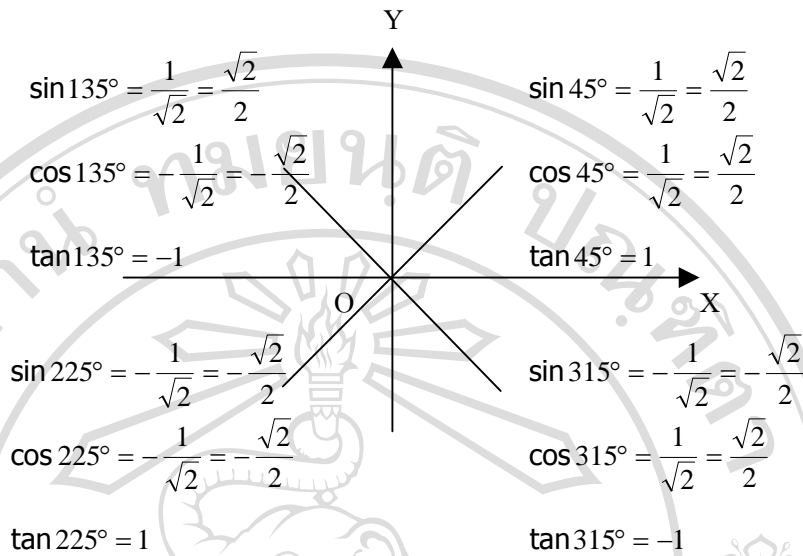
- จากแผนภาพจะได้ว่า

$$\sin 30^\circ = ?\left[\frac{1}{2}\right] \text{ และ } \sin(-30^\circ) = ?\left[-\frac{1}{2}\right] \text{ ดังนั้น } \sin(-30^\circ) = ?\left[-\frac{1}{2}\right] = ?[-\sin 30^\circ]$$

$$\sin 150^\circ = ?\left[\frac{1}{2}\right] \text{ และ } \sin(-150^\circ) = ?\left[-\frac{1}{2}\right] \text{ ดังนั้น } \sin(-150^\circ) = ?\left[-\frac{1}{2}\right] = ?[-\sin 150^\circ]$$

$$\sin 210^\circ = -\frac{1}{2} \text{ และ } \sin(-210^\circ) = ?\left[\frac{1}{2}\right] \text{ ดังนั้น } \sin[-210^\circ] = ?\left[\frac{1}{2}\right] = ?[-\sin 210^\circ]$$

$$\sin 330^\circ = ?\left[-\frac{1}{2}\right] \text{ และ } \sin(-330^\circ) = ?\left[\frac{1}{2}\right] \text{ ดังนั้น } \sin(-330^\circ) = ?\left[\frac{1}{2}\right] = ?[-\sin 330^\circ]$$

แผนภาพ 2

- จากแผนภาพจะได้ว่า

$$\sin(-45^\circ) = ? \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \right] \quad \text{และ} \quad \sin 45^\circ = ? \left[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \sin(-45^\circ) = ? \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} \right] = ? [-\sin 45^\circ]$$

$$\sin(-135^\circ) = ? \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \right] \quad \text{และ} \quad \sin 135^\circ = ? \left[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

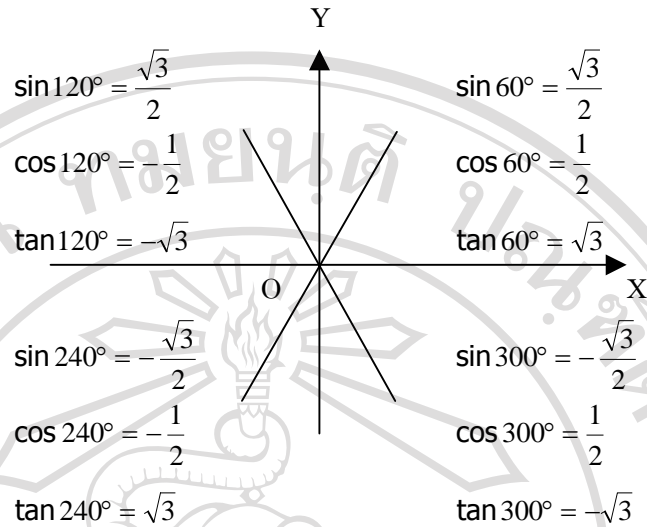
$$\text{ดังนั้น} \quad \sin(-135^\circ) = ? \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} \right] = ? [-\sin 135^\circ]$$

$$\sin(-225^\circ) = ? \left[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \quad \text{และ} \quad \sin 225^\circ = ? \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \sin(-225^\circ) = ? \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \right] = ? [-\sin 225^\circ]$$

$$\sin(-315^\circ) = ? \left[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \quad \text{และ} \quad \sin 315^\circ = ? \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \sin(-315^\circ) = ? \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \right] = ? [\sin 315^\circ]$$

แผนภาพ 3

จากแผนภาพจะได้ว่า

$$\sin(-60^\circ) = ?\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad \text{และ} \quad \sin 60^\circ = ?\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad \text{ดังนั้น} \quad \sin(-60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} = ?[-\sin 60^\circ]$$

$$\sin(-120^\circ) = ?\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad \text{และ} \quad \sin 120^\circ = ?\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad \text{ดังนั้น} \quad \sin(-120^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} = ?[-\sin 120^\circ]$$

$$\sin(-240^\circ) = ?\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad \text{และ} \quad \sin 240^\circ = ?\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad \text{ดังนั้น} \quad \sin(-240^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = ?[-\sin 240^\circ]$$

$$\sin(-300^\circ) = ?\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad \text{และ} \quad \sin 300^\circ = ?\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad \text{ดังนั้น} \quad \sin(-300^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = ?[-\sin 300^\circ]$$

2.3 ครูแบ่งนักเรียนออกเป็น 9 กลุ่ม และแจกเอกสารประกอบการเรียนการสอนให้แต่ละกลุ่ม ช่วยกันพิจารณาค่าฟังก์ชันโคไซน์ และ แทนเจน และ ร่วมกันสรุปค่าฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และ แทนเจนของมุมในทิศทางตามเข็มนาฬิกา

ดำเนินการในทำนองเดียวกันกับข้อ 2.2 จากแผนภาพจะได้อีกว่า

$$\cos(-30^\circ) = ?\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad \text{และ} \quad \cos 30^\circ = ?\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad \text{ดังนั้น} \quad \cos(-30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = ?[\cos 30^\circ]$$

$$\cos(-150^\circ) = ?\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad \text{และ} \quad \cos 150^\circ = ?\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad \text{ดังนั้น} \quad \cos(-150^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} = ?[\cos 150^\circ]$$

$$\cos(-210^\circ) = ?\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad \text{และ} \quad \cos 210^\circ = ?\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad \text{ดังนั้น} \quad \cos(-210^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} = ?[\cos 210^\circ]$$

$$\cos(-330^\circ) = ?\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad \text{และ} \quad \cos 330^\circ = ?\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad \text{ดังนั้น} \quad \cos(-330^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = ?[\cos 330^\circ]$$

$$\text{และ } \cos(-45^\circ) = ?\left[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \quad \text{และ } \cos 45^\circ = ?\left[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$\text{ดังนั้น } \cos(-45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = ?[\cos 45^\circ]$$

$$\cos(-135^\circ) = ?\left[-\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \quad \text{และ } \cos 135^\circ = ?\left[-\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$\text{ดังนั้น } \cos(-135^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = ?[\cos 135^\circ]$$

$$\cos(-225^\circ) = ?\left[-\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \quad \text{และ } \cos 225^\circ = ?\left[-\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$\text{ดังนั้น } \cos(-225^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = ?[\cos 225^\circ]$$

$$\cos(-315^\circ) = ?\left[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \quad \text{และ } \cos 315^\circ = ?\left[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$\text{ดังนั้น } \cos(-315^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = ?[\cos 315^\circ]$$

$$\text{และ } \cos(-60^\circ) = ?\left[\frac{1}{2}\right] \quad \text{และ } \cos 60^\circ = ?\left[\frac{1}{2}\right] \quad \text{ดังนั้น } \cos(-60^\circ) = \frac{1}{2} = ?[\cos 60^\circ]$$

$$\cos(-120^\circ) = ?\left[-\frac{1}{2}\right] \quad \text{และ } \cos 120^\circ = ?\left[-\frac{1}{2}\right] \quad \text{ดังนั้น } \cos(-120^\circ) = -\frac{1}{2} = ?[\cos 120^\circ]$$

$$\cos(-240^\circ) = ?\left[-\frac{1}{2}\right] \quad \text{และ } \cos 240^\circ = ?\left[-\frac{1}{2}\right] \quad \text{ดังนั้น } \cos(-240^\circ) = -\frac{1}{2} = ?[\cos 240^\circ]$$

$$\cos(-300^\circ) = ?\left[\frac{1}{2}\right] \quad \text{และ } \cos 300^\circ = ?\left[\frac{1}{2}\right] \quad \text{ดังนั้น } \cos(-300^\circ) = \frac{1}{2} = ?[\cos 300^\circ]$$

และจะได้อีกว่า

$$\tan(-30^\circ) = ?\left[-\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\right] \quad \text{และ } \tan 30^\circ = ?\left[\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$$

$$\text{ดังนั้น } \tan(-30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = ?[-\tan 30^\circ]$$

$$\tan(-150^\circ) = ?\left[\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\right] \quad \text{และ } \tan 150^\circ = ?\left[-\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$$

$$\text{ดังนั้น } \tan(-150^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = ?[-\tan 150^\circ]$$

$$\tan(-210^\circ) = ?\left[-\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\right] \quad \text{และ } \tan 210^\circ = ?\left[\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$$

$$\text{ดังนั้น } \tan(-210^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} = ?[-\tan 210^\circ]$$

$$\tan(-330^\circ) = ?\left[\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\right] \quad \text{และ } \tan 330^\circ = ?\left[-\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$$

$$\text{ดังนั้น } \tan(-330^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = ?[-\tan 330^\circ]$$

และ $\tan(-45^\circ) = ?[-1]$ และ $\tan 45^\circ = ?[1]$ ดังนั้น $\tan(-45^\circ) = -1 = ?[-\tan 45^\circ]$
 $\tan(-135^\circ) = ?[1]$ และ $\tan 135^\circ = ?[-1]$ ดังนั้น $\tan(-135^\circ) = 1 = ?[-\tan 135^\circ]$
 $\tan(-225^\circ) = ?[-1]$ และ $\tan 45^\circ = ?[1]$ ดังนั้น $\tan(-225^\circ) = -1 = ?[-\tan 225^\circ]$
 $\tan(-315^\circ) = ?[1]$ และ $\tan 315^\circ = ?[-1]$ ดังนั้น $\tan(-315^\circ) = -1 = ?[-\tan 315^\circ]$

และ $\tan(-60^\circ) = ?[-\sqrt{3}]$ และ $\tan 60^\circ = ?[\sqrt{3}]$ ดังนั้น $\tan(-60^\circ) = -\sqrt{3} = ?[-\tan 60^\circ]$
 $\tan(-120^\circ) = ?[\sqrt{3}]$ และ $\tan 120^\circ = ?[-\sqrt{3}]$ ดังนั้น $\tan(-120^\circ) = \sqrt{3} = ?[-\tan 120^\circ]$
 $\tan(-240^\circ) = ?[-\sqrt{3}]$ และ $\tan 240^\circ = ?[\sqrt{3}]$ ดังนั้น $\tan(-240^\circ) = -\sqrt{3} = ?[-\tan 240^\circ]$
 $\tan(-300^\circ) = ?[\sqrt{3}]$ และ $\tan 300^\circ = ?[-\sqrt{3}]$ ดังนั้น $\tan(-300^\circ) = \sqrt{3} = ?[-\tan 300^\circ]$

จากการหาค่าฟังก์ชันสรุปได้ว่า

$$\sin(-\theta) \dots (\text{เท่ากับ}) \dots -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) \dots (\text{เท่ากับ}) \dots \cos \theta$$

$$\tan(-\theta) \dots (\text{เท่ากับ}) \dots -\tan \theta$$

2.4 ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปอีกครั้งหนึ่งว่า

$$\sin(-\theta) \dots (\text{เท่ากับ}) \dots -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) \dots (\text{เท่ากับ}) \dots \cos \theta$$

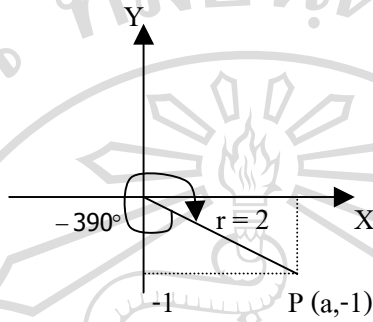
$$\tan(-\theta) \dots (\text{เท่ากับ}) \dots -\tan \theta$$

2.5 ครูแจกเอกสารฝึกหัด 8.1 ให้นักเรียนทำเป็นการทำงานบ้าน

เอกสารฝึกหัด 8.1

จงหาค่าฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนของมุมต่อไปนี้

1.



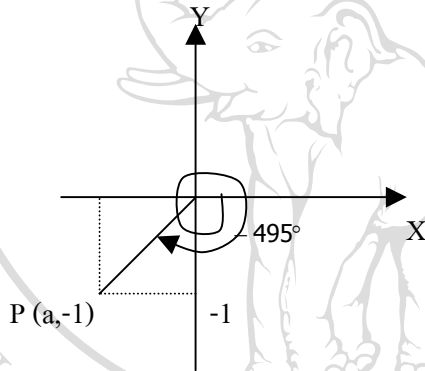
$a = ?[\sqrt{3}]$

$\sin(-390^\circ) = ?[-\frac{1}{2}]$

$\cos(-390^\circ) = ?[\frac{\sqrt{3}}{2}]$

$\tan(-390^\circ) = ?[-\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}]$

2.



$a = ?[-1]$

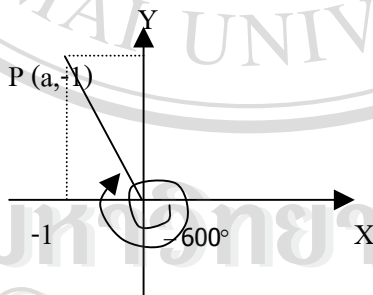
$\sin(-495^\circ) = ?[-\frac{1}{2}]$

$\cos(-495^\circ) = ?[\frac{\sqrt{3}}{2}]$

$\tan(-495^\circ) = ?[-\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}]$

$r = ?[\sqrt{2}]$

3.



$a = ?[-1]$

$\sin(-600^\circ) = ?[-\frac{1}{2}]$

$\cos(-600^\circ) = ?[\frac{\sqrt{3}}{2}]$

$\tan(-600^\circ) = ?[-\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}]$

$r = ?[\sqrt{2}]$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
 Copyright © by Chiang Mai University
 All rights reserved

3. สื่อการเรียนการสอน

3.1 เอกสารประกอบการเรียน

3.2 แผ่นภาพ 1- 3

3.3 เอกสารฝึกหัด 8.1

4. การวัดและประเมินผล

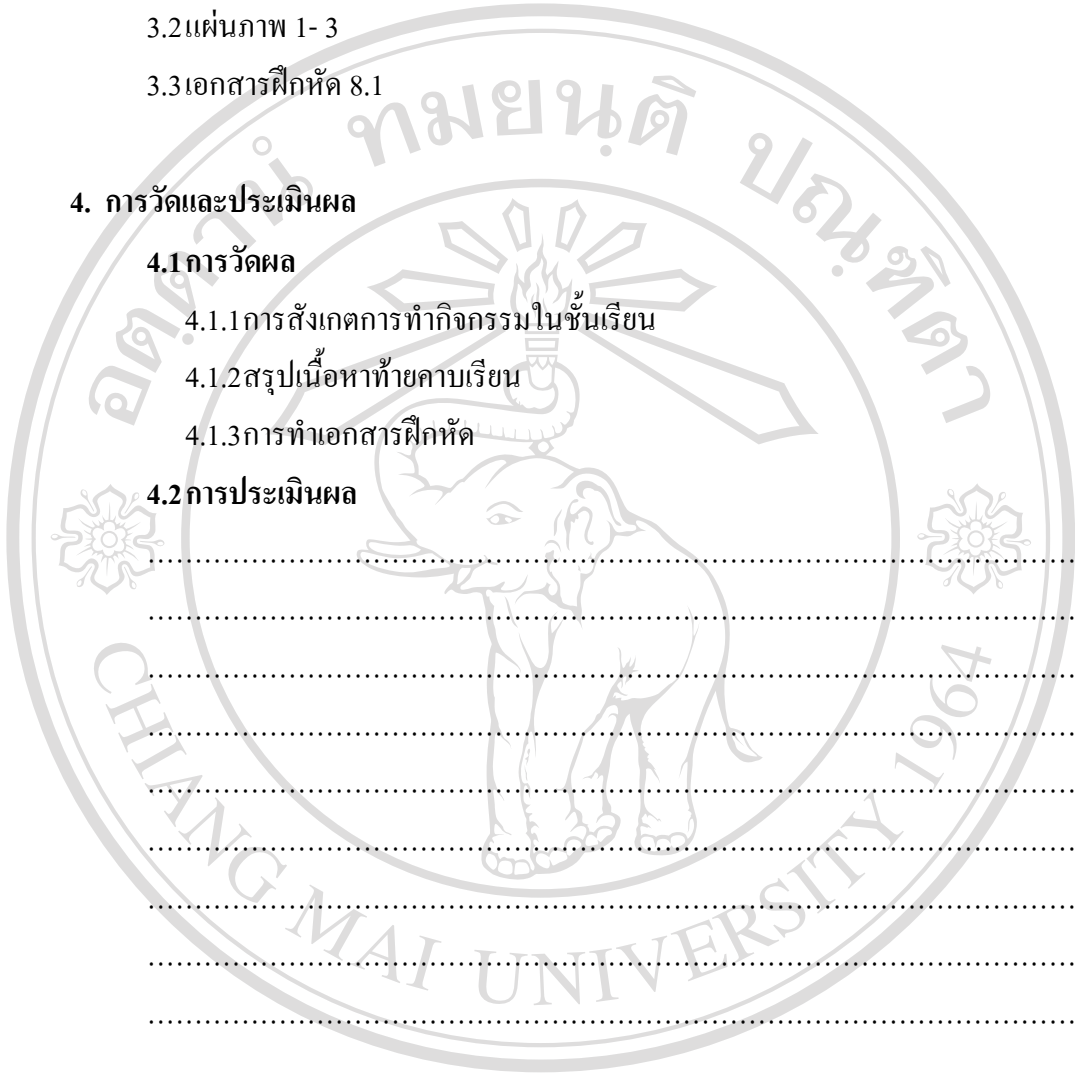
4.1 การวัดผล

4.1.1 การสังเกตการทำกิจกรรมในชั้นเรียน

4.1.2 สรุปรูปเนื้อหาทำคาบเรียน

4.1.3 การทำเอกสารฝึกหัด

4.2 การประเมินผล



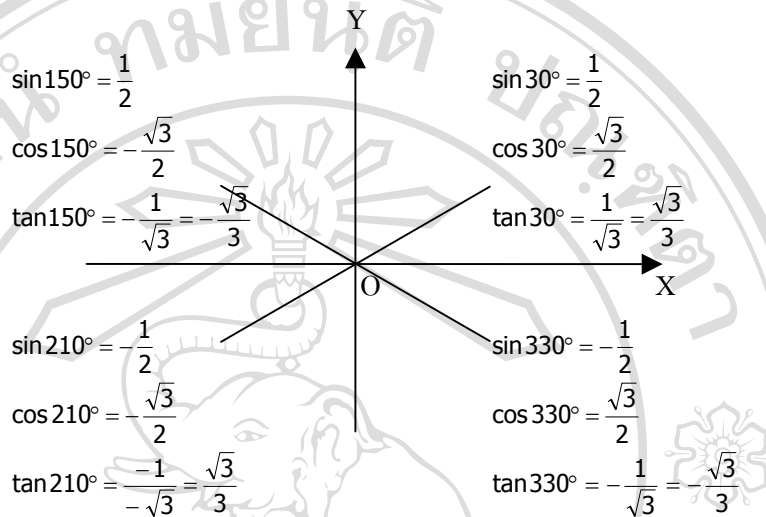
ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright © by Chiang Mai University

All rights reserved

เอกสารประกอบการเรียนการสอน คาบที่ 8

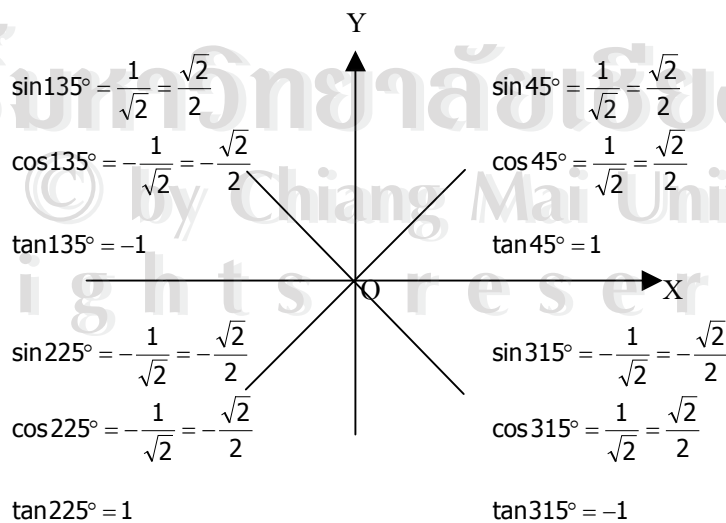
แผนภาพ 1



- จากแผนภาพจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \text{ และ } \sin(-30^\circ) = -\frac{1}{2} \text{ ดังนั้น } \sin(-30^\circ) &= -\frac{1}{2} = -\sin 30^\circ \\ \sin 150^\circ = \frac{1}{2} \text{ และ } \sin(-150^\circ) = -\frac{1}{2} \text{ ดังนั้น } \sin(-150^\circ) &= -\frac{1}{2} = -\sin 150^\circ \\ \sin 210^\circ = -\frac{1}{2} \text{ และ } \sin(-210^\circ) = \frac{1}{2} \text{ ดังนั้น } \sin[-210^\circ] &= \frac{1}{2} = -\sin 210^\circ \\ \sin 330^\circ = -\frac{1}{2} \text{ และ } \sin(-330^\circ) = \frac{1}{2} \text{ ดังนั้น } \sin(-330^\circ) &= \frac{1}{2} = -\sin 330^\circ \end{aligned}$$

แผนภาพ 2



- จากแผนภาพจะได้ว่า

$$\sin(-45^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{และ} \quad \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ดังนั้น $\sin(-45^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\sin 45^\circ$

$$\sin(-135^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{และ} \quad \sin 135^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ดังนั้น $\sin(-135^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\sin 135^\circ$

$$\sin(-225^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{และ} \quad \sin 225^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ดังนั้น $\sin(-225^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = -\sin 225^\circ$

$$\sin(-315^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{และ} \quad \sin 315^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ดังนั้น $\sin(-315^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin 315^\circ$

แผนภาพ 3

$$\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\sin 240^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 240^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 240^\circ = \sqrt{3}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

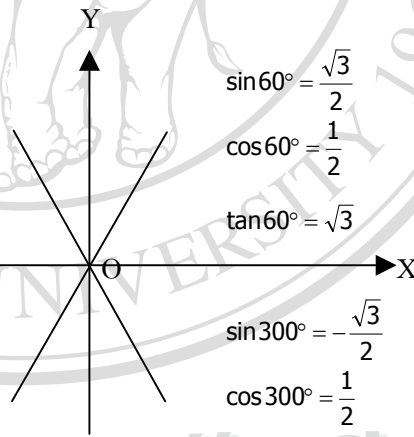
$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\sin 300^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 300^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 300^\circ = -\sqrt{3}$$



- จากแผนภาพจะได้ว่า

$$\sin(-60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{และ} \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ดังนั้น} \quad \sin(-60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sin 60^\circ$$

$$\sin(-120^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{และ} \quad \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ดังนั้น} \quad \sin(-120^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sin 120^\circ$$

$$\sin(-240^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{และ} \quad \sin 240^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ดังนั้น} \quad \sin(-240^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sin 240^\circ$$

$$\sin(-300^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{และ} \quad \sin 300^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ดังนั้น} \quad \sin(-300^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sin 300^\circ$$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright © Chiang Mai University

All rights reserved

ดำเนินการในทำนองเดียวกันจากแผนภาพ 1-3 จะได้อีกว่า

$$\begin{aligned} \cos(-30^\circ) &= \dots\dots\dots \text{ และ } \cos 30^\circ = \dots\dots\dots \text{ ดังนั้น } \cos(-30^\circ) = \dots\dots = \dots\dots\dots \\ \cos(-150^\circ) &= \dots\dots\dots \text{ และ } \cos 150^\circ = \dots\dots\dots \text{ ดังนั้น } \cos(-150^\circ) = \dots\dots = \dots\dots\dots \\ \cos(-210^\circ) &= \dots\dots\dots \text{ และ } \cos 210^\circ = \dots\dots\dots \text{ ดังนั้น } \cos(-210^\circ) = \dots\dots = \dots\dots\dots \\ \cos(-330^\circ) &= \dots\dots\dots \text{ และ } \cos 330^\circ = \dots\dots\dots \text{ ดังนั้น } \cos(-330^\circ) = \dots\dots = \dots\dots\dots \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} \cos(-45^\circ) &= \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ และ } \cos 45^\circ = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \\ \text{ดังนั้น } \cos(-45^\circ) &= \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\cos(-135^\circ) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ และ } \cos 135^\circ = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$\text{ดังนั้น } \cos(-135^\circ) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$\cos(-225^\circ) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ และ } \cos 225^\circ = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$\text{ดังนั้น } \cos(-225^\circ) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$\cos(-315^\circ) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ และ } \cos 315^\circ = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$\text{ดังนั้น } \cos(-315^\circ) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

และ

$$\cos(-60^\circ) = \dots\dots\dots \text{ และ } \cos 60^\circ = \dots\dots\dots \text{ ดังนั้น } \cos(-60^\circ) = \dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$\cos(-120^\circ) = \dots\dots\dots \text{ และ } \cos 120^\circ = \dots\dots\dots \text{ ดังนั้น } \cos(-120^\circ) = \dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$\cos(-240^\circ) = \dots\dots\dots \text{ และ } \cos 240^\circ = \dots\dots\dots \text{ ดังนั้น } \cos(-240^\circ) = \dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$\cos(-300^\circ) = \dots\dots\dots \text{ และ } \cos 300^\circ = \dots\dots\dots \text{ ดังนั้น } \cos(-300^\circ) = \dots\dots = \dots\dots\dots$$

และจะได้อีกว่า

$$\tan(-30^\circ) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ และ } \tan 30^\circ = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$\text{ดังนั้น } \tan(-30^\circ) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$\tan(-150^\circ) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ และ } \tan 150^\circ = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$\text{ดังนั้น } \tan(-150^\circ) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$\tan(-210^\circ) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ และ } \tan 210^\circ = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$\text{ดังนั้น } \tan(-210^\circ) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$\tan(-330^\circ) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ และ } \tan 330^\circ = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$\text{ดังนั้น } \tan(-330^\circ) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

และ

$\tan(-45^\circ) = \dots$ และ $\tan 45^\circ = \dots$ ดังนั้น $\tan(-45^\circ) = \dots = \dots$

$\tan(-135^\circ) = \dots$ และ $\tan 135^\circ = \dots$ ดังนั้น $\tan(-135^\circ) = \dots = \dots$

$\tan(-225^\circ) = \dots$ และ $\tan 45^\circ = \dots$ ดังนั้น $\tan(-225^\circ) = \dots = \dots$

$\tan(-315^\circ) = \dots$ และ $\tan 315^\circ = \dots$ ดังนั้น $\tan(-315^\circ) = \dots = \dots$

และ

$\tan(-60^\circ) = \dots$ และ $\tan 60^\circ = \dots$ ดังนั้น $\tan(-60^\circ) = \dots = \dots$

$\tan(-120^\circ) = \dots$ และ $\tan 120^\circ = \dots$ ดังนั้น $\tan(-120^\circ) = \dots = \dots$

$\tan(-240^\circ) = \dots$ และ $\tan 240^\circ = \dots$ ดังนั้น $\tan(-240^\circ) = \dots = \dots$

$\tan(-300^\circ) = \dots$ และ $\tan 300^\circ = \dots$ ดังนั้น $\tan(-300^\circ) = \dots = \dots$

จากการหาค่าฟังก์ชันสรุปได้ว่า

$\sin(-\theta) = -\sin \theta$

$\cos(-\theta) = \cos \theta$

$\tan(-\theta) = -\tan \theta$

สูตรนี้ง่ายจัง

ใช่แล้วจ้ะก็ไม่ยาก

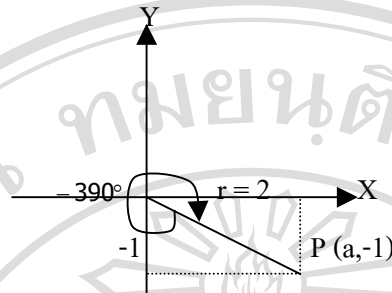


ลิขสิทธิ์เนื้อหาวิทยาลัยเทคโนโลยีใหม่
Copyright © by Chiang Mai University
All rights reserved

เอกสารฝึกหัด 8.1

จงหาค่าฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจน ของมุมต่อไปนี้

1.



$a = \dots\dots$

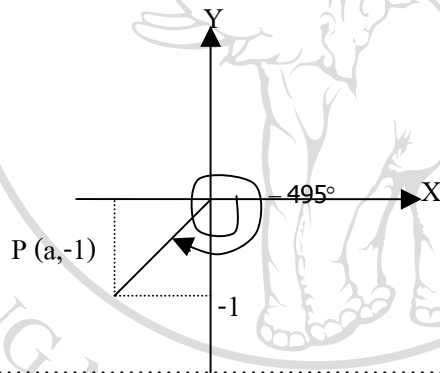
$\sin(-390^\circ) = \dots\dots\dots$

$\cos(-390^\circ) = \dots\dots\dots$

$\tan(-390^\circ) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

.....

2.



$a = \dots\dots\dots$

$\sin(-495^\circ) = \dots\dots\dots$

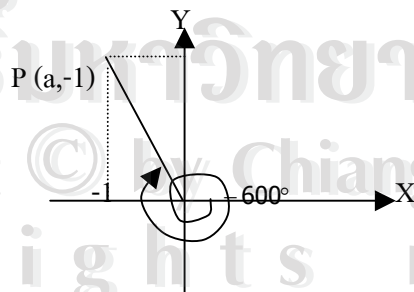
$\cos(-495^\circ) = \dots\dots\dots$

$\tan(-495^\circ) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

$r = \dots\dots\dots$

.....

3.



$a = \dots\dots\dots$

$\sin(-600^\circ) = \dots\dots\dots$

$\cos(-600^\circ) = \dots\dots\dots$

$\tan(-600^\circ) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

$r = \dots\dots\dots$

.....

(คาบ 8)

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
 Copyright © by Chiang Mai University
 All rights reserved

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 9

เรื่อง ค่าฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ แทนเจนของมุมใด ๆ

จำนวน 1 คาบ

วิชาคณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค 012

ภาคเรียนที่ 2

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

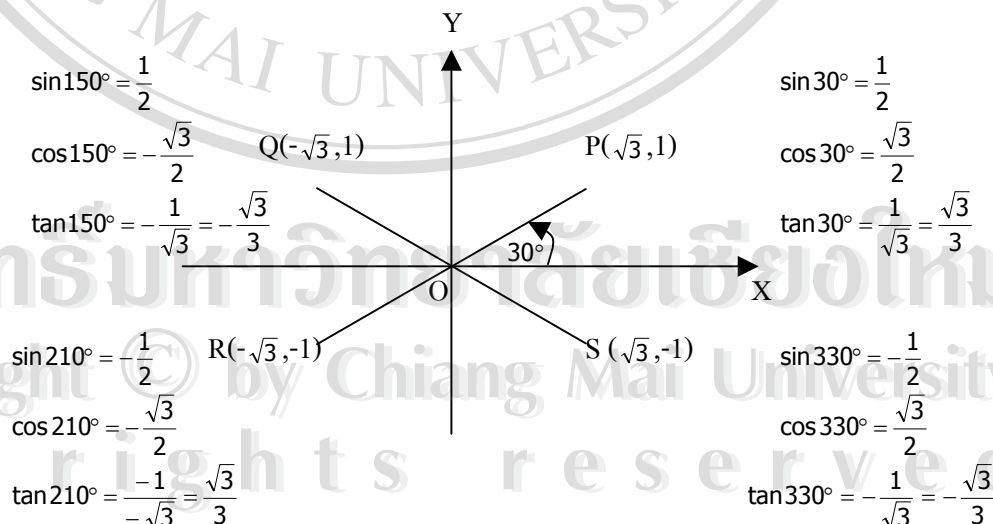
1. จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถเขียนฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจน ของมุมที่กำหนดให้อยู่ในรูปฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนของมุมตั้งแต่ 0 องศา ถึง 90 องศา ได้

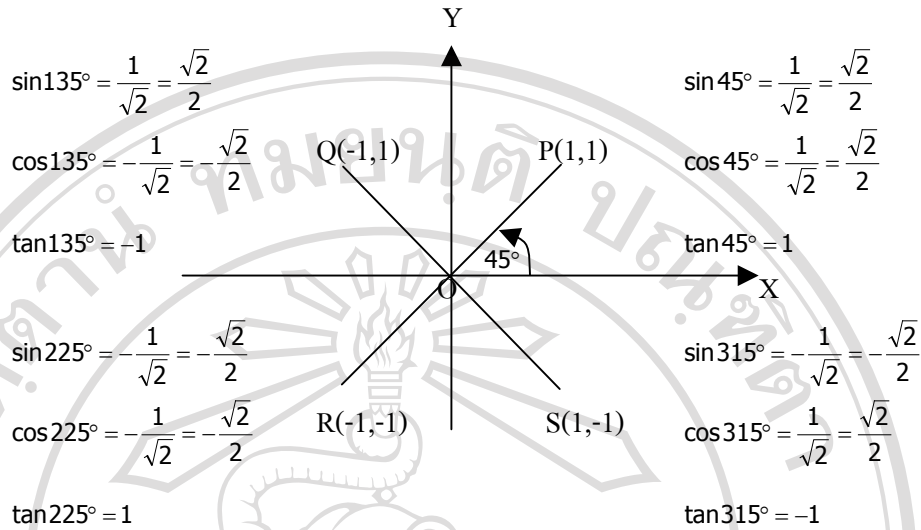
2. เนื้อหาและกิจกรรมการเรียนการสอน

2.1 ครูคิดแผนภาพสรุปค่าฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนของมุม 30 , 150 , 210 , 330 , 45 , 135 , 225 , 315 องศา และ 60 , 120 , 240 , 300 องศา จากคาบที่ 6 ไว้บนกระดาน แต่ครูปิดคำตอบบนแผนภาพไว้ แล้วสนทนากลุ่มนักเรียนเกี่ยวกับค่าของฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจน

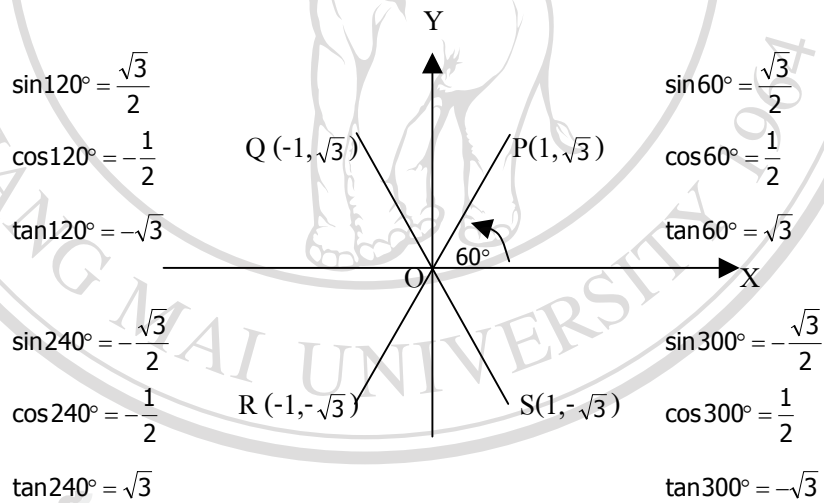
2.2 ครูเปิดกระดานที่ปิดคำตอบบนแผนภาพ 1 – 3 ออก แล้วครูสนทนากลุ่มนักเรียนโดยให้นักเรียนพิจารณาจากแผนภาพประกอบ ซึ่งครูถามนักเรียนทีละฟังก์ชันดังนี้

แผนภาพ 1

แผนภาพ 2



แผนภาพ 3



พิจารณาฟังก์ชันไซน์จากแผนภาพจะได้ว่า

$\sin 150^\circ = ?[\frac{1}{2}]$ และ $\sin 30^\circ = ?[\frac{1}{2}]$ ดังนั้น $\sin 150^\circ = ?[\sin 30^\circ] = ?[\frac{1}{2}]$

$\sin 135^\circ = ?[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}]$ และ $\sin 45^\circ = ?[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}]$ ดังนั้น

$\sin 135^\circ = ?[\sin 45^\circ] = ?[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}]$

$\sin 120^\circ = ?[\frac{\sqrt{3}}{2}]$ และ $\sin 60^\circ = ?[\frac{\sqrt{3}}{2}]$ ดังนั้น $\sin 120^\circ = ?[\sin 60^\circ] = ?[\frac{\sqrt{3}}{2}]$

- มุมใน 1 รอบเท่ากับเท่าใด? [360°] และมุมครึ่งรอบเท่ากับเท่าใด? [180°]

- ณ จุด Q ของแผ่นภาพทั้ง 3 อยู่บนด้านสิ้นสุดของมุมอะไรบ้าง ? $[120^\circ, 135^\circ, 150^\circ]$ มุม $180^\circ, 60^\circ, 45^\circ, 30^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ$ มีความสัมพันธ์กันอย่างไร ? $[180^\circ - 60^\circ = 120^\circ, 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ, 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ]$

- จาก $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$ จะได้ว่า $\sin(180^\circ - 30^\circ) = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ$ จาก $\sin 135^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ จะได้ว่า

$$\sin(180^\circ - 45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin 45^\circ \text{ และ จาก } \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ จะได้ว่า}$$

$$\sin(180^\circ - 60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ$$

ดังนั้นเราจะได้ว่า ถ้า $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ แล้ว $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$

- ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า ถ้า $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ แล้ว $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$ และ

$$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta$$

2.3 ครูแบ่งนักเรียนออกเป็น 9 กลุ่ม แล้วแจกใบงาน 9.1 ให้แต่ละกลุ่มช่วยกันพิจารณาค่าของฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจน ของมุมในควอร์แดนต์ที่ 3 และ 4 โดยให้พิจารณาจากแผ่นภาพ และทำในทำนองเดียวกับข้อ 2.2

ใบงาน 9.1

จงพิจารณาค่าของฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจน ของมุมในควอร์แดนต์ที่ 3 และ 4 พร้อมทั้งสรุปให้อยู่ในรูปทั่วไป

$$1. \sin 210^\circ = -\frac{1}{2} = -\sin 30^\circ$$

$$\sin 225^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sin 45^\circ$$

$$\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ$$

$$\text{ดังนั้น } \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\frac{1}{2} = -\sin 30^\circ$$

$$\sin(180^\circ + 45^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\sin 45^\circ$$

$$\sin(180^\circ + 60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ$$

$$\text{ดังนั้น ถ้า } 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ \text{ แล้ว } \sin(180^\circ + \theta) = -\sin \theta$$

$$2. \cos 210^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} = ?[-\cos 30^\circ]$$

$$\cos 225^\circ = ?[-\sin 45^\circ] = ?[-\frac{1}{\sqrt{2}}]$$

$$\cos 240^\circ = ?[-\cos 60^\circ] = ?[-\frac{1}{2}]$$

$$\text{ดังนั้น} \cos(180^\circ + 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} = ?[-\cos 30^\circ]$$

$$\cos(180^\circ + 45^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = ?[-\cos 45^\circ]$$

$$\cos(180^\circ + 60^\circ) = -\frac{1}{2} = ?[-\cos 60^\circ]$$

$$\text{ดังนั้น} \text{ ถ้า } 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ \text{ แล้ว } \cos(180^\circ + \theta) = ?[-\cos \theta]$$

$$3. \tan 210^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = ?[\tan 30^\circ]$$

$$\tan 225^\circ = ?[1] = ?[\tan 45^\circ]$$

$$\tan 240^\circ = ?[\sqrt{3}] = ?[\tan 60^\circ]$$

$$\text{ดังนั้น} \tan(180^\circ + 30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}} = ?[\tan 30^\circ]$$

$$\tan(180^\circ + 45^\circ) = 1 = ?[\tan 45^\circ]$$

$$\tan(180^\circ + 60^\circ) = \sqrt{3} = ?[\tan 60^\circ]$$

$$\text{ดังนั้น} \text{ ถ้า } 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ \text{ แล้ว } \tan(180^\circ + \theta) = ?[\tan \theta]$$

$$4. \sin 330^\circ = -\frac{1}{2} = -\sin 30^\circ$$

$$\sin 315^\circ = ?[-\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}] = ?[-\sin 45^\circ]$$

$$\sin 300^\circ = ?[-\frac{\sqrt{3}}{2}] = ?[-\sin 60^\circ]$$

$$\text{ดังนั้น} \sin(360^\circ - 30^\circ) = -\frac{1}{2} = ?[-\sin 30^\circ]$$

$$\sin(360^\circ - 45^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = ?[-\sin 45^\circ]$$

$$\sin(360^\circ - 60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} = ?[-\sin 60^\circ]$$

$$\text{ดังนั้น} \text{ ถ้า } 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ \text{ แล้ว } \sin(360^\circ - \theta) = ?[-\sin \theta]$$

$$5. \cos 330^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = ?[\cos 30^\circ]$$

$$\cos 315^\circ = ?\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = ?[\sin 45^\circ]$$

$$\cos 300^\circ = ?\left[\frac{1}{2}\right] = ?[\cos 60^\circ]$$

$$\text{ดังนั้น} \cos(360^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = ?[\cos 30^\circ]$$

$$\cos(360^\circ - 45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = ?[\cos 45^\circ]$$

$$\cos(360^\circ - 60^\circ) = \frac{1}{2} = ?[\cos 60^\circ]$$

$$\text{ดังนั้น} \text{ ถ้า } 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ \text{ แล้ว } \cos(360^\circ - \theta) = ?[\cos \theta]$$

$$6. \tan 330^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}} = ?[-\tan 30^\circ]$$

$$\tan 315^\circ = ?[-1] = ?[-\tan 45^\circ]$$

$$\tan 300^\circ = ?[-\sqrt{3}] = ?[-\tan 60^\circ]$$

$$\text{ดังนั้น} \tan(360^\circ - 30^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{3}} = ?[-\tan 30^\circ]$$

$$\tan(360^\circ - 45^\circ) = -1 = ?[-\tan 45^\circ]$$

$$\tan(360^\circ - 60^\circ) = -\sqrt{3} = ?[-\tan 60^\circ]$$

$$\text{ดังนั้น} \text{ ถ้า } 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ \text{ แล้ว } \tan(360^\circ - \theta) = ?[-\tan \theta]$$

$$7. \sin 390^\circ = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ$$

$$\sin 405^\circ = ?\left[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = ?[\sin 45^\circ]$$

$$\sin 420^\circ = ?\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = ?[\sin 60^\circ]$$

$$\text{ดังนั้น} \sin(360^\circ + 30^\circ) = \frac{1}{2} = ?[\sin 30^\circ]$$

$$\sin(360^\circ + 45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = ?[\sin 45^\circ]$$

$$\sin(360^\circ + 60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = ?[\sin 60^\circ]$$

$$\text{ดังนั้น} \text{ ถ้า } 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ \text{ แล้ว } \sin(360^\circ + \theta) = ?[\sin \theta]$$

$$8. \cos 390^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = ?[\cos 30^\circ]$$

$$\cos 405^\circ = ?\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = ?[\sin 45^\circ]$$

$$\cos 420^\circ = ?\left[\frac{1}{2}\right] = ?[\cos 60^\circ]$$

$$\text{ดังนั้น} \cos(360^\circ + 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = ?[\cos 30^\circ]$$

$$\cos(360^\circ + 45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = ?[\cos 45^\circ]$$

$$\cos(360^\circ + 60^\circ) = \frac{1}{2} = ?[\cos 60^\circ]$$

$$\text{ดังนั้น ถ้า } 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ \text{ แล้ว } \cos(360^\circ + \theta) = ?[\cos \theta]$$

$$9. \tan 390^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = ?[\tan 30^\circ]$$

$$\tan 405^\circ = ?[1] = ?[\tan 45^\circ]$$

$$\tan 420^\circ = ?[\sqrt{3}] = ?[\tan 60^\circ]$$

$$\text{ดังนั้น} \tan(360^\circ + 30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}} = ?[\tan 30^\circ]$$

$$\tan(360^\circ + 45^\circ) = 1 = ?[\tan 45^\circ]$$

$$\tan(360^\circ + 60^\circ) = \sqrt{3} = ?[\tan 60^\circ]$$

$$\text{ดังนั้น ถ้า } 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ \text{ แล้ว } \tan(360^\circ + \theta) = ?[\tan \theta]$$

2.4 ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปว่า ถ้า $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta \quad \cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta \quad \tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta$$

$$\sin(180^\circ + \theta) = -\sin \theta \quad \cos(180^\circ + \theta) = -\cos \theta \quad \tan(180^\circ + \theta) = \tan \theta$$

$$\sin(360^\circ - \theta) = -\sin \theta \quad \cos(360^\circ - \theta) = \cos \theta \quad \tan(360^\circ - \theta) = -\tan \theta$$

2.5 ครูแจกเอกสารฝึกหัด 9.1 และแบบบันทึกการเรียนรู้ให้นักเรียนทำเป็นการบ้านและนัด

ส่งในตอนเช้าก่อนทำกิจกรรมหน้าเสาธง

เอกสารฝึกหัด 9.1

จงเขียนฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจน ของมุมที่กำหนดให้อยู่ในรูปฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนของมุมตั้งแต่ 0 องศา ถึง 90 องศา

ตัวอย่าง $340^\circ = 360^\circ - 20^\circ$

ดังนั้น $\sin 340^\circ = \sin(360^\circ - 20^\circ)$ $\cos 340^\circ = \cos(360^\circ - 20^\circ)$ $\tan 340^\circ = \tan(360^\circ - 20^\circ)$

จาก $\sin(360^\circ - \theta) = -\sin \theta$ $\cos(360^\circ - \theta) = \cos \theta$ $\tan(360^\circ - \theta) = -\tan \theta$

จะได้ $\sin 340^\circ = \sin(360^\circ - 20^\circ) = -\sin 20^\circ$ $\cos 340^\circ = \cos(360^\circ - 20^\circ) = \cos 20^\circ$

$\tan 340^\circ = \tan(360^\circ - 20^\circ) = -\tan 20^\circ$

1. 160°

[เกลย. $160^\circ = 180^\circ - 20^\circ$

ดังนั้น $\sin 160^\circ = \sin(180^\circ - 20^\circ)$, $\cos 160^\circ = \cos(180^\circ - 20^\circ)$, $\tan 160^\circ = \tan(180^\circ - 20^\circ)$

จาก $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$, $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$, $\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta$

จะได้ $\sin 160^\circ = \sin(180^\circ - 20^\circ) = \sin 20^\circ$, $\cos 160^\circ = \cos(180^\circ - 20^\circ) = -\cos 20^\circ$,

$\tan 160^\circ = \tan(180^\circ - 20^\circ) = -\tan 20^\circ$]

2. 230°

[เกลย. $230^\circ = 180^\circ + 50^\circ$

ดังนั้น $\sin 230^\circ = \sin(180^\circ + 50^\circ)$, $\cos 230^\circ = \cos(180^\circ + 50^\circ)$, $\tan 230^\circ = \tan(180^\circ + 50^\circ)$

จาก $\sin(180^\circ + \theta) = -\sin \theta$, $\cos(180^\circ + \theta) = -\cos \theta$, $\tan(180^\circ + \theta) = \tan \theta$

จะได้ $\sin 230^\circ = \sin(180^\circ + 50^\circ) = -\sin 50^\circ$, $\cos 230^\circ = \cos(180^\circ + 50^\circ) = -\cos 50^\circ$,

$\tan 230^\circ = \tan(180^\circ + 50^\circ) = \tan 50^\circ$]

3. -145°

[เกลย. จาก $\sin(-\theta) = -\sin \theta$, $\cos(-\theta) = \cos \theta$, $\tan(-\theta) = -\tan \theta$ และ

$145^\circ = 180^\circ - 35^\circ$

ดังนั้น $\sin(-145^\circ) = -\sin 145^\circ = -\sin(180^\circ - 35^\circ)$,

$\cos(-145^\circ) = \cos 145^\circ = \cos(180^\circ - 35^\circ)$ $\tan(-145^\circ) = -\tan 145^\circ = -\tan(180^\circ - 35^\circ)$

จาก $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$, $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$, $\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta$

จะได้ $\sin(-145^\circ) = -\sin(180^\circ - 35^\circ) = -\sin 35^\circ$

$\cos(-145^\circ) = \cos(180^\circ - 35^\circ) = -\cos 35^\circ$

$\tan(-145^\circ) = -\tan(180^\circ - 35^\circ) = \tan 35^\circ$]

4. -440° [เฉลย. จาก $\sin(-\theta) = -\sin \theta$, $\cos(-\theta) = \cos \theta$, $\tan(-\theta) = -\tan \theta$ และ

$$440^\circ = 360^\circ + 80^\circ$$

$$\text{ดังนั้น } \sin(-440^\circ) = -\sin 440^\circ = -\sin(360^\circ + 80^\circ) ,$$

$$\cos(-440^\circ) = \cos 440^\circ = \cos(360^\circ + 80^\circ) \quad \tan(-440^\circ) = -\tan 440^\circ = -\tan(360^\circ + 80^\circ)$$

$$\text{จาก } \sin(360^\circ + \theta) = \sin \theta , \cos(360^\circ + \theta) = \cos \theta , \tan(360^\circ + \theta) = \tan \theta$$

$$\text{จะได้ } \sin(-440^\circ) = -\sin(360^\circ + 80^\circ) = -\sin 80^\circ$$

$$\cos(-440^\circ) = \cos(360^\circ + 80^\circ) = \cos 80^\circ$$

$$\tan(-440^\circ) = -\tan(360^\circ + 80^\circ) = -\tan 80^\circ]$$

3. สื่อการเรียนการสอน

3.1 เอกสารประกอบการเรียนการสอน

3.2 แผ่นภาพสรุปค่าฟังก์ชัน

3.3 ใบงาน 9.1

3.4 เอกสารฝึกหัด 9.1

4. การวัดและประเมินผล

4.1 การวัดผล

4.1.1 สังเกตการทำกิจกรรมร่วมกันในชั้นเรียน

4.1.2 การทำใบงาน 9.1

4.1.3 การสรุปเนื้อหา

4.1.4 การทำเอกสารฝึกหัด 9.1

4.2 การประเมินผล

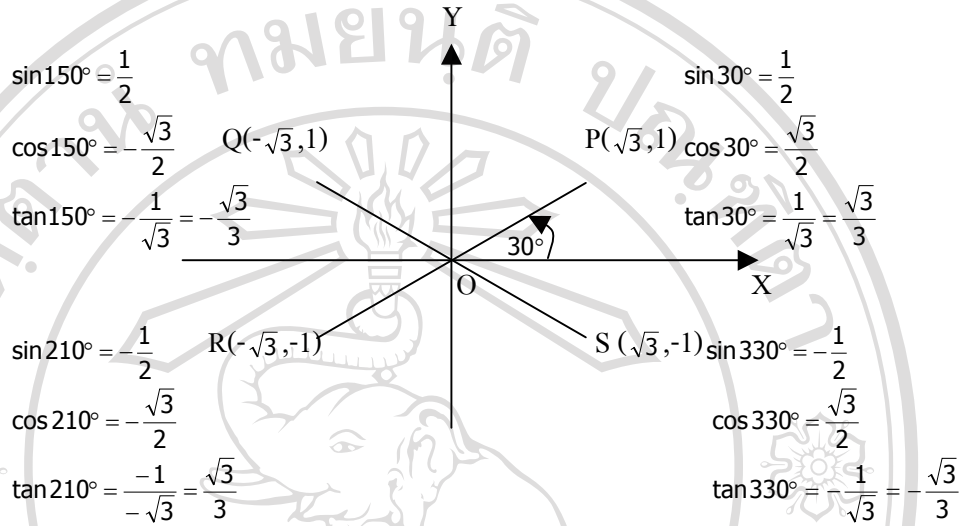
ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright © by Chiang Mai University

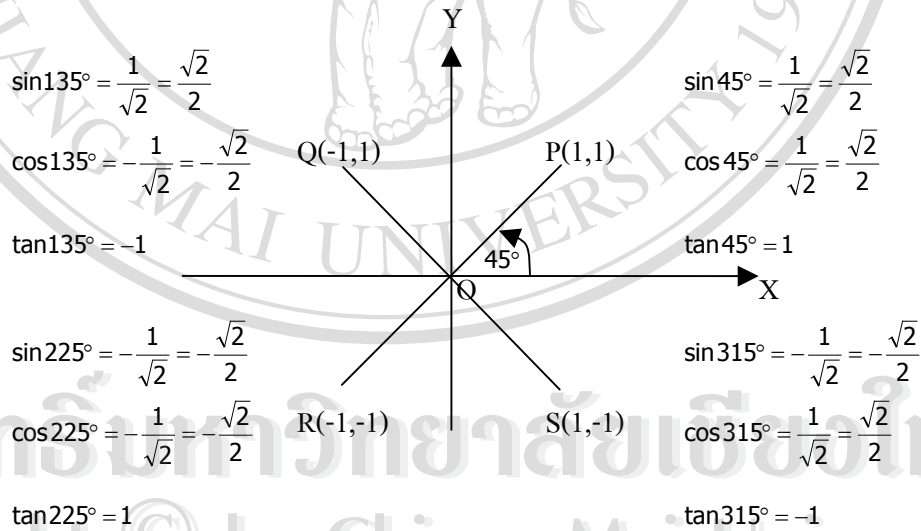
All rights reserved

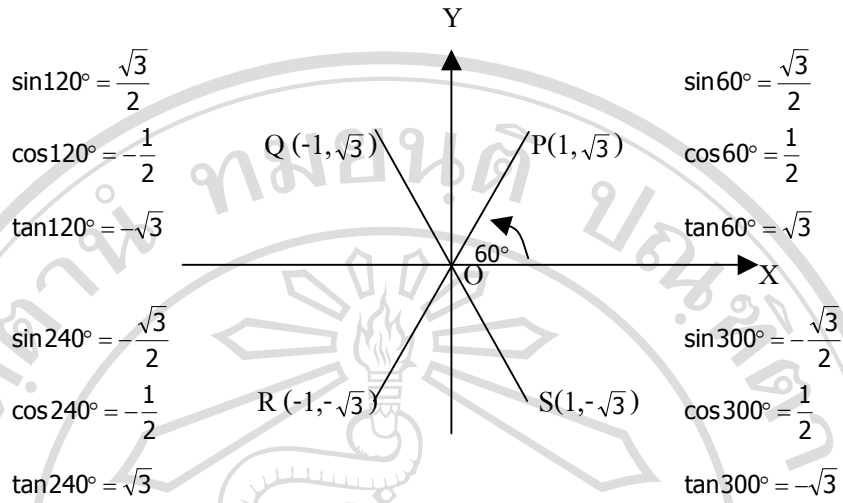
เอกสารประกอบการเรียนการสอน คาบที่ 9

แผนภาพ 1



แผนภาพ 2



แผนภาพ 3

- พิจารณาฟังก์ชันไซน์จากแผนภาพจะได้ว่า

$$\sin 150^\circ = ?\left[\frac{1}{2}\right] \text{ และ } \sin 30^\circ = ?\left[\frac{1}{2}\right] \text{ ดังนั้น } \sin 150^\circ = ?[\sin 30^\circ] = ?\left[\frac{1}{2}\right]$$

$$\sin 135^\circ = ?\left[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \text{ และ } \sin 45^\circ = ?\left[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \text{ ดังนั้น } \sin 135^\circ = ?[\sin 45^\circ] = ?\left[\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$\sin 120^\circ = ?\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \text{ และ } \sin 60^\circ = ?\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \text{ ดังนั้น } \sin 120^\circ = ?[\sin 60^\circ] = ?\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

- มุมใน 1 รอบเท่ากับเท่าใด? $[360^\circ]$ และมุมครึ่งรอบเท่ากับเท่าใด? $[180^\circ]$

- ณ จุด Q ของแผนภาพทั้ง 3 อยู่บนด้านสิ้นสุดของมุมอะไรบ้าง? $[120^\circ, 135^\circ, 150^\circ]$ มุม $180^\circ, 60^\circ, 45^\circ, 30^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ$ มีความสัมพันธ์กันอย่างไร? $[180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$
 $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ, 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ]$

- จาก $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$ จะได้ว่า $\sin(180^\circ - 30^\circ) = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ$ จาก $\sin 135^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ จะได้ว่า

$$\sin(180^\circ - 45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin 45^\circ \text{ และ จาก } \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ จะได้ว่า}$$

$$\sin(180^\circ - 60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ$$

ดังนั้นเราจะได้ว่า ถ้า $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ แล้ว $\sin(180^\circ - \theta) = ?[\sin \theta]$

- ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า ถ้า $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ แล้ว $\cos(180^\circ - \theta) = ?[-\cos \theta]$ และ $\tan(180^\circ - \theta) = ?[-\tan \theta]$

ใบงาน 9.1

จงพิจารณาค่าของฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจน ของมุมในควอเตอร์รันที่ 3 และ 4 พร้อมทั้งสรุปให้อยู่ในรูปทั่วไป

1. $\sin 210^\circ = -\frac{1}{2} = -\sin 30^\circ$

$\sin 225^\circ = \dots = \dots = \dots$

$\sin 120^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sin 60^\circ$

ดังนั้น $\sin(180^\circ + 30^\circ) = -\frac{1}{2} = \dots$

$\sin(180^\circ + 45^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \dots$

$\sin(180^\circ + 60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \dots$

ดังนั้น ถ้า $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ แล้ว $\sin(180^\circ + \theta) = \dots$

2. $\cos 210^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \dots$

$\cos 225^\circ = \dots = \dots$

$\cos 240^\circ = \dots = \dots$

ดังนั้น $\cos(180^\circ + 30^\circ) = \dots = \dots$

$\cos(180^\circ + 45^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \dots$

$\cos(180^\circ + 60^\circ) = -\frac{1}{2} = \dots$

ดังนั้น ถ้า $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ แล้ว $\cos(180^\circ + \theta) = \dots$

3. $\tan 210^\circ = \dots = \dots$

$\tan 225^\circ = \dots = \dots$

$\tan 240^\circ = \dots = \dots$

ดังนั้น $\tan(180^\circ + 30^\circ) = \dots = \dots$

$\tan(180^\circ + 45^\circ) = \dots = \dots$

$\tan(180^\circ + 60^\circ) = \dots = \dots$

ดังนั้น ถ้า $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ แล้ว $\tan(180^\circ + \theta) = \dots$

4. $\sin 330^\circ = \dots = \dots$

$\sin 315^\circ = \dots = \dots$]

$\sin 300^\circ = \dots = \dots$

ดังนั้น $\sin(360^\circ - 30^\circ) = \dots = \dots$

$\sin(360^\circ - 45^\circ) = \dots = \dots$, $\sin(360^\circ - 60^\circ) = \dots = \dots$

ดังนั้น ถ้า $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ แล้ว $\sin(360^\circ - \theta) = \dots$

5. $\cos 330^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \dots$

$\cos 315^\circ = \dots = \dots$

$\cos 300^\circ = \dots = \dots$

ดังนั้น $\cos(360^\circ - 30^\circ) = \dots = \dots$

$\cos(360^\circ - 45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \dots$

$\cos(360^\circ - 60^\circ) = \frac{1}{2} = \dots$

ดังนั้น ถ้า $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ แล้ว $\cos(360^\circ - \theta) = \dots$

6. $\tan 330^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}} = \dots$

$\tan 315^\circ = \dots = \dots$

$\tan 300^\circ = \dots = \dots$

ดังนั้น $\tan(360^\circ - 30^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{3}} = \dots$

$\tan(360^\circ - 45^\circ) = \dots = \dots$

$\tan(360^\circ - 60^\circ) = \dots = \dots$

ดังนั้น ถ้า $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ แล้ว $\tan(360^\circ - \theta) = \dots$

7. $\sin 390^\circ = \dots = \dots$

$\sin 405^\circ = \dots = \dots$

$\sin 420^\circ = \dots = \dots$

ดังนั้น $\sin(360^\circ + 30^\circ) = \dots = \dots$

$\sin(360^\circ + 45^\circ) = \dots = \dots$

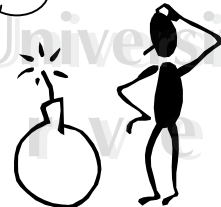
$\sin(360^\circ + 60^\circ) = \dots = \dots$

ดังนั้น ถ้า $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ แล้ว $\sin(360^\circ + \theta) = \dots$

ช่วยคิดหน่อย



อะไรกันนี่ขอ
ติดก่อน



ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright © by Chiang Mai University
All rights reserved

8. $\cos 390^\circ = \dots = \dots$

$\cos 405^\circ = \dots = \dots$

$\cos 420^\circ = \dots = \dots$

ดังนั้น $\cos(360^\circ + 30^\circ) = \dots = \dots$

$\cos(360^\circ + 45^\circ) = \dots = \dots$

$\cos(360^\circ + 60^\circ) = \dots = \dots$

ดังนั้น ถ้า $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ แล้ว $\cos(360^\circ + \theta) = \dots$

9. $\tan 390^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \dots$

$\tan 405^\circ = \dots = \dots$

$\tan 420^\circ = \dots = \dots$

ดังนั้น $\tan(360^\circ + 30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \dots$

$\tan(360^\circ + 45^\circ) = 1 = \dots$

$\tan(360^\circ + 60^\circ) = \sqrt{3} = \dots$

ดังนั้น ถ้า $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ แล้ว $\tan(360^\circ + \theta) = \dots$

ดูซิทำถูกต้องหรือป่าว



จากใบงานสรุปได้ว่า ถ้า $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$

$\sin(180^\circ - \theta) = \dots \quad \cos(180^\circ - \theta) = \dots \quad \tan(180^\circ - \theta) = \dots$

$\sin(180^\circ + \theta) = \dots \quad \cos(180^\circ + \theta) = \dots \quad \tan(180^\circ + \theta) = \dots$

$\sin(360^\circ - \theta) = \dots \quad \cos(360^\circ - \theta) = \dots \quad \tan(360^\circ - \theta) = \dots$

$\sin(360^\circ + \theta) = \dots \quad \cos(360^\circ + \theta) = \dots \quad \tan(360^\circ + \theta) = \dots$

ไชโย ทำได้แล้ว



ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright © by Chiang Mai University
All rights reserved

ชื่อ.....
 ชั้น ม. 4 / 1 เลขที่

เอกสารฝึกหัด 9.1

จงเขียนฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจน ของมุมที่กำหนดให้อยู่ในรูปฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนของมุมตั้งแต่ 0 องศา ถึง 90 องศา

ตัวอย่าง $340^\circ = 360^\circ - 20^\circ$

ดังนั้น $\sin 340^\circ = \sin(360^\circ - 20^\circ)$, $\cos 340^\circ = \cos(360^\circ - 20^\circ)$, $\tan 340^\circ = \tan(360^\circ - 20^\circ)$

จาก $\sin(360^\circ - \theta) = -\sin \theta$, $\cos(360^\circ - \theta) = \cos \theta$, $\tan(360^\circ - \theta) = -\tan \theta$

จะได้ $\sin 340^\circ = \sin(360^\circ - 20^\circ) = -\sin 20^\circ$, $\cos 340^\circ = \cos(360^\circ - 20^\circ) = \cos 20^\circ$,

$\tan 340^\circ = \tan(360^\circ - 20^\circ) = -\tan 20^\circ$

1. 160°

2. 230°

3. -145°

4. -440°

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
 Copyright © by Chiang Mai University
 All rights reserved

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 10

เรื่อง ค่าฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนของมุมใดๆ

จำนวน 1 คาบ

วิชาคณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค 012

ภาคเรียนที่ 2

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถ

- 1.1 เขียนฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจน ของมุมที่กำหนดให้อยู่ในรูปตั้งแต่ 0° ถึง 360° ได้
- 1.2 หาค่าฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจน ของมุมใดๆ ได้

2. เนื้อหาและกิจกรรมการเรียนรู้การสอน

- 2.1 ครูทบทวนเรื่องค่าฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนของมุมใดๆ ด้วยการแบ่งนักเรียนออกเป็น 9 กลุ่ม แล้วแจกแผ่นภาพสรุปค่าฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนของมุมตั้งแต่ 0° ถึง 360° และเขียนแผ่นภาพสรุป สูตร การหาค่าฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนของมุม ใดๆ โดยไม่ให้นักเรียนดูจากเอกสารเดิมที่เรียนผ่านมา โดยครูใช้เวลา 10 นาที กลุ่มใดทำเสร็จก่อน และถูกต้อง จะเป็นกลุ่มชนะ แล้วครูแจกรางวัลให้กับกลุ่มที่ชนะ จากนั้นครูนำแผ่นภาพของกลุ่มที่ชนะคิดไว้บนผนังห้องให้นักเรียนได้ดูในการหาค่าฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และ แทนเจนของมุม ยังไม่ได้ หรือจำสูตรการหาค่าฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนของมุมใดๆไม่ได้

แผ่นภาพ สรุป 1

$$\sin 150^\circ = ? \left[\frac{1}{2} \right]$$

$$\cos 150^\circ = ? \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

$$\tan 150^\circ = ? \left[-\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \right]$$

$$\sin 210^\circ = ? \left[-\frac{1}{2} \right]$$

$$\cos 210^\circ = ? \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

$$\tan 210^\circ = ? \left[\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \right]$$

$$\sin 30^\circ = ? \left[\frac{1}{2} \right]$$

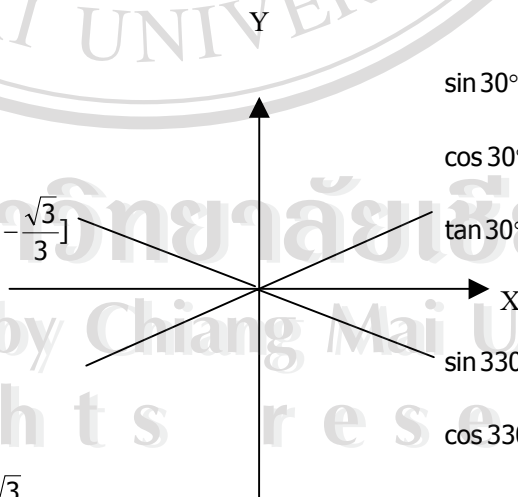
$$\cos 30^\circ = ? \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

$$\tan 30^\circ = ? \left[\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \right]$$

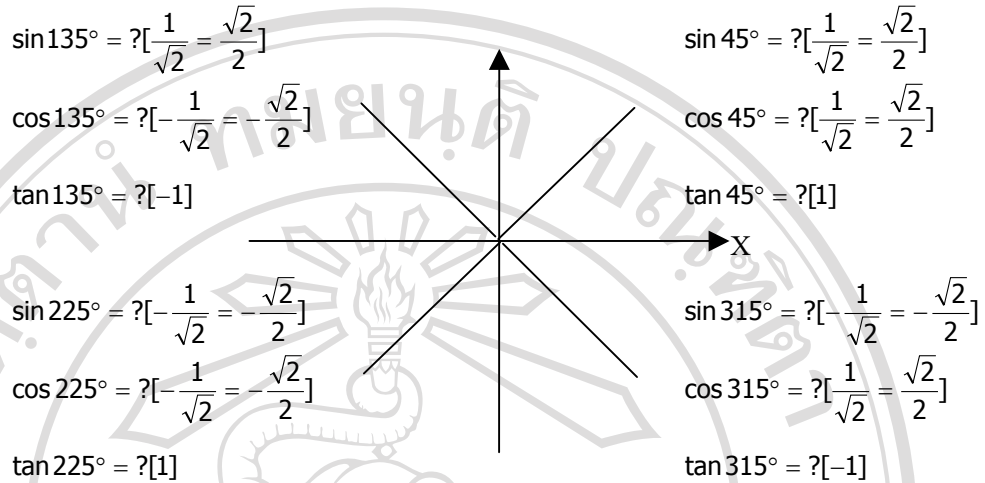
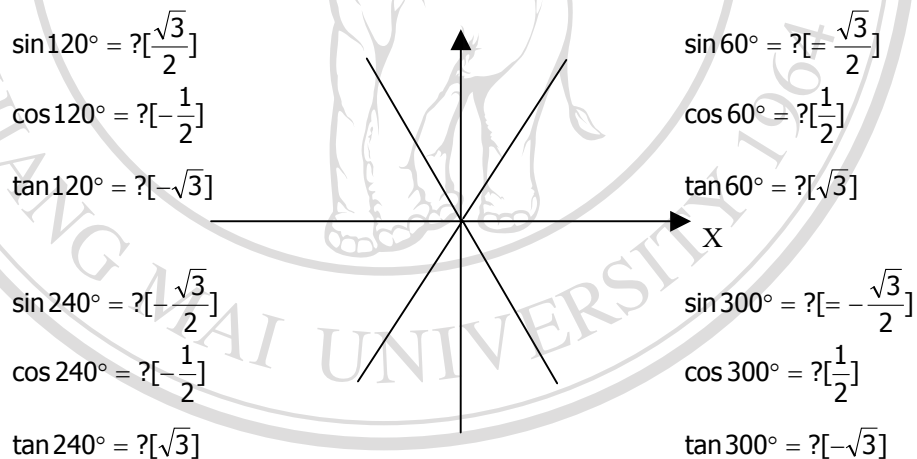
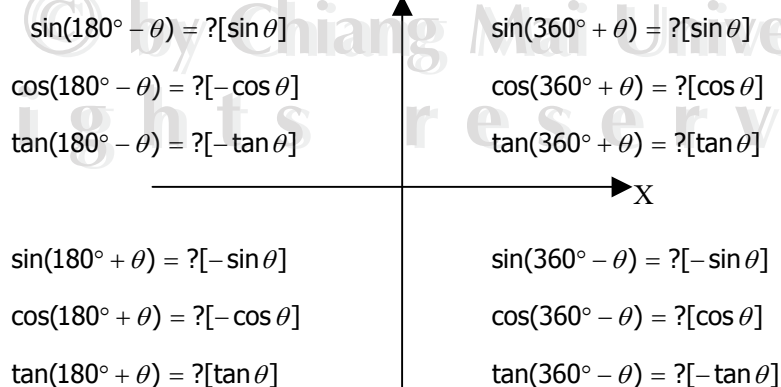
$$\sin 330^\circ = ? \left[-\frac{1}{2} \right]$$

$$\cos 330^\circ = ? \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

$$\tan 330^\circ = ? \left[-\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \right]$$



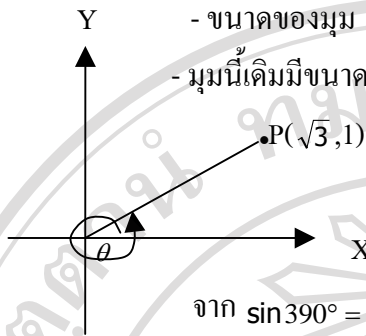
ลิขสิทธิ์ในมหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright © by Chiang Mai University
All rights reserved

แผนภาพสรุป 2แผนภาพสรุป 3แผนภาพสรุปสูตร

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright © by Chiang Mai University
All rights reserved

2.2 ครูดิดแผนภาพ 1 แล้วสนทนาซักถามนักเรียน

แผนภาพ 1

- ขนาดของมุม θ เท่ากับเท่าใด ? [390°]

- มุมนี้เดิมมีขนาดเป็นเท่าใด ? [30°]

- เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ของมุม 390° กับ 30° ได้

อย่างไร ? [360° + 30° = 390°]

- นักเรียนคิดว่า $\sin 390^\circ = \sin 30^\circ$ หรือไม่ ? [เท่า]

จาก $\sin 390^\circ = ?[\frac{1}{2}]$ และ $\sin 30^\circ = ?[\frac{1}{2}]$

จากความสัมพันธ์ของมุม 390° กับ 30° จะได้ว่า

$$\sin 390^\circ = \sin(360^\circ + 30^\circ) = ?[\frac{1}{2}]$$

$$\text{ดังนั้น } \sin(360^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ$$

- นักเรียนคิดว่า $\cos 390^\circ = \cos 30^\circ$ หรือไม่ ? [เท่า]

จาก $\cos 390^\circ = ?[\frac{\sqrt{3}}{2}]$ และ $\cos 30^\circ = ?[\frac{\sqrt{3}}{2}]$

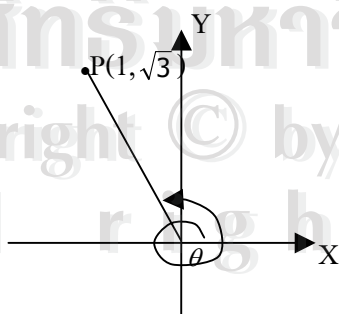
จากความสัมพันธ์ของมุม 390° กับ 30° จะได้ว่า

$$\cos 390^\circ = \cos(360^\circ + 30^\circ) = ?[\frac{\sqrt{3}}{2}]$$

$$\text{ดังนั้น } \cos(360^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ$$

- ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $\tan 390^\circ = \tan(360^\circ + 30^\circ) = ?[\frac{1}{\sqrt{3}}]$

$$\text{ดังนั้น } \tan(360^\circ + 30^\circ) = \tan 30^\circ$$

แผนภาพ 2

- ขนาดของมุม θ เท่ากับเท่าใด ? [480°]

- มุมนี้เดิมมีขนาดเป็นเท่าใด ? [120°]

- เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ของมุม 480° กับ 120° ได้

อย่างไร ? [360° + 120° = 480°]

- นักเรียนคิดว่า $\sin 480^\circ = \sin 120^\circ$ หรือไม่ ? [เท่า]

จาก $\sin 480^\circ = ?[\frac{\sqrt{3}}{2}]$ และ $\sin 120^\circ = ?[\frac{\sqrt{3}}{2}]$

จากความสัมพันธ์ของมุม 480° กับ 120° จะได้ว่า $\sin 480^\circ = \sin(360^\circ + 120^\circ) = ?[\frac{\sqrt{3}}{2}]$

$$\text{ดังนั้น } \sin(360^\circ + 120^\circ) = \sin 120^\circ$$

- นักเรียนคิดว่า $\cos 480^\circ = \cos 120^\circ$ หรือไม่? [เท่า]

จาก $\cos 480^\circ = ?[-\frac{1}{2}]$ และ $\cos 120^\circ = ?[-\frac{1}{2}]$

จากความสัมพันธ์ของมุม 480° กับ 120° จะได้ว่า

$\cos 480^\circ = \cos(360^\circ + 120^\circ) = ?[-\frac{1}{2}]$

ดังนั้น $\cos(360^\circ + 120^\circ) = \cos 120^\circ$

- ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $\tan 480^\circ = \tan(360^\circ + 120^\circ) = ?[-\sqrt{3}]$

ดังนั้น $\tan(360^\circ + 120^\circ) = \tan 120^\circ$

2.3 ครูแจกใบงาน 10.1 ให้นักเรียน และแบ่งนักเรียนออกเป็น 9 กลุ่ม โดยให้แต่ละกลุ่มช่วยกันสรุปลักษณะทั่วไปของค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่วัดเกิน 360°

ใบงาน 10.1

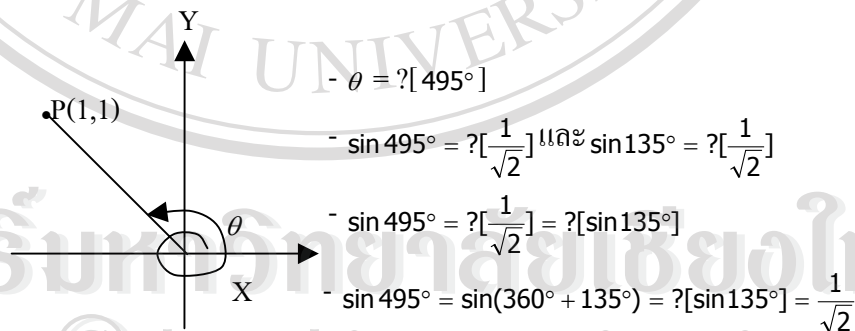
กลุ่มที่

สมาชิกกลุ่ม

- 1. 2.
- 3. 4.
- 5.

จงพิจารณาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากกราฟต่อไปนี้

1.



$\theta = ?[495^\circ]$

$\sin 495^\circ = ?[\frac{1}{\sqrt{2}}]$ และ $\sin 135^\circ = ?[\frac{1}{\sqrt{2}}]$

$\sin 495^\circ = ?[\frac{1}{\sqrt{2}}] = ?[\sin 135^\circ]$

$\sin 495^\circ = \sin(360^\circ + 135^\circ) = ?[\sin 135^\circ] = \frac{1}{\sqrt{2}}$

ดังนั้น $\sin(360^\circ + 135^\circ) = ?[\sin 135^\circ]$

- ในทำนองเดียวกัน $\cos 495^\circ = ?[-\frac{1}{\sqrt{2}}] = ?[\cos 135^\circ]$

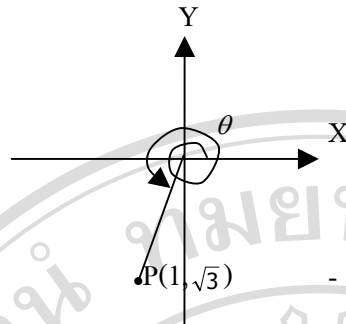
$\cos 495^\circ = \cos(360^\circ + 135^\circ) = ?[\cos 135^\circ] = ?[-\frac{1}{\sqrt{2}}]$

ดังนั้น $\cos(360^\circ + 135^\circ) = ?[\cos 135^\circ]$

- $\tan 495^\circ = ?[-1] = ?[\tan 135^\circ]$ และ $\tan 495^\circ = \tan(360^\circ + 135^\circ) = ?[\tan 135^\circ] = ?[-1]$ ดังนั้น

$\tan(360^\circ + 135^\circ) = ?[\tan 135^\circ]$

2.



$$- \theta = ? [600^\circ]$$

$$- \sin 600^\circ = ? \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \text{ และ } \sin 240^\circ = ? \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$- \sin 600^\circ = ? \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = ? [\sin 240^\circ]$$

$$- \sin 600^\circ = \sin(360^\circ + 240^\circ) = ? [\sin 240^\circ] = ? \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$\text{ดังนั้น } \sin(360^\circ + 240^\circ) = ? [\sin 240^\circ]$$

$$- \text{ในทำนองเดียวกัน } \cos 600^\circ = ? \left[-\frac{1}{2}\right] = ? [\cos 240^\circ]$$

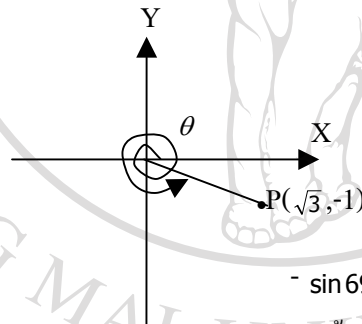
$$- \cos 600^\circ = \cos(360^\circ + 240^\circ) = ? [\cos 240^\circ] = ? \left[-\frac{1}{2}\right]$$

$$\text{ดังนั้น } \cos(360^\circ + 240^\circ) = ? [\cos 240^\circ]$$

$$- \tan 600^\circ = ? [\sqrt{3}] = ? [\tan 240^\circ] \text{ และ } \tan 600^\circ = \tan(360^\circ + 240^\circ) = ? [\tan 240^\circ] = ? [\sqrt{3}]$$

$$\text{ดังนั้น } \tan(360^\circ + 240^\circ) = ? [\tan 240^\circ]$$

3.



$$- \theta = ? [690^\circ]$$

$$- \sin 690^\circ = ? \left[-\frac{1}{2}\right] \text{ และ } \sin 330^\circ = ? \left[-\frac{1}{2}\right]$$

$$- \sin 690^\circ = ? \left[-\frac{1}{2}\right] = ? [\sin 330^\circ]$$

$$- \sin 690^\circ = \sin(360^\circ + 330^\circ) = ? [\sin 330^\circ] = ? \left[-\frac{1}{2}\right]$$

$$\text{ดังนั้น } \sin(360^\circ + 330^\circ) = ? [\sin 330^\circ]$$

$$- \text{ในทำนองเดียวกัน } \cos 690^\circ = ? \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = ? [\cos 330^\circ]$$

$$- \cos 690^\circ = \cos(360^\circ + 330^\circ) = ? [\cos 330^\circ] = ? \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$\text{ดังนั้น } \cos(360^\circ + 330^\circ) = ? [\cos 330^\circ]$$

$$- \tan 690^\circ = ? \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}\right] = ? [\tan 330^\circ] \text{ และ}$$

$$\tan 690^\circ = \tan(360^\circ + 330^\circ) = ? [\tan 330^\circ] = ? \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$$

$$\text{ดังนั้น } \tan(360^\circ + 330^\circ) = ? [\tan 330^\circ]$$

จากใบงานสรุปได้ว่า $\sin(n \cdot 360^\circ + \theta) = \sin \theta$, $\cos(n \cdot 360^\circ + \theta) = \cos \theta$

$\tan(n \cdot 360^\circ + \theta) = \tan \theta$ เมื่อ n เป็นจำนวนรอบของการวัดมุม

2.4 ครูแจกเอกสารฝึกหัด 10.1 ให้นักเรียนทำเป็นการบ้าน และนัดส่งในตอนเช้าของวันต่อไปก่อนทำกิจกรรมหน้าเสาธง

เอกสารฝึกหัด 10.1

จงหาค่าของฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจน ของมุมต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1. $420^\circ = 360^\circ + 60^\circ$

ดังนั้น $\sin 420^\circ = \sin(360^\circ + 60^\circ)$, $\cos 420^\circ = \cos(360^\circ + 60^\circ)$, $\tan 420^\circ = \tan(360^\circ + 60^\circ)$

จาก $\sin(n \cdot 360^\circ + \theta) = \sin \theta$, $\cos(n \cdot 360^\circ + \theta) = \cos \theta$ และ $\tan(n \cdot 360^\circ + \theta) = \tan \theta$

จะได้ว่า $\sin 420^\circ = \sin(360^\circ + 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 420^\circ = \cos(360^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$\tan 420^\circ = \tan(360^\circ + 60^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

$\therefore \sin 420^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 420^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ และ $\tan 420^\circ = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

ตัวอย่าง 2 $840^\circ = (2 \cdot 360^\circ + 120^\circ)$

ดังนั้น $\sin 840^\circ = \sin(2 \cdot 360^\circ + 120^\circ)$, $\cos 840^\circ = \cos(2 \cdot 360^\circ + 120^\circ)$,

$\tan 840^\circ = \tan(2 \cdot 360^\circ + 120^\circ)$

จาก $\sin(n \cdot 360^\circ + \theta) = \sin \theta$, $\cos(n \cdot 360^\circ + \theta) = \cos \theta$ และ $\tan(n \cdot 360^\circ + \theta) = \tan \theta$

จะได้ว่า $\sin 840^\circ = \sin(2 \cdot 360^\circ + 120^\circ) = \sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 840^\circ = \cos(2 \cdot 360^\circ + 120^\circ) = \cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

$\tan 840^\circ = \tan(2 \cdot 360^\circ + 120^\circ) = \tan 120^\circ = \tan(180^\circ - 60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$

$\therefore \sin 840^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 840^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$ และ $\tan 840^\circ = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$

1. 510° [เฉลย. $\sin 510^\circ = \sin(360^\circ + 150^\circ) = \sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$,

$\cos 510^\circ = \cos(360^\circ + 150^\circ) = \cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ และ

$\tan 510^\circ = \tan(360^\circ + 150^\circ) = \tan 150^\circ = \tan(180^\circ - 30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$]

2. 585° [เฉลย.

$\sin 585^\circ = \sin(360^\circ + 225^\circ) = \sin 225^\circ = \sin(180^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$\cos 585^\circ = \cos(360^\circ + 225^\circ) = \cos 225^\circ = \cos(180^\circ + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ และ

$\tan 585^\circ = \tan(360^\circ + 225^\circ) = \tan 225^\circ = \tan(180^\circ + 45^\circ) = \tan 45^\circ = 1$]

3. 1290° [เฉลย.

$$\sin 1290^\circ = \sin(3 \cdot 360^\circ + 210^\circ) = \sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2} ,$$

$$\cos 1290^\circ = \cos(3 \cdot 360^\circ + 210^\circ) = \cos 210^\circ = \cos(180^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{และ } \tan 1290^\circ = \tan(3 \cdot 360^\circ + 210^\circ) = \tan 210^\circ = \tan(180^\circ + 30^\circ) = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}]$$

4. -585° [เฉลย. จาก $\sin(-\theta) = -\sin \theta$, $\cos(-\theta) = \cos \theta$, $\tan(-\theta) = -\tan \theta$

$$\sin(-585^\circ) = -\sin 585^\circ = -\sin(360^\circ + 225^\circ) = -\sin 225^\circ = -\sin(180^\circ + 45^\circ) = -(-\sin 45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} ,$$

$$\cos(-585^\circ) = \cos 585^\circ = \cos(360^\circ + 225^\circ) = \cos 225^\circ = \cos(180^\circ + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ และ}$$

$$\tan(-585^\circ) = -\tan 585^\circ = -\tan(360^\circ + 225^\circ) = -\tan 225^\circ = -\tan(180^\circ + 45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1]$$

3. สื่อการเรียนการสอน

3.1 เอกสารประกอบการเรียนการสอน

3.2 แผ่นภาพ 1 – 2

3.3 ใบงาน 10.1

3.4 เอกสารฝึกหัด 10.1

4. การวัดและประเมินผล

4.1 การวัดผล

4.1.1 สังเกตจากการทำกิจกรรมในชั้นเรียน และการตอบคำถาม

4.1.2 จากการทำใบงาน 10.1

4.1.3 จากการทำเอกสารฝึกหัด 10.1

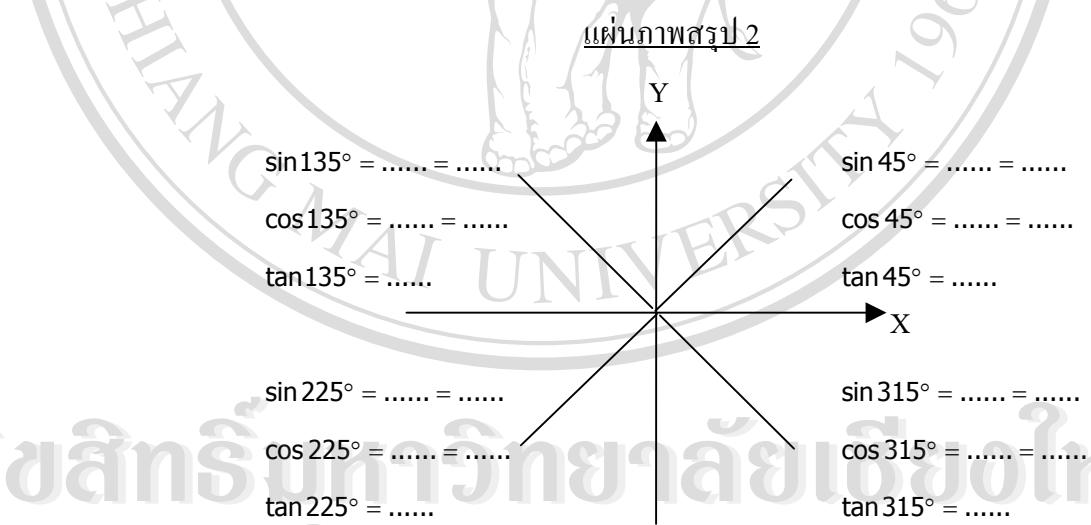
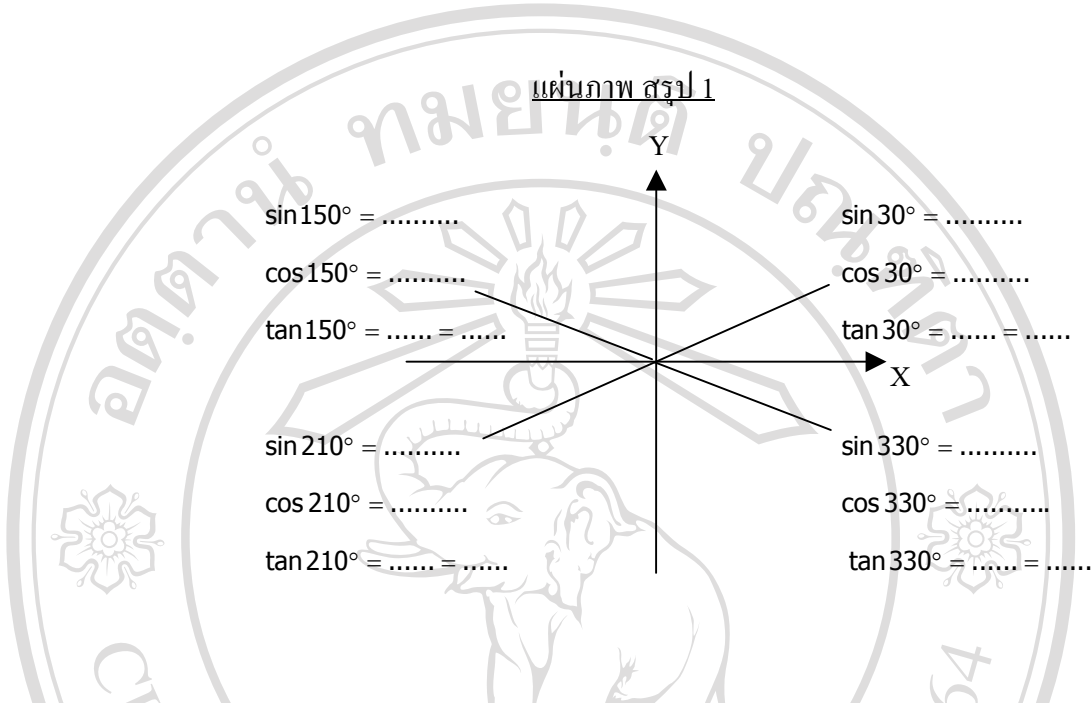
4.2 การประเมินผล

ลิขสิทธิ์ © โดย Chiang Mai University

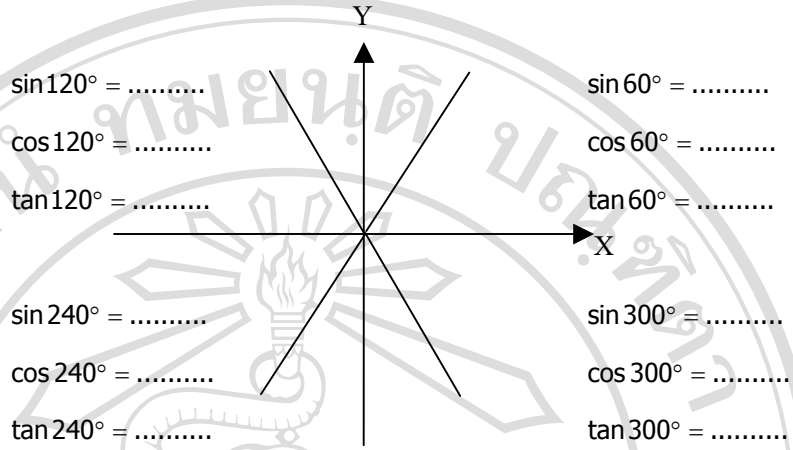
Copyright © by Chiang Mai University

All rights reserved

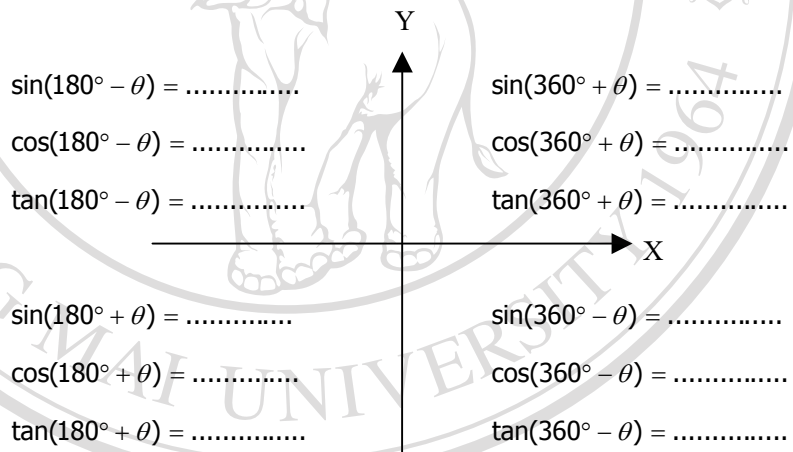
เอกสารประกอบการเรียนการสอน คาบที่ 10
หัวข้อ ค่าฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจน ของมุมใดๆ



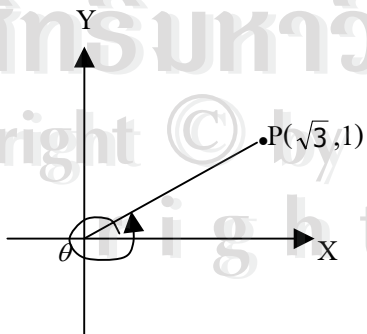
แผนภาพสรุป 3



แผนภาพสรุปสูตร



แผนภาพ 1



- ขนาดของมุม θ เท่ากับเท่าใด ? [390°]
 - มุมนี้เดิมมีขนาดเป็นเท่าใด ? [30°]
 - เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ของมุม 390° กับ 30° ได้อย่างไร ? [360° + 30° = 390°]
 - นักเรียนคิดว่า $\sin 390^\circ = \sin 30^\circ$ หรือไม่ ? [เท่า]
- จาก $\sin 390^\circ = ?[\frac{1}{2}]$ และ $\sin 30^\circ = ?[\frac{1}{2}]$
- จากความสัมพันธ์ของมุม 390° กับ 30° จะได้ว่า
- $\sin 390^\circ = \sin(360^\circ + 30^\circ) = ?[\frac{1}{2}]$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright © by Chiang Mai University
All rights reserved

$$\text{ดังนั้น } \sin(360^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ$$

- นักเรียนคิดว่า $\cos 390^\circ = \cos 30^\circ$ หรือไม่? [เท่า]

$$\text{จาก } \cos 390^\circ = ?\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \text{ และ } \cos 30^\circ = ?\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

จากความสัมพันธ์ของมุม 390° กับ 30° จะได้ว่า

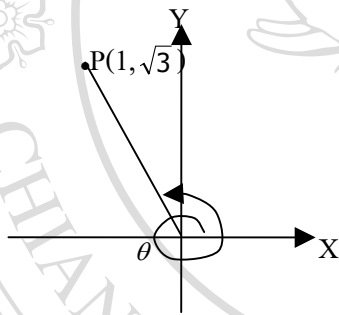
$$\cos 390^\circ = \cos(360^\circ + 30^\circ) = ?\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$\text{ดังนั้น } \cos(360^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ$$

- ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $\tan 390^\circ = \tan(360^\circ + 30^\circ) = ?\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

$$\text{ดังนั้น } \tan(360^\circ + 30^\circ) = \tan 30^\circ$$

แผ่นภาพ 2



- ขนาดของมุม θ เท่ากับเท่าใด? [480°]

- มุมนี้เดิมมีขนาดเป็นเท่าใด? [120°]

- เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ของมุม 480° กับ 120° ได้อย่างไร? [$360^\circ + 120^\circ = 480^\circ$]

- นักเรียนคิดว่า $\sin 480^\circ = \sin 120^\circ$ หรือไม่? [เท่า]

$$\text{จาก } \sin 480^\circ = ?\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \text{ และ } \sin 120^\circ = ?\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

จากความสัมพันธ์ของมุม 480° กับ 120° จะได้ว่า

$$\sin 480^\circ = \sin(360^\circ + 120^\circ) = ?\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$\text{ดังนั้น } \sin(360^\circ + 120^\circ) = \sin 120^\circ$$

- นักเรียนคิดว่า $\cos 480^\circ = \cos 120^\circ$ หรือไม่? [เท่า]

$$\text{จาก } \cos 480^\circ = ?\left[-\frac{1}{2}\right] \text{ และ } \cos 120^\circ = ?\left[-\frac{1}{2}\right]$$

จากความสัมพันธ์ของมุม 480° กับ 120° จะได้ว่า

$$\cos 480^\circ = \cos(360^\circ + 120^\circ) = ?\left[-\frac{1}{2}\right]$$

$$\text{ดังนั้น } \cos(360^\circ + 120^\circ) = \cos 120^\circ$$

- ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $\tan 480^\circ = \tan(360^\circ + 120^\circ) = ?\left[-\sqrt{3}\right]$

$$\text{ดังนั้น } \tan(360^\circ + 120^\circ) = \tan 120^\circ$$

ใบงาน10.1

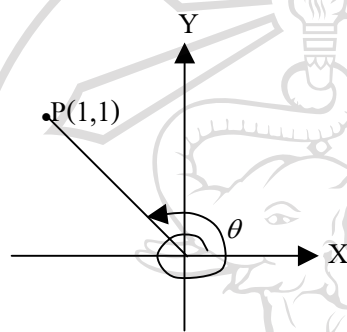
กลุ่มที่

สมาชิกกลุ่ม

1. 2. 3.
 4. 5.

จงพิจารณาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากกราฟต่อไปนี้

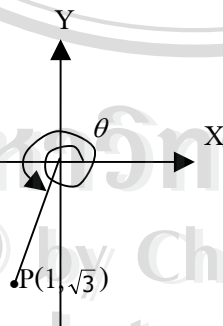
1.



- $\theta = \dots\dots\dots$
- $\sin 495^\circ = \dots\dots$ และ $\sin 135^\circ = \dots\dots$
- $\sin 495^\circ = \dots\dots = \dots\dots\dots$
- $\sin 495^\circ = \sin(360^\circ + 135^\circ) = \sin 135^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$
- ดังนั้น $\sin(360^\circ + 135^\circ) = \dots\dots\dots$

- ในทำนองเดียวกัน $\cos 495^\circ = \dots\dots = \dots\dots\dots$
- $\cos 495^\circ = \cos(360^\circ + 135^\circ) = \dots\dots\dots = \dots\dots$
- ดังนั้น $\cos(360^\circ + 135^\circ) = \dots\dots\dots$
- $\tan 495^\circ = \dots\dots = \dots\dots\dots$ และ $\tan 495^\circ = \tan(360^\circ + 135^\circ) = \dots\dots\dots = \dots\dots$
- ดังนั้น $\tan(360^\circ + 135^\circ) = \dots\dots\dots$

2.

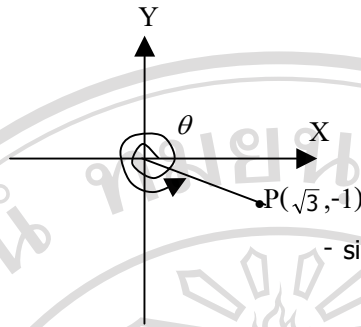


- $\theta = \dots\dots\dots$
- $\sin 600^\circ = \dots\dots$ และ $\sin 240^\circ = \dots\dots$
- $\sin 600^\circ = \dots\dots\dots = \dots\dots$
- $\sin 600^\circ = \sin(360^\circ + \dots\dots) = \dots\dots\dots = \dots\dots$
- ดังนั้น $\sin(\dots\dots + \dots\dots) = \dots\dots\dots$

- ในทำนองเดียวกัน $\cos 600^\circ = \dots\dots = \dots\dots\dots$
- $\cos 600^\circ = \dots\dots\dots(\dots\dots + \dots\dots) = \dots\dots\dots = \dots\dots$
- ดังนั้น $\cos(\dots\dots + \dots\dots) = \dots\dots\dots$
- $\tan 600^\circ = \dots\dots = \dots\dots\dots$ และ $\tan 600^\circ = \tan(\dots\dots + \dots\dots) = \dots\dots\dots = \dots\dots$
- ดังนั้น $\tan(\dots\dots + \dots\dots) = \dots\dots\dots$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
 Copyright © by Chiang Mai University
 All rights reserved

3.



- $\theta = \dots\dots\dots$

- $\sin 690^\circ = \dots\dots$ และ $\sin 330^\circ = \dots\dots$

- $\sin 690^\circ = \dots\dots = \dots\dots\dots$

- $\sin 690^\circ = \sin(\dots\dots + \dots\dots) = \dots\dots\dots = \dots\dots$

ดังนั้น $\sin(\dots\dots + \dots\dots) = \dots\dots\dots$

- ในทำนองเดียวกัน $\cos 690^\circ = \dots\dots = \dots\dots\dots$

- $\cos 690^\circ = \cos(\dots\dots + \dots\dots) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

ดังนั้น $\cos(\dots\dots + \dots\dots) = \dots\dots\dots$

- $\tan 690^\circ = \dots\dots = \dots\dots\dots$ และ $\tan 690^\circ = \tan(\dots\dots + \dots\dots) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

ดังนั้น $\tan(\dots\dots + \dots\dots) = \dots\dots\dots$

จากใบงานสรุปได้ว่า $\sin(n \cdot 360^\circ + \theta) = \dots\dots\dots$ $\cos(n \cdot 360^\circ + \theta) = \dots\dots\dots$
 $\tan(n \cdot 360^\circ + \theta) = \dots\dots\dots$ เมื่อ n เป็นจำนวนรอบของการวัดมุม

เอกสารฝึกหัด 10.1

ชื่อ ชั้น ม. 4 / 1 เลขที่

จงหาค่าของฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ ของมุมต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1. $420^\circ = 360^\circ + 60^\circ$ ดังนั้น $\sin 420^\circ = \sin(360^\circ + 60^\circ)$, $\cos 420^\circ = \cos(360^\circ + 60^\circ)$, $\tan 420^\circ = \tan(360^\circ + 60^\circ)$ จาก $\sin(n \cdot 360^\circ + \theta) = \sin \theta$, $\cos(n \cdot 360^\circ + \theta) = \cos \theta$ และ $\tan(n \cdot 360^\circ + \theta) = \tan \theta$ จะได้ว่า $\sin 420^\circ = \sin(360^\circ + 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 420^\circ = \cos(360^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ $\tan 420^\circ = \tan(360^\circ + 60^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$ $\therefore \sin 420^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 420^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ และ $\tan 420^\circ = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$ **ตัวอย่าง 2** $840^\circ = (2 \cdot 360^\circ + 120^\circ)$ ดังนั้น $\sin 840^\circ = \sin(2 \cdot 360^\circ + 120^\circ)$, $\cos 840^\circ = \cos(2 \cdot 360^\circ + 120^\circ)$, $\tan 840^\circ = \tan(2 \cdot 360^\circ + 120^\circ)$ จาก $\sin(n \cdot 360^\circ + \theta) = \sin \theta$, $\cos(n \cdot 360^\circ + \theta) = \cos \theta$ และ $\tan(n \cdot 360^\circ + \theta) = \tan \theta$ จะได้ว่า $\sin 840^\circ = \sin(2 \cdot 360^\circ + 120^\circ) = \sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 840^\circ = \cos(2 \cdot 360^\circ + 120^\circ) = \cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$ $\tan 840^\circ = \tan(2 \cdot 360^\circ + 120^\circ) = \tan 120^\circ = \tan(180^\circ - 60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$ $\therefore \sin 840^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 840^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$ และ $\tan 840^\circ = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$ 5. 510°

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright © by Chiang Mai University

All rights reserved

6. 585°

.....
.....

.....
.....

.....
.....

.....
.....

.....
.....

7. 1290°

.....
.....

.....
.....

.....
.....

.....
.....

8. -585°

.....
.....

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright © by Chiang Mai University

All rights reserved

.....
.....

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 11

เรื่อง การวัดมุมในระบบเรเดียน

จำนวน 1 คาบ

วิชาคณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค 012

ภาคเรียนที่ 2

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

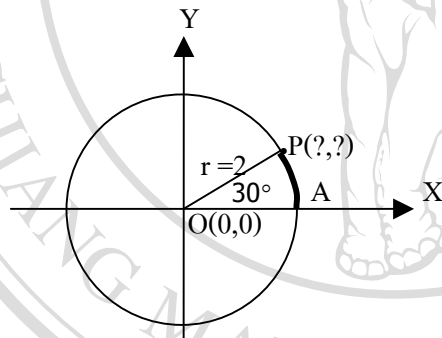
1. จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถ

- 1.1 บอกความหมายของเรเดียนได้
- 1.2 เปลี่ยนมุมจากองศาเป็นเรเดียน และเรเดียนเป็นองศาได้

2. เนื้อหาและกิจกรรมการเรียนการสอน

- 2.1 ครูทบทวนความรู้เกี่ยวกับมุมในตำแหน่งมาตรฐาน โดยครูคิดแผนภาพของมุมในตำแหน่งมาตรฐานบนกระดาน และสนทนาซักถามนักเรียน



- ถ้าให้ $\theta = 30^\circ$ พิกัดของจุด P คือ? $[(\sqrt{3}, 1)]$
- เขียนวงกลมจุดศูนย์กลางที่จุด $(0, 0)$ ผ่านจุด P จะได้รัศมีเท่ากับเท่าไร? [2 หน่วย]
- ส่วนโค้งของวงกลม ยาวเท่ากับเท่าไร? $[2\pi r]$
- ส่วนโค้ง PA ยาวเท่ากับเท่าไร? $[\frac{2\pi r}{12}]$

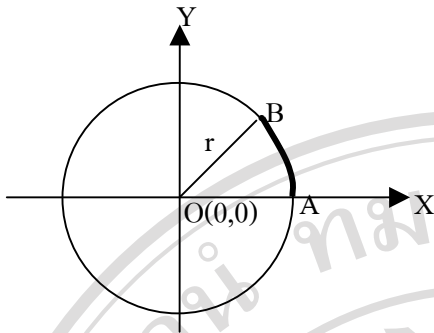
- ส่วนโค้ง PA หากด้วย r ได้เท่ากับ? $[\frac{2\pi r}{12r} = \frac{\pi}{6}]$
- ผลหารนี้คือ? [ขนาดของมุม $\frac{\pi}{6}$ เรเดียน เขียนแทนด้วย $(\frac{\pi}{6})^R$]

แล้วถ้า $\theta = 90^\circ = ? [(\frac{\pi}{2})^R]$, $\theta = 180^\circ = ? [(\pi)^R]$, $\theta = 360^\circ = ? [(2\pi)^R]$

- มุมขนาด 1 เรเดียน จะกว้างเท่าใด?

- 2.2 ครูแจกเอกสารประกอบการเรียนให้นักเรียน ซึ่งจะมีนิยามของเรเดียน (Radian) และข้อตกลงในการแปลงมุมจากองศาเป็นเรเดียน

ในการวัดขนาดของมุมนั้นปัจจุบันนิยมใช้กันอยู่ 2 ระบบคือ ระบบองศา (Degree) กับ เรเดียน (Radian) ความยาวของมุม 1 เรเดียน หมายถึง มุมรอบจุดศูนย์กลางของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งที่ยาวเท่ากับรัศมีของวงกลมนั้น ดังรูป



จากรูป ส่วนโค้ง AB ยาว r หน่วยเท่ากับรัศมีของวงกลม
 ดังนั้นมุม AOB จะกาง 1 เรเดียน และมุมรอบ
 จุดศูนย์กลาง 1 รอบจะกาง $\frac{2\pi r}{r}$ หรือ 2π เรเดียน

ดังนั้นสูตรในการแปลงมาวัดมุมทั้ง 2 ระบบนี้คือ

$$360 \text{ องศา} = 2\pi \text{ เรเดียน หรือ } (2\pi)^R$$

$$180 \text{ องศา} = \pi \text{ เรเดียน หรือ } (\pi)^R$$

$$1 \text{ องศา} = \frac{\pi}{180} \text{ เรเดียน หรือ } \left(\frac{\pi}{180}\right)^R$$

2.3 ค้นหาเสนอตัวอย่างการเปลี่ยนมุมจากองศาเป็นเรเดียนบนกระดานพร้อมกับสนทนา
 ชักถามนักเรียน

ตัวอย่าง 1. จงเปลี่ยนมุมต่อไปนี้ให้เป็นมุมในระบบเรเดียน

1. 120°

$$180 \text{ องศา} = \pi \text{ เรเดียน}$$

$$1 \text{ องศา} = \frac{\pi}{180} \text{ เรเดียน}$$

$$\begin{aligned} 120 \text{ องศา} &= \frac{120\pi}{180} \text{ เรเดียน} \\ &= \frac{2\pi}{3} \text{ เรเดียน} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } 120 \text{ องศา} = \frac{2\pi}{3} \text{ เรเดียน}$$

2. 225°

$$180^\circ = (\pi)^R$$

$$1^\circ = \left(\frac{\pi}{180}\right)^R$$

$$225^\circ = \left(\frac{225 \cdot \pi}{180}\right)^R$$

$$225^\circ = \left(\frac{5\pi}{4}\right)^R$$

3. 300°

$$300^\circ = \left(\frac{300\pi}{180}\right)^R$$

$$300^\circ = \left(\frac{5\pi}{3}\right)^R$$

4. 45°

$$45^\circ = \left(\frac{45\pi}{180}\right)^R$$

$$45^\circ = \left(\frac{\pi}{4}\right)^R$$

5. 60°

$$60^\circ = \left(\frac{60\pi}{180}\right)^R$$

$$60^\circ = \left(\frac{\pi}{3}\right)^R$$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
 Copyright © by Chiang Mai University
 All rights reserved

2.4 ครูแบ่งนักเรียนออกเป็น 9 กลุ่ม แล้วให้แต่ละกลุ่มทำกิจกรรม โดยเล่นเกมแข่งขันกันตอบปัญหา ให้แต่ละกลุ่มส่งตัวแทนกลุ่มออกมาทำกิจกรรมที่หน้ากระดาน โดยครูเป็นผู้ตั้งคำถามให้นักเรียน 5 ข้อใช้เวลา 5 นาที

กิจกรรม

จงเปลี่ยนมุมต่อไปนี้เป็นเรเดียน

$$1. 45^\circ = \left(\frac{45\pi}{180}\right)^R = \left(\frac{\pi}{4}\right)^R$$

$$2. 60^\circ = \left(\frac{60\pi}{180}\right)^R = \left(\frac{\pi}{3}\right)^R$$

$$3. 135^\circ = \left(\frac{135\pi}{180}\right)^R = \left(\frac{3\pi}{4}\right)^R$$

$$4. 130^\circ = \left(\frac{130\pi}{180}\right)^R = \left(\frac{5\pi}{6}\right)^R$$

$$5. 210^\circ = \left(\frac{210\pi}{180}\right)^R = \left(\frac{7\pi}{6}\right)^R$$

2.5 ครูนำเสนอตัวอย่าง การเปลี่ยนมุมจากเรเดียนเป็นองศา

ตัวอย่าง 2.

จงเปลี่ยนมุมต่อไปนี้จากเรเดียนเป็นองศา

$$1. \frac{\pi}{3} \text{ เรเดียน}$$

$$\pi \text{ เรเดียน} = 180 \text{ องศา}$$

$$1 \text{ เรเดียน} = \frac{180}{\pi} \text{ องศา}$$

$$\frac{\pi}{3} \text{ เรเดียน} = \frac{\pi}{3} \times \frac{180}{\pi} \text{ องศา} \\ = 60 \text{ องศา}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{\pi}{3} \text{ เรเดียน} = 60 \text{ องศา}$$

$$4. \left(\frac{5\pi}{4}\right)^R$$

$$(\pi)^R = 180^\circ$$

$$(1)^R = \frac{180}{\pi}$$

$$\left(\frac{5 \cdot \pi}{4}\right)^R = \frac{5\pi \times 180}{4 \times \pi} \text{ องศา} = 225^\circ$$

$$\left(\frac{5\pi}{4}\right)^R = 225^\circ$$

$$5. \left(\frac{5\pi}{3}\right)^R$$

$$\left(\frac{5\pi \times 180}{3 \times \pi}\right)^R = 300^\circ$$

$$\left(\frac{5\pi}{3}\right)^R = 300^\circ$$

$$4. \left(\frac{\pi}{4}\right)^R$$

$$\left(\frac{\pi}{4} \times \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 45^\circ$$

$$\left(\frac{\pi}{4}\right)^R = 45^\circ$$

$$5. \left(\frac{\pi}{3}\right)^R$$

$$\left(\frac{\pi \times 180}{3 \times \pi}\right)^\circ = 60^\circ$$

$$\left(\frac{\pi}{3}\right)^R = 60^\circ$$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright © by Chiang Mai University

All rights reserved

2.6 ครูแจกแบบฝึกทักษะ 11.1 ให้นักเรียนทุกคนทำ โดยกำหนดเวลาในการทำ 10 นาที

เอกสารฝึกทักษะ 11.1

จงเปลี่ยนมุมต่อไปนี้จากองศาเป็นเรเดียน และจากเรเดียนเป็นองศา

1. $210^\circ = ? \left(\frac{210\pi}{180} \right)^R = ? \left(\frac{7\pi}{6} \right)^R$
2. $480^\circ = ? \left(\frac{480\pi}{180} \right)^R = ? \left(\frac{8\pi}{3} \right)^R$
3. $600^\circ = ? \left(\frac{600\pi}{180} \right)^R = ? \left(\frac{10\pi}{3} \right)^R$
4. $315^\circ = ? \left(\frac{315\pi}{180} \right)^R = ? \left(\frac{7\pi}{4} \right)^R$
5. $495^\circ = ? \left(\frac{495\pi}{180} \right)^R = ? \left(\frac{11\pi}{4} \right)^R$
6. $\left(\frac{9\pi}{4} \right)^R = ? \left(\frac{9\pi \times 180}{4 \times \pi} \right) = ? [405^\circ]$
7. $\left(\frac{11\pi}{3} \right)^R = ? \left(\frac{11\pi \times 180}{3 \times \pi} \right) = ? [660^\circ]$
8. $\left(\frac{13\pi}{6} \right)^R = ? \left(\frac{13\pi \times 180}{6 \times \pi} \right) = ? [390^\circ]$
9. $\left(\frac{9\pi}{2} \right)^R = ? \left(\frac{9\pi \times 180}{2 \times \pi} \right) = ? [810^\circ]$
10. $\left(\frac{19\pi}{6} \right)^R = ? \left(\frac{19\pi \times 180}{6 \times \pi} \right) = ? [570^\circ]$

2.7 ครูให้นักเรียนร่วมกันสรุปนิยามของเรเดียนอีกครั้งหนึ่ง แล้วแจกเอกสารฝึกทักษะ 11.1 ให้นักเรียนทำเป็นการบ้าน แล้วส่งในตอนเช้าของวันต่อไปก่อนทำกิจกรรมหน้าเสาธง

ความยาวของมุม 1 เรเดียน หมายถึง มุมรอบจุดศูนย์กลางของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งที่ยาวเท่ากับรัศมีของวงกลมนั้น

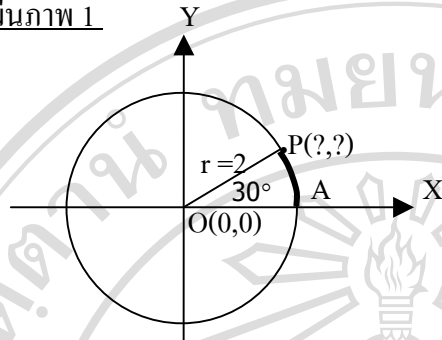
เอกสารฝึกหัด 11.1

จงเปลี่ยนมุมต่อไปนี้จากองศาเป็นเรเดียน และจากเรเดียนเป็นองศา

1. $330^\circ = ? \left(\frac{330\pi}{180} \right)^R = ? \left(\frac{11\pi}{6} \right)^R$
2. $1200^\circ = ? \left(\frac{1200\pi}{180} \right)^R = ? \left(\frac{20\pi}{3} \right)^R$
3. $1380^\circ = ? \left(\frac{1380\pi}{180} \right)^R = ? \left(\frac{23\pi}{3} \right)^R$
4. $675^\circ = ? \left(\frac{675\pi}{180} \right)^R = ? \left(\frac{15\pi}{4} \right)^R$
5. $765^\circ = ? \left(\frac{765\pi}{180} \right)^R = ? \left(\frac{17\pi}{4} \right)^R$
6. $\left(\frac{15\pi}{4} \right)^R = ? \left(\frac{15\pi \times 180}{4 \times \pi} \right) = ? [675^\circ]$
7. $\left(\frac{16\pi}{3} \right)^R = ? \left(\frac{16\pi \times 180}{3 \times \pi} \right) = ? [960^\circ]$
8. $\left(\frac{19\pi}{6} \right)^R = ? \left(\frac{19\pi \times 180}{6 \times \pi} \right) = ? [570^\circ]$
9. $\left(\frac{19\pi}{2} \right)^R = ? \left(\frac{19\pi \times 180}{2 \times \pi} \right) = ? [1710^\circ]$
10. $\left(\frac{23\pi}{6} \right)^R = ? \left(\frac{23\pi \times 180}{6 \times \pi} \right) = ? [690^\circ]$

เอกสารประกอบการเรียนการสอน คาบที่ 11

แผ่นภาพ 1



- ถ้าให้ $\theta = 30^\circ$ พิกัดของจุด P คือ?
- เขียนวงกลมจุดศูนย์กลางที่จุด $(0,0)$ ผ่านจุด P จะได้รัศมีเท่ากับเท่าไร? หน่วย
- ส่วนโค้งของวงกลม ยาวเท่ากับเท่าไร?
- ส่วนโค้ง PA ยาวเท่ากับเท่าไร?

- ส่วนโค้ง PA หาด้วย r ได้เท่ากับ? [..... =]]

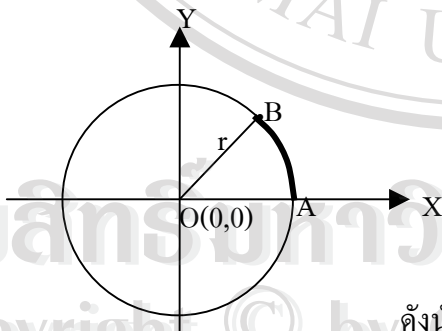
- ผลหารนี้คือ? [ขนาดของมุม $\frac{\pi}{6}$ เรเดียน เขียนแทนด้วย $\left(\frac{\pi}{6}\right)^R$]

แล้วถ้า $\theta = 90^\circ = ? [\dots]$, $\theta = 180^\circ = ? [\dots]$, $\theta = 360^\circ = ? [\dots]$

- มุมขนาด 1 เรเดียน จะกว้างเท่าใด? $\left[\left(\frac{180}{\pi}\right) \right]$

นิยามของเรเดียน (Radian) และข้อตกลงในการแปลงมุมจากองศาเป็นเรเดียน

ในการวัดขนาดของมุมนั้นปัจจุบันนิยมใช้กันอยู่ 2 ระบบคือ ระบบองศา (Degree) กับ เรเดียน (Radian) ความยาวของมุม 1 เรเดียน หมายถึง มุมรอบจุดศูนย์กลางของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งที่ยาวเท่ากับรัศมีของวงกลมนั้น ดังรูป



จากรูป ส่วนโค้ง AB ยาว r หน่วยเท่ากับรัศมีของวงกลม ดังนั้นมุม AOB จะกาง 1 เรเดียน และมุมรอบจุดศูนย์กลาง 1 รอบจะกาง $\frac{2\pi r}{r}$ หรือ 2π เรเดียน

ดังนั้นสูตรในการแปลงมาตรวัดมุมทั้ง 2 ระบบนี้คือ

$360 \text{ องศา} = 2\pi \text{ เรเดียน หรือ } (2\pi)^R$

$180 \text{ องศา} = \pi \text{ เรเดียน หรือ } (\pi)^R$

$1 \text{ องศา} = \frac{\pi}{180} \text{ เรเดียน หรือ } \left(\frac{\pi}{180}\right)^R$

ตัวอย่าง 1. จงเปลี่ยนมุมต่อไปนี้ให้เป็นมุมในระบบเรเดียน

6. 120°

$$180 \text{ องศา} = \pi \text{ เรเดียน}$$

$$2 \text{ องศา} = \frac{\pi}{180} \text{ เรเดียน}$$

$$120 \text{ องศา} = \frac{120\pi}{180} \text{ เรเดียน}$$

$$= \frac{2\pi}{3} \text{ เรเดียน}$$

$$\text{ดังนั้น } 120 \text{ องศา} = \frac{2\pi}{3} \text{ เรเดียน}$$

4. 45°

$$45^\circ = \left(\frac{45\pi}{180}\right)^R$$

$$45^\circ = \left(\frac{\pi}{4}\right)^R$$

5. 60°

$$60^\circ = \left(\frac{60\pi}{180}\right)^R$$

$$60^\circ = \left(\frac{\pi}{3}\right)^R$$

7. 225°

$$180^\circ = (\pi)^R$$

$$1^\circ = \left(\frac{\pi}{180}\right)^R$$

$$225^\circ = \left(\frac{225 \cdot \pi}{180}\right)^R$$

$$225^\circ = \left(\frac{5\pi}{4}\right)^R$$

8. 300°

$$300^\circ = \left(\frac{300\pi}{180}\right)^R$$

$$300^\circ = \left(\frac{5\pi}{3}\right)^R$$

กิจกรรม

จงเปลี่ยนมุมต่อไปนี้เป็นเรเดียน

1. $45^\circ = (\dots)^R = (\dots)^R$

2. $60^\circ = (\dots)^R = (\dots)^R$

3. $135^\circ = (\dots)^R = (\dots)^R$

4. $130^\circ = (\dots)^R = (\dots)^R$

5. $210^\circ = (\dots)^R = (\dots)^R$

ตัวอย่าง 2. จงเปลี่ยนมุมต่อไปนี้จากรadians เป็นองศา

1. $\frac{\pi}{3}$ radians

$$\pi \text{ radians} = 180 \text{ องศา}$$

$$1 \text{ radians} = \frac{180}{\pi} \text{ องศา}$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{3} \text{ radians} &= \frac{\pi}{3} \times \frac{180}{\pi} \text{ องศา} \\ &= 60 \text{ องศา} \end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{\pi}{3}$ radians = 60 องศา

9. $\left(\frac{5\pi}{4}\right)^R$

$$(\pi)^R = 180^\circ$$

$$(1)^R = \frac{180}{\pi}$$

$$\left(\frac{5 \cdot \pi}{4}\right)^R = \frac{5\pi \times 180}{4 \times \pi} \text{ องศา} = 225^\circ$$

$$\left(\frac{5\pi}{4}\right)^R = 225^\circ$$

10. $\left(\frac{5\pi}{3}\right)^R$

$$\left(\frac{5\pi \times 180}{3 \times \pi}\right)^R = 300^\circ$$

$$\left(\frac{5\pi}{3}\right)^R = 300^\circ$$

4. $\left(\frac{\pi}{4}\right)^R$

$$\left(\frac{\pi}{4} \times \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 45^\circ$$

$$\left(\frac{\pi}{4}\right)^R = 45^\circ$$

5. $\left(\frac{\pi}{3}\right)^R$

$$\left(\frac{\pi \times 180}{3 \times \pi}\right)^\circ = 60^\circ$$

$$\left(\frac{\pi}{3}\right)^R = 60^\circ$$

สรุปนิยามของเรเดียน

ความยาวของมุม 1 เรเดียน หมายถึง มุมรอบจุดศูนย์กลางของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้ง
ที่ยาวเท่ากับรัศมีของวงกลมนั้น

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright © by Chiang Mai University

All rights reserved

เอกสารฝึกทักษะ 11.1

ชื่อ.....
ชั้น ม. 4 / 1 เลขที่

จงเปลี่ยนมุมต่อไปนี้จากองศาเป็นเรเดียน และจากเรเดียนเป็นองศา

- | | |
|---------------------------------|--|
| 6. $210^\circ = \dots = \dots$ | 6. $\left(\frac{9\pi}{4}\right)^R = \dots = \dots$ |
| 7. $480^\circ = \dots = \dots$ | 7. $\left(\frac{11\pi}{3}\right)^R = \dots = \dots$ |
| 8. $600^\circ = \dots = \dots$ | 8. $\left(\frac{13\pi}{6}\right)^R = \dots = \dots$ |
| 9. $315^\circ = \dots = \dots$ | 9. $\left(\frac{9\pi}{2}\right)^R = \dots = \dots$ |
| 10. $495^\circ = \dots = \dots$ | 10. $\left(\frac{19\pi}{6}\right)^R = \dots = \dots$ |

เอกสารฝึกหัด 11.1

จงเปลี่ยนมุมต่อไปนี้จากองศาเป็นเรเดียน และจากเรเดียนเป็นองศา

- | | |
|---------------------------------|--|
| 6. $330^\circ = \dots = \dots$ | 6. $\left(\frac{15\pi}{4}\right)^R = \dots = \dots$ |
| 7. $1200^\circ = \dots = \dots$ | 7. $\left(\frac{16\pi}{3}\right)^R = \dots = \dots$ |
| 8. $1380^\circ = \dots = \dots$ | 8. $\left(\frac{19\pi}{6}\right)^R = \dots = \dots$ |
| 9. $675^\circ = \dots = \dots$ | 9. $\left(\frac{19\pi}{2}\right)^R = \dots = \dots$ |
| 10. $765^\circ = \dots = \dots$ | 10. $\left(\frac{23\pi}{6}\right)^R = \dots = \dots$ |

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright © by Chiang Mai University
All rights reserved

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 12

เรื่อง ค่าฟังก์ชันของมุมในระบบเรเดียน

จำนวน 1 คาบ

วิชาคณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค 012

ภาคเรียนที่ 2

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถหาค่าฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ แลแทนเจน ของมุมในระบบเรเดียนได้

2. เนื้อหาและกิจกรรมการเรียนการสอน

2.1 ครูทบทวนความรู้เกี่ยวกับสูตรการหาค่าฟังก์ชันของมุมในควอร์ตรันต่างๆ โดยให้นักเรียนทำเอกสารฝึกทักษะ 12.1 เพื่อตรวจสอบว่านักเรียนจำสูตรได้หรือไม่ โดยให้เวลาในการทำ 5 นาที

เอกสารฝึกทักษะ 12.1

จงเขียนสรุปสูตรการหาค่าฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และ แทนเจน ของมุมในควอร์ตรันต่างๆ

แผนภาพสรุปสูตร

$$\sin(180^\circ - \theta) = ?[\sin \theta]$$

$$\cos(180^\circ - \theta) = ?[-\cos \theta]$$

$$\tan(180^\circ - \theta) = ?[-\tan \theta]$$

$$\sin(180^\circ + \theta) = ?[-\sin \theta]$$

$$\cos(180^\circ + \theta) = ?[-\cos \theta]$$

$$\tan(180^\circ + \theta) = ?[\tan \theta]$$

$$\sin(n \cdot 360^\circ + \theta) = ?[\sin \theta]$$

$$\cos(n \cdot 360^\circ + \theta) = ?[\cos \theta]$$

$$\tan(n \cdot 360^\circ + \theta) = ?[\tan \theta]$$

$$\sin(n \cdot 360^\circ - \theta) = ?[-\sin \theta]$$

$$\cos(n \cdot 360^\circ - \theta) = ?[\cos \theta]$$

$$\tan(n \cdot 360^\circ - \theta) = ?[-\tan \theta]$$

2.2 ครูเขียนโจทย์บนกระดาน 3 ข้อ แล้วเรียกนักเรียน 3 คนออกมาแปลงมุมระบบเรเดียน

เป็นระบบองศา เพื่อเป็นการทบทวนความรู้เดิม

โจทย์ จงแปลงมุมในระบบเรเดียน เป็นระบบองศา

1. $(\frac{5\pi}{4})^R = ?\left(\frac{5 \times 180}{4}\right)^\circ = ?[225^\circ]$

2. $(\frac{17\pi}{6})^R = ?\left(\frac{17 \times 180}{6}\right)^\circ = ?[510^\circ]$

3. $(\frac{16\pi}{3})^R = ?\left(\frac{16 \times 180}{3}\right)^\circ = ?[960^\circ]$

2.3 ครูอธิบายตัวอย่างให้นักเรียนบนกระดาน

ตัวอย่าง 1. จงหาค่าฟังก์ชันต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
 1. \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)^R &= \sin\left(\frac{5 \times 180}{4}\right)^\circ & 2. \cos\left(\frac{17\pi}{6}\right)^R &= \sin\left(\frac{17 \times 180}{6}\right)^\circ \\
 &= \sin 225^\circ & &= \cos 510^\circ \\
 &= \sin(180^\circ + 45^\circ) & &= \cos(360^\circ + 150^\circ) \\
 &= -\sin 45^\circ & &= \cos 150^\circ \\
 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} & &= \cos(180^\circ - 30^\circ) \\
 \therefore \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)^R &= -\frac{\sqrt{2}}{2} & \therefore \cos\left(\frac{17\pi}{6}\right)^R &= -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \tan\left(\frac{16\pi}{3}\right)^R &= \tan\left(\frac{16 \times 180}{3}\right)^\circ & 4. \tan\left(\frac{23\pi}{6}\right)^R &= \tan\left(\frac{23 \times 180}{6}\right)^\circ \\
 &= \tan 960^\circ & &= \tan 690^\circ \\
 &= \tan(2 \cdot 360^\circ + 240^\circ) & &= \tan(2 \cdot 360^\circ - 30^\circ) \\
 &= \tan 240^\circ & &= \tan 240^\circ \\
 &= \tan(180^\circ + 60^\circ) & & \\
 \therefore \tan\left(\frac{16\pi}{3}\right)^R &= \tan 60^\circ = \sqrt{3} & &
 \end{aligned}$$

2.4 ครูแจกใบงานให้นักเรียน และ ให้นักเรียนฝึกทักษะและนำความรู้ที่ได้ไปใช้ในการทำใบงานที่ 12.1 เสร็จแล้วครูใช้การถาม - ตอบ ตรวจสอบคำตอบของนักเรียน

ใบงาน 12.1

จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
 1. \sin\left(\frac{15\pi}{4}\right)^R &= ? \sin\left(\frac{15 \times 180}{4}\right)^\circ & 2. \cos\left(\frac{13\pi}{6}\right)^R &= ? \left[\cos\left(\frac{13 \times 180}{6}\right)^\circ \right] \\
 &= ?[\sin 675^\circ] & &= ?[\cos 390^\circ] \\
 &= ?[\sin(2 \cdot 360^\circ - 45^\circ)] & &= ?[\cos(360^\circ + 30^\circ)] \\
 &= ?[-\sin 45^\circ] & &= ?[\cos 30^\circ] \\
 &= ?\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\right] & &= ?\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \\
 \therefore \sin\left(\frac{15\pi}{4}\right)^R &= ?\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\right] & \therefore \cos\left(\frac{13\pi}{6}\right)^R &= ?[\cos 30^\circ] = ?\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \tan\left(\frac{26\pi}{3}\right)^R &= ? \tan\left(\frac{26 \times 180}{3}\right)^\circ \\
 &= ?[\tan 1560^\circ] \\
 &= ?[\tan(4 \cdot 360^\circ + 120^\circ)] \\
 &= ?[\tan 120^\circ] \\
 &= ?[\tan(180^\circ - 60^\circ)] \\
 &= ?[-\tan 60^\circ] \\
 \therefore \tan\left(\frac{16\pi}{3}\right)^R &= ?[-\tan 60^\circ] = ?[-\sqrt{3}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \tan\left(-\frac{17\pi}{6}\right)^R &= ? \left[-\tan\left(\frac{17\pi}{6}\right)^R \right] = ? \left[-\tan\left(\frac{17 \times 180}{6}\right)^\circ \right] \\
 &= ?[-\tan 510^\circ] \\
 &= ?[-\tan(360^\circ + 150^\circ)] \\
 &= ?[-\tan 150^\circ] \\
 &= ?[-\tan(180^\circ - 30^\circ)] \\
 &= ?[-(-\tan 30^\circ)] \\
 \therefore \tan\left(-\frac{17\pi}{6}\right)^R &= ?[-(-\tan 30^\circ)] = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}
 \end{aligned}$$

2.5 ให้นักเรียนพิจารณาสูตรการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้ พร้อมทั้งให้นักเรียนสรุปสูตรตอนท้ายคาบเรียนในแผ่นภาพสรุปสูตรในระบบเรเดียน

$$-\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta \quad \text{จะได้ว่า จาก } 180^\circ = \pi^R$$

$$\text{ดังนั้น } \sin(180^\circ - \theta) = \sin(\pi^R - \theta) = \sin \theta$$

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta \quad \text{ดังนั้น } \cos(180^\circ - \theta) = \cos(\pi^R - \theta) = -\cos \theta$$

$$\text{และ } \tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta \quad \text{ดังนั้น } \tan(180^\circ - \theta) = \tan(\pi^R - \theta) = -\tan \theta$$

$$-\sin(180^\circ + \theta) = -\sin \theta$$

$$\text{ดังนั้น } \sin(180^\circ + \theta) = \sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(180^\circ + \theta) = -\cos \theta \quad \text{ดังนั้น } \cos(180^\circ + \theta) = \cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$$

$$\text{และ } \tan(180^\circ + \theta) = \tan \theta \quad \text{ดังนั้น } \tan(180^\circ + \theta) = \tan(\pi + \theta) = \tan \theta$$

$$-\sin(360^\circ - \theta) = -\sin \theta$$

$$\text{ดังนั้น } \sin(360^\circ - \theta) = \sin(2\pi^R - \theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(360^\circ - \theta) = \cos \theta \quad \text{ดังนั้น } \cos(360^\circ - \theta) = \cos(2\pi^R - \theta) = \cos \theta$$

$$\text{และ } \tan(360^\circ - \theta) = -\tan \theta$$

$$\text{ดังนั้น } \tan(360^\circ - \theta) = \tan(2\pi - \theta) = -\tan \theta$$

$$-\sin(360^\circ + \theta) = \sin \theta$$

$$\text{ดังนั้น } \sin(360^\circ + \theta) = \sin(2\pi + \theta) = \sin \theta$$

$$\cos(360^\circ + \theta) = \cos \theta$$

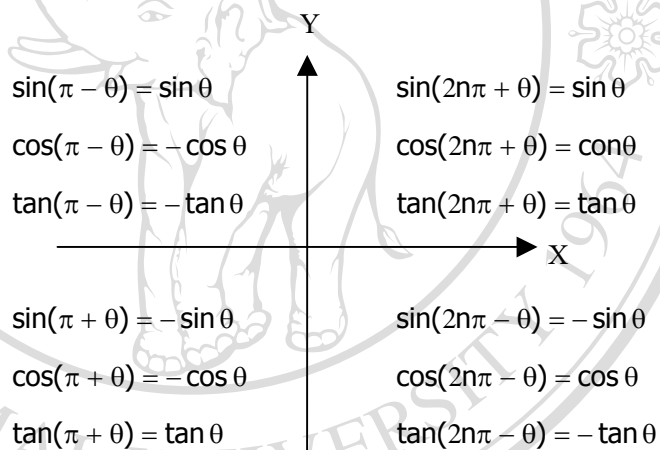
$$\text{ดังนั้น } \cos(360^\circ + \theta) = \cos(2\pi + \theta) = \cos \theta$$

$$\text{และ } \tan(360^\circ + \theta) = \tan \theta$$

$$\text{ดังนั้น } \tan(360^\circ + \theta) = \tan(2\pi + \theta) = \tan \theta$$

ดังนั้นสามารถสรุปสูตรได้ดังนี้

แผนภาพสรุปสูตร



2.5 ครูแจกเอกสารฝึกหัด 12.1 ให้นักเรียนฝึกนำความรู้ไปใช้แก้ปัญหาโจทย์ โดยให้ทำเป็นการบ้าน และนัดส่งตอนเช้าของวันพรุ่งนี้ก่อนทำกิจกรรมหน้าเสาธง

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright © by Chiang Mai University

All rights reserved

เอกสารฝึกหัด 12.1

จงหาค่าฟังก์ชันต่อไปนี้

$$1. \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)^R = \sin\left(\frac{7 \times 180}{4}\right)^\circ = \sin 315^\circ = \sin(360^\circ - 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2. \cos\left(\frac{7\pi}{3}\right)^R = \cos\left(\frac{7 \times 180}{3}\right)^\circ = \cos 420^\circ = \cos(360^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ$$

$$3. \sin\left(-\frac{7\pi}{2}\right)^R = \sin\left(-\frac{7 \times 180}{2}\right)^\circ = \sin(-630^\circ) = -\sin 630^\circ = -\sin(2 \cdot 360^\circ - 90^\circ) \\ = -(-\sin 90^\circ) = \sin 90^\circ = 1$$

$$4. \tan\left(-\frac{11\pi}{6}\right)^R = \tan\left(-\frac{11 \times 180}{6}\right)^\circ = \tan(-330^\circ) = -\tan 330^\circ = -\tan(360^\circ - 30^\circ) \\ = -(-\tan 30^\circ) = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$5. \cos\left(\frac{29\pi}{6}\right)^R = \cos\left(\frac{29 \times 180}{6}\right)^\circ = \cos 870^\circ = \cos(2 \cdot 360^\circ + 150^\circ) = \cos 150^\circ \\ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$6. \sin\left(-\frac{25\pi}{3}\right)^R = \sin\left(-\frac{25 \times 180}{3}\right)^\circ = \sin(-1500^\circ) = -\sin 1500^\circ = -\sin(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) \\ = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
 Copyright © by Chiang Mai University
 All rights reserved

3. สื่อการเรียนการสอน

- 3.1 เอกสารประกอบการเรียนการสอน
- 3.2 เอกสารฝึกทักษะ 12.1
- 3.3 ใบงาน 12.1
- 3.4 เอกสารฝึกหัด 12.1

4. การวัดและประเมินผล

4.1 การวัดผล

- 4.1.1 จากการสังเกตการทำกิจกรรมในชั้นเรียน และ การตอบคำถาม
- 4.1.2 การทำเอกสารฝึกทักษะ 12.1
- 4.1.3 การทำใบงาน 12.1
- 4.1.4 กำทำเอกสารฝึกหัด 12.1
- 4.1.5 การสรุปสูตรในเอกสารประกอบการเรียนการสอน

4.2 การประเมินผล

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright © by Chiang Mai University
All rights reserved

เอกสารประกอบการเรียนการสอน คาบที่ 12

เอกสารฝึกทักษะ 12.1

จงเขียนสูตรการหาค่าฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และ แทนเจนต์ ของมุมในควอดรันต์ต่างๆ
(ให้เวลาในการทำ 5 นาที)

แผนภาพรูปสูตร

$\sin(180^\circ - \theta) = \dots\dots\dots$ $\cos(180^\circ - \theta) = \dots\dots\dots$ $\tan(180^\circ - \theta) = \dots\dots\dots$	$\sin(n \cdot 360^\circ + \theta) = \dots\dots\dots$ $\cos(n \cdot 360^\circ + \theta) = \dots\dots\dots$ $\tan(n \cdot 360^\circ + \theta) = \dots\dots\dots$
$\sin(180^\circ + \theta) = \dots\dots\dots$ $\cos(180^\circ + \theta) = \dots\dots\dots$ $\tan(180^\circ + \theta) = \dots\dots\dots$	$\sin(n \cdot 360^\circ - \theta) = \dots\dots\dots$ $\cos(n \cdot 360^\circ - \theta) = \dots\dots\dots$ $\tan(n \cdot 360^\circ - \theta) = \dots\dots\dots$

โจทย์ จงแปลงมุมในระบบเรเดียนเป็นระบบองศา

- | | |
|--|---|
| 1. $(\frac{5\pi}{4})^R = (\dots\dots\dots)^\circ = \dots\dots\dots$ | 2. $(\frac{17\pi}{6})^R = (\dots\dots\dots)^\circ = \dots\dots\dots$ |
| 3. $(\frac{16\pi}{3})^R = (\dots\dots\dots)^\circ = \dots\dots\dots$ | 4. $(\frac{13\pi}{2})^R = (\dots\dots\dots)^\circ = \dots\dots\dots$ |
| 5. $(-\frac{7\pi}{3})^R = (\dots\dots\dots)^\circ = \dots\dots\dots$ | 6. $(-\frac{19\pi}{6})^R = (\dots\dots\dots)^\circ = \dots\dots\dots$ |

ตัวอย่าง จงหาค่าฟังก์ชันต่อไปนี้

$1. \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)^R = \sin\left(\frac{5 \times 180}{4}\right)^\circ$ $= \sin 225^\circ$ $= \sin(180^\circ + 45^\circ)$ $= -\sin 45^\circ$ $= -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\therefore \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)^R = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$2. \cos\left(\frac{17\pi}{6}\right)^R = \cos\left(\frac{17 \times 180}{6}\right)^\circ$ $= \cos 510^\circ$ $= \cos(360^\circ + 150^\circ)$ $= \cos 150^\circ$ $= \cos(180^\circ - 30^\circ)$ $\therefore \cos\left(\frac{17\pi}{6}\right)^R = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
--	--

$$3. \tan\left(\frac{16\pi}{3}\right)^R = \tan\left(\frac{16 \times 180}{3}\right)^\circ$$

$$= \tan 960^\circ$$

$$= \tan(2 \cdot 360^\circ + 240^\circ)$$

$$= \tan 240^\circ$$

$$= \tan(180^\circ + 60^\circ)$$

$$\therefore \tan\left(\frac{16\pi}{3}\right)^R = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$4. \tan\left(-\frac{23\pi}{6}\right)^R = \tan\left(-\frac{23 \times 180}{6}\right)^\circ$$

$$\tan(-690^\circ) = -\tan 690^\circ$$

$$= -\tan(2 \cdot 360^\circ - 30^\circ)$$

$$= -(-\tan 30^\circ)$$

$$= \tan 30^\circ$$

$$\therefore \tan\left(-\frac{23\pi}{6}\right)^R = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ใบงาน 12.1

ชื่อ

ชั้น ม. 4/1 เลขที่

จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$1. \sin\left(\frac{15\pi}{4}\right)^R = \sin(\dots\dots\dots)$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$\therefore \sin\left(\frac{15\pi}{4}\right)^R = \dots\dots\dots$$

$$2. \cos\left(\frac{13\pi}{6}\right)^R = \sin(\dots\dots\dots)$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$\therefore \cos\left(\frac{13\pi}{6}\right)^R = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$3. \tan\left(\frac{26\pi}{3}\right)^R = ? \tan(\dots\dots\dots)$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$\therefore \tan\left(\frac{16\pi}{3}\right)^R = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright © by Chiang Mai University

All rights reserved

4. $\tan(-\frac{17\pi}{6})^R = \tan(\dots\dots\dots)^R = \tan(\dots\dots\dots)$

=

=

=

=

$\tan(-\frac{17\pi}{6})^R = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

ให้นักเรียนพิจารณาสถูการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้ พร้อมทั้งให้นักเรียนสรุป
สูตรตอนท้ายคาบเรียนในแผนภาพสรุปสูตรในระบบเรเดียน

- $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$ จะได้ว่า จาก $180^\circ = \pi^R$

ดังนั้น $\sin(180^\circ - \theta) = \sin(\pi^R - \theta) = \sin \theta$

$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$ ดังนั้น $\cos(180^\circ - \theta) = \cos(\pi^R - \theta) = -\cos \theta$

และ $\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta$ ดังนั้น $\tan(180^\circ - \theta) = \tan(\pi^R - \theta) = -\tan \theta$

- $\sin(180^\circ + \theta) = \dots\dots\dots$

ดังนั้น $\sin(180^\circ + \theta) = \sin(\dots + \dots) = \dots\dots\dots$

$\cos(180^\circ + \theta) = \dots\dots\dots$ ดังนั้น $\cos(180^\circ + \theta) = \cos(\dots + \dots) = \dots\dots\dots$

และ $\tan(180^\circ + \theta) = \dots\dots\dots$ ดังนั้น $\tan(180^\circ + \theta) = \tan(\dots + \dots) = \dots\dots\dots$

- $\sin(360^\circ - \theta) = \dots\dots\dots$

ดังนั้น $\sin(360^\circ - \theta) = \sin(2\pi^R - \theta) = \dots\dots\dots$

$\cos(360^\circ - \theta) = \dots\dots\dots$ ดังนั้น $\cos(360^\circ - \theta) = \cos(\dots - \theta) = \dots\dots\dots$

และ $\tan(360^\circ - \theta) = \dots\dots\dots$

ดังนั้น $\tan(360^\circ - \theta) = \tan(\dots - \dots) = \dots\dots\dots$

- $\sin(360^\circ + \theta) = \dots\dots\dots$

ดังนั้น $\sin(360^\circ + \theta) = \sin(\dots + \dots) = \dots\dots\dots$

$\cos(360^\circ + \theta) = \dots\dots\dots$

ดังนั้น $\cos(360^\circ + \theta) = \cos(\dots + \dots) = \dots\dots\dots$

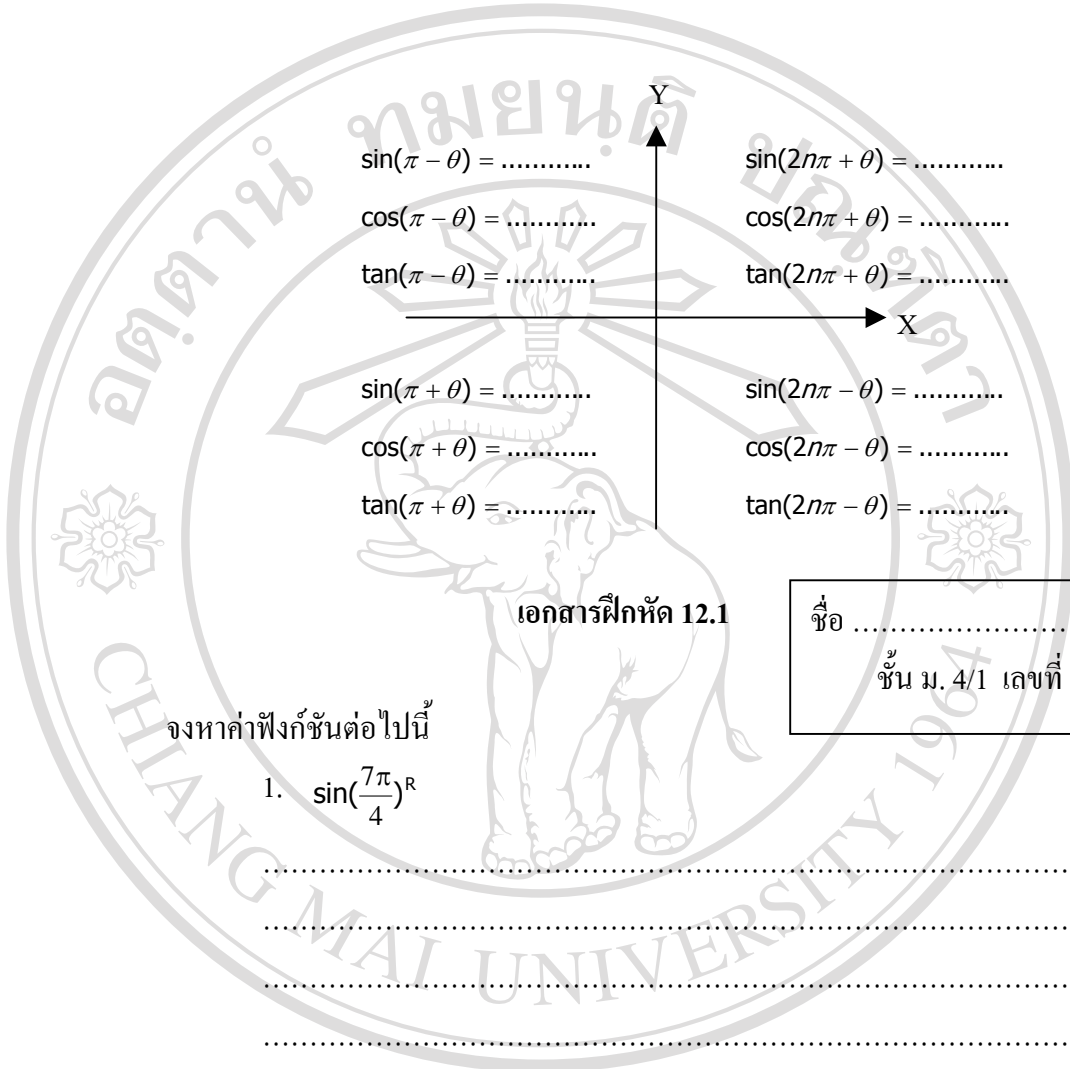
และ $\tan(360^\circ + \theta) = \dots\dots\dots$

ดังนั้น $\tan(360^\circ + \theta) = \tan(\dots + \dots) = \dots\dots\dots$

ลิขสิทธิ์ © วิทยาลัยเทคโนโลยี
Copyright © Chiang Mai University
All rights reserved

ดังนั้นพอจะสรุปสูตรได้ ดังนี้

แผนภาพสรุปสูตร



เอกสารฝึกหัด 12.1

ชื่อ ชั้น ม. 4/1 เลขที่
--

จงหาค่าฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $\sin(\frac{7\pi}{4})^R$

.....

2. $\cos(\frac{7\pi}{3})^R$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
 Copyright © by Chiang Mai University
 All rights reserved

.....

$$3. \sin\left(-\frac{7\pi}{2}\right)^R$$

.....

.....

.....

$$4. \tan\left(-\frac{11\pi}{6}\right)^R$$

.....

.....

.....

$$5. \cos\left(\frac{29\pi}{6}\right)^R$$

.....

.....

.....

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

$$6. \sin\left(-\frac{25\pi}{3}\right)^R$$

Copyright © by Chiang Mai University

All rights reserved

.....

.....

.....

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 13

เรื่อง ค่าฟังก์ชันของมุมในระบบเรเดียน

จำนวน 1 คาบ

วิชาคณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค 012

ภาคเรียนที่ 2

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถนำความรู้เกี่ยวกับค่าของฟังก์ชันของมุมในระบบองศา และมุมในระบบเรเดียนมาช่วยในการแก้ปัญหาได้

2. เนื้อหาและกิจกรรมการเรียนการสอน

2.1 ครูทบทวนความรู้เกี่ยวกับการหาค่าฟังก์ชันของมุมในระบบองศา และ ระบบเรเดียนโดยการตั้งโจทย์และเรียกนักเรียนออกมาแสดงวิธีทำบนกระดาน

โจทย์ 1. จงหาค่าของ $\sin 120^\circ$

$$\text{วิธีทำ } \sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2. จงหาค่าของ $\cos(-\frac{11\pi^R}{4})$

$$\text{วิธีทำ } \cos(-\frac{11\pi^R}{4}) = \cos \frac{11\pi^R}{4} = \cos(3\pi^R - \frac{\pi^R}{4}) = -\cos \frac{\pi^R}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

3. จงหาค่าของ $\tan(-315^\circ)$

$$\text{วิธีทำ } \tan(-315^\circ) = -\tan(315^\circ) = -\tan(360^\circ - 45^\circ) = -\tan 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2.2 ครูแสดงตัวอย่างบนกระดาน แล้วสนทนาซักถาม

ตัวอย่าง จงหาผลลัพธ์ต่อไปนี้

$$1. \sin 120^\circ \cdot \cos \frac{3\pi^R}{4} - \sin \frac{5\pi^R}{6} \cdot \cos 150^\circ$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \sin 120^\circ \cdot \cos \frac{3\pi^R}{4} - \sin \frac{5\pi^R}{6} \cdot \cos 150^\circ &= \sin(180^\circ - 60^\circ) \cos(\pi^R - \frac{\pi^R}{4}) - \sin(\pi^R - \frac{\pi^R}{6}) \cdot \cos(180^\circ - 30^\circ) \\ &= \sin 60^\circ \cdot (-\cos \frac{\pi^R}{4}) - \sin \frac{\pi^R}{6} \cdot (-\cos 30^\circ) \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (-\frac{\sqrt{2}}{2}) - [\frac{1}{2} \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2})]$$

$$= -\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{6}}{4}$$

$$\therefore \sin 120^\circ \cos \frac{3\pi^R}{4} - \sin \frac{5\pi^R}{6} \cos 150^\circ = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{6}}{4}$$

$$2. \quad \cos\left(-\frac{7\pi^R}{6}\right)\sin\frac{3\pi^R}{4} + \sin\left(-\frac{5\pi^R}{4}\right)\cos(-330^\circ)$$

วิธีทำ $\cos\left(-\frac{7\pi^R}{6}\right)\sin\frac{3\pi^R}{4} + \sin\left(-\frac{5\pi^R}{4}\right)\cos(-330^\circ) = \cos\frac{7\pi^R}{6}\sin\frac{3\pi^R}{4} + (-\sin\frac{5\pi^R}{4})\cos 330^\circ$

$$= \cos\left(\pi^R + \frac{\pi^R}{6}\right)\sin\left(\pi^R - \frac{\pi^R}{4}\right) + (-\sin\left(\pi^R + \frac{\pi^R}{4}\right))\cos(360^\circ - 30^\circ)$$

$$= \left(-\cos\frac{\pi^R}{6}\right)\sin\frac{\pi^R}{4} + \left(-(-\sin\frac{\pi^R}{4})\right)\cos 30^\circ$$

$$= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= -\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = 0$$

$$\therefore \cos\left(-\frac{7\pi^R}{6}\right)\sin\frac{3\pi^R}{4} + \sin\left(-\frac{5\pi^R}{4}\right)\cos(-330^\circ) = 0$$

$$3. \quad \tan 315^\circ \cos\left(-\frac{5\pi^R}{3}\right) + \sin 330^\circ \tan(-225^\circ)$$

วิธีทำ

$$\tan 315^\circ \cos\left(-\frac{5\pi^R}{3}\right) + \sin 330^\circ \tan(-225^\circ) = \tan(360^\circ - 45^\circ) \cos\left(2\pi^R - \frac{\pi^R}{3}\right) + \sin(360^\circ - 30^\circ)(-\tan(180^\circ + 45^\circ))$$

$$= -\tan 45^\circ \cos\frac{\pi^R}{3} + (-\sin 30^\circ)(-\tan 45^\circ)$$

$$= (-1)\cdot\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)(-1)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = 0$$

$$\therefore \tan 315^\circ \cos\left(-\frac{5\pi^R}{3}\right) + \sin 330^\circ \tan(-225^\circ) = 0$$

2.3 ครูแจกใบงาน 13.1 ให้นักเรียนแสดงวิธีทำตามตัวอย่าง โดยครูเดินตรวจ และให้คำปรึกษาเป็นรายบุคคล

ใบงาน 13.1

จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$1. \quad \cos(-390^\circ)\sin\frac{5\pi^R}{3} + \tan\left(-\frac{4\pi^R}{3}\right)\tan\left(\frac{7\pi^R}{6}\right)$$

เฉลย.

$$\cos(-390^\circ)\sin\frac{5\pi^R}{3} + \tan\left(-\frac{4\pi^R}{3}\right)\tan\left(\frac{7\pi^R}{6}\right) = \cos 390^\circ \sin\left(2\pi^R - \frac{\pi^R}{3}\right) + \left(-\tan\frac{4\pi^R}{3}\right)\tan\frac{7\pi^R}{6}$$

$$= \cos(360^\circ - 30^\circ)(-\sin\frac{\pi^R}{3}) + (-\tan(\pi^R + \frac{\pi^R}{3}))\tan\left(\pi + \frac{\pi^R}{6}\right)$$

$$= \cos 30^\circ(-\sin\frac{\pi^R}{3}) + \left(-\tan + \frac{\pi^R}{3}\right)\tan\frac{\pi^R}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (-\sqrt{3})\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= \left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{3}{3}\right) = \left(-\frac{3}{4}\right) + (-1) = -\frac{7}{4}$$

$$\therefore \cos(-390^\circ)\sin\frac{5\pi^R}{3} + \tan\left(-\frac{4\pi^R}{3}\right)\tan\left(\frac{7\pi^R}{6}\right) = -\frac{7}{4}$$

$$2. \sin\left(-\frac{11\pi^R}{4}\right)\cos\frac{15\pi^R}{4} + \tan\left(-\frac{21\pi^R}{4}\right)\tan\frac{23\pi^R}{4}$$

เฉลย.

$$\begin{aligned} \sin\left(-\frac{11\pi^R}{4}\right)\cos\frac{15\pi^R}{4} + \tan\left(-\frac{21\pi^R}{4}\right)\tan\frac{23\pi^R}{4} &= \left(-\sin\frac{11\pi^R}{4}\right)\cos\frac{15\pi^R}{4} + \left(-\tan\frac{21\pi^R}{4}\right)\tan\frac{23\pi^R}{4} \\ &= \left(-\sin\left(2\pi^R + \frac{3\pi^R}{4}\right)\right)\cos\left(4\pi^R - \frac{\pi^R}{4}\right) + \left(-\tan\left(4\pi + \frac{5\pi^R}{4}\right)\right)\tan\left(6\pi^R - \frac{\pi^R}{4}\right) \\ &= \left(-\sin\frac{3\pi^R}{4}\right)\cos\frac{\pi^R}{4} + \left(-\tan\frac{5\pi^R}{4}\right)\left(-\tan\frac{\pi^R}{4}\right) \\ &= \left(-\sin\left(\pi^R - \frac{\pi^R}{4}\right)\cos\frac{\pi^R}{4} + \left(-\tan\left(\pi^R + \frac{\pi^R}{4}\right)\right)\left(-\tan\frac{\pi^R}{4}\right)\right) \\ &= \left(-\sin\frac{\pi^R}{4}\cos\frac{\pi^R}{4} + \left(-\tan\frac{\pi^R}{4}\right)\left(-\tan\frac{\pi^R}{4}\right)\right) \\ &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} + (-1)(-1) \\ &= \left(-\frac{2}{4}\right) + 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \sin\left(-\frac{11\pi^R}{4}\right)\cos\frac{15\pi^R}{4} + \tan\left(-\frac{21\pi^R}{4}\right)\tan\frac{23\pi^R}{4} = \frac{1}{2}$$

$$3. \sin(-420^\circ)\cos\frac{5\pi^R}{3} + \cos\left(-\frac{5\pi^R}{3}\right)\sin\left(-\frac{7\pi^R}{6}\right)$$

เฉลย.

$$\begin{aligned} \sin(-420^\circ)\cos\frac{5\pi^R}{3} + \cos\left(-\frac{5\pi^R}{3}\right)\sin\left(-\frac{7\pi^R}{6}\right) &= \left(-\sin 420^\circ\right)\cos\left(2\pi - \frac{\pi^R}{3}\right) + \cos\frac{5\pi^R}{3}\left(-\sin\frac{7\pi^R}{6}\right) \\ &= \left(-\sin(360^\circ + 60^\circ)\right)\cos\left(2\pi^R - \frac{\pi^R}{3}\right) + \cos\left(2\pi^R - \frac{\pi^R}{3}\right)\left(-\sin\left(\pi^R + \frac{\pi^R}{6}\right)\right) \\ &= \left(-\sin 60^\circ\right)\cos\frac{\pi^R}{3} + \cos\frac{\pi^R}{3}\left(-\sin\frac{\pi^R}{6}\right) \\ &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{-1-\sqrt{3}}{4} \\ \sin(-420^\circ)\cos\frac{5\pi^R}{3} + \cos\left(-\frac{5\pi^R}{3}\right)\sin\left(-\frac{7\pi^R}{6}\right) &= \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$4. \sin\frac{11\pi^R}{4}\cos 510^\circ + \tan 315^\circ\cos\frac{13\pi^R}{3}$$

เฉลย. $\sin\frac{11\pi^R}{4}\cos 510^\circ - \tan 315^\circ\cos\frac{13\pi^R}{3}$

$$\begin{aligned} &= \sin\left(2\pi + \frac{3\pi^R}{4}\right)\cos(360^\circ + 150^\circ) - \tan(360^\circ - 45^\circ)\cos\left(4\pi^R + \frac{\pi^R}{3}\right) \\ &= \sin\frac{3\pi^R}{4}\cos 150^\circ - \left(-\tan 45^\circ\right)\cos\frac{\pi^R}{3} \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - (-1)\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{1}{2} = \frac{2-\sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

$$\therefore \sin\frac{11\pi^R}{4}\cos 510^\circ - \tan 315^\circ\cos\frac{13\pi^R}{3} = -\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{1}{2} = \frac{2-\sqrt{6}}{4}$$

2.4 ครูแจกเอกสารฝึกหัด 13.1 ให้นักเรียนทำเป็นการบ้าน และส่งในตอนเช้าก่อนทำกิจกรรม
หน้าเสาธง

เอกสารฝึกหัด 13.1

จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$1. \sin\left(-\frac{11\pi^R}{4}\right)\cos 510^\circ - \tan 315^\circ \cos\left(-\frac{13\pi^R}{3}\right)$$

$$\text{เฉลย. } \sin\left(-\frac{11\pi^R}{4}\right)\cos 510^\circ - \tan 315^\circ \cos\left(-\frac{13\pi^R}{3}\right) = \left(-\sin\frac{11\pi^R}{4}\right)\cos 510^\circ - \tan 315^\circ \cos\frac{13\pi^R}{3}$$

$$= \left(-\sin\frac{11\pi^R}{4}\right)\cos 510^\circ - \tan 315^\circ \cos\frac{13\pi^R}{3}$$

$$= \left(-\sin\left(2\pi + \frac{3\pi^R}{4}\right)\cos(360^\circ + 150^\circ) - \tan(360^\circ - 45^\circ)\cos\left(4\pi^R + \frac{\pi^R}{3}\right)\right)$$

$$= \left(-\sin\frac{3\pi^R}{4}\cos 150^\circ - (-\tan 45^\circ)\cos\frac{\pi^R}{3}\right)$$

$$= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - (-1)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + 2}{4}$$

$$\sin\left(-\frac{11\pi}{4}\right)\cos 510^\circ - \tan 315^\circ \cos\left(-\frac{13\pi^R}{3}\right) = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + 2}{4}$$

$$2. \cos(-150^\circ)\sin\left(-\frac{4\pi^R}{3}\right) + \sin\frac{13\pi^R}{6}\tan\left(-\frac{25\pi^R}{4}\right)$$

เฉลย.

$$\cos(-150^\circ)\sin\left(-\frac{4\pi^R}{3}\right) + \sin\frac{13\pi^R}{6}\tan\left(-\frac{25\pi^R}{4}\right) = \cos 150^\circ\left(-\sin\left(\pi^R + \frac{\pi^R}{3}\right)\right) + \sin\left(2\pi^R + \frac{\pi^R}{6}\right) - \left(\tan\left(6\pi^R + \frac{\pi^R}{4}\right)\right)$$

$$= \cos(180^\circ - 30^\circ)\left(-\sin\frac{\pi^R}{3}\right) + \sin\frac{\pi^R}{6}\left(-\tan\frac{\pi^R}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}(-1) = \frac{-3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{-3-2}{4} = -\frac{5}{4}$$

$$3. \tan\left(-\frac{7\pi^R}{6}\right)\cos 210^\circ - \sin\frac{31\pi^R}{6}\tan 765^\circ$$

เฉลย.

$$\tan\left(-\frac{7\pi^R}{6}\right)\cos 210^\circ - \sin\frac{31\pi^R}{6}\tan 765^\circ = \left(-\tan\left(\pi^R + \frac{\pi^R}{6}\right)\cos(180^\circ + 30^\circ) - \sin\left(5\pi^R + \frac{\pi^R}{6}\right)\tan(720^\circ + 45^\circ)\right)$$

$$= \left(-\tan\frac{\pi^R}{6}\right)\left(-\cos 30^\circ\right) - \left(-\sin\frac{\pi^R}{6}\right)\tan 45^\circ = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)(1) = \frac{3}{6} + \frac{1}{2} = \frac{3+3}{6} = 1$$

เอกสารประกอบการเรียนการสอน คาบที่ 13

โจทย์ 1. จงหาค่าของ $\sin 120^\circ$

วิธีทำ $\sin 120^\circ = \sin(\dots\dots\dots) = \sin \dots = \dots$

2. จงหาค่าของ $\cos(-\frac{11\pi^R}{4})$

วิธีทำ $\cos(-\frac{11\pi^R}{4}) = \cos \dots = \cos(\dots - \dots) = \dots = \dots$

3. จงหาค่าของ $\tan(-315^\circ)$

วิธีทำ $\tan(-315^\circ) = \dots = \dots = \dots$

ตัวอย่าง จงหาผลลัพท์ต่อไปนี้

1. $\sin 120^\circ \cdot \cos \frac{3\pi^R}{4} - \sin \frac{5\pi^R}{6} \cdot \cos 150^\circ$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \sin 120^\circ \cdot \cos \frac{3\pi^R}{4} - \sin \frac{5\pi^R}{6} \cdot \cos 150^\circ &= \sin(180^\circ - 60^\circ) \cos(\pi^R - \frac{\pi^R}{4}) - \sin(\pi^R - \frac{\pi^R}{6}) \cdot \cos(180^\circ - 30^\circ) \\ &= \sin 60^\circ \cdot (-\cos \frac{\pi^R}{4}) - \sin \frac{\pi^R}{6} \cdot (-\cos 30^\circ) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (-\frac{\sqrt{2}}{2}) - [\frac{1}{2} \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2})] \\ &= -\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

$$\therefore \sin 120^\circ \cos \frac{3\pi^R}{4} - \sin \frac{5\pi^R}{6} \cos 150^\circ = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{6}}{4}$$

2. $\cos(-\frac{7\pi^R}{6}) \sin \frac{3\pi^R}{4} + \sin(-\frac{5\pi^R}{4}) \cos(-330^\circ)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \cos(-\frac{7\pi^R}{6}) \sin \frac{3\pi^R}{4} + \sin(-\frac{5\pi^R}{4}) \cos(-330^\circ) &= \cos \frac{7\pi^R}{6} \sin \frac{3\pi^R}{4} + (-\sin \frac{5\pi^R}{4}) \cos 330^\circ \\ &= \cos(\pi^R + \frac{\pi^R}{6}) \sin(\pi^R - \frac{\pi^R}{4}) + (-\sin(\pi^R + \frac{\pi^R}{4})) \cos(360^\circ - 30^\circ) \\ &= (-\cos \frac{\pi^R}{6}) \sin \frac{\pi^R}{4} + (-(-\sin \frac{\pi^R}{4})) \cos 30^\circ \\ &= (-\frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= -\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \cos(-\frac{7\pi^R}{6}) \sin \frac{3\pi^R}{4} + \sin(-\frac{5\pi^R}{4}) \cos(-330^\circ) = 0$$

$$3. \quad \tan 315^\circ \cos\left(-\frac{5\pi^R}{3}\right) + \sin 330^\circ \tan(-225^\circ)$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \tan 315^\circ \cos\left(-\frac{5\pi^R}{3}\right) + \sin 330^\circ \tan(-225^\circ) &= \tan(360^\circ - 45^\circ) \cos\left(2\pi^R - \frac{\pi^R}{3}\right) + \sin(360^\circ - 30^\circ)(-\tan(180^\circ + 45^\circ)) \\ &= -\tan 45^\circ \cos\frac{\pi^R}{3} + (-\sin 30^\circ)(-\tan 45^\circ) \\ &= (-1) \cdot \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)(-1) \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = 0 \\ \therefore \tan 315^\circ \cos\left(-\frac{5\pi^R}{3}\right) + \sin 330^\circ \tan(-225^\circ) &= 0 \end{aligned}$$

ใบงาน 13.1

จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$1. \quad \cos(-390^\circ) \sin \frac{5\pi^R}{3} + \tan\left(-\frac{4\pi^R}{3}\right) \tan\left(\frac{7\pi^R}{6}\right)$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$2. \quad \sin\left(-\frac{11\pi^R}{4}\right) \cos \frac{15\pi^R}{4} + \tan\left(-\frac{21\pi^R}{4}\right) \tan \frac{23\pi^R}{4}$$

.....

.....

.....

.....

.....

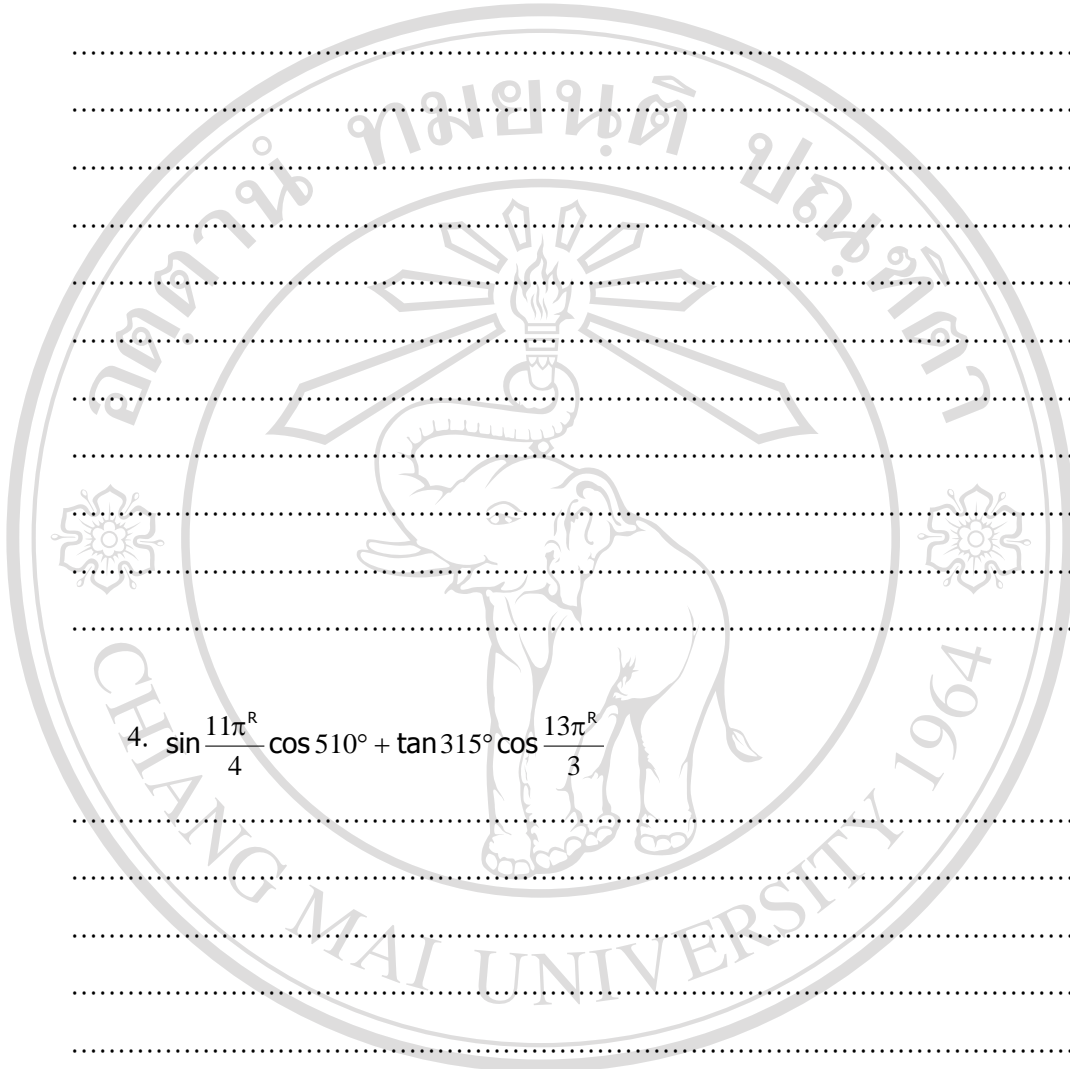
.....

.....

.....

ชื่อ.....
ชั้น ม. /... เลขที่

$$3. \sin(-420^\circ) \cos \frac{5\pi^R}{3} + \cos\left(-\frac{5\pi^R}{3}\right) \sin\left(-\frac{7\pi^R}{6}\right)$$



$$4. \sin \frac{11\pi^R}{4} \cos 510^\circ + \tan 315^\circ \cos \frac{13\pi^R}{3}$$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
 Copyright © by Chiang Mai University
 All rights reserved

เอกสารฝึกหัด 13.1

จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $\sin\left(-\frac{11\pi^R}{4}\right)\cos 510^\circ - \tan 315^\circ \cos\left(-\frac{13\pi^R}{3}\right)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. $\cos(-150^\circ)\sin\left(-\frac{4\pi^R}{3}\right) + \sin\frac{13\pi^R}{6}\tan\left(-\frac{25\pi^R}{4}\right)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. $\tan\left(-\frac{7\pi^R}{6}\right)\cos 210^\circ - \sin\frac{31\pi^R}{6}\tan 765^\circ$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ชื่อ.....

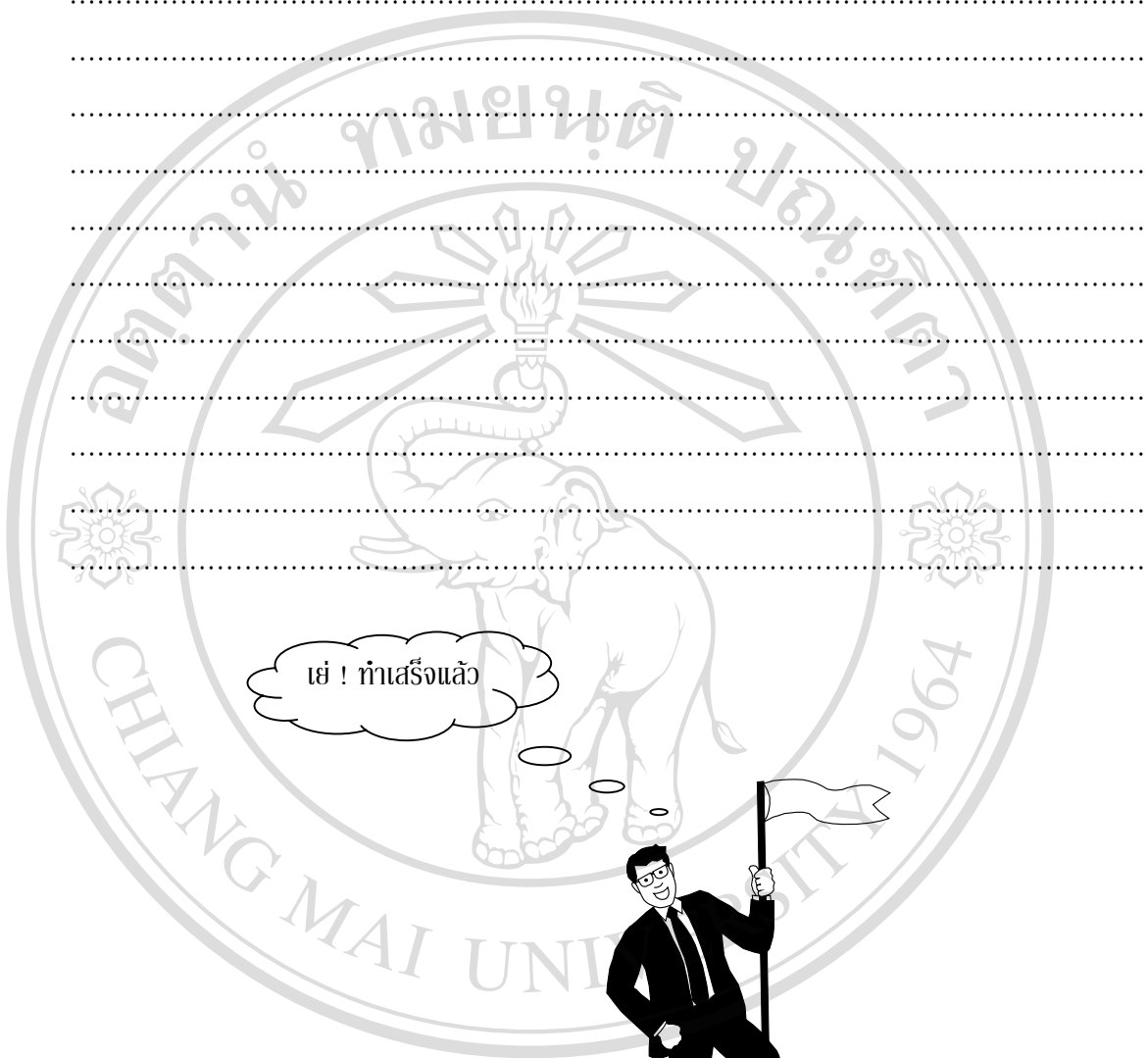
ชั้น ม. ... /... เลขที่

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright © by Chiang Mai University

All rights reserved

$$4. \quad \cos(-810^\circ) \sin\left(-\frac{3\pi^R}{4}\right) + \sin\left(-\frac{5\pi^R}{4}\right) \cos(-315^\circ)$$



ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
 Copyright © by Chiang Mai University
 All rights reserved

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 14

เรื่อง ค่าฟังก์ชันของมุมในระบบเรเดียน

จำนวน 1 คาบ

วิชาคณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค 012

ภาคเรียนที่ 2

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถ

- 1.1 บอกความสัมพันธ์ของมุมในระบบองศา ระบบเรเดียน และความยาวส่วนโค้งได้
- 1.2 บอกค่าฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนของจำนวนจริงได้

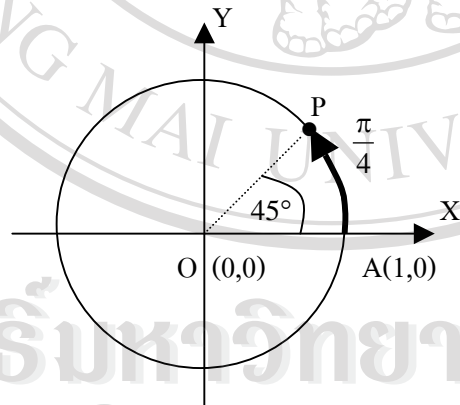
2. เนื้อหาและกิจกรรมการเรียนรู้

2.1 ครูทบทวนความรู้เกี่ยวกับค่าฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนของมุมในระบบองศา และเรเดียน โดยการถาม – ตอบ เป็นรายบุคคล เช่น

$$\sin(-60^\circ) = ? \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\right], \cos \frac{3\pi}{4} = ? \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\right], \tan 315^\circ = ? [-1], \sin\left(-\frac{11\pi}{4}\right) = ? \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = ? [0], \tan\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = ? \left[\frac{\sqrt{3}}{3}\right] \text{ เป็นต้น}$$

2.2 ครูคิดแผนภาพรูปวงกลมเดิมจากคาบที่ 12 แล้วสนทนาซักถามกับนักเรียน



- จากความรู้เดิมเราทราบว่า มุม 45° สามารถแปลงให้อยู่ในรูปเรเดียนได้เป็น $\left[\frac{\pi^R}{4}\right]$

- ซึ่ง $\frac{\pi^R}{4}$ ได้มาอย่างไร ? [ความยาวส่วนโค้งที่รองรับมุม] ที่จุดศูนย์กลาง หาด้วยความยาวของรัศมีของวงกลม]

- ตำแหน่งของจุดบนด้านสิ้นสุดของมุม 45° และ $\frac{\pi^R}{4}$ แทนด้วยจุดเดียวกันหรือไม่ ? [จุดเดียวกัน]

- ความยาวส่วนโค้งที่วัดจากจุด $A(1,0)$ ถึงจุด P ยาวเท่าใด ? [$\frac{\pi}{4}$ หน่วย]
- จากการวัดทั้ง 3 วิธีเราทราบว่า จุด P แทนด้วยจุดเดียวกัน ดังนั้นจะได้ว่า ? [$45^\circ = \frac{\pi^R}{4} = \frac{\pi}{4}$]
- นักเรียนคิดว่าค่าฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนของมุม และจำนวนจริง จะเท่ากันหรือไม่ ? [เท่ากัน]
- นักเรียนคิดว่าวงกลมนี้มีรัศมีเท่ากับเท่าใด ? [1 หน่วย]
- เราจะเรียกวงกลมที่มีรัศมีเท่ากับหนึ่งหน่วย และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0,0)$ ว่า ? [วงกลมหนึ่งหน่วย (Unit circle)]
- จะเขียนความสัมพันธ์ได้อย่างไร ? [$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 + y^2 = 1\}$]

2.3 กรุณาให้ตัวอย่าง พร้อมทั้งสนทนาสอบถามนักเรียนเกี่ยวกับความยาวส่วนโค้ง ของวงกลม โดยครูกำหนดให้ θ (อ่านว่า ซีต้า) แทนความยาวส่วนโค้งบนเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยที่ต้องเริ่มวัดที่จุด $(1,0)$ เสมอ

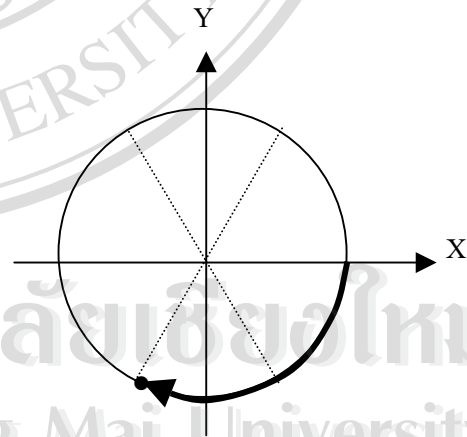
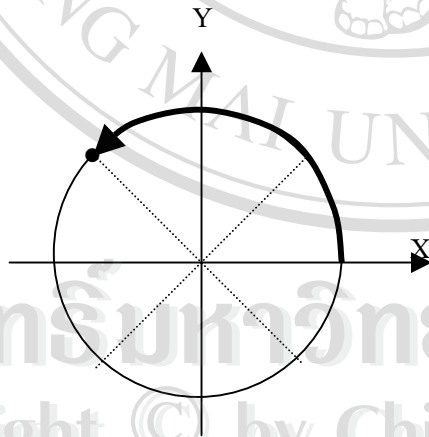
โดยวัดทวนเข็มนาฬิกา เมื่อ θ มีค่าเป็นจำนวนจริงบวก

วัดตามเข็มนาฬิกา เมื่อ θ มีค่าเป็นจำนวนจริงลบ

ตัวอย่าง

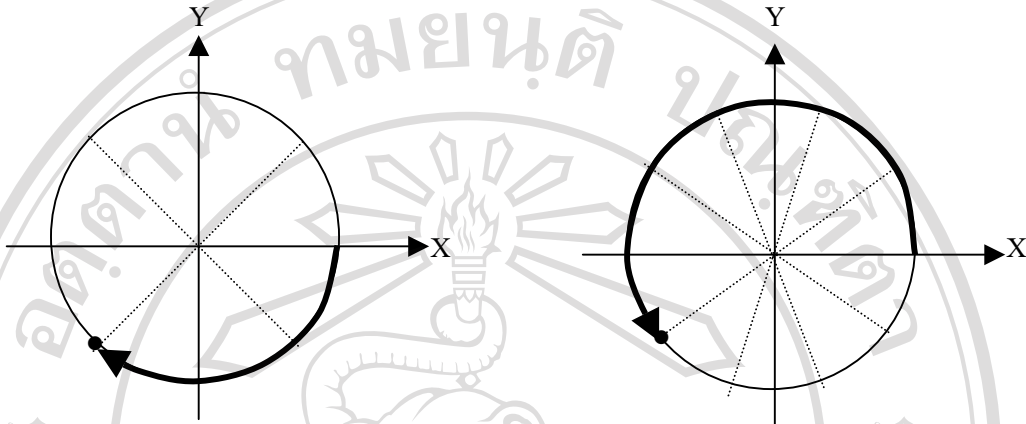
$$1. \theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$2. \theta = -\frac{2\pi}{3}$$



2.4 ครุฑถามคำถามนักเรียนเป็นรายบุคคลเกี่ยวกับความยาวส่วนโค้ง และ จุดปลายส่วนโค้ง ดังนี้

- จงบอกค่าของ θ และจุดปลายของส่วนโค้ง θ จากแผนภาพต่อไปนี้

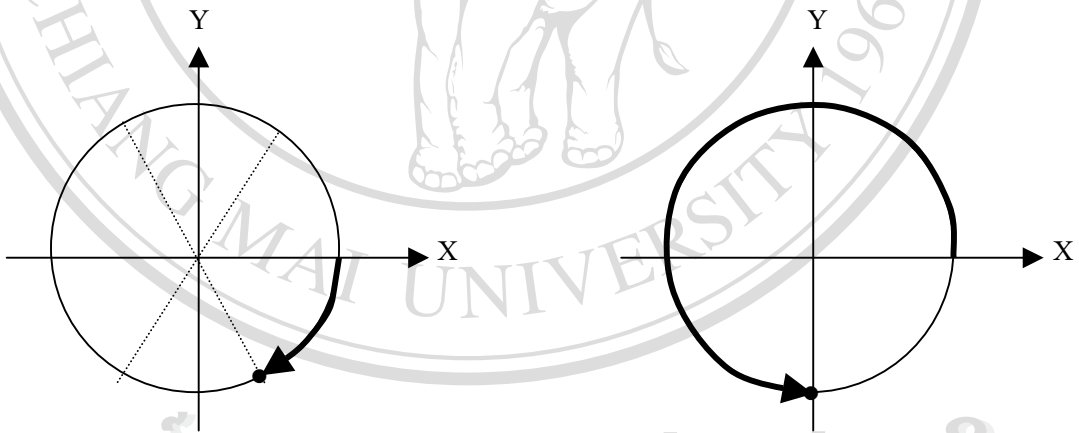


1. ความยาวส่วนโค้ง $\theta = ? [-\frac{3\pi}{4}]$

2. ความยาวส่วนโค้ง $\theta = ? [\frac{6\pi}{5}]$

จุดปลายส่วนโค้งคือ $(\cos -\frac{3\pi}{4}, \sin -\frac{3\pi}{4})$

จุดปลายส่วนโค้งคือ $(\cos \frac{6\pi}{5}, \sin \frac{6\pi}{5})$



3. ความยาวส่วนโค้ง $\theta = ? [-\frac{\pi}{3}]$

4. ความยาวส่วนโค้ง $\theta = ? [\frac{3\pi}{2}]$

จุดปลายส่วนโค้งคือ $(\cos -\frac{\pi}{3}, \sin -\frac{\pi}{3})$

จุดปลายส่วนโค้งคือ $(\cos \frac{3\pi}{2}, \sin \frac{3\pi}{2})$

2.5 จากแผนภาพ จะได้ว่า ตำแหน่งของจุดปลายของส่วนโค้งเป็นตำแหน่งเดียวกับจุดบนด้านสิ้นสุดของมุมในระบบองศา และเรเดียน ดังนั้นจะทำให้ได้ว่าค่าฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ของมุม และจำนวนจริง จะเท่ากัน

$$\text{กล่าวคือ } \sin 45^\circ = \sin \frac{\pi^R}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \cos \frac{\pi^R}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \tan \frac{\pi^R}{4} = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\sin(-45^\circ) = \sin\left(-\frac{\pi^R}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(-45^\circ) = \cos\left(-\frac{\pi^R}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan(-45^\circ) = \tan\left(-\frac{\pi^R}{4}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

2.5 ครูแจกใบงาน 14.1 ให้นักเรียนได้ฝึกการหาค่าของฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนของจำนวนจริง

ใบงาน 14.1

จงหาค่าของฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนของจำนวนจริงต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1. $\theta = \frac{5\pi}{3}$

วิธีทำ จาก $\frac{5\pi}{3} = \frac{5\pi^R}{3} = 2\pi^R - \frac{\pi^R}{3}$

ดังนั้น $\sin \frac{5\pi}{3} = \sin \frac{5\pi^R}{3} = \sin\left(2\pi^R - \frac{\pi^R}{3}\right) = -\sin \frac{\pi^R}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos \frac{5\pi}{3} = \cos \frac{5\pi^R}{3} = \cos\left(2\pi^R - \frac{\pi^R}{3}\right) = \cos \frac{\pi^R}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\tan \frac{5\pi}{3} = \tan \frac{5\pi^R}{3} = \tan\left(2\pi^R - \frac{\pi^R}{3}\right) = -\tan \frac{\pi^R}{3} = -\sqrt{3}$$

ตัวอย่าง 2. $\theta = \frac{5\pi}{4}$

วิธีทำ จาก $\frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$

ดังนั้น $\sin \frac{5\pi}{4} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\cos \frac{5\pi}{4} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan \frac{5\pi}{4} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

ตัวอย่าง 3. $\theta = -\frac{5\pi}{6}$

วิธีทำ จาก $-\frac{5\pi}{6} = -(\pi - \frac{\pi}{6})$

ดังนั้น $\sin(-\frac{5\pi}{6}) = -\sin\frac{5\pi}{6} = -\sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

$\cos(-\frac{5\pi}{6}) = \cos\frac{5\pi}{6} = \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan(-\frac{5\pi}{6}) = -\tan\frac{5\pi}{6} = -(-\tan(\pi - \frac{\pi}{6})) = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

1. $\theta = \frac{11\pi}{6}$

เฉลย. วิธีทำจาก $\frac{11\pi}{6} = (2\pi - \frac{\pi}{6})$

ดังนั้น $\sin\frac{11\pi}{6} = \sin(2\pi - \frac{\pi}{6}) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

$\cos\frac{5\pi}{6} = \cos(2\pi - \frac{\pi}{6}) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\frac{5\pi}{6} = \tan(2\pi - \frac{\pi}{6}) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

2. $\theta = \frac{11\pi}{4}$

เฉลย. วิธีทำจาก $\frac{11\pi}{4} = (2\pi + \frac{3\pi}{4})$

ดังนั้น $\sin\frac{11\pi}{4} = \sin(2\pi + \frac{3\pi}{4}) = \sin\frac{3\pi}{4} = \sin(\pi - \frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\frac{11\pi}{4} = \cos(2\pi + \frac{3\pi}{4}) = \cos\frac{3\pi}{4} = \cos(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan\frac{11\pi}{4} = \tan(2\pi + \frac{3\pi}{4}) = \tan\frac{3\pi}{4} = \tan(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$

3. $\theta = \frac{16\pi}{3}$

เฉลย. วิธีทำจาก $\frac{16\pi}{3} = (5\pi + \frac{\pi}{3})$

ดังนั้น $\sin\frac{16\pi}{3} = \sin(5\pi + \frac{\pi}{3}) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\frac{16\pi}{3} = \cos(5\pi + \frac{\pi}{3}) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

$\tan\frac{16\pi}{3} = \tan(5\pi + \frac{\pi}{3}) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright © Chiang Mai University

All rights reserved

$$4. \theta = -\frac{15\pi}{2}$$

$$\text{เฉลย. วิธีทำ } \sin\left(-\frac{15\pi}{2}\right) = -\sin\left(8\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -(-\sin\frac{\pi}{2}) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

$$\cos\left(-\frac{15\pi}{2}\right) = \cos\left(8\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\tan\frac{16\pi}{3} = \frac{\sin\frac{16\pi}{3}}{\cos\frac{16\pi}{3}} = \frac{1}{0} = \text{หาค่าไม่ได้}$$

2.6 ครุแจกเอกสารฝึกหัด 14.1 ให้นักเรียนทำเป็นการบ้าน และ ส่งในตอนเช้าก่อนทำกิจกรรมหน้าเสาธง

เอกสารฝึกหัด 14.1

จงหาผลลัพธ์ต่อไปนี้

$$1. \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \cdot \cos 5\pi + \cos\frac{13\pi}{4} \cdot \sin\frac{11\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{เฉลย. } & \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \cdot \cos 5\pi + \cos\frac{13\pi}{4} \cdot \sin\frac{11\pi}{2} \\ & = (-\sin(\pi - \frac{\pi}{4})) \cdot \cos 5\pi + \cos(3\pi + \frac{\pi}{4}) \cdot \sin(6\pi - \frac{\pi}{2}) \\ & = (-\sin\frac{\pi}{4}) \cdot \cos 5\pi + (-\cos\frac{\pi}{4}) \cdot (-\sin\frac{\pi}{2}) \\ & = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot (-1) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot (-1) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \cdot \cos 5\pi + \cos\frac{13\pi}{4} \cdot \sin\frac{11\pi}{2} = 0$$

$$2. \sin\left(-\frac{13\pi}{6}\right) \cdot \cos\frac{9\pi}{4} + \cos\left(-\frac{13\pi}{4}\right) \cdot \sin\frac{11\pi}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{เฉลย. } & \sin\left(-\frac{13\pi}{6}\right) \cdot \cos\frac{9\pi}{4} + \cos\left(-\frac{13\pi}{4}\right) \cdot \sin\frac{11\pi}{3} \\ & = (-\sin(2\pi + \frac{\pi}{6})) \cdot \cos(2\pi + \frac{\pi}{4}) + \cos(3\pi + \frac{\pi}{4}) \cdot \sin(4\pi - \frac{\pi}{3}) \\ & = (-\sin\frac{\pi}{6}) \cdot \cos\frac{\pi}{4} + (-\cos\frac{\pi}{4}) \cdot (-\sin\frac{\pi}{3}) \\ & = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) + \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}{12} \end{aligned}$$

$$\therefore \sin\left(-\frac{13\pi}{6}\right) \cdot \cos\frac{9\pi}{4} + \cos\left(-\frac{13\pi}{4}\right) \cdot \sin\frac{11\pi}{3} = \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}{12}$$

$$3. \sin\left(-\frac{14\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(-\frac{15\pi}{2}\right) + \cos\frac{9\pi}{4} \cdot \sin 5\pi$$

$$\begin{aligned} \text{เฉลย. } & \sin\left(-\frac{14\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(-\frac{15\pi}{2}\right) + \cos\frac{9\pi}{4} \cdot \sin 5\pi \\ &= \left(-\sin\left(5\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right) \cdot \cos\left(8\pi - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin 5\pi \\ &= \left(-\sin\frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{4} \cdot \sin 5\pi = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0 = 0 \\ \therefore & \sin\left(-\frac{14\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(-\frac{15\pi}{2}\right) + \cos\frac{9\pi}{4} \cdot \sin 5\pi = 0 \end{aligned}$$

$$4. \sin\frac{21\pi}{4} \cdot \cos\frac{15\pi}{4} + \cos\left(-\frac{19\pi}{4}\right) \cdot \sin\frac{5\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{เฉลย. } & \sin\frac{21\pi}{4} \cdot \cos\frac{15\pi}{4} + \cos\left(-\frac{19\pi}{4}\right) \cdot \sin\frac{5\pi}{4} \\ &= \sin\left(5\pi + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(4\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(5\pi - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \left(-\sin\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \left(-\cos\frac{\pi}{4}\right) \cdot \left(-\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(-\frac{2}{4}\right) + \frac{2}{4} = 0 \\ \therefore & \sin\frac{21\pi}{4} \cdot \cos\frac{15\pi}{4} + \cos\left(-\frac{19\pi}{4}\right) \cdot \sin\frac{5\pi}{4} = 0 \end{aligned}$$

$$5. \tan\frac{21\pi}{4} \cdot \cos(-3\pi) + \tan\left(-\frac{19\pi}{4}\right) \cdot \sin\frac{5\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{เฉลย. } & \tan\frac{21\pi}{4} \cdot \cos(-3\pi) + \tan\left(-\frac{19\pi}{4}\right) \cdot \sin\frac{5\pi}{2} \\ &= \tan\left(5\pi + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos 3\pi + \left(-\tan\left(5\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right) \cdot \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \tan\frac{\pi}{4} \cdot \cos 3\pi + \left(-(-\tan\frac{\pi}{4})\right) \cdot \sin\frac{\pi}{2} \\ &= 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = (-1) + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \tan\frac{21\pi}{4} \cdot \cos(-3\pi) + \tan\left(-\frac{19\pi}{4}\right) \cdot \sin\frac{5\pi}{2} = 0$$

3. สื่อการเรียนการสอน

3.1 แผ่นภาพวงกลม

3.2 เอกสารประกอบการเรียนการสอน

3.3 ใบงาน 14.1

3.4 เอกสารฝึกหัด 14.1

4. การวัดและประเมินผล

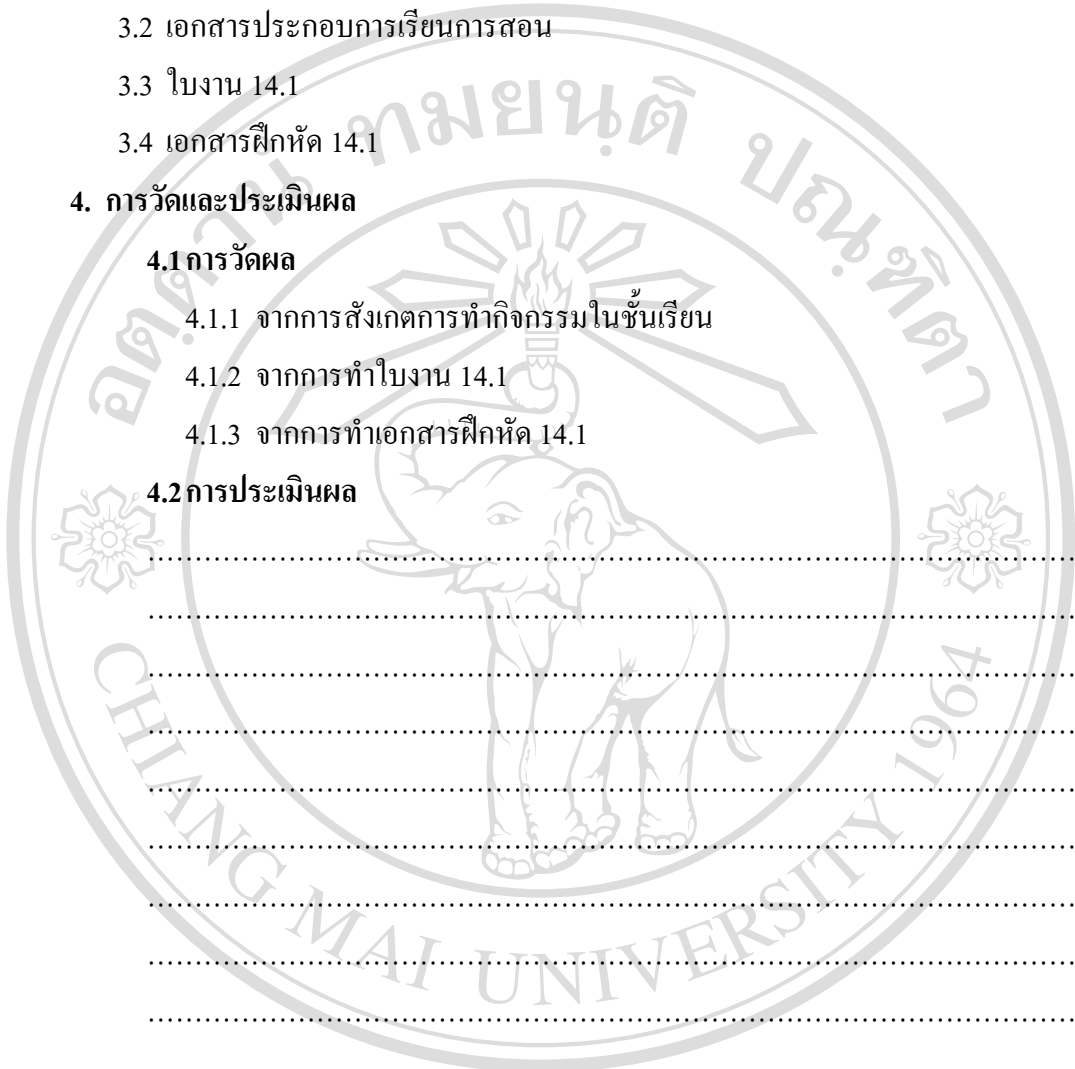
4.1 การวัดผล

4.1.1 จากการสังเกตการทำกิจกรรมในชั้นเรียน

4.1.2 จากการทำใบงาน 14.1

4.1.3 จากการทำเอกสารฝึกหัด 14.1

4.2 การประเมินผล

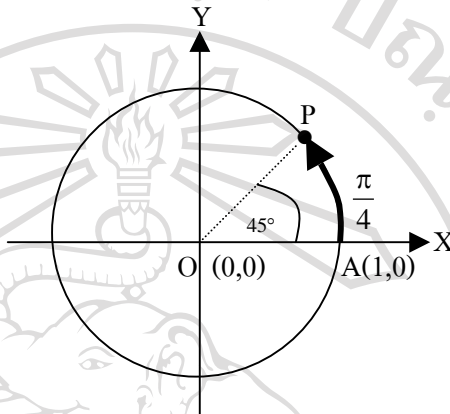


ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright © by Chiang Mai University
All rights reserved

เอกสารประกอบการเรียนการสอน คาบที่ 14

$$\sin(-60^\circ) = \dots\dots, \cos \frac{3\pi}{4} = \dots\dots, \tan 315^\circ = \dots\dots, \sin(-\frac{11\pi}{4}) = \dots\dots$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = \dots\dots, \tan(-\frac{5\pi}{6}) = \dots\dots$$

แผนภาพรูปวงกลม

- จากความรู้เดิมเราทราบว่า มุม 45° สามารถแปลงให้อยู่ในรูปเรเดียนได้เป็น ?

- ซึ่ง $\frac{\pi^R}{4}$ ได้มาอย่างไร ?

- ตำแหน่งของจุดบนด้านสิ้นสุดของมุม 45° และ $\frac{\pi^R}{4}$ แทนด้วยจุดเดียวกันหรือไม่ ?

- ความยาวส่วนโค้งที่วัดจากจุด A(1,0) ถึงจุด P ยาวเท่าใด ?

- จากการวัดทั้ง 3 วิธีเราทราบว่า จุด P แทนด้วยจุดเดียวกัน ดังนั้นจะได้ว่า ?

- นักเรียนคิดว่าค่าฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนของมุม และจำนวนจริง จะเท่ากันหรือไม่ ?

- นักเรียนคิดว่าวงกลมนี้มีรัศมีเท่ากับเท่าใด ?

- เราจะเรียกวงกลมที่มีรัศมีเท่ากับหนึ่งหน่วย และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0,0) ว่า “ วงกลมหนึ่งหน่วย (Unit circle) ”

- จะเขียนความสัมพันธ์ได้อย่างไร ?

กำหนดให้ θ (อ่านว่า ซีต้า) แทนความยาวส่วนโค้งบนเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยที่ต้องเริ่มวัดที่จุด (1,0)เสมอ

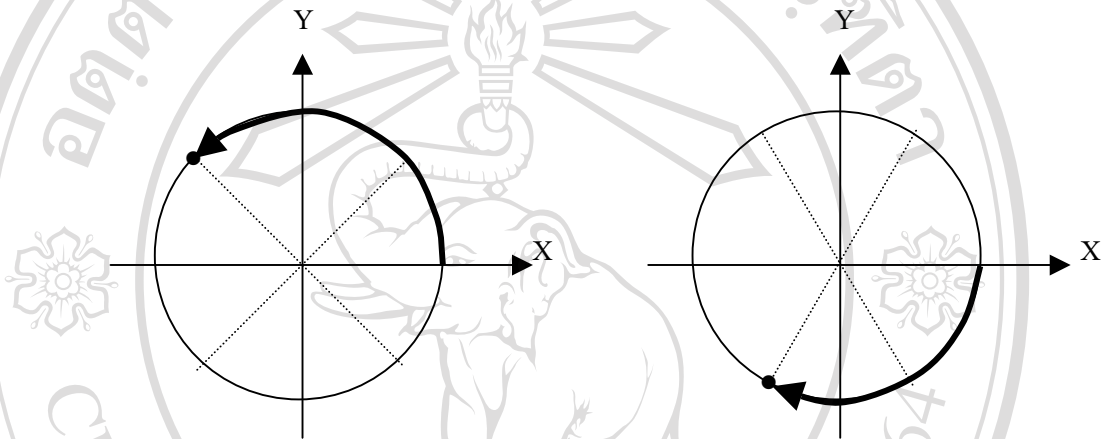
โดยวัดทวนเข็มนาฬิกา เมื่อ θ มีค่าเป็นจำนวนจริงบวก

วัดตามเข็มนาฬิกา เมื่อ θ มีค่าเป็นจำนวนจริงลบ

ตัวอย่าง

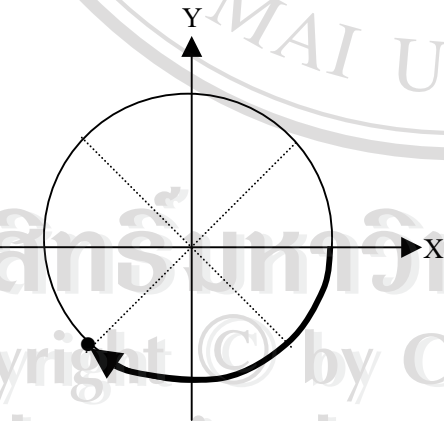
1. $\theta = \frac{3\pi}{4}$

2. $\theta = -\frac{2\pi}{3}$

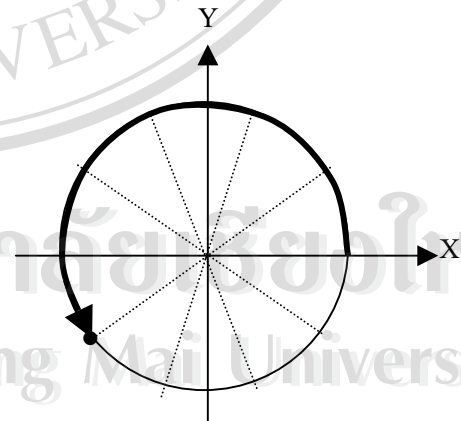


เอกสารฝึกทักษะ 14.1

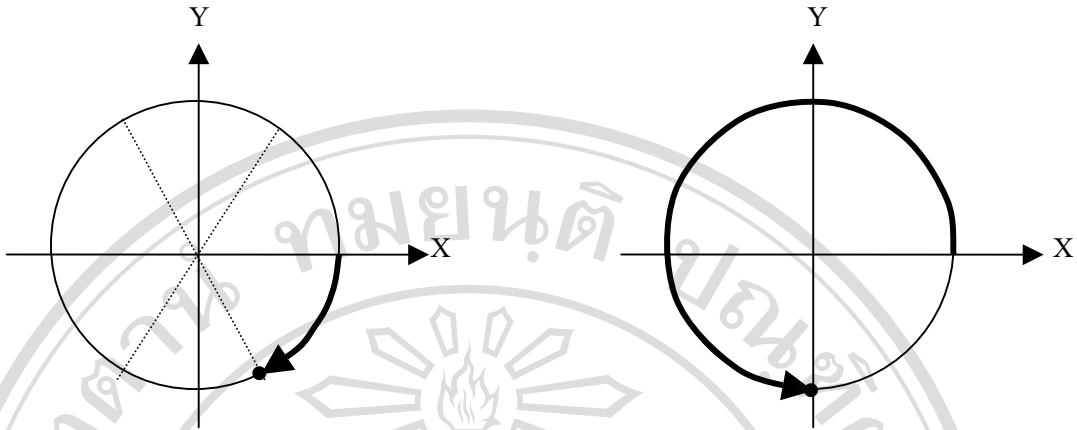
จากรูปจงหาความยาวส่วนโค้ง และจุดปลายของส่วนโค้ง



1. ความยาวส่วนโค้ง $\theta = \dots\dots\dots$
จุดปลายส่วนโค้งคือ $(\dots\dots, \dots\dots)$



2. ความยาวส่วนโค้ง $\theta = \dots\dots\dots$
จุดปลายส่วนโค้งคือ $(\dots\dots, \dots\dots)$



3. ความยาวส่วนโค้ง $\theta = \dots\dots\dots$

จุดปลายส่วนโค้งคือ $(\dots\dots, \dots\dots)$

4. ความยาวส่วนโค้ง $\theta = \dots\dots\dots$

จุดปลายส่วนโค้งคือ $(\dots\dots, \dots\dots)$

จากแผ่นภาพ จะได้ว่า ตำแหน่งของจุดปลายของส่วนโค้งเป็นตำแหน่งเดียวกับจุดบนด้านสิ้นสุดของมุมในระบบของขา และเรเดียน ดังนั้นจะทำให้ได้ว่าค่าฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ของมุม และจำนวนจริงจะ (เท่ากัน / ไม่เท่ากัน)

$$\text{กล่าวคือ } \sin 45^\circ = \sin \frac{\pi^R}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos 45^\circ = \cos \frac{\pi^R}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \tan \frac{\pi^R}{4} = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\sin(-45^\circ) = \sin\left(-\frac{\pi^R}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(-45^\circ) = \cos\left(-\frac{\pi^R}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan(-45^\circ) = \tan\left(-\frac{\pi^R}{4}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

ใบงาน 14.1

ชื่อ

ชั้น ม.4/1 เลขที่

จงหาค่าของฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ของจำนวนจริงต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1. $\theta = \frac{5\pi}{3}$

วิธีทำ จาก $\frac{5\pi}{3} = \frac{5\pi^R}{3} = 2\pi^R - \frac{\pi^R}{3}$

ดังนั้น $\sin \frac{5\pi}{3} = \sin \frac{5\pi^R}{3} = \sin\left(2\pi^R - \frac{\pi^R}{3}\right) = -\sin \frac{\pi^R}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos \frac{5\pi}{3} = \cos \frac{5\pi^R}{3} = \cos\left(2\pi^R - \frac{\pi^R}{3}\right) = \cos \frac{\pi^R}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\tan \frac{5\pi}{3} = \tan \frac{5\pi^R}{3} = \tan\left(2\pi^R - \frac{\pi^R}{3}\right) = -\tan \frac{\pi^R}{3} = -\sqrt{3}$$

ตัวอย่าง 2. $\theta = \frac{5\pi}{4}$

วิธีทำ จาก $\frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$

ดังนั้น $\sin \frac{5\pi}{4} = \sin(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos \frac{5\pi}{4} = \cos(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan \frac{5\pi}{4} = \tan(\pi + \frac{\pi}{4}) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$

ตัวอย่าง 3. $\theta = -\frac{5\pi}{6}$

วิธีทำ จาก $-\frac{5\pi}{6} = -(\pi - \frac{\pi}{6})$

ดังนั้น $\sin(-\frac{5\pi}{6}) = -\sin \frac{5\pi}{6} = -\sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

$\cos(-\frac{5\pi}{6}) = \cos \frac{5\pi}{6} = \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan(-\frac{5\pi}{6}) = -\tan \frac{5\pi}{6} = -(-\tan(\pi - \frac{\pi}{6})) = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

1. $\theta = \frac{11\pi}{6}$

.....

.....

.....

.....

.....

2. $\theta = \frac{11\pi}{4}$

.....

.....

.....

.....

.....

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

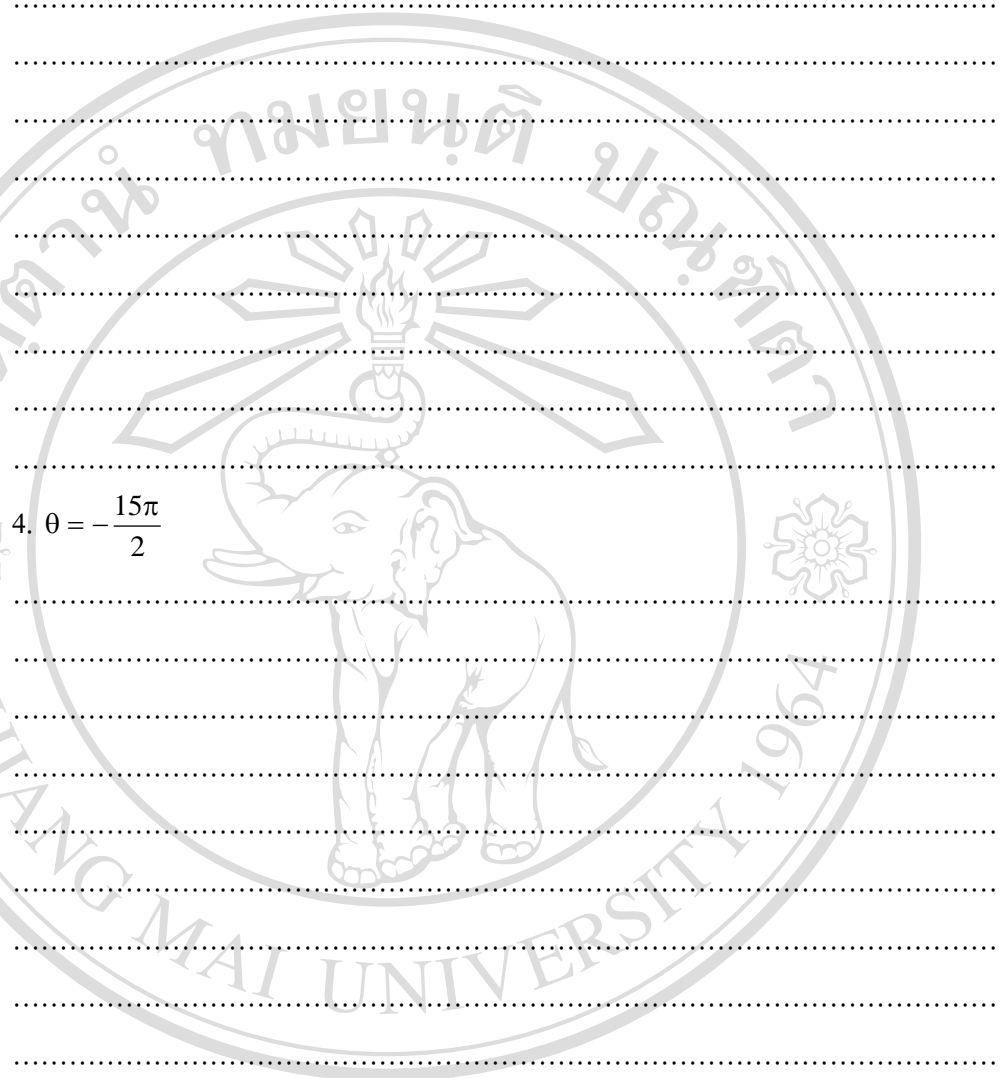
Copyright © by Chiang Mai University

All rights reserved

.....

.....

$$3. \theta = \frac{16\pi}{3}$$



$$4. \theta = -\frac{15\pi}{2}$$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
 Copyright © by Chiang Mai University
 All rights reserved

เอกสารฝึกหัด 14.1

จงหาผลลัพธ์ต่อไปนี้

$$1. \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \cdot \cos 5\pi + \cos \frac{13\pi}{4} \cdot \sin \frac{11\pi}{2}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$2. \sin\left(-\frac{13\pi}{6}\right) \cdot \cos \frac{9\pi}{4} + \cos\left(-\frac{13\pi}{4}\right) \cdot \sin \frac{11\pi}{3}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright © by Chiang Mai University

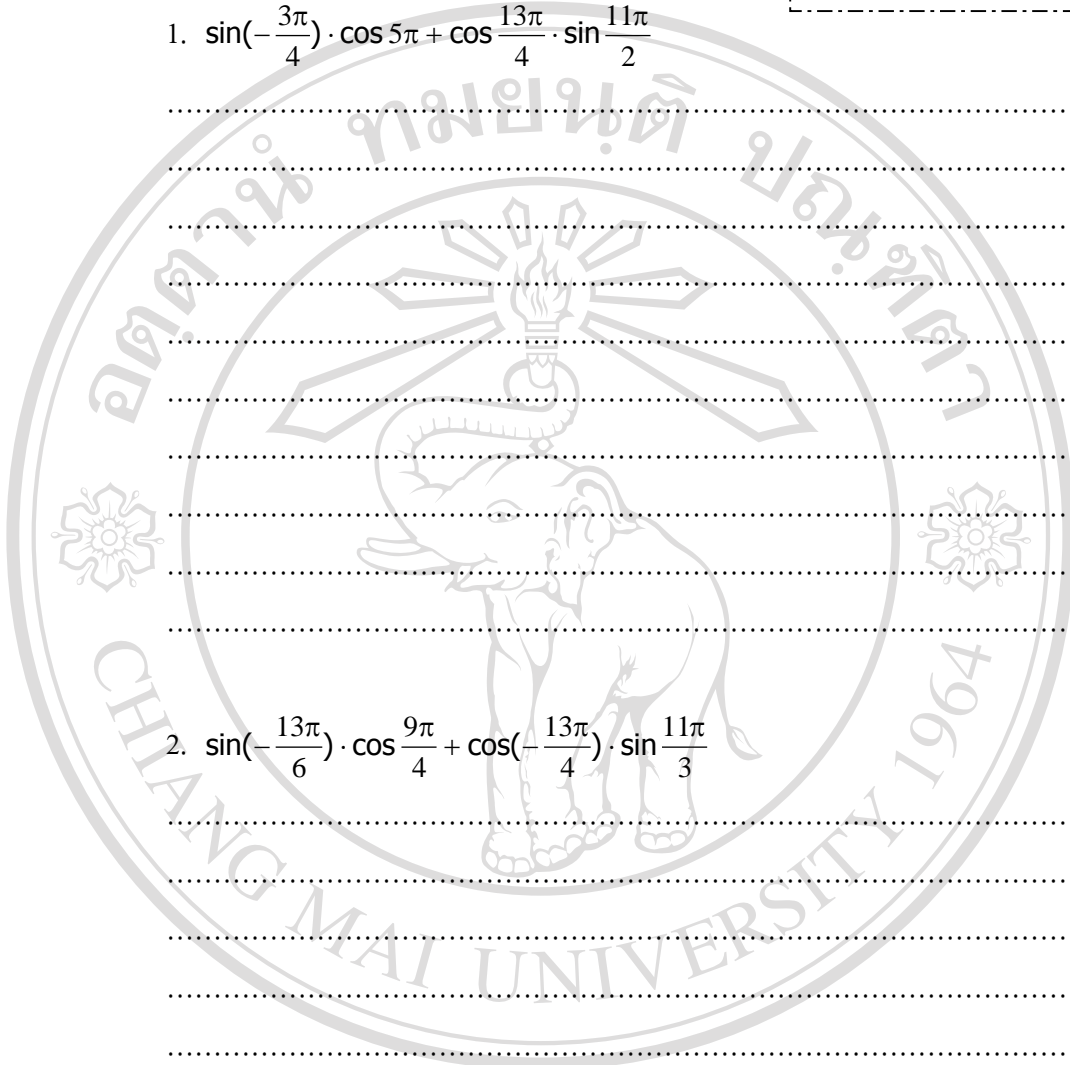
All rights reserved

.....

.....

ชื่อ.....

ชั้น ม. 4 / 1 เลขที่.....



$$3. \sin\left(-\frac{14\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(-\frac{15\pi}{2}\right) + \cos\frac{9\pi}{4} \cdot \sin 5\pi$$

$$4. \sin\frac{21\pi}{4} \cdot \cos\frac{15\pi}{4} + \cos\left(-\frac{19\pi}{4}\right) \cdot \sin\frac{5\pi}{4}$$

$$5. \tan\frac{21\pi}{4} \cdot \cos(-3\pi) + \tan\left(-\frac{19\pi}{4}\right) \cdot \sin\frac{5\pi}{2}$$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright © by Chiang Mai University

All rights reserved

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 15

เรื่อง ค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ

จำนวน 1 คาบ

วิชาคณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค 012

ภาคเรียนที่ 2

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

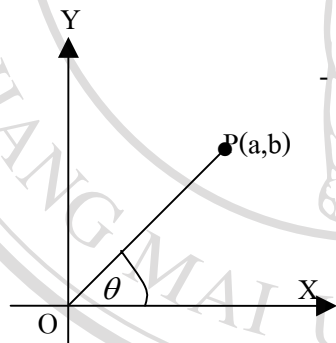
1. จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถ

- 1.1 บอกนิยามของฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้ง 6 ฟังก์ชันได้
- 1.2 บอกโดเมน และเรนจ์ ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
- 1.3 หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้ง 6 ฟังก์ชันได้

2. เนื้อหาและกิจกรรมการเรียนการสอน

- 2.1 ครูทบทวนนิยามฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนของมุมในตำแหน่งมาตรฐานโดยการเขียนแผ่นภาพมุมในตำแหน่งมาตรฐานบนกระดาน แล้วสนทนาซักถามนักเรียน



- ถ้าต้องการหาค่าของฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนของมุม θ จะหาได้อย่างไร ? [จากนิยาม $\sin \theta = \frac{b}{r}$

$$\cos \theta = \frac{a}{r}, \tan \theta = \frac{b}{a}, r = \sqrt{a^2 + b^2}]$$

- ถ้าต้องการหาค่าของฟังก์ชันโคเซแคนท์ เซแคนท์ และ โคแทนเจนต์ จะหาได้อย่างไร ?

-เราจะเขียนฟังก์ชัน โคเซแคนท์ เซแคนท์ และ โคแทนเจนต์ ด้วยสัญลักษณ์ต่อไปนี้

$\csc \theta, \sec \theta, \cot \theta$ ซึ่งเราสามารถหาค่าของฟังก์ชันเหล่านี้ได้ดังนี้

$$\operatorname{cosecant} \theta = \frac{r}{b} = \frac{1}{\sin \theta}, \sin \theta \neq 0$$

$$\operatorname{secant} \theta = \frac{r}{a} = \frac{1}{\cos \theta}, \cos \theta \neq 0$$

$$\operatorname{cotangent} \theta = \frac{a}{b} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \sin \theta \neq 0$$

- 2.2 ครูแจกเอกสารประกอบการเรียนการสอนให้นักเรียนซึ่งมีนิยามของฟังก์ชันโคเซแคนท์ เซแคนท์ และ โคแทนเจนต์ แล้วสนทนาซักถาม

นิยาม ถ้า x, y เป็นจำนวนจริงใด ๆ ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้ง 6 ฟังก์ชันคือ

$$\text{Sine} = \{(x, y) / y = \sin x\}$$

$$\text{Cosine} = \{(x, y) / y = \cos x\}$$

$$\text{Tangent} = \left\{ (x, y) / y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \cos x \neq 0 \right\}$$

$$\text{Cosecant} = \left\{ (x, y) / y = \csc x = \frac{1}{\sin x}, \sin x \neq 0 \right\}$$

$$\text{Secant} = \left\{ (x, y) / y = \sec x = \frac{1}{\cos x}, \cos x \neq 0 \right\}$$

$$\text{Cotangent} = \left\{ (x, y) / y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \sin x \neq 0 \right\}$$

2.3 ครุณาเสนอตัวอย่างบนกระดานพร้อมกับสนทนาซักถามนักเรียน

ตัวอย่าง. จงหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงต่อไปนี้

1. $\sec \frac{\pi}{3}$

วิธีทำ จาก $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$

ดังนั้น $\sec \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{3}}$ ซึ่ง $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

จะได้ $\sec \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 \times \frac{2}{1} = 2$

$\therefore \sec \frac{\pi}{3} = 2$

2. $\csc \frac{\pi}{4}$

วิธีทำ $\csc \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1 \times \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$

$\therefore \csc \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$

3. $\cot \frac{\pi}{6}$

วิธีทำ. $\cot \frac{\pi}{6} = \frac{\cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{1} = \sqrt{3}$

$\therefore \cot \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$

2.4 ครุแจกใบงาน 15.1 ให้นักเรียนได้ฝึกทักษะการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ

ใบงาน 15.1

จงหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆของจำนวนจริงต่อไปนี้

ตัวอย่าง $\frac{2\pi}{3}$

วิธีทำ จาก $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$

$$\text{ดังนั้น } \csc \frac{2\pi}{3} = \csc\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec \frac{2\pi}{3} = \sec\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{(-\cos \frac{\pi}{3})} = \frac{1}{(-\frac{1}{2})} = 1 \times \left(-\frac{2}{1}\right) = -2$$

$$\cot \frac{2\pi}{3} = \cot\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{(-\tan \frac{\pi}{3})} = \frac{1}{(-\frac{\sqrt{3}}{1})} = 1 \times \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

1. $\frac{5\pi}{4}$

เฉลย. จาก $\frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$

ดังนั้น

$$\csc \frac{5\pi}{4} = \csc\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 \times \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\sec \frac{5\pi}{4} = \sec\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{(-\cos \frac{\pi}{4})} = \frac{1}{(-\frac{\sqrt{2}}{2})} = 1 \times \left(-\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2}$$

$$\cot \frac{5\pi}{4} = \cot\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{1} = 1$$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright © by Chiang Mai University

All rights reserved

$$2. \frac{11\pi}{6}$$

เฉลย. จาก $\frac{11\pi}{6} = 2\pi - \frac{\pi}{6}$

ดังนั้น

$$\csc \frac{11\pi}{6} = \csc(2\pi - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sin(2\pi - \frac{\pi}{6})} = \frac{1}{(-\sin \frac{\pi}{6})} = \frac{1}{(-\frac{1}{2})} = 1 \times (-\frac{2}{1}) = -2$$

$$\sec \frac{5\pi}{4} = \sec(\pi + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\cos(\pi + \frac{\pi}{4})} = \frac{1}{(-\cos \frac{\pi}{4})} = \frac{1}{(-\frac{1}{\sqrt{2}})} = 1 \times (-\frac{\sqrt{2}}{1}) = -\sqrt{2}$$

$$\cot \frac{5\pi}{4} = \cot(\pi + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\tan(\pi + \frac{\pi}{4})} = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$3. \frac{3\pi}{2}$$

เฉลย. จาก $\frac{3\pi}{2} = \pi + \frac{\pi}{2}$

ดังนั้น

$$\csc \frac{3\pi}{2} = \csc(\pi + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\sin(\pi + \frac{\pi}{2})} = \frac{1}{(-\sin \frac{\pi}{2})} = \frac{1}{(-1)} = -1$$

$$\sec \frac{3\pi}{2} = \sec(\pi + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\cos(\pi + \frac{\pi}{2})} = \frac{1}{(-\cos \frac{\pi}{2})} = \frac{1}{0} = \text{หาค่าไม่ได้}$$

$$\cot \frac{3\pi}{4} = \frac{\cos(\pi + \frac{\pi}{2})}{\sin(\pi + \frac{\pi}{2})} = \frac{(-\cos \frac{\pi}{2})}{(-\sin \frac{\pi}{2})} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$4. \quad -\frac{7\pi}{3}$$

เฉลย. จาก $\frac{7\pi}{3} = 2\pi + \frac{\pi}{3}$

ดังนั้น

$$\csc\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = -\csc\left(\frac{7\pi}{3}\right) = -\csc\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\csc\frac{\pi}{3}$$

$$= -\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}}\right) = -\left(\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}\right) = -\left(1 \times \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\sec\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = \sec\left(\frac{7\pi}{3}\right) = \sec\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sec\frac{\pi}{3}$$

$$= \left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}}\right) = \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)}\right) = \left(1 \times \frac{2}{1}\right) = 2$$

$$\cot\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = -\cot\left(\frac{7\pi}{3}\right) = -\cot\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cot\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\left(\frac{1}{\tan\frac{\pi}{3}}\right) = -\left(\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)}\right) = -\left(1 \times \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

2.5 ครูสุมนทนาสอบถามนักเรียนเกี่ยวกับค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้ง 6 ฟังก์ชัน แล้ว ร่วมกัน

สรุป โดเมน และเรนจ์ ของฟังก์ชัน ทั้ง 6 ฟังก์ชัน

$$D_{\text{sine}} = \{x/x \in \mathbb{R}\}, \quad R_{\text{sine}} = \{y/-1 \leq y \leq 1\}$$

$$D_{\text{cosine}} = \{x/x \in \mathbb{R}\}, \quad R_{\text{cosine}} = \{y/-1 \leq y \leq 1\}$$

$$D_{\text{tangent}} = \left\{x/x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{I}\right\}\right\}, \quad R_{\text{tangent}} = \{y/y \in \mathbb{R}\}$$

$$D_{\text{cosecant}} = \{x/x \in \mathbb{R} - \{n\pi, n \in \mathbb{I}\}\}, \quad R_{\text{cosecant}} = \{y/y \in \mathbb{R}\}$$

$$D_{\text{secant}} = \left\{x/x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{I}\right\}\right\}, \quad R_{\text{secant}} = \{y/-1 \geq y \text{ หรือ } y \geq 1\}$$

$$D_{\text{cotangent}} = \{x/x \in \mathbb{R} - \{n\pi, n \in \mathbb{I}\}\}, \quad R_{\text{cotangent}} = \{y/-1 \geq y \text{ หรือ } y \geq 1\}$$

2.6 ครูแจ็กเอกสารฝึกหัด 15.1 และ แบบบันทึกการเรียนรู้ ให้นักเรียนทำการบ้าน แล้วส่ง

ในตอนเช้าของวันต่อไปก่อนทำกิจกรรมหน้าเสาธง

เอกสารฝึกหัด 15.1

จงหาผลลัพธ์ต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \sin \frac{7\pi}{3} \cos \frac{2\pi}{3} - \sec 2\pi \csc \frac{\pi}{3} \\
 & \sin \frac{7\pi}{3} \cos \frac{2\pi}{3} - \sec 2\pi \csc \frac{\pi}{3} = \sin(2\pi + \frac{\pi}{3}) \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) - \frac{1}{\cos 2\pi} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}} \\
 & = \sin \frac{\pi}{3} (-\cos \frac{\pi}{3}) - \frac{1}{\cos 2\pi} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}} \\
 & = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) - (1) \frac{2\sqrt{3}}{3} = (-\frac{\sqrt{3}}{4}) - \frac{2\sqrt{3}}{3} \\
 & = \frac{-3\sqrt{3} - 8\sqrt{3}}{12} = \frac{-11\sqrt{3}}{12}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \sin \frac{7\pi}{3} \cos \frac{2\pi}{3} - \sec 2\pi \csc \frac{\pi}{3} = \frac{-11\sqrt{3}}{12}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad & \sin \frac{7\pi}{3} \csc \frac{2\pi}{3} - \sec \frac{\pi}{3} \cos \frac{5\pi}{3} \\
 & \sin \frac{7\pi}{3} \csc \frac{2\pi}{3} - \sec \frac{\pi}{3} \cos \frac{5\pi}{3} = \left[\sin(2\pi + \frac{\pi}{3}) \cdot \frac{1}{\sin(\pi - \frac{\pi}{3})} \right] - \left[\frac{1}{\cos \frac{\pi}{3}} \cdot \cos(2\pi - \frac{\pi}{3}) \right] \\
 & = \left[\sin \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}} \right] - \left[\frac{1}{\cos \frac{\pi}{3}} \cdot \cos \frac{\pi}{3} \right] = 1 - 1 = 0
 \end{aligned}$$

$$\therefore \sin \frac{7\pi}{3} \csc \frac{2\pi}{3} - \sec \frac{\pi}{3} \cos \frac{5\pi}{3} = 0$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad & \cot \frac{7\pi}{4} \csc(-\frac{5\pi}{6}) + \sec \frac{11\pi}{4} \cos \frac{14\pi}{3} \\
 & \cot \frac{7\pi}{4} \csc(-\frac{5\pi}{6}) + \sec \frac{11\pi}{4} \cos \frac{14\pi}{3} = \left[\frac{1}{\tan(2\pi - \frac{\pi}{4})} \cdot \frac{1}{\sin(-\frac{5\pi}{6})} \right] + \left[\frac{1}{\cos \frac{11\pi}{4}} \cdot \cos(5\pi - \frac{\pi}{3}) \right] \\
 & = \left[\frac{1}{-\tan \frac{\pi}{4}} \cdot \frac{1}{-\sin(\pi - \frac{\pi}{6})} \right] + \left[\frac{1}{\cos(3\pi - \frac{\pi}{4})} \cdot (-\cos \frac{\pi}{3}) \right] \\
 & = [(-1) \cdot (-2)] + [(-\sqrt{2}) \cdot (-\frac{1}{2})] = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4 + \sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \cot \frac{7\pi}{4} \csc(-\frac{5\pi}{6}) + \sec \frac{11\pi}{4} \cos \frac{14\pi}{3} = \frac{4 + \sqrt{2}}{2}$$

$$4. \cot \frac{7\pi}{2} \csc\left(-\frac{15\pi}{4}\right) + \sec \frac{11\pi}{4} \cos\left(-\frac{19\pi}{4}\right)$$

$$\begin{aligned} \cot \frac{7\pi}{2} \csc\left(-\frac{15\pi}{4}\right) + \sec \frac{11\pi}{4} \cos\left(-\frac{19\pi}{4}\right) &= \frac{\cos \frac{7\pi}{2}}{\sin \frac{7\pi}{2}} \cdot \frac{1}{\sin\left(-\frac{15\pi}{4}\right)} + \frac{1}{\cos\left(3\pi - \frac{\pi}{4}\right)} \cdot \cos\left(5\pi - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{\cos\left(3\pi + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(3\pi + \frac{\pi}{2}\right)} \cdot \frac{1}{(-\sin \frac{\pi}{4})} + \frac{1}{\cos\left(3\pi - \frac{\pi}{4}\right)} \cdot (-\cos \frac{\pi}{4}) \\ &= \left(\frac{0}{1}\right) \frac{\sqrt{2}}{2} + (-\sqrt{2})\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \cot \frac{7\pi}{2} \csc\left(-\frac{15\pi}{4}\right) + \sec \frac{11\pi}{4} \cos\left(-\frac{19\pi}{4}\right) = 1$$

3. สื่อการเรียนการสอน

3.1 เอกสารประกอบการเรียนการสอน

3.2 ใบงาน 15.1

3.3 เอกสารฝึกหัด 15.1

4. การวัดและการประเมินผล

4.1 การวัดผล

4.1.1 จากการสังเกตการทำกิจกรรมในชั้นเรียน และการตอบคำถามของครู

4.1.2 จากการทำใบงาน 15.1

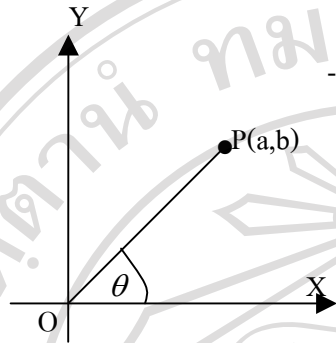
4.1.3 จากการทำเอกสารฝึกหัด 15.1

4.2 การประเมินผล

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright © by Chiang Mai University
All rights reserved

เอกสารประกอบการเรียนการสอน คาบที่ 15

ทบทวนนิยามฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ของมุมในตำแหน่งมาตรฐาน



- ถ้าต้องการหาค่าของฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์

ของมุม θ จะหาได้อย่างไร ? [จากนิยาม $\sin \theta = \frac{b}{r}$

$$\cos \theta = \frac{a}{r}, \tan \theta = \frac{b}{a}, r = \sqrt{a^2 + b^2}]$$

- ถ้าต้องการหาค่าของฟังก์ชันโคเซแคนท์ เซแคนท์ และ โคแทนเจนต์ จะหาได้อย่างไร ?

-เราจะเขียนฟังก์ชันโคเซแคนท์ เซแคนท์ และ โคแทนเจนต์ ด้วยสัญลักษณ์ต่อไปนี้

$\csc \theta, \sec \theta, \cot \theta$ ซึ่งเราสามารถหาค่าของฟังก์ชันเหล่านี้ได้ดังนี้

$$\csc \theta = \frac{r}{b} = \frac{1}{\sin \theta}, \sin \theta \neq 0$$

$$\sec \theta = \frac{r}{a} = \frac{1}{\cos \theta}, \cos \theta \neq 0$$

$$\cot \theta = \frac{a}{b} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \sin \theta \neq 0$$

นิยาม ถ้า x, y เป็นจำนวนจริงใดๆ ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้ง 6 ฟังก์ชันคือ

$$\text{Sine} = \{(x, y) / y = \sin x\}$$

$$\text{Cosine} = \{(x, y) / y = \cos x\}$$

$$\text{Tangent} = \{(x, y) / y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \cos x \neq 0\}$$

$$\text{Cosecant} = \{(x, y) / y = \csc x = \frac{1}{\sin x}, \sin x \neq 0\}$$

$$\text{Secant} = \{(x, y) / y = \sec x = \frac{1}{\cos x}, \cos x \neq 0\}$$

$$\text{Cotangent} = \{(x, y) / y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \sin x \neq 0\}$$

ตัวอย่าง. จงหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงต่อไปนี้

1. $\sec \frac{\pi}{3}$

วิธีทำ จาก $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$

ดังนั้น $\sec \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{3}}$ ซึ่ง $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

จะได้ $\sec \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 \times \frac{2}{1} = 2$

$\therefore \sec \frac{\pi}{3} = 2$

2. $\csc \frac{\pi}{4}$

วิธีทำ $\csc \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 \times \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$\therefore \csc \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$

3. $\cot \frac{\pi}{6}$

วิธีทำ $\cot \frac{\pi}{6} = \frac{\cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{1} = \sqrt{3}$

$\therefore \cot \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright © by Chiang Mai University
All rights reserved

ใบงาน 15.1

จงหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆของจำนวนจริงต่อไปนี้

ตัวอย่าง $\frac{2\pi}{3}$

วิธีทำ จาก $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$

ดังนั้น $\csc \frac{2\pi}{3} = \csc(\pi - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{\sin(\pi - \frac{\pi}{3})} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\sec \frac{2\pi}{3} = \sec(\pi - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{\cos(\pi - \frac{\pi}{3})} = \frac{1}{(-\cos \frac{\pi}{3})} = \frac{1}{(-\frac{1}{2})} = 1 \times (-\frac{2}{1}) = -2$

$\cot \frac{2\pi}{3} = \cot(\pi - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{\tan(\pi - \frac{\pi}{3})} = \frac{1}{(-\tan \frac{\pi}{3})} = \frac{1}{(-\frac{1}{\sqrt{3}})} = 1 \times (-\frac{\sqrt{3}}{1}) = -\sqrt{3}$

1. $\frac{5\pi}{4}$

2. $\frac{11\pi}{6}$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright © by Chiang Mai University

All rights reserved

3. $\frac{3\pi}{2}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. $-\frac{7\pi}{3}$

.....

.....

.....

.....

.....

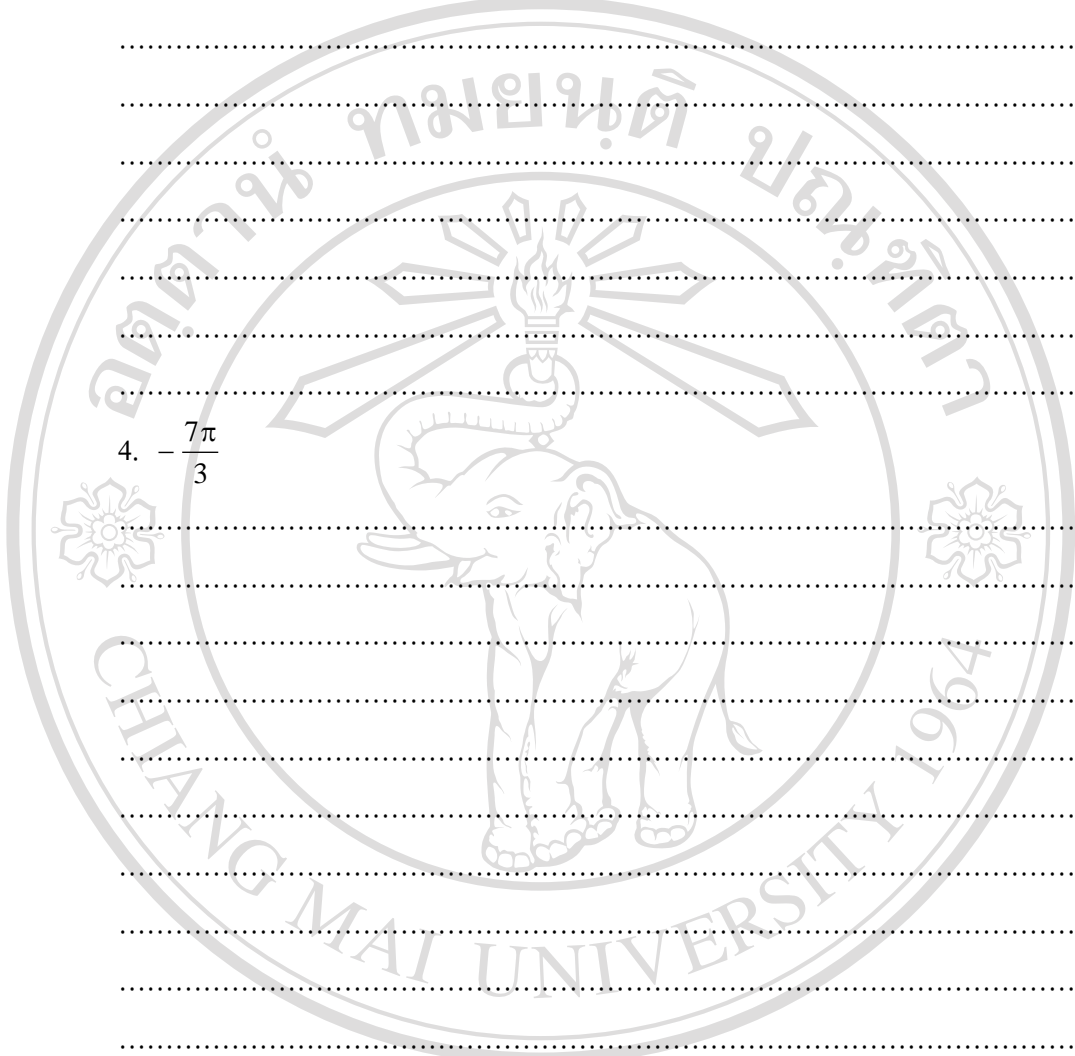
.....

.....

.....

.....

.....



ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
 Copyright © by Chiang Mai University
 All rights reserved

สรุป โดเมน และเรนจ์ ของฟังก์ชัน ทั้ง 6 ฟังก์ชัน

$D_{\sin e} = \{ \dots \}$, $R_{\sin e} = \{ \dots \}$
 $D_{\cos ine} = \{ \dots \}$, $R_{\cos ine} = \{ \dots \}$
 $D_{\tan gent} = \{ \dots \}$, $R_{\tan gent} = \{ \dots \}$
 $D_{\cos ecant} = \{ \dots \}$, $R_{\cos ecant} = \{ \dots \}$
 $D_{\sec ant} = \{ \dots \}$, $R_{\sec ant} = \{ \dots \}$
 $D_{\cot angent} = \{ \dots \}$, $R_{\cot angent} = \{ \dots \}$

เอกสารฝึกหัด 15.1

จงหาผลลัพธ์ต่อไปนี้

$$1. \sin \frac{7\pi}{3} \cos \frac{2\pi}{3} - \sec 2\pi \csc \frac{\pi}{3}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$2. \sin \frac{7\pi}{3} \csc \frac{2\pi}{3} - \sec \frac{\pi}{3} \cos \frac{5\pi}{3}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$3. \cot \frac{7\pi}{4} \csc \left(-\frac{5\pi}{6}\right) + \sec \frac{11\pi}{4} \cos \frac{14\pi}{3}$$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright © by Chiang Mai University

All rights reserved

.....

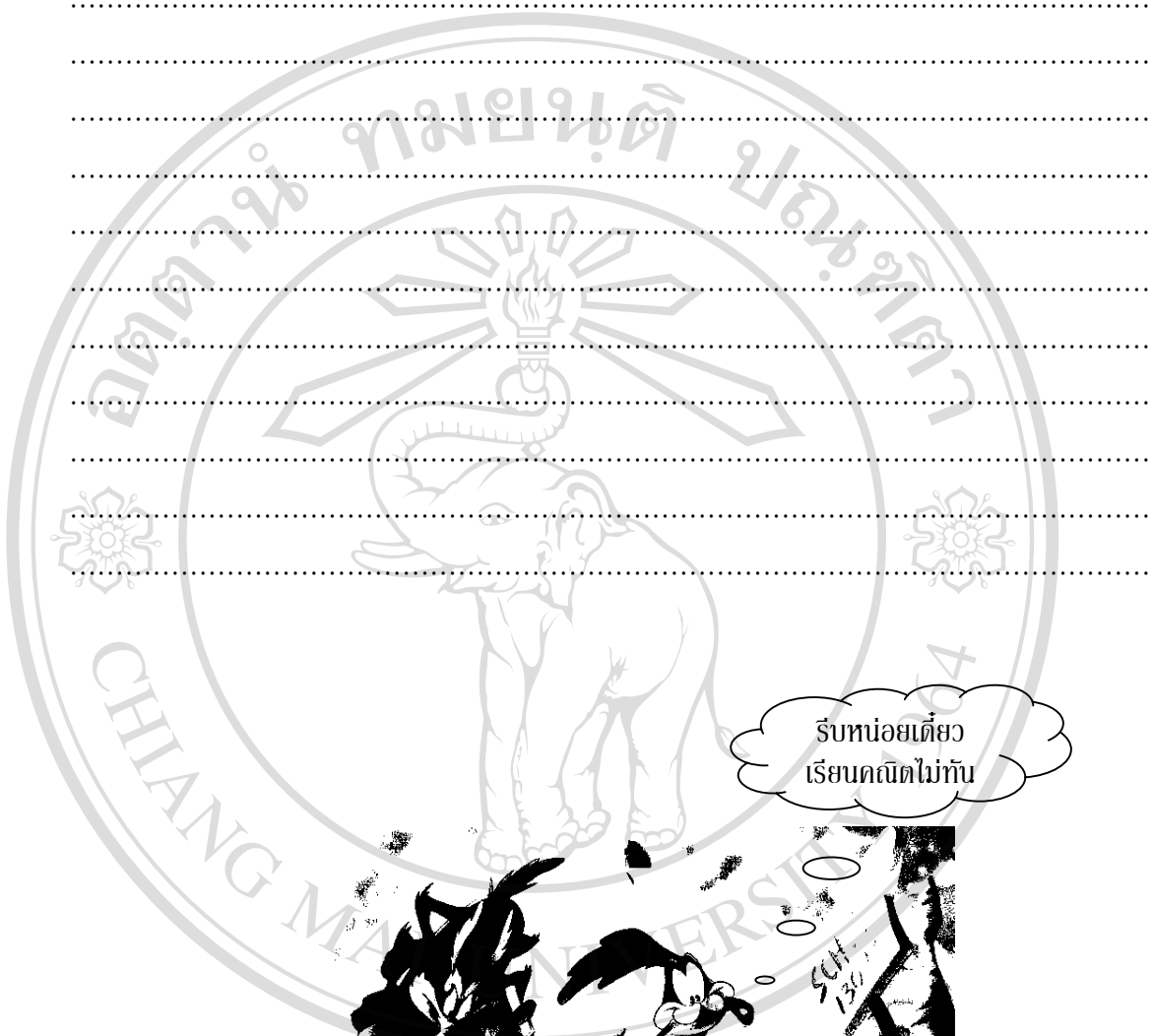
.....

.....

.....

.....

$$4. \cot \frac{7\pi}{2} \csc\left(-\frac{15\pi}{4}\right) + \sec \frac{11\pi}{4} \cos\left(-\frac{19\pi}{4}\right)$$



รับทนายเดี่ยวย
เรียนคณิตไม่ทัน



ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright © by Chiang Mai University
All rights reserved

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 16

เรื่อง การหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตาราง

จำนวน 1 คาบ

วิชาคณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค 012

ภาคเรียนที่ 2

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตารางได้

2. เนื้อหาและกิจกรรมการเรียนรู้

2.1 ครูทบทวนความรู้เกี่ยวกับค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมใด ๆ โดยการถาม – ตอบ นักเรียนเป็นรายบุคคล

2.2 ครูสนทนากับนักเรียนเกี่ยวกับค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมใด ๆ โดยให้นักเรียนพิจารณาจากแผ่นภาพ บนกระดาน ครูถามนักเรียนว่าเราจะหาค่าฟังก์ชันของมุม 35° ได้อย่างไร ? [พิจารณาจากแผ่นภาพของมุมในตำแหน่งมาตรฐานแล้วสร้างมุมที่มีขนาด 35° และเลือกจุดบนด้านสิ้นสุดของมุม 35° และใช้นิยามฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในตำแหน่งมาตรฐาน] จะเห็นว่าวิธีการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติวิธีการนี้ยังคงความยุ่งยากในการหาอยู่ ดังนั้นนักคณิตศาสตร์จึงได้สร้างตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติขึ้นเพื่อสะดวกในการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมใด ๆ แล้วครูแจกตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติให้กับนักเรียน ซึ่งตารางนี้ครูเป็นผู้รับมาจากตารางในหนังสือเรียนซึ่งตารางนี้จะเรียงลำดับของมุมจาก 0 องศา 0 ลิปดา ถึง 90 องศา 50 ลิปดา และมีค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้ง 6 ฟังก์ชัน ดังตาราง

ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

Degree	Radians	sine	cosine	tangent	cosecant	secant	cotangent
0	0	0.0000	1.0000	0.0000	-	1.0000	-
10	0.0029	0.0029	1.0000	0.0029	344.8276	1.0000	344.8276
20	0.0058	0.0058	1.0000	0.0058	172.4138	1.0000	172.4138
30	0.0087	0.0087	1.0000	0.0087	114.9425	1.0000	114.9425
40	0.0116	0.0116	0.9999	0.0116	86.2069	1.0001	86.2069
50	0.0145	0.0145	0.9999	0.0145	68.9655	1.0001	68.9655
1	0	0.0175	0.9998	0.0175	57.1429	1.0002	57.1429
10	0.0204	0.0204	0.9998	0.0204	49.0196	1.0002	49.0196
20	0.0233	0.0233	0.9997	0.0233	42.9185	1.0003	42.9185
30	0.0262	0.0262	0.9997	0.0262	38.1679	1.0003	38.1679
40	0.0291	0.0291	0.9996	0.0291	34.3643	1.0004	34.3643
50	0.0320	0.0320	0.9995	0.0320	31.2500	1.0005	31.2500
2	0	0.0349	0.9994	0.0349	28.6533	1.0006	28.6533
10	0.0378	0.0378	0.9993	0.0378	26.4550	1.0007	26.4550

2.3 ครูอธิบายการอ่านค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยเริ่มจากหน่วยย่อยของการวัดมุมในระบบ องศา กล่าวคือ 1 องศา เท่ากับ 60 ลิปดา เขียนแทนด้วย $1^\circ = 60'$ และ 1 ลิปดา เท่ากับ 60 ฟลิปดา เขียนแทนด้วย $1' = 60''$ จากนั้นครูให้นักเรียนทดลองบอกค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยครูอธิบายวิธีการหาค่าจากตาราง โดยให้ดูค่าจากฟังก์ชันที่ต้องการหาค่าแล้วดูว่าต้องการหาค่าฟังก์ชันของมุมใด เช่น $\sin 15^\circ = 0.2588$ $\cos 65^\circ 20' = 0.4173$ $\tan 24^\circ 40' = 0.4592$

ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ(ต่อ)

Degree	Radians	sine	cosine	tangent	cosecant	secant	cotangent
1	0	0.2588	0.9659	0.2679	3.8640	1.0353	3.7327
10	0.2647	0.2616	0.9652	0.2711	3.8226	1.0361	3.6887
20	0.2676	0.2644	0.9644	0.2742	3.7821	1.0369	3.6470
30	0.2705	0.2672	0.9636	0.2773	3.7425	1.0378	3.6062
40	0.2734	0.2700	0.9629	0.2804	3.7037	1.0385	3.5663
50	0.2763	0.2728	0.9621	0.2836	3.6657	1.0394	3.5261

ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ(ต่อ)

Degree	Radian	sine	cosine	tangent	cosecant	secant	cotangent
6	0	0.9063	0.4226	2.1447	1.1034	2.3663	0.4663
10	1.1374	0.9075	0.4200	2.1610	1.1019	2.3810	0.4627
20	1.1403	0.9088	0.4173	2.1776	1.1004	2.3964	0.4592
30	1.1432	0.9100	0.4147	2.1944	1.0989	2.4114	0.4557
40	1.1461	0.9112	0.4120	2.2113	1.0975	2.4272	0.4522
50	1.1490	0.9124	0.4094	2.2285	1.0960	2.4426	0.4487

ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ(ต่อ)

Degree	Radian	sine	cosine	tangent	cosecant	secant	cotangent
2	0	0.4068	0.9135	0.4453	2.4582	1.0947	2.2457
10	0.4218	0.4094	0.9124	0.4487	2.4426	1.0960	2.2287
20	0.4247	0.4120	0.9112	0.4522	2.4272	1.0975	2.2114
30	0.4276	0.4147	0.9100	0.4557	2.4114	1.0989	2.1944
40	0.4305	0.4173	0.9088	0.4592	2.3964	1.1004	2.1777
50	0.4334	0.4200	0.9075	0.4627	2.3810	1.1019	2.1612

2.4 ครูใช้การถามตอบเพื่อตรวจสอบว่านักเรียนสามารถเปิดตารางหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมใดๆ จากตารางได้ เช่น $\sin 12^\circ 30' = ? [0.2165]$, $\cos 75^\circ 10' = ? [0.2560]$
 $\tan 40^\circ 50' = ? [0.8642]$

2.5 ครุสนทนาซักถามกับนักเรียนว่า

ถ้า θ เพิ่มขึ้น ค่าของฟังก์ชันไซน์จะเป็นอย่างไร ? [เพิ่มขึ้น]

และ ถ้า θ เพิ่มขึ้น ค่าของฟังก์ชันโคไซน์จะเป็นอย่างไร ? [ลดลง]

2.6 ครุสนทนาซักถามนักเรียนว่าถ้าต้องการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณของมุมที่ไม่มีค่าในตารางจะมีวิธีการหาค่าฟังก์ชันได้อย่างไร ?

2.7 ครูบอกนักเรียนว่าจะมีวิธีการหาค่าฟังก์ชันจากตารางได้อยู่ 2 วิธี

คือ 1. เทียบบัญญัติไตรยางค์ 2. การเทียบสัดส่วน

ครูนำเสนอตัวอย่าง พร้อมอธิบายประกอบ

ตัวอย่าง 1. จงหาค่าของ $\cos 47^{\circ}43'$

วิธีทำ ใช้การเทียบบัญญัติไตรยางค์

จากตารางค่าของ $\cos 47^{\circ}43'$ อยู่ระหว่าง $\cos 47^{\circ}40'$ และ $\cos 47^{\circ}50'$

จากตารางค่าของ $\cos 47^{\circ}40' = 0.6734$ และ $\cos 47^{\circ}50' = 0.6713$

มุมเพิ่มขึ้น $10'$ ค่าฟังก์ชันลดลง $0.6734 - 0.6713 = 0.0021$

มุมเพิ่มขึ้น $3'$ ค่าฟังก์ชันลดลง $\frac{3' \times 0.0021}{10} = 0.00063 \approx 0.0006$

จะได้ว่า ค่าของ $\cos 47^{\circ}43' = \cos 47^{\circ}40' - 0.0006 = 0.6734 - 0.0006 = 0.6728$

ดังนั้นสรุปได้ว่าค่าของ $\cos 47^{\circ}43' = 0.6728$

ตัวอย่าง 2. จงหาค่าของ $\sin 32^{\circ}17'$

วิธีทำ $\sin 32^{\circ}10' = 0.5324$ และ $\sin 32^{\circ}20' = 0.5348$

จะได้ว่า มุมเพิ่มขึ้น $10'$ ค่าฟังก์ชันเพิ่มขึ้น 0.0024

ถ้ามุมเพิ่มขึ้น $7'$ ค่าฟังก์ชันเพิ่มขึ้น $\frac{0.0024 \times 7}{10} = 0.00168 \approx 0.0017$

ดังนั้น ค่าของ $\sin 32^{\circ}17' = \sin 32^{\circ}10' + 0.0017 = 0.5324 + 0.0017 = 0.5341$

$\therefore \sin 32^{\circ}17' = 0.5324$

ตัวอย่างที่ 3. จงหาค่าของ $\sin 40^{\circ}17'$

วิธีทำ ใช้การเทียบสัดส่วน

จาก $\sin 40^{\circ}10' = 0.6450$ และ $\sin 40^{\circ}20' = 0.6472$

มุมเพิ่มขึ้น $10'$ ค่าของฟังก์ชันเพิ่มขึ้น 0.0022

ถ้ามุมเพิ่มขึ้น $7'$ ค่าของฟังก์ชันเพิ่มขึ้น x

จะได้สัดส่วนเป็น $\frac{x}{7} = \frac{0.0022}{10}$ หรือ $\frac{x}{0.0022} = \frac{7}{10}$

ดังนั้น $x = \frac{0.0022 \times 7}{10} = 0.0014$

$$\therefore \sin 40^\circ 17' = \sin 40^\circ 10' + 0.0014 = 0.6450 + 0.0014 = 0.6464$$

2.8 ครูแจกเอกสารฝึกทักษะ 16.1 ให้กับนักเรียนเพื่อให้ นักเรียน ได้ฝึกทักษะการเปิดตาราง และวิธีการหาค่าฟังก์ชัน

เอกสารฝึกทักษะ 16.1

จงหาค่าฟังก์ชันต่อไปนี้จากตาราง

1. $\cos 40^\circ 17'$

เฉลย. $\cos 40^\circ 10' = 0.7661$ $\cos 40^\circ 20' = 0.7642$

$$\frac{x}{7} = \frac{0.0017}{10}$$

$$x = \frac{0.0017 \times 7}{10} = 0.00119 \approx 0.0012$$

ดังนั้น $\cos 40^\circ 17' = 0.7661 - 0.0012 = 0.7649$

2. $\tan 34^\circ 24'$

เฉลย. $\tan 34^\circ 20' = 0.6830$ $\tan 34^\circ 30' = 0.6872$

$$\frac{x}{4} = \frac{0.0042}{10}$$

$$x = \frac{0.0042 \times 4}{10} = 0.00168 \approx 0.0017$$

ดังนั้น $\tan 34^\circ 24' = 0.6830 + 0.0017 = 0.6847$

3. $\csc 71^\circ 37'$

เฉลย. $\csc 71^\circ 30' = 1.0545$ $\csc 71^\circ 40' = 1.0535$

$$\frac{x}{7} = \frac{0.0010}{10}$$

$$x = \frac{0.0010 \times 7}{10} = 0.0007$$

ดังนั้น $\csc 71^\circ 37' = 1.0545 - 0.0007 = 1.0538$

4. $\sec 64^\circ 47'$

เฉลย. $\sec 64^\circ 40' = 2.3370$ $\sec 64^\circ 50' = 2.3518$

$$\frac{x}{7} = \frac{0.0148}{10}$$

$$x = \frac{0.0148 \times 7}{10} = 0.01036 \approx 0.0107$$

ดังนั้น $\sec 64^\circ 47' = 2.3370 + 0.0107 = 2.3477$

2.9 ครุแจกเอกสารฝึกหัด 16.1 ให้นักเรียน ทำเป็นการบ้าน และส่งในตอนเช้าของวันต่อไป
ก่อนทำกิจกรรมหน้าเสาธง

เอกสารฝึกหัด 16.1

จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้จากตาราง

1. $\cos 62^\circ 45'$

เฉลย.

$$\cos 62^\circ 40' = 0.4592 \quad \cos 62^\circ 50' = 0.4566$$

$$\frac{x}{5} = \frac{0.0026}{10}$$

$$x = \frac{0.0026 \times 5}{10} = 0.0013$$

$$\therefore \cos 62^\circ 45' = \cos 62^\circ 40' - 0.0013 = 0.4592 - 0.0013 = 0.4579$$

2. $\tan 71^\circ 33'$

เฉลย.

$$\tan 71^\circ 30' = 2.9886 \quad \tan 71^\circ 40' = 3.0176$$

$$\frac{x}{3} = \frac{0.0290}{10}$$

$$x = \frac{0.0290 \times 3}{10} = 0.0087$$

$$\therefore \tan 71^\circ 33' = \tan 71^\circ 30' + 0.0087 = 2.9886 + 0.0087 = 2.9973$$

3. $\csc 13^\circ 42'$

เฉลย.

$$\csc 13^\circ 40' = 4.2337 \quad \csc 13^\circ 50' = 4.1824$$

$$\frac{x}{2} = \frac{0.0513}{10}$$

$$x = \frac{0.0513 \times 2}{10} = 0.01026 \approx 0.0103$$

$$\therefore \csc 13^\circ 42' = \csc 13^\circ 40' - 0.0103 = 4.2337 - 0.0103 = 4.2234$$

4. $\sec 47^\circ 28'$

เฉลย.

$$\sec 47^\circ 20' = 1.4756 \quad \sec 47^\circ 30' = 1.4802$$

$$\frac{x}{8} = \frac{0.0046}{10}$$

$$x = \frac{0.0046 \times 8}{10} = 0.00368 \approx 0.0037$$

$$\therefore \sec 47^\circ 28' = \sec 47^\circ 20' + 0.0037 = 1.4756 + 0.0037 = 1.4793$$

$$5. \cot 37^\circ 32'$$

เฉลย.

$$\cot 37^\circ 30' = 1.3033 \quad \cot 37^\circ 40' = 1.2955$$

$$\frac{x}{2} = \frac{0.0078}{10}$$

$$x = \frac{0.0078 \times 2}{10} = 0.00156 \approx 0.0016$$

$$\therefore \cot 37^\circ 32' = \cot 37^\circ 30' - 0.0016 = 1.3033 - 0.0016 = 1.3017$$

3. สื่อการเรียนการสอน

1.1 เอกสารประกอบการเรียนการสอน

1.2 ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

1.3 เอกสารฝึกทักษะ 16.1

1.4 เอกสารฝึกหัด 16.1

4. การวัดและการประเมินผล

4.1 การวัดผล

4.1.1 จากการสังเกตการทำกิจกรรมในชั้นเรียน และการตอบคำถามของครู

4.1.2 จากการทำเอกสารฝึกทักษะ 16.1

4.1.3 จากการทำเอกสารฝึกหัด 16.1

4.2 การประเมินผล

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright © by Chiang Mai University

All rights reserved

เอกสารประกอบการเรียนการสอน คาบที่ 16

ตัวอย่างตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

Degree	Radians	sine	cosine	tangent	cosecant	secant	cotangent
0	0	0.0000	1.0000	0.0000	หาค่าไม่ได้	1.0000	หาค่าไม่ได้
10	0.0029	0.0029	1.0000	0.0029	344.8276	1.0000	344.8276
20	0.0058	0.0058	1.0000	0.0058	172.4138	1.0000	172.4138
30	0.0087	0.0087	1.0000	0.0087	114.9425	1.0000	114.9425
40	0.0116	0.0116	0.9999	0.0116	86.2069	1.0001	86.2069
50	0.0145	0.0145	0.9999	0.0145	68.9655	1.0001	68.9655
1	0	0.0175	0.9998	0.0175	57.1429	1.0002	57.1429
10	0.0204	0.0204	0.9998	0.0204	49.0196	1.0002	49.0196
20	0.0233	0.0233	0.9997	0.0233	42.9185	1.0003	42.9185
30	0.0262	0.0262	0.9997	0.0262	38.1679	1.0003	38.1679
40	0.0291	0.0291	0.9996	0.0291	34.3643	1.0004	34.3643
50	0.0320	0.0320	0.9995	0.0320	31.2500	1.0005	31.2500
2	0	0.0349	0.9994	0.0349	28.6533	1.0006	28.6533
10	0.0378	0.0378	0.9993	0.0378	26.4550	1.0007	26.4550
20	0.0407	0.0407	0.9992	0.0407	24.5700	1.0008	24.5700
30	0.0436	0.0436	0.9990	0.0436	22.9358	1.0010	22.9358

การอ่านค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ เริ่มจากหน่วยย่อยของการวัดมุมในระบบองศา กล่าวคือ 1 องศา เท่ากับ 60 ลิปดา เขียนแทนด้วย $1^\circ = 60'$ และ 1 ลิปดา เท่ากับ 60 เฟิลิปดา เขียนแทนด้วย $1' = 60''$ จากนั้นครูให้นักเรียนทดลองบอกค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยครูอธิบายวิธีการหาค่าจากตารางโดยให้ดูค่าจากฟังก์ชันที่ต้องการหาค่าแล้วดูว่าต้องการหาค่าฟังก์ชันของมุมใด

เช่น $\sin 15^\circ = 0.2588$ หรือ $\sin 15^\circ 0' = 0.2588$

ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ(ต่อ)

Degree	Radians	sine	cosine	tangent	cosecant	secant	cotangent
15	0	0.2588	0.9659	0.2679	3.8640	1.0353	3.7327
10	0.2647	0.2616	0.9652	0.2711	3.8226	1.0361	3.6887
20	0.2676	0.2644	0.9644	0.2742	3.7821	1.0369	3.6470
30	0.2705	0.2672	0.9636	0.2773	3.7425	1.0378	3.6062
40	0.2734	0.2700	0.9629	0.2804	3.7037	1.0385	3.5663
50	0.2763	0.2728	0.9621	0.2836	3.6657	1.0394	3.5261

$\cos 65^\circ 20' = 0.4173$

ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ(ต่อ)

Degree	Radians	sine	cosine	tangent	cosecant	secant	cotangent
65	0	1.1345	0.9063	0.4226	2.1447	1.1034	2.3663
10		1.1374	0.9075	0.4200	2.1610	1.1019	2.3810
20		1.1403	0.9088	0.4173	2.1776	1.1004	2.3964
30		1.1432	0.9100	0.4147	2.1944	1.0989	2.4114
40		1.1461	0.9112	0.4120	2.2113	1.0975	2.4272
50		1.1490	0.9124	0.4094	2.2285	1.0960	2.4426

$\tan 24^\circ 40' = 0.4592$

ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ(ต่อ)

Degree	Radians	sine	cosine	tangent	cosecant	secant	cotangent
24	0	0.4189	0.4068	0.9135	0.4453	2.4582	1.0947
10		0.4218	0.4094	0.9124	0.4487	2.4426	1.0960
20		0.4247	0.4120	0.9112	0.4522	2.4272	1.0975
30		0.4276	0.4147	0.9100	0.4557	2.4114	1.0989
40		0.4305	0.4173	0.9088	0.4592	2.3964	1.1004
50		0.4334	0.4200	0.9075	0.4627	2.3810	1.1019

นักเรียนสามารถเปิดตารางหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมใดๆ จากตารางได้ เช่น

$\sin 12^\circ 30' = \dots\dots\dots$, $\cos 75^\circ 10' = \dots\dots\dots$ $\tan 40^\circ 50' = \dots\dots\dots$

ถ้า θ เพิ่มขึ้น ค่าของฟังก์ชันไซน์จะเป็นอย่างไร ? $\dots\dots\dots$

และ ถ้า θ เพิ่มขึ้น ค่าของฟังก์ชันโคไซน์จะเป็นอย่างไร ? $\dots\dots\dots$

วิธีการหาค่าฟังก์ชันของมุมที่ไม่ได้กำหนดไว้ในตารางจากตารางมีวิธีหาอยู่ 2 วิธี

- คือ 1. เทียบบัญญัติไตรยางค์ 2. การเทียบสัดส่วน

ตัวอย่าง 1. จงหาค่าของ $\cos 47^\circ 43'$

วิธีทำ ใช้การเทียบบัญญัติไตรยางค์

จากตารางค่าของ $\cos 47^\circ 43'$ อยู่ระหว่าง $\cos 47^\circ 40'$ และ $\cos 47^\circ 50'$

จากตารางค่าของ $\cos 47^\circ 40' = 0.6734$ และ $\cos 47^\circ 50' = 0.6713$

มุมเพิ่มขึ้น $10'$ ค่าฟังก์ชันลดลง $0.6734 - 0.6713 = 0.0021$

มุมเพิ่มขึ้น $3'$ ค่าฟังก์ชันลดลง $\frac{3' \times 0.0021}{10} = 0.00063 \approx 0.0006$

จะได้ว่า ค่าของ $\cos 47^\circ 43' = \cos 47^\circ 40' - 0.0006 = 0.6734 - 0.0006 = 0.6728$

ดังนั้นสรุปได้ว่าค่าของ $\cos 47^\circ 43' = 0.6728$

ตัวอย่าง 2. จงหาค่าของ $\sin 32^{\circ}17'$

วิธีทำ $\sin 32^{\circ}10' = 0.5324$

$$\sin 32^{\circ}20' = 0.5348$$

จะได้ว่า มุมเพิ่มขึ้น 10 ค่าฟังก์ชันเพิ่มขึ้น 0.0024

$$\text{ถ้ามุมเพิ่มขึ้น 7 ค่าฟังก์ชันเพิ่มขึ้น } \frac{0.0024 \times 7}{10} = 0.00168 \approx 0.0017$$

$$\text{ดังนั้น ค่าของ } \sin 32^{\circ}17' = \sin 32^{\circ}10' + 0.0017 = 0.5324 + 0.0017 = 0.5341$$

$$\therefore \sin 32^{\circ}17' = 0.5324$$

ตัวอย่างที่ 3. จงหาค่าของ $\sin 40^{\circ}17'$

วิธีทำ ใช้การเทียบสัดส่วน

$$\text{จาก } \sin 40^{\circ}10' = 0.6450 \quad \text{และ} \quad \sin 40^{\circ}20' = 0.6472$$

มุมเพิ่มขึ้น 10 ค่าของฟังก์ชันเพิ่มขึ้น 0.0022

ถ้ามุมเพิ่มขึ้น 7 ค่าของฟังก์ชันเพิ่มขึ้น x

$$\text{จะได้สัดส่วนเป็น } \frac{x}{7} = \frac{0.0022}{10} \quad \text{หรือ} \quad \frac{x}{0.0022} = \frac{7}{10}$$

$$\text{ดังนั้น } x = \frac{0.0022 \times 7}{10} = 0.0014$$

$$\therefore \sin 40^{\circ}17' = \sin 40^{\circ}10' + 0.0014 = 0.6450 + 0.0014 = 0.6464$$

เอกสารถัดที่ 16.1

จงหาค่าฟังก์ชันต่อไปนี้จากตาราง

1. $\cos 40^{\circ}17'$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright © by Chiang Mai University

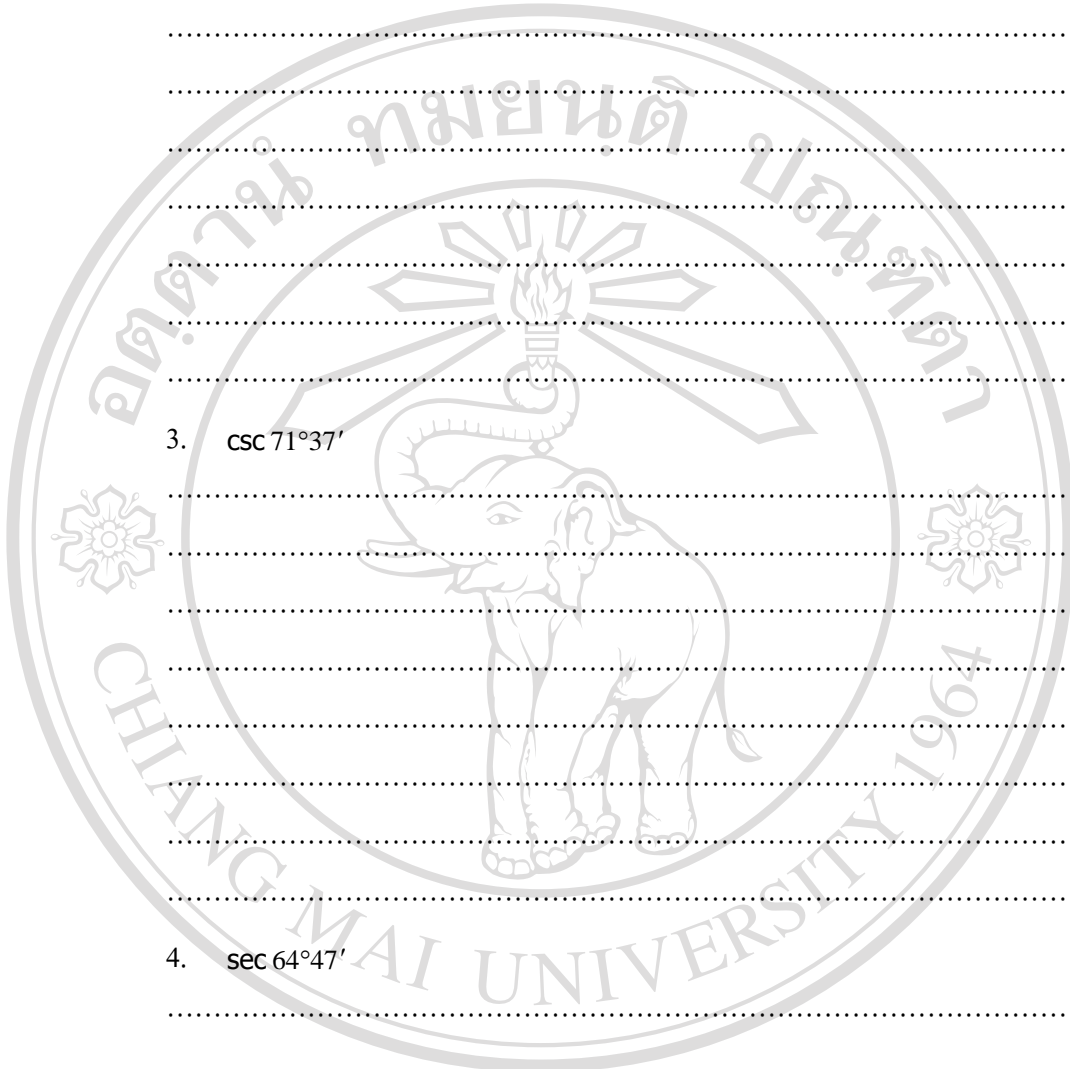
All rights reserved

.....

2. $\tan 34^{\circ}24'$

3. $\csc 71^{\circ}37'$

4. $\sec 64^{\circ}47'$



ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright © by Chiang Mai University
All rights reserved

เอกสารฝึกหัด 16.1

จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้จากตาราง

ชื่อ.....

ชั้น ม. 4 / 1 เลขที่

1. $\cos 62^{\circ}45'$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. $\tan 71^{\circ}33'$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. $\csc 13^{\circ}42'$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright © by Chiang Mai University

All rights reserved

.....

.....

.....

.....

.....

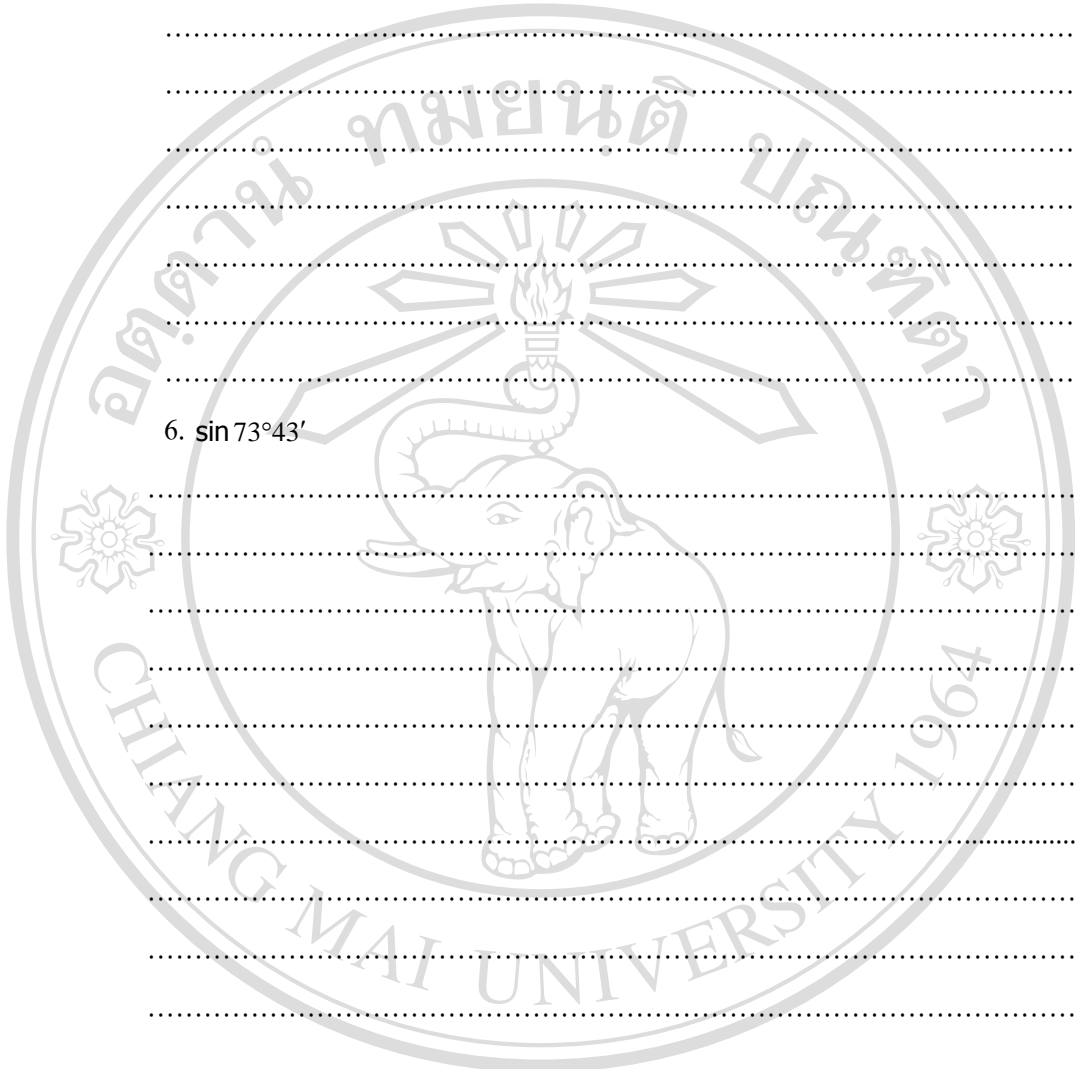
.....

.....

.....

5. $\cot 37^\circ 32'$

.....
.....



6. $\sin 73^\circ 43'$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่



Copyright © by Chiang Mai University
All rights reserved



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 17

เรื่อง การหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตาราง

จำนวน 1 คาบ

วิชาคณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค 012

ภาคเรียนที่ 2

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตารางได้

2. เนื้อหาและกิจกรรมการเรียนรู้การสอน

2.1 ครูทบทวนความรู้เกี่ยวกับการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตารางโดยการถาม - ตอบ นักเรียนเป็นรายบุคคล

เช่น ค่าของ $\sin 11^{\circ}10' = ?$ [0.1937] $\cos 23^{\circ}20' = ?$ [0.9182]

$\tan 41^{\circ}50' = ?$ [1.1171] $\cot 71^{\circ}30' = ?$ [0.3281]

$\csc 46^{\circ}10' = ?$ [1.3862] $\sec 85^{\circ}40' = ?$ [13.2275]

2.2 ครูสนทนาซักถามกับนักเรียนว่าถ้าต้องการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่มากกว่า 90 องศา จากตารางจะมีวิธีการหาได้อย่างไร? [หาโดยการอาศัยสูตร และใช้ตาราง]

2.3 ครูนำเสนอตัวอย่างพร้อมอธิบายประกอบ

ตัวอย่าง 1. จงหาค่าของ $\sin 135^{\circ}10'$

วิธีทำ จากความรู้เดิม $\sin(180^{\circ} - \theta) = \sin \theta$ แล้ว $\sin 135^{\circ}10'$ สามารถทำให้อยู่ใน

รูป $\sin(180^{\circ} - \theta)$ ได้อย่างไร? $\sin(180^{\circ} - 135^{\circ}10') = \sin 44^{\circ}40'$ จากการเปิด

ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ จะได้ว่า $\sin 44^{\circ}40' = 0.7030$

ดังนั้น $\sin 135^{\circ}10' = \sin 44^{\circ}40' = 0.7030$

ตัวอย่าง 2. จงหาค่าของ $\cos(-178^{\circ}16')$

วิธีทำ จาก $\cos(-\theta) = \cos \theta$ ดังนั้น $\cos(-178^{\circ}16') = \cos 178^{\circ}16'$

จะได้ $\cos(180^{\circ} - 178^{\circ}16') = -\cos 1^{\circ}44'$

จากตารางจะได้ $\cos 1^{\circ}40' = 0.9996$ $\cos 1^{\circ}50' = 0.9995$

มุมเพิ่มขึ้น 10 ค่าของฟังก์ชันลดลง 0.0001

ถ้ามุมเพิ่มขึ้น 4 ค่าของฟังก์ชันลดลง $\frac{0.0001 \times 4}{10} = 0.00004$

$\therefore \cos 1^{\circ}44' = \cos 1^{\circ}40' - 0.00004 = 0.9996 - 0.00004 = 0.99956$

ดังนั้น $-\cos 1^{\circ}44' = -0.99956$

2.4 ครูแบ่งนักเรียนออกเป็น 9 กลุ่ม แล้วแจกใบงาน 17.1 ให้แต่ละกลุ่มช่วยกันหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมใดๆ จากตาราง

ใบงาน 17.1

จงหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้โดยใช้ตาราง

1. $\sin 164^\circ 13'$

เฉลย. $\sin 164^\circ 13' = \sin(180^\circ - 164^\circ 13') = \sin 15^\circ 37'$

จากตาราง $\sin 15^\circ 30' = 0.2672$ $\sin 15^\circ 40' = 0.2700$

$$\frac{x}{7} = \frac{0.0028}{10} \Rightarrow x = \frac{0.0028 \times 7}{10} = 0.00196 \approx 0.0020$$

$$\therefore \sin 15^\circ 37' = 0.2672 + 0.0020 = 0.2692$$

นั่นคือ $\sin 164^\circ 13' = 0.2692$

2. $\cos 215^\circ 23'$

เฉลย. $\cos 215^\circ 23' = \cos(180^\circ + 35^\circ 23') = -\cos 35^\circ 23'$

จากตาราง $\cos 35^\circ 20' = 0.8158$ $\cos 35^\circ 30' = 0.8141$

$$\frac{x}{3} = \frac{0.0017}{10} \Rightarrow x = \frac{0.0017 \times 3}{10} = 0.00051 \approx 0.0005$$

$$\therefore \cos 35^\circ 23' = 0.8158 - 0.0005 = 0.8153$$

นั่นคือ $-\cos 35^\circ 23' = -0.8153$

ดังนั้น $\cos 215^\circ 23' = -0.8153$

3. $\sin(-315^\circ 34')$

จาก $\sin(-\theta) = -\sin \theta$ จะได้ $\sin(-315^\circ 34') = -\sin(315^\circ 34')$

เฉลย. $-\sin(315^\circ 34') = -\sin(360^\circ - 315^\circ 34') = -(-\sin 44^\circ 16') = \sin 44^\circ 16'$

จากตาราง $\sin 44^\circ 10' = 0.6968$ $\sin 44^\circ 20' = 0.6989$

$$\frac{x}{6} = \frac{0.0021}{10} \Rightarrow x = \frac{0.0021 \times 6}{10} \approx 0.0013$$

$$\therefore \sin 44^\circ 16' = 0.6968 + 0.0013 = 0.6981$$

นั่นคือ $\sin(-315^\circ 34') = 0.6981$

4. $\cos(-341^\circ 37')$

เฉลย. $\cos(-341^\circ 37') = \cos 341^\circ 37' = \cos(360^\circ - 341^\circ 37') = \cos 18^\circ 13'$

จากตาราง $\cos 18^\circ 10' = 0.9501$ $\cos 18^\circ 20' = 0.9492$

$$\frac{x}{3} = \frac{0.0009}{10} \Rightarrow x = \frac{0.0009 \times 3}{10} = 0.00027 \approx 0.0003$$

$$\therefore \cos 18^\circ 13' = 0.9501 - 0.0003 = 0.9498$$

นั่นคือ $\cos(-341^\circ 37') = 0.9498$

2.5 ครูแจกเอกสารฝึกหัด 17.1 และแบบบันทึกการเรียนรู้ให้นักเรียนทำเป็นการบ้าน แล้วส่งตอนเช้าก่อนทำกิจกรรมหน้าเสาธง

เอกสารฝึกหัด 17.1

จงหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

1. $\sin 138^{\circ}33'$

เฉลย. $\sin 138^{\circ}33' = \sin(180^{\circ} - 138^{\circ}33') = \sin 41^{\circ}27'$

จากตาราง $\sin 41^{\circ}20' = 0.6604$ $\sin 41^{\circ}30' = 0.6626$

$$\frac{x}{7} = \frac{0.0022}{10} \Rightarrow x = \frac{0.0022 \times 7}{10} = 0.00154 \approx 0.0015$$

$$\therefore \sin 41^{\circ}27' = 0.6604 + 0.0015 = 0.6619$$

นั่นคือ $\sin 138^{\circ}33' = 0.6619$

2. $\sin(-205^{\circ}34')$

เฉลย. $\sin(-205^{\circ}34') = -\sin 205^{\circ}34' = -\sin(180^{\circ} + 25^{\circ}34')$
 $= -(-\sin 25^{\circ}34') = \sin 25^{\circ}34'$

จากตาราง $\sin 25^{\circ}30' = 0.4305$ $\sin 25^{\circ}40' = 0.4332$

$$\frac{x}{4} = \frac{0.0027}{10} \Rightarrow x = \frac{0.0027 \times 4}{10} = 0.00108 \approx 0.0011$$

$$\therefore \sin 25^{\circ}34' = 0.4305 + 0.0011 = 0.4316$$

นั่นคือ $\sin(-205^{\circ}34') = 0.4316$

3. $\cos(-257^{\circ}46')$

เฉลย

$$\cos(-257^{\circ}46') = \cos 257^{\circ}46' = -\cos(360^{\circ} - 257^{\circ}46') = \cos 102^{\circ}14' = -\cos 77^{\circ}46'$$

จากตาราง $\cos 77^{\circ}40' = 0.2136$ $\cos 77^{\circ}50' = 0.2108$

$$\frac{x}{6} = \frac{0.0028}{10} \Rightarrow x = \frac{0.0028 \times 6}{10} = 0.00168 \approx 0.0017$$

$$\therefore \cos 77^{\circ}46' = 0.2136 - 0.0017 = 0.2119$$

ดังนั้น $-\cos 77^{\circ}46' = -0.2119$

นั่นคือ $\cos(-257^{\circ}46') = -0.2119$

4. $\cos 235^{\circ}43'$

เฉลย $\cos 235^{\circ}43' = \cos(180^{\circ} + 55^{\circ}43') = -\cos 55^{\circ}43'$

จากตาราง $\cos 55^{\circ}40' = 0.5640$ $\cos 55^{\circ}50' = 0.5616$

$$\frac{x}{3} = \frac{0.0024}{10} \Rightarrow x = \frac{0.0024 \times 3}{10} = 0.00072 \approx 0.0007$$

$$\therefore -\cos 55^{\circ}43' = 0.5640 - 0.0007 = -0.5633$$

นั่นคือ $\cos 235^{\circ}43' = -0.5633$

3. สื่อการเรียนการสอน

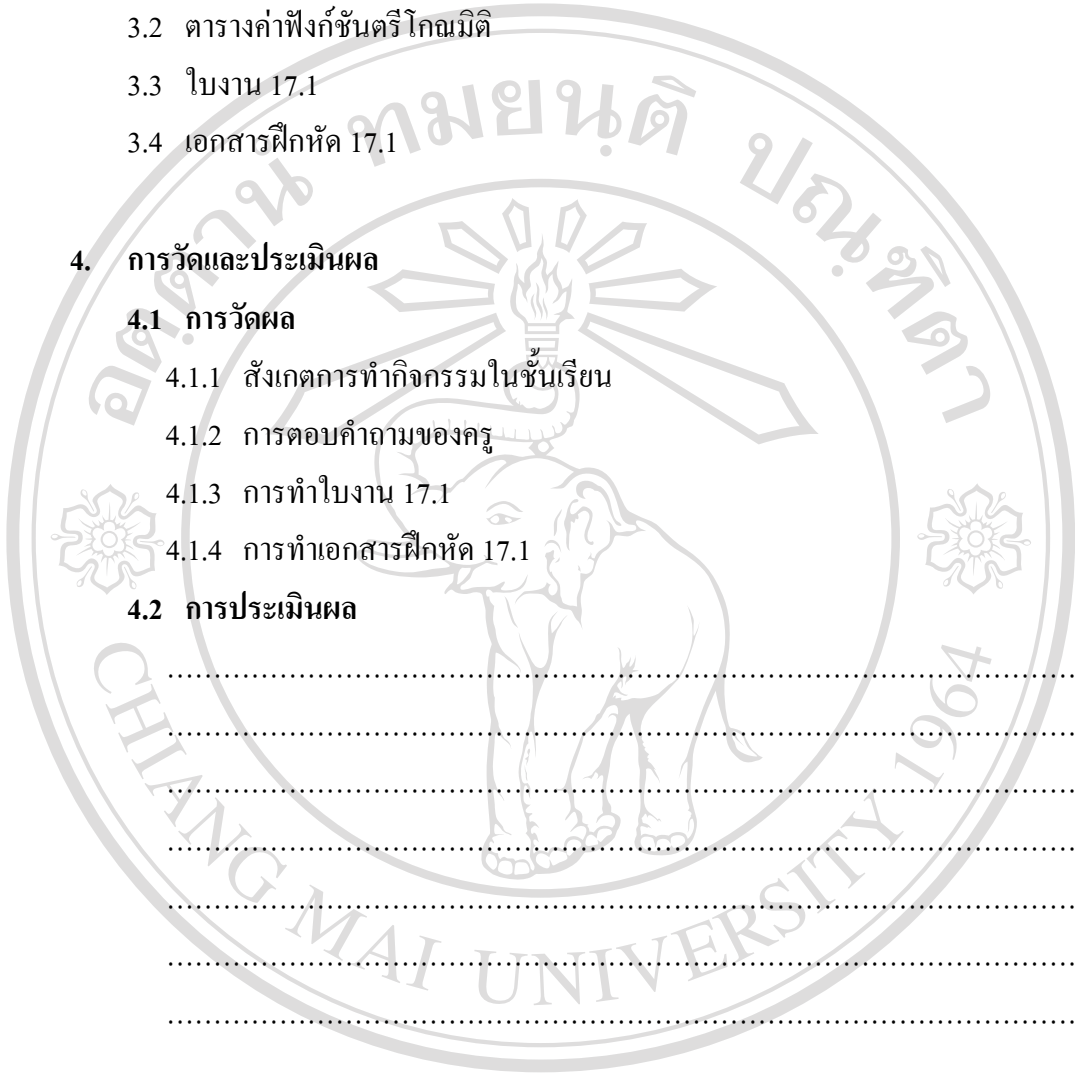
- 3.1 เอกสารประกอบการเรียนการสอน
- 3.2 ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ
- 3.3 ใบงาน 17.1
- 3.4 เอกสารฝึกหัด 17.1

4. การวัดและประเมินผล

4.1 การวัดผล

- 4.1.1 สังเกตการทำกิจกรรมในชั้นเรียน
- 4.1.2 การตอบคำถามของครู
- 4.1.3 การทำใบงาน 17.1
- 4.1.4 การทำเอกสารฝึกหัด 17.1

4.2 การประเมินผล



ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright © by Chiang Mai University
All rights reserved

เอกสารประกอบการเรียนการสอน คาบที่ 17

ค่าของ $\sin 11^{\circ}10' = \dots\dots\dots$ $\cos 23^{\circ}20' = \dots\dots\dots$
 $\tan 41^{\circ}50' = \dots\dots\dots$ $\cot 71^{\circ}30' = \dots\dots\dots$
 $\csc 46^{\circ}10' = \dots\dots\dots$ $\sec 85^{\circ}40' = \dots\dots\dots$

ค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่มากกว่า 90 องศา จากตารางจะมีวิธีการหาได้โดยการอาศัยสูตร และใช้ตาราง

ตัวอย่าง 1. จงหาค่าของ $\sin 135^{\circ}10'$

วิธีทำ จากความรู้เดิม $\sin(180^{\circ} - \theta) = \sin \theta$ แล้ว $\sin 135^{\circ}10'$ สามารถทำให้อยู่ในรูป $\sin(180^{\circ} - \theta)$ ได้อย่างไร? $\sin(180^{\circ} - 135^{\circ}10') = \sin 44^{\circ}40'$ จากการเปิดตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ จะได้ว่า $\sin 44^{\circ}40' = 0.7030$

$$\text{ดังนั้น } \sin 135^{\circ}10' = \sin 44^{\circ}40' = 0.7030$$

ตัวอย่าง 2. จงหาค่าของ $\cos(-178^{\circ}16')$

วิธีทำ จาก $\cos(-\theta) = \cos \theta$ ดังนั้น $\cos(-178^{\circ}16') = \cos 178^{\circ}16'$

$$\text{จะได้ } \cos(180^{\circ} - 178^{\circ}16') = -\cos 1^{\circ}44'$$

$$\text{จากตารางจะได้ } \cos 1^{\circ}40' = 0.9996 \quad \cos 1^{\circ}50' = 0.9995$$

มุมเพิ่มขึ้น 10 ค่าของฟังก์ชันลดลง 0.0001

$$\text{ถ้ามุมเพิ่มขึ้น 4 ค่าของฟังก์ชันลดลง } \frac{0.0001 \times 4}{10} = 0.00004$$

$$\therefore \cos 1^{\circ}44' = \cos 1^{\circ}40' - 0.00004 = 0.9996 - 0.00004 = 0.99956$$

$$\text{ดังนั้น } -\cos 1^{\circ}44' = -0.99956$$

ใบงาน 17.1

จงหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้โดยใช้ตาราง

1. $\sin 164^{\circ}13'$

.....

.....

.....

.....

2. $\cos 215^{\circ}23'$

.....

.....

.....

.....

3. $\sin(-315^{\circ}34')$

.....

.....

.....

.....

4. $\cos(-341^{\circ}37')$

.....

.....

.....

.....

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright © by Chiang Mai University

All rights reserved

.....

.....

.....

.....

เอกสารฝึกหัด 17.1

ชื่อ.....

จงหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

ชั้น ม. 4 / 1 เลขที่

1. $\sin 138^{\circ}33'$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. $\sin(-205^{\circ}34')$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. $\cos(-257^{\circ}46')$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. $\cos 235^{\circ}43'$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright © by Chiang Mai University

All rights reserved

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 18

เรื่อง กราฟของฟังก์ชัน ไซน์ โคไซน์ และ แทนเจน

จำนวน 1 คาบ

วิชาคณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค 012

ภาคเรียนที่ 2

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถ

1. บอกค่าของฟังก์ชัน ไซน์ โคไซน์ ของจำนวนจริงและมุมต่างๆ ได้
2. บอกคาบและแอมพลิจูดของฟังก์ชัน ไซน์ โคไซน์ ได้
3. เขียนกราฟของฟังก์ชัน ไซน์ โคไซน์ ได้

2. เนื้อหาและกิจกรรมการเรียนรู้การสอน

2.1 ครูคิดแผนสรุปค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติบนกระดาน แบ่งนักเรียนออกเป็น 9 กลุ่ม แล้วแจกเอกสารประกอบการเรียนการสอนให้กับนักเรียนทุกคน

2.2 ให้นักเรียนศึกษาเอกสารประกอบกับฟังการอธิบายจากครูผู้สอน และทำกิจกรรมในเอกสารประกอบการสอนที่ได้แจกให้

กิจกรรม

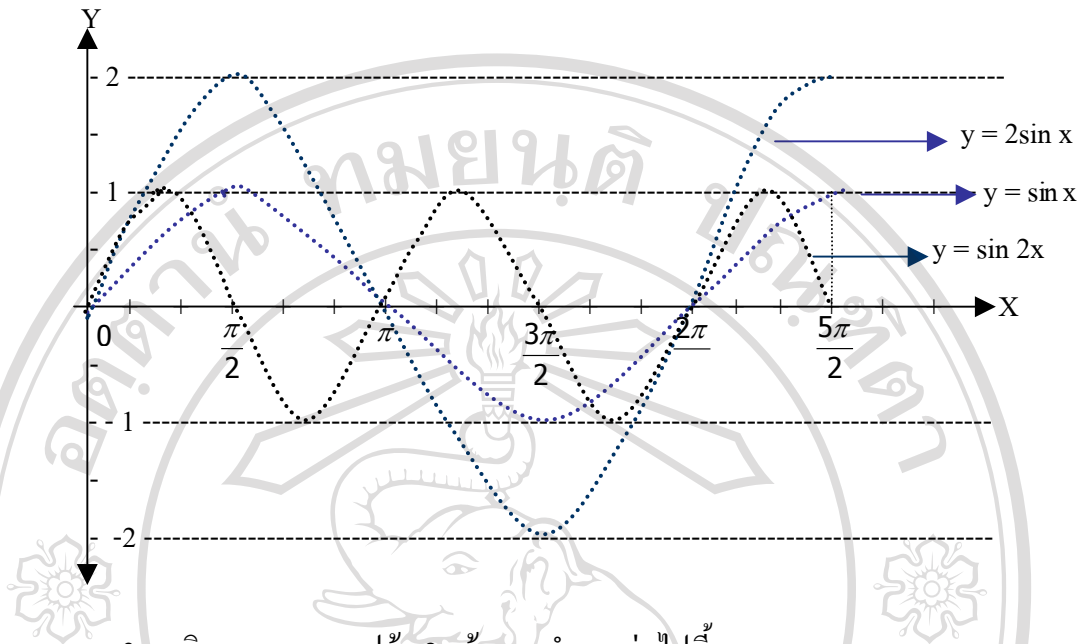
1. จงเติมตารางให้สมบูรณ์

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y = sin x	0	0.5	0.8	1	0.8	0.5	0	-0.5	-0.8	-1	-0.8	-0.5	0

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y = 2sin x	0	1	1.6	2	1.6	1	0	-1	-1.6	-2	-1.6	-1	0

X	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$
y = sin 2x	0	0.8	1	0.8	0	-0.8	-1	-0.8	0	0.8	1	0.8	0

2. จงเขียนกราฟของฟังก์ชันทั้งสามโดยใช้ตารางจากข้อ 1.



3. จงพิจารณาจากกราฟข้อ 2 แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

3.1 กราฟของฟังก์ชันทั้งสามเหมือนกันอย่างไร ? (เป็นลูกคลื่นและผ่านจุด (0,0) เหมือนกัน)

3.2 กราฟ $y = 2\sin x$ และ $y = \sin x$ เหมือนกันอย่างไร ? (เป็นลูกคลื่น , ความยาวคลื่นเท่ากัน และ ผ่านจุด (0,0) เหมือนกัน) ต่างกันอย่างไร ? (ความสูงของคลื่นต่างกัน)

3.3 กราฟ $y = 2\sin x$ และ $y = \sin 2x$ เหมือนกันอย่างไร ? (เป็นลูกคลื่น) ต่างกันอย่างไร ? (ความสูงของคลื่นและความยาวคลื่น ต่างกัน)

3.4 กราฟ $y = \sin x$ และ $y = \sin 2x$ เหมือนกันอย่างไร ? (เป็นลูกคลื่นผ่านจุด (0,1) และความสูงของคลื่นเท่ากัน) ต่างกันอย่างไร ? (ความยาวคลื่นต่างกัน)

3.5 ถ้าสมการฟังก์ชัน คือ $y = a \sin bx$ นักเรียนคิดว่า a จะบอกลักษณะกราฟส่วนใด ? (ความสูงของกราฟ เรียกว่า แอมพลิจูด) b จะบอกลักษณะกราฟส่วนใด ? (ความยาวของกราฟ เรียกว่า คาบ)

2.3 ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปเกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชันไซน์ ดังนี้
กราฟของฟังก์ชัน $y = a \sin bx$ จะมีลักษณะดังนี้

1. เป็นลูกคลื่นผ่านจุด (0,0)
2. มีแอมพลิจูด คือ $|a|$
3. มีลักษณะเป็นคาบโดย 1 คาบยาว $\frac{2\pi}{b}$ หน่วย

2.4 ครูให้นักเรียนดูเอกสารประกอบการเรียนการสอนประกอบกับอธิบายเกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชันโคไซน์ ดังนี้

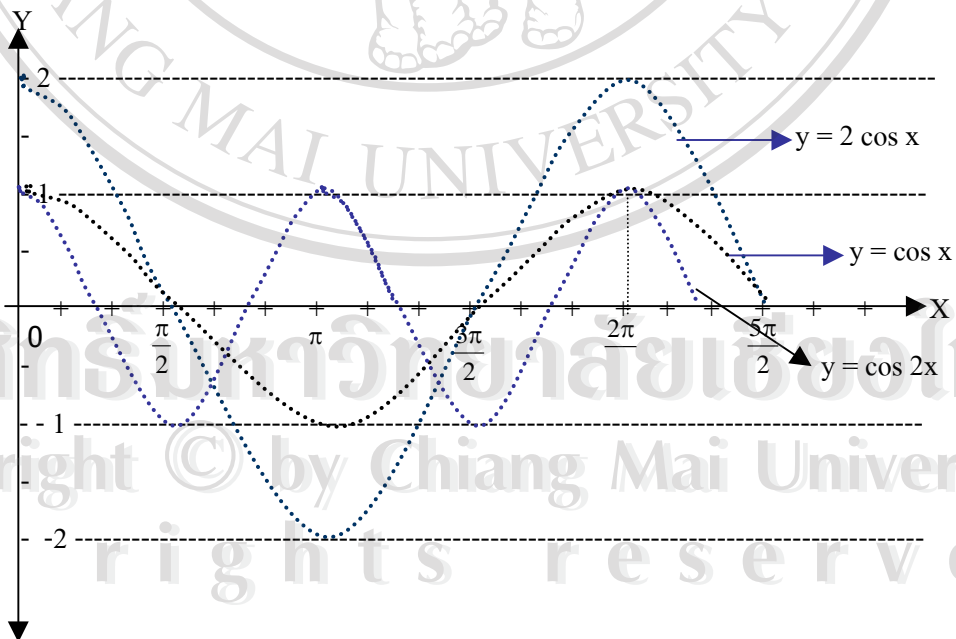
1. จงเติมตารางให้สมบูรณ์

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y=cos x	1	0.8	0.5	0	-0.5	-0.8	-1	-0.8	-0.5	0	0.5	0.8	1

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y=2cos x	2	1.6	1	0	-1	-1.6	-2	-1.6	-1	0	1	1.6	2

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y=cos ² x	1	0.5	0	-0.5	-1	-0.5	0	0.5	1	0.5	0	-0.5	-1

2. จงเขียนกราฟของฟังก์ชันทั้งสามโดยใช้ตารางจากข้อ 1.



ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright © by Chiang Mai University
All rights reserved

3. จงพิจารณาจากกราฟข้อ 2 แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

3.1 กราฟของฟังก์ชันทั้งสามเหมือนกันอย่างไร ? (เป็นลูกคลื่นเหมือนกัน)

3.2 กราฟ $y = 2\cos x$ และ $y = \cos x$ เหมือนกันอย่างไร ? (เป็นลูกคลื่น , ความยาวคลื่นเท่ากัน) ต่างกันอย่างไร ? (ความสูงของคลื่นต่างกัน)

3.3 กราฟ $y = 2\cos x$ และ $y = \cos 2x$ เหมือนกันอย่างไร ? (เป็นลูกคลื่น) ต่างกันอย่างไร ? (ความสูงของคลื่นและความยาวคลื่น ต่างกัน)

3.4 กราฟ $y = \cos x$ และ $y = \cos 2x$ เหมือนกันอย่างไร ? (เป็นลูกคลื่นผ่านจุด (0,1) และความสูงของคลื่นเท่ากัน) ต่างกันอย่างไร ? (ความยาวคลื่นต่างกัน)

3.6 ถ้าสมการฟังก์ชัน คือ $y = a \cos bx$ นักเรียนคิดว่า a จะบอกลักษณะกราฟส่วนใด ? (ความสูงของกราฟ เรียกว่า แอมพลิจูด) b จะบอกลักษณะกราฟส่วนใด ? (ความยาวของกราฟ เรียกว่า คาบ)

2.5 ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปเกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชันโคไซน์ ดังนี้

กราฟของฟังก์ชัน $y = a \cos bx$ จะมีลักษณะดังนี้

1. เป็นลูกคลื่นผ่านจุด $(0, a)$
2. มีแอมพลิจูด คือ $|a|$
3. มีลักษณะเป็นคาบ โดย 1 คาบยาว $\frac{2\pi}{b}$ หน่วย

2.6 ครูถามนักเรียนเป็นรายบุคคลเกี่ยวกับสมการฟังก์ชันไซน์ และ โคไซน์ จากกราฟที่นักเรียนได้เขียนในเอกสารประกอบการเรียน ดังนี้

จากข้อสรุปข้างต้นให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1. $y = \sin x$

แอมพลิจูด = ..1.. , ผ่านจุด $(0,0)$

ความยาว 1 คาบ = 2π หน่วย

3. $y = \sin 2x$

แอมพลิจูด = ..1.., ผ่านจุด $(0,0)$

ความยาว 1 คาบ = π หน่วย

5. $y = 2 \cos x$

แอมพลิจูด = ...2..., ผ่านจุด $(0,2)$

ความยาว 1 คาบ = 2π หน่วย

2. $y = 2 \sin x$

แอมพลิจูด = 2 , ผ่านจุด $(0,0)$

ความยาว 1 คาบ = 2π หน่วย

4. $y = \cos x$

แอมพลิจูด = ..1.., ผ่านจุด $(0,1)$

ความยาว 1 คาบ = 2π หน่วย

6. $y = \cos 2x$

แอมพลิจูด = ...1..., ผ่านจุด $(0,1)$

ความยาว 1 คาบ = π หน่วย

2.7 ครูให้แต่ละกลุ่มช่วยกันทำเอกสารฝึกหัด 18.1 ในเอกสารประกอบการเรียนการสอน แล้วครูเดินสังเกตการทำงานของแต่ละกลุ่มอยู่ใกล้ๆ เพื่อให้คำปรึกษาเพิ่มเติม เมื่อแต่ละกลุ่มเกิดปัญหา ถ้านักเรียนทำไม่เสร็จให้ทำต่อเป็นการบ้านแล้วส่งในตอนเช้าก่อนเข้าชั้นเรียนในคาบเรียนที่ 1 ของวันต่อไป

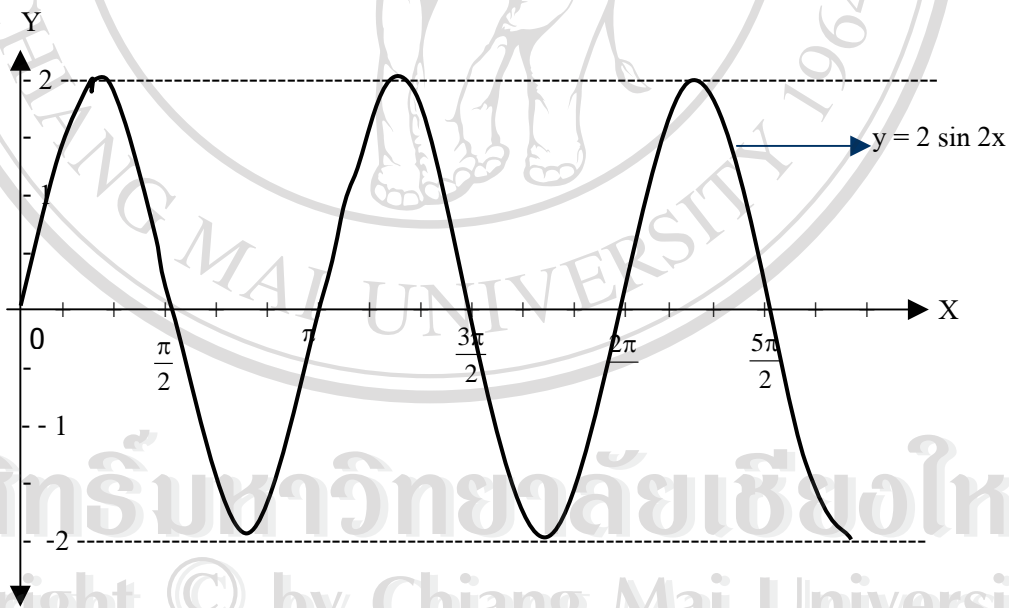
เอกสารฝึกหัด 18.1

จงเขียนกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้พร้อมทั้งบอกลักษณะของกราฟ

1. $y = 2 \sin 2x$

X	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$
$y = 2 \sin 2x$	0	1.6	2	1.6	0	-1.6	-2	-1.6	0	1.6	2	1.6	0

กราฟ

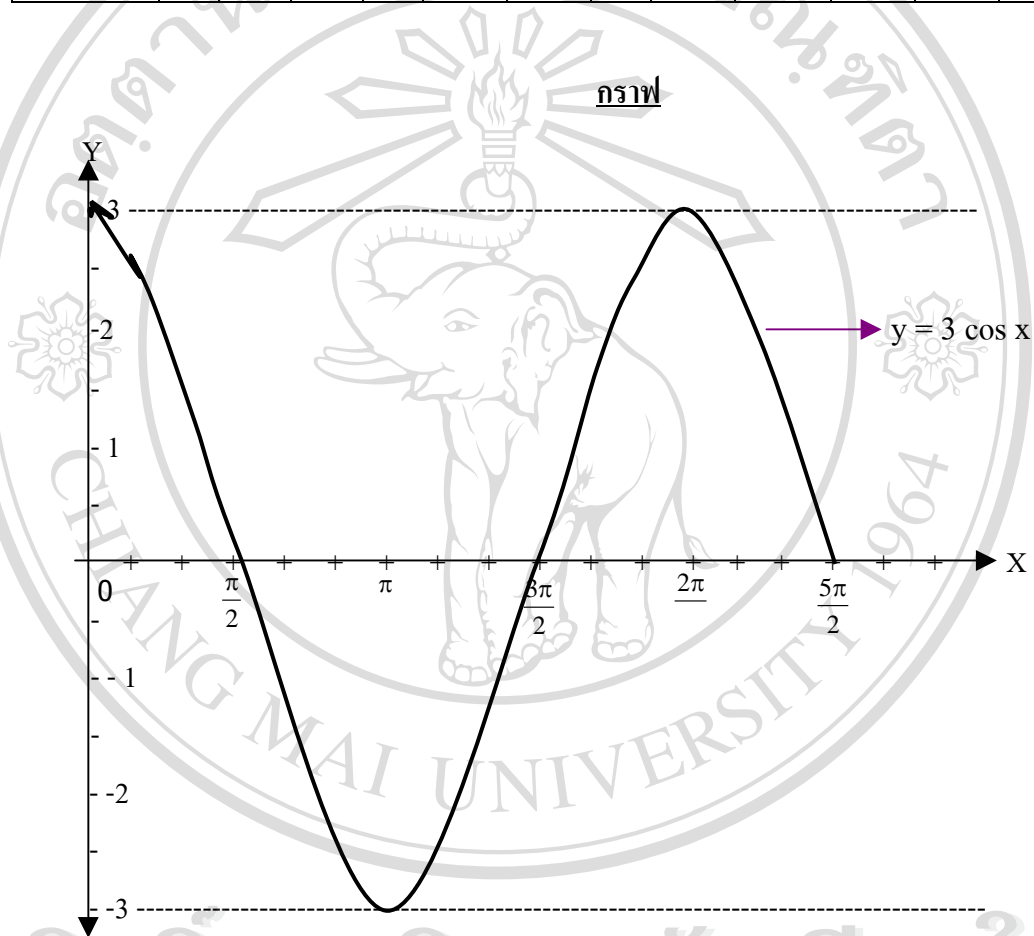


ตอบ: กราฟเป็นรูปคลื่นผ่านจุด $(0,0)$ แอมพลิจูด คือ $|2| = 2$

ความยาว 1 คาบ เท่ากับ $\frac{2\pi}{2} = \pi$ หน่วย

2. $y = 3 \cos x$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y=3cosx	3	2.4	1.5	0	-1.5	-2.4	-3	-2.4	-1.5	0	1.5	2.4	3



ตอบ : กราฟเป็นรูปคลื่นผ่านจุด (0,3) แอมพลิจูด คือ $|3|=3$

ความยาว 1 คาบ เท่ากับ $\frac{2\pi}{1} = 2\pi$ หน่วย

3 สื่อการเรียนการสอน

3.1 แผ่นภาพสรุปค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

3.2 เอกสารประกอบการเรียนการสอน

3.3 เอกสารฝึกหัด 18.1

4 การวัดและประเมินผล

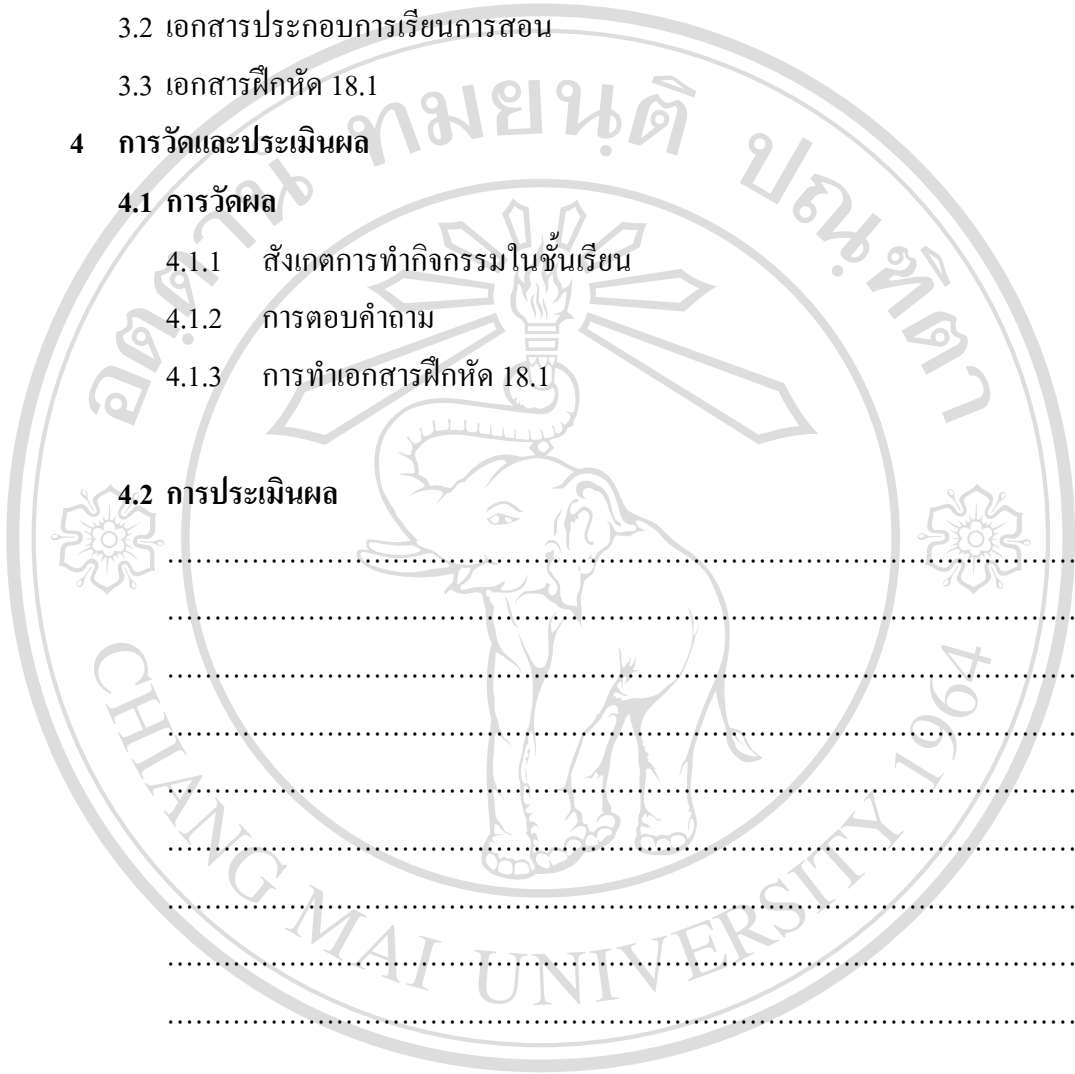
4.1 การวัดผล

4.1.1 สังเกตการทำกิจกรรมในชั้นเรียน

4.1.2 การตอบคำถาม

4.1.3 การทำเอกสารฝึกหัด 18.1

4.2 การประเมินผล



ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright © by Chiang Mai University

All rights reserved

เอกสารประกอบการเรียนการสอน คาบที่ 18

กิจกรรม 1

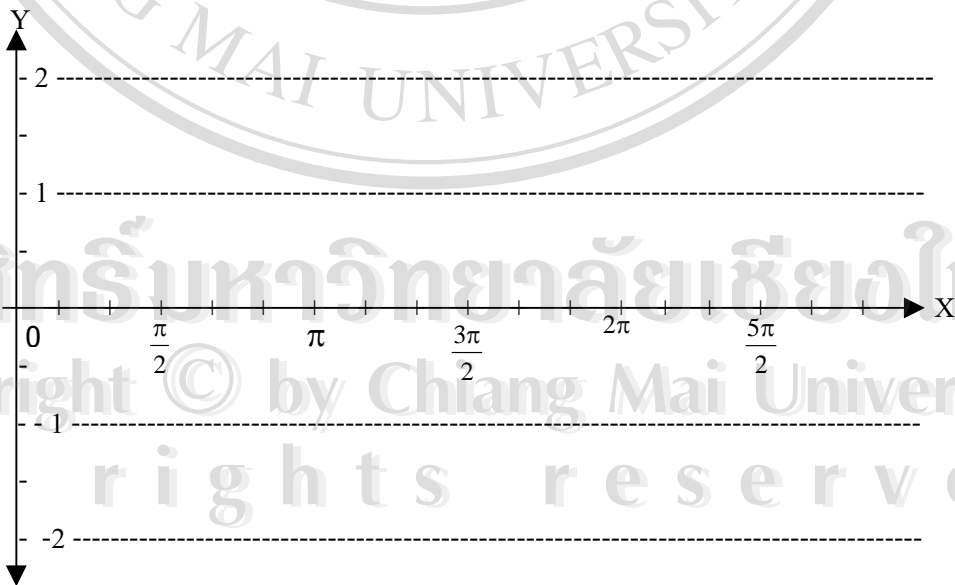
1. จงเติมตารางให้สมบูรณ์

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y = sin x			0.8		0.8		0			-1		-0.5	

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y = 2sin x	0				1.6		0		-1.6			-1	

X	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y = sin 2x			1				-1		0	0.8		0.8	

2. จงเขียนกราฟของฟังก์ชันทั้งสามโดยใช้ตารางจากข้อ 1.



ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright © by Chiang Mai University
All rights reserved

3. จงพิจารณาจากกราฟข้อ 2 แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

3.1 กราฟของฟังก์ชันทั้งสามเหมือนกันอย่างไร ?

.....

3.2 กราฟ $y = 2\sin x$ และ $y = \sin x$ เหมือนกันอย่างไร ?

..... ต่างกันอย่างไร ?

3.3 กราฟ $y = 2\sin x$ และ $y = \sin 2x$ เหมือนกันอย่างไร ?.....ต่าง
กันอย่างไร ?

3.4 กราฟ $y = \sin x$ และ $y = \sin 2x$ เหมือนกันอย่างไร ?

3.5 ถ้าสมการฟังก์ชัน คือ $y = a \sin bx$ นักเรียนคิดว่า a จะบอกลักษณะกราฟส่วนใด ?
..... b จะบอกลักษณะกราฟส่วนใด ?

บทสรุปเกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชันไซน์ ดังนี้

กราฟของฟังก์ชัน $y = a \sin bx$ จะมีลักษณะดังนี้

1.
2.
3.

กิจกรรม 2

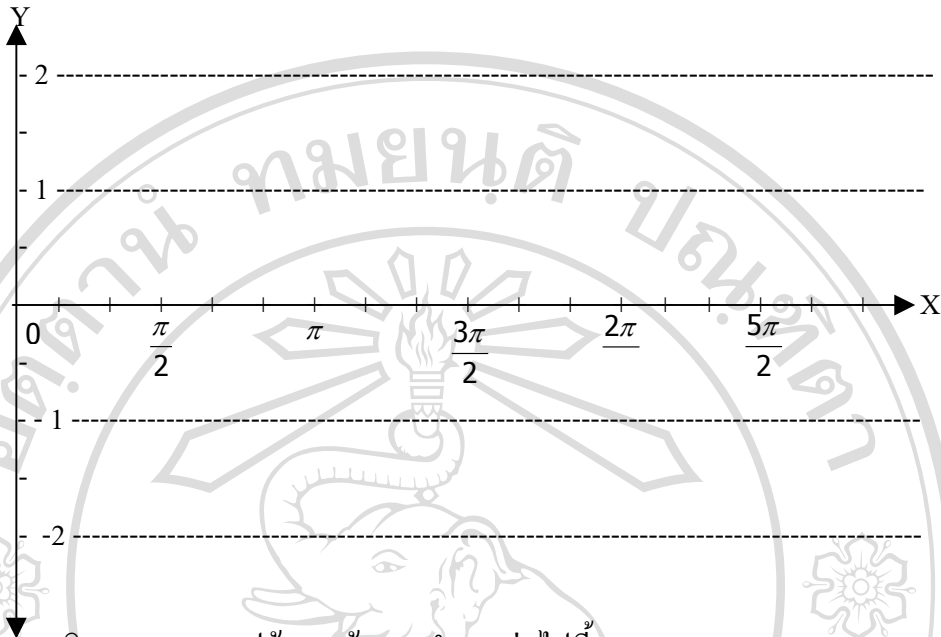
1. จงเติมตารางให้สมบูรณ์

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Y = cos x			0.5		-0.5		-1			0		0.8	

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y=2 cos x	2				-1		-2		-1			1.6	

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y =cos 2 x			0				0		1	0.5		-0.5	

2. จงเขียนกราฟของฟังก์ชันทั้งสามโดยใช้ตารางจากข้อ 1.



3. จงพิจารณาจากกราฟข้อ 2 แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

กราฟของฟังก์ชันทั้งสามเหมือนกันอย่างไร ?

3.1 กราฟ $y = 2\cos x$ และ $y = \cos x$ เหมือนกันอย่างไร ?

ต่างกันอย่างไร ?

3.2 กราฟ $y = 2\cos x$ และ $y = \cos 2x$ เหมือนกันอย่างไร ?

ต่างกันอย่างไร ?

3.3 กราฟ $y = \cos x$ และ $y = \cos 2x$ เหมือนกันอย่างไร ?

ต่างกันอย่างไร ?

3.1 ถ้าสมการฟังก์ชัน คือ $y = a \cos bx$ นักเรียนคิดว่า a จะบอกลักษณะกราฟส่วนใด ?

..... b จะบอกลักษณะกราฟส่วนใด?.....

บทสรุปเกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชันโคไซน์ ดังนี้

กราฟของฟังก์ชัน $y = a \cos bx$ จะมีลักษณะดังนี้

1.

2.

3.

จากข้อสรุปข้างต้นให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1. $y = \sin x$

แอมพลิจูด = , ผ่านจุด (.....)

ความยาว 1 คาบ = หน่วย

3. $y = \sin 2x$

แอมพลิจูด = , ผ่านจุด (.....)

ความยาว 1 คาบ = หน่วย

5. $y = 2 \sin x$

แอมพลิจูด = , ผ่านจุด (.....)

ความยาว 1 คาบ = หน่วย

2. $y = 2 \sin x$

แอมพลิจูด = , ผ่านจุด (.....)

ความยาว 1 คาบ = หน่วย

4. $y = \cos x$

แอมพลิจูด = , ผ่านจุด (.....)

ความยาว 1 คาบ = หน่วย

6. $y = \cos 2x$

แอมพลิจูด = , ผ่านจุด (.....)

ความยาว 1 คาบ = หน่วย

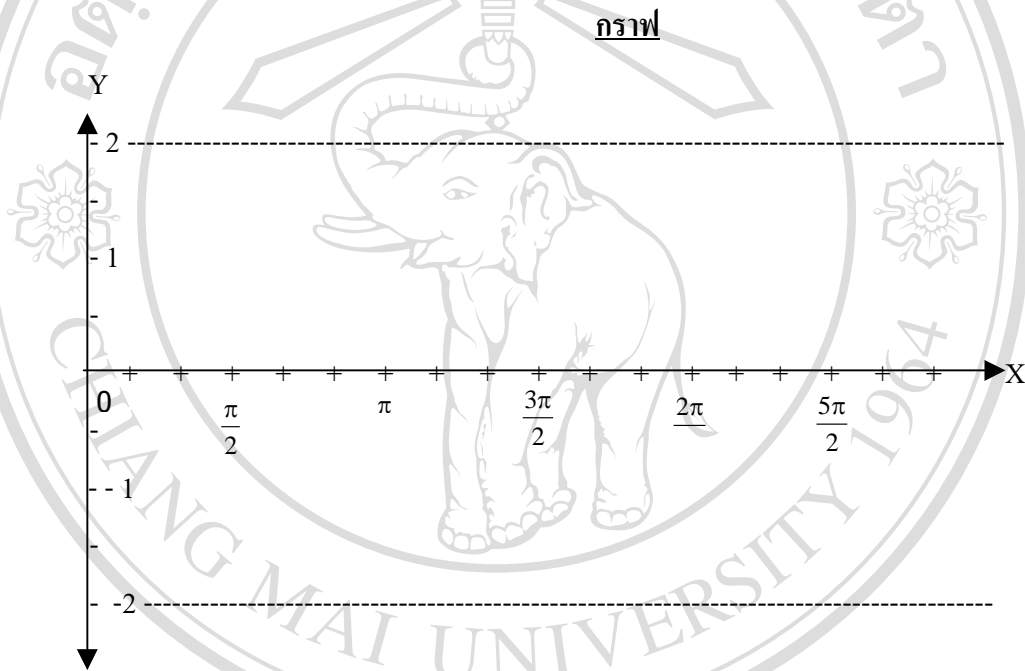


เอกสารฝึกหัด 18.1

จงเขียนกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้พร้อมทั้งบอกลักษณะของกราฟ

1. $y = 2 \sin 2x$

X	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y = 2 \sin 2x$													

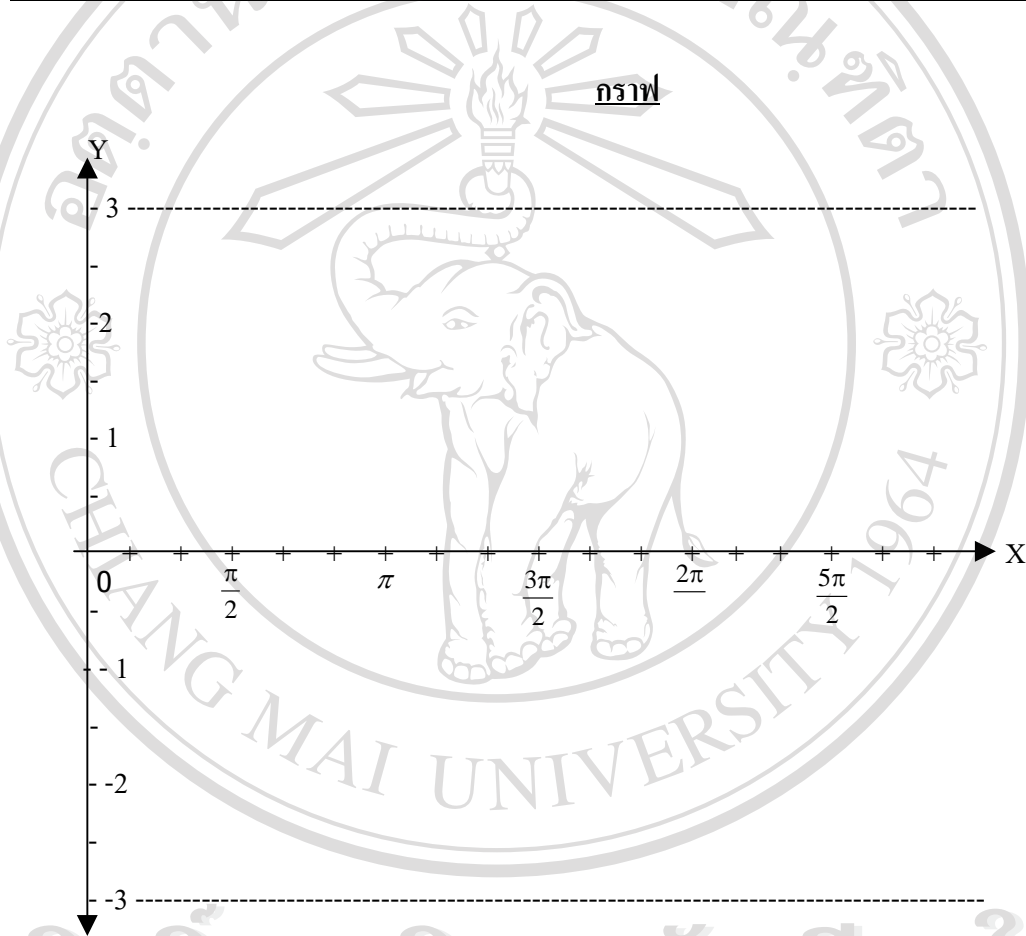


ตอบ :

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
 Copyright © by Chiang Mai University
 All rights reserved

2. $y = 3 \cos x$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y=3 cos x													



ตอบ :

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 19

เรื่อง กราฟของฟังก์ชันแทนเจนต์ และ โคแทนเจนต์

จำนวน 1 คาบ

วิชาคณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค 012

ภาคเรียนที่ 2

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถ

1. บอกค่าของฟังก์ชัน โคเซแคนท์ เซแคนท์ ของจำนวนจริงและมุมต่างๆ ได้
2. บอกคาบและแอมพลิจูดของฟังก์ชัน โคเซแคนท์ เซแคนท์ ได้
3. เขียนกราฟของฟังก์ชัน โคเซแคนท์ เซแคนท์ ได้

2. เนื้อหาและกิจกรรมการเรียนรู้การสอน

- 2.1 ครูคิดแผนสรุปค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติบนกระดาน แบ่งนักเรียนออกเป็น 9 กลุ่ม แล้วแจกเอกสารประกอบการเรียนการสอนให้กับนักเรียนทุกคน
- 2.2 ให้นักเรียนศึกษาเอกสารประกอบกับฟังการอธิบายจากครูผู้สอน และทำกิจกรรมในเอกสารประกอบการสอนที่ได้แจกให้

กิจกรรม 1

1. จงเติมตารางให้สมบูรณ์

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y = sin x	0	0.5	0.8	1	0.8	0.5	0	-0.5	-0.8	-1	-0.8	-0.5	0
y = csc x	-	2	1.2	1	1.2	2	-	-2	1.2	-1	-1.2	-2	-
$y = \frac{1}{\sin x}$													

จากตารางพิจารณาค่าฟังก์ชันไซน์ และ โคเซแคนท์จะพบว่า

1.1 ถ้าค่า sin x เพิ่มขึ้น ค่าของ csc x จะ ...ลด... (เพิ่ม/ลด)

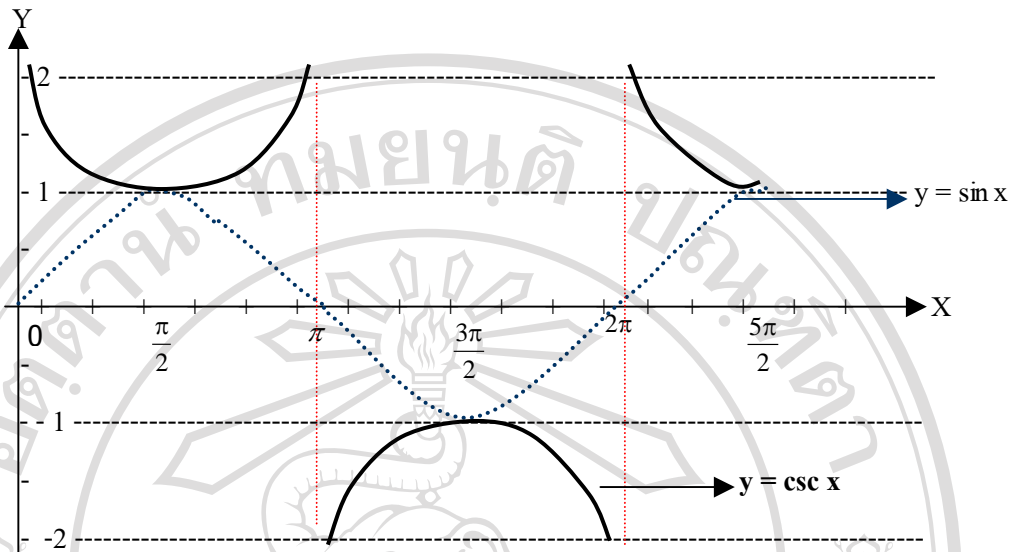
ถ้าค่า sin x ลดลง ค่าของ csc x จะ ...เพิ่ม... (เพิ่ม/ลด)

1.2 ถ้าค่า sin x เป็นศูนย์ ค่าของ csc x จะ ...หาค่าไม่ได้... (หาค่าได้/หาค่าไม่ได้)

1.3 ค่า sin x เป็นศูนย์เมื่อ x มีค่าเป็น ... $0, \pi, 2\pi$...

ใช้เส้นประขนานกับแกน y ณ ตำแหน่ง x เหล่านั้น เพื่อแสดงว่ากราฟ $y = \csc x$ จะไม่ตัดเส้นประเหล่านั้น

2. จงเขียนกราฟของฟังก์ชันทั้งสองโดยใช้ตารางจากข้อ 1.



3. จงพิจารณาจากกราฟข้อ 2 แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

- 3.1 กราฟของ $y = \csc x$ มีลักษณะอย่างไร ? (เป็นรูปพาราโบลาคว่ำ – หงาย ไม่ตัดแกน X และ Y)
- 3.2 กราฟ $y = \csc x$ มีลักษณะเป็นคาบหรือไม่ ? (เป็น) ถ้าเป็นคาบความยาว 1 คาบ เท่ากับเท่าไร ? (2π)
- 3.3 กราฟ $y = \csc x$ ค่าสูงสุดของฟังก์ชันเท่ากับเท่าไร ? (ไม่มี) ค่าต่ำสุดของฟังก์ชันเท่ากับเท่าไร ? (ไม่มี) แล้ว แอมพลิจูดของฟังก์ชันเท่ากับเท่าไร ? (ไม่มี) เพราะเหตุใด ? (ไม่มีค่าสูงสุดและต่ำสุด)
- 3.4 โดเมนของ $y = \csc x$ คือ (จำนวนจริงที่ไม่ใช่ $0, \pi, 2\pi$) หรือ $\{x / x \in \mathbb{R} - n\pi, n \in \mathbb{I}\}$
เรนจ์ของ $y = \csc x$ คือ $\{y / y \in \mathbb{R} - (-1, 1)\}$

2.3 ครูให้นักเรียนดูเอกสารประกอบการเรียนการสอนประกอบกับอธิบายเกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชันเซแคนท์ ดังนี้

1. จงเติมตารางให้สมบูรณ์

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y=cos x	1	0.8	0.5	0	-0.5	-0.8	-1	-0.8	-0.5	0	0.5	0.8	1
y=sec x $y = \frac{1}{\cos x}$	1	1.2	2	-	-2	-1.2	-1	-1.2	-2	-	2	1.2	1

จากตารางพิจารณาค่าฟังก์ชันโคไซน์ และ เซแคนท์จะพบว่า

1.1 ถ้าค่า cos x เพิ่มขึ้น ค่าของ csc x จะ ...ลด... (เพิ่ม/ลด)

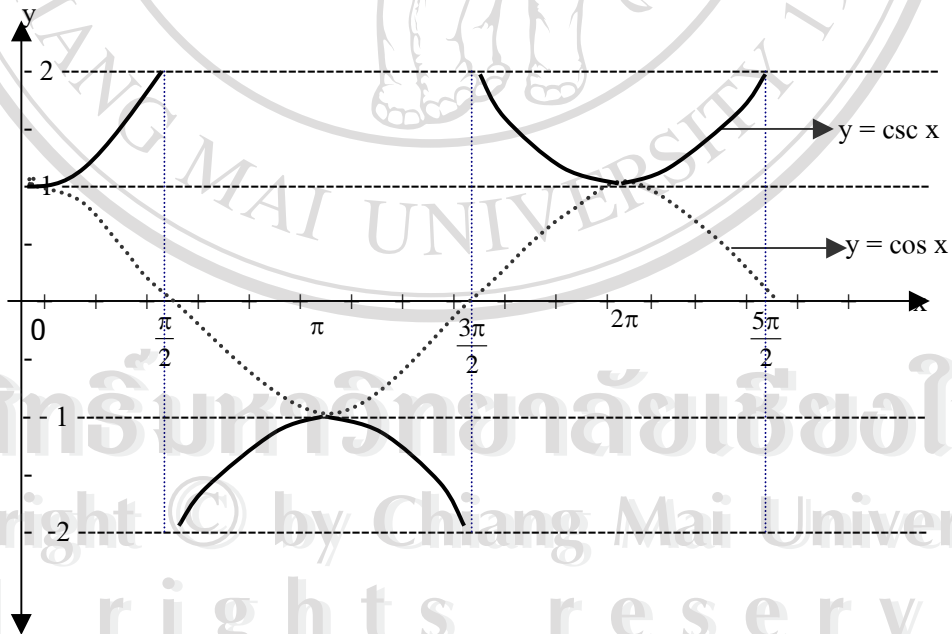
ถ้าค่า cos x ลดลง ค่าของ csc x จะ ...ลด... (เพิ่ม/ลด)

1.2 ถ้าค่า cos x เป็นศูนย์ ค่าของ csc x จะ ...หาค่าไม่ได้... (หาค่าได้/หาค่าไม่ได้)

1.3 ค่า cos x เป็นศูนย์เมื่อ x มีค่าเป็น $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$

ใช้เส้นประขนานกับแกน y ณ ตำแหน่ง x เหล่านี้ เพื่อแสดงว่ากราฟ $y = \csc x$ จะไม่ตัดเส้นประเหล่านั้น

2. จงเขียนกราฟของฟังก์ชันทั้งสองโดยใช้ตารางจากข้อ 1.



3. จงพิจารณาจากกราฟข้อ 2 แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

3.1 กราฟของ $y = \sec x$ มีลักษณะอย่างไร ? (เป็นรูปพาราโบลาคว่ำ – หงาย ตัดแกน Y ที่จุด $(0,1)$)

3.2 กราฟ $y = \csc x$ มีลักษณะเป็นคาบหรือไม่ ? (เป็น) ถ้าเป็นคาบความยาว 1 คาบ เท่ากับเท่าไร ? (2π)

3.3 กราฟ $y = \sec x$ ค่าสูงสุดของฟังก์ชันเท่ากับเท่าไร ? (ไม่มี) ค่าต่ำสุดของฟังก์ชันเท่ากับเท่าไร ? (ไม่มี) แล้ว แอมพลิจูดของฟังก์ชันเท่ากับเท่าไร ? (ไม่มี) เพราะเหตุใด ? (ไม่มีค่าสูงสุดและต่ำสุด)

3.3 โดเมนของ $y = \sec x$ คือ

$$\left\{ \text{จำนวนจริงที่ไม่ใช่} \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \right\} \right\} \text{ หรือ } \left\{ x / x \in \mathbb{R} - \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{I} \right\}$$

เรนจ์ของ $y = \csc x$ คือ $(\{y / y \in \mathbb{R} - (-1,1)\})$

2.4 ครูสนทนากับนักเรียนเกี่ยวกับลักษณะกราฟของ $y = \csc x$ และ $y = \sec x$ จากกราฟทั้งสองลักษณะกราฟเป็นอย่างไร ? (เป็นรูปพาราโบลาคว่ำ – หงาย)

1. กราฟของ $y = \csc x$ ตัดแกน X และ Y หรือไม่ ? (ไม่ตัดแกน X และ Y)

2. กราฟของ $y = \sec x$ ตัดแกน X และ Y หรือไม่ ? (ไม่ตัดแกน X แต่ตัดแกน Y ที่จุด $(0,1)$)

3. กราฟของ $y = \csc x$ และ $y = \sec x$ มีแอมพลิจูดหรือไม่ ? (ไม่มีเพราะไม่มีค่าสูงสุดและต่ำสุด)

4. คาบของฟังก์ชัน $y = \csc x$ และ $y = \sec x$ คือ ? (2π)

2.5 ครูและนักเรียนร่วมกัน **สรุป** เกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชันโคเซแคนท์ มีดังนี้

ลักษณะกราฟของฟังก์ชัน $y = a \csc bx$ จะมีลักษณะดังนี้

4. เป็นรูปพาราโบลาคว่ำ – หงาย ไม่ตัดแกน X และ Y

5. ไม่มีแอมพลิจูด

6. มีลักษณะเป็นคาบโดย 1 คาบยาว $\frac{2\pi}{b}$ หน่วย

ลักษณะกราฟของฟังก์ชัน $y = a \sec bx$ จะมีลักษณะดังนี้

1. เป็นรูปพาราโบลาคว่ำ – หงาย กราฟไม่ตัดแกน X ตัดแกน Y ที่จุด $(0,a)$

2. ไม่มีแอมพลิจูด

3. มีลักษณะเป็นคาบโดย 1 คาบยาว $\frac{2\pi}{b}$ หน่วย

ข้อแตกต่าง ของลักษณะกราฟของฟังก์ชัน $y = a \csc bx$ กับ ฟังก์ชัน $y = a \sec bx$ คือ กราฟของฟังก์ชัน $y = a \csc bx$ ไม่ตัดแกน Y กราฟของฟังก์ชัน $y = a \sec bx$ ตัดแกน Y ที่จุด $(0, a)$

2.6 ครูให้แต่ละกลุ่มช่วยกันทำเอกสารฝึกหัด 19.1 ในเอกสารประกอบการเรียนการสอน แล้วครูเดินสังเกตการทำงานของแต่ละกลุ่มอยู่ใกล้ๆ เพื่อให้คำปรึกษาเพิ่มเติม เมื่อแต่ละกลุ่มเกิดปัญหา ถ้านักเรียนทำไม่เสร็จให้ทำต่อเป็นการบ้านแล้วส่งในตอนเช้าก่อนเข้าชั้นเรียนในคาบเรียนที่ 1 ของวันต่อไป

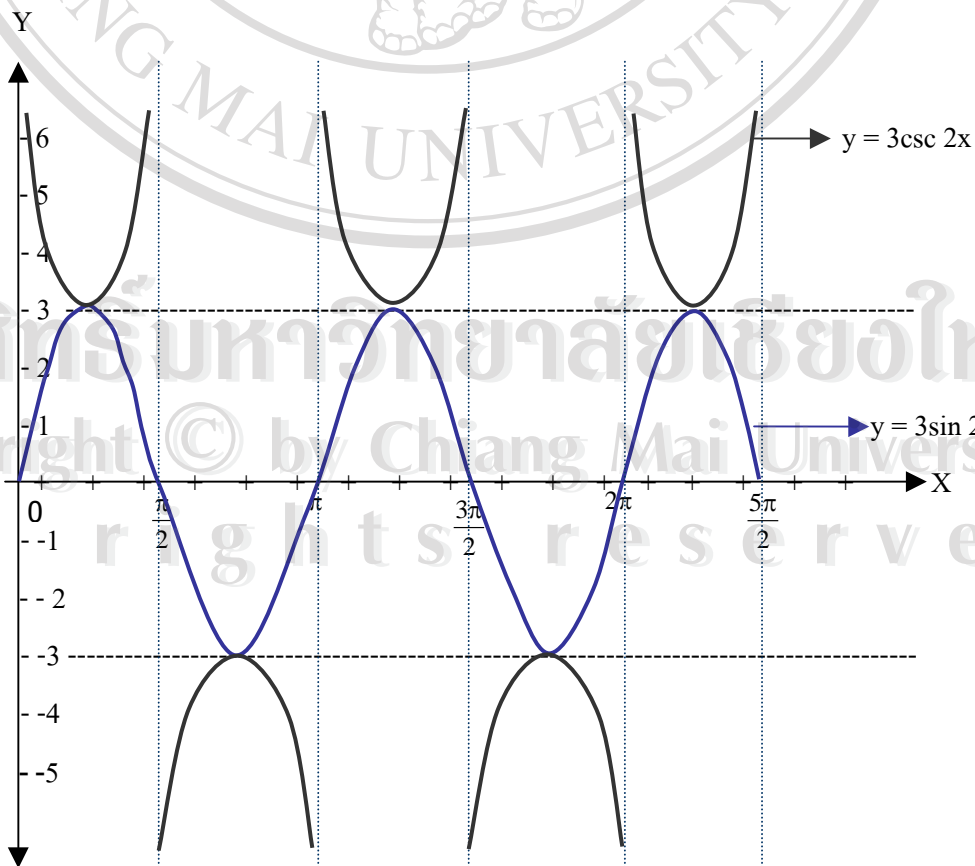
เอกสารฝึกหัด 19.1

จงเขียนกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้พร้อมทั้งบอกโดเมน และ เรนจ์ ของฟังก์ชัน

3. $y = 3 \csc 2x$

X	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$
$y = 3 \csc 2x$	-	3.8	3	3.8	-	-3.8	-3	-3.8	-	3.8	3	3.8	-

กราฟ



ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright © by Chang Mai University
All rights reserved

ตอบ : ความยาว 1 คาบ เท่ากับ $\frac{2\pi}{2} = \pi$ หน่วย

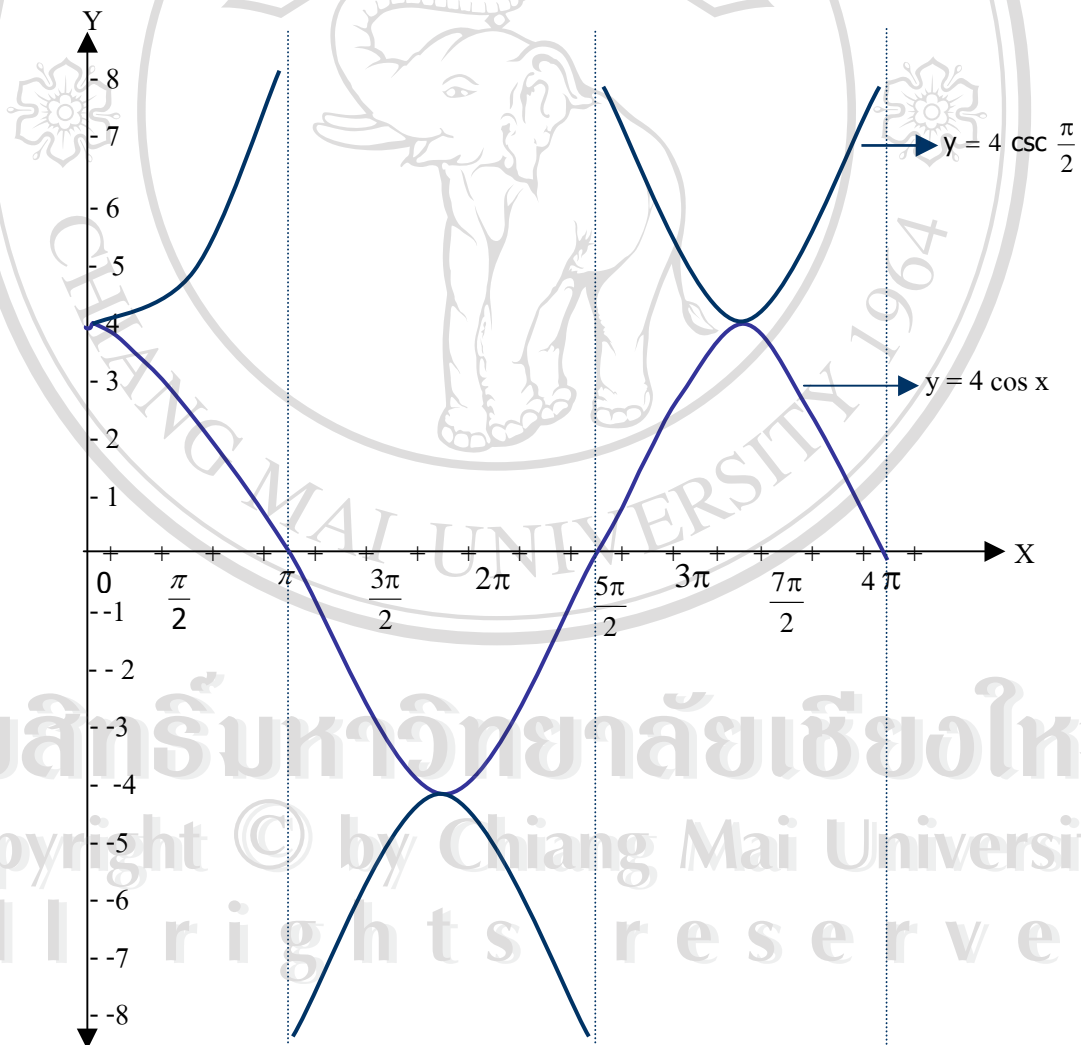
โดเมน คือ $\left\{x/x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{5\pi}{2}\right\}\right\}$

เรนจ์ คือ $\{y/y \in \mathbb{R} - (-3,3)\}$

4. $y = 4 \csc \frac{\pi}{2}$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π
$y = 4 \csc \frac{\pi}{2}$	4	5.6	-	-5.6	-4	-5.6	-	5.6	4

กราฟ



ตอบ : ความยาว 1 คาบ เท่ากับ $\frac{2\pi}{2} = \pi$ หน่วย

โดเมน คือ $\left\{x / x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{5\pi}{2}\right\}\right\}$

เรนจ์ คือ $\{y / y \in \mathbb{R} - (-3,3)\}$

3. สื่อการเรียนการสอน

3.1 แผ่นภาพสรุปค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

3.2 เอกสารประกอบการเรียนการสอน

3.3 เอกสารฝึกหัด 19.1

4. การวัดและประเมินผล

4.1 การวัดผล

4.1.1 สังเกตการทำกิจกรรมในชั้นเรียน

4.1.2 การตอบคำถาม และ สรุปบทเรียน

4.1.3 การทำเอกสารฝึกหัด 19.1

4.2 การประเมินผล

.....

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright © by Chiang Mai University

All rights reserved

เอกสารประกอบการเรียนการสอน คาบที่ 19

กิจกรรม 1

1. จงเติมตารางให้สมบูรณ์

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y= sin x			0.8		0.8		0			-1		-0.5	
y=csc x $y = \frac{1}{\sin x}$			1.2		1.2					-1		-2	

จากตารางพิจารณาค่าฟังก์ชันไซน์ และ โคเซแคนท์จะพบว่า

1.1 ถ้าค่า sin x เพิ่มขึ้น ค่าของ csc x จะ(เพิ่ม/ลด)

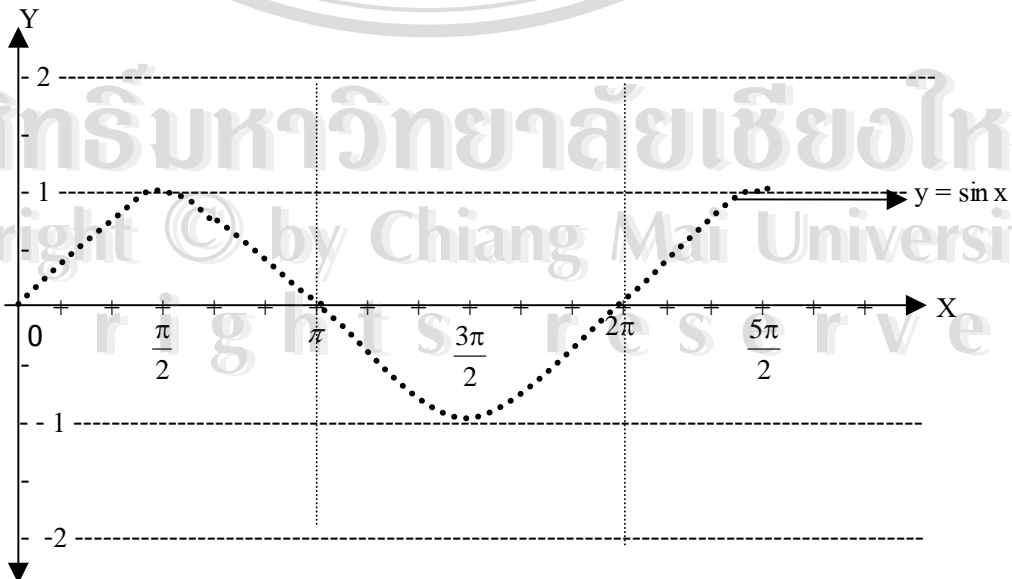
ถ้าค่า sin x ลดลง ค่าของ csc x จะ(เพิ่ม/ลด)

1.2 ถ้าค่า sin x เป็นศูนย์ ค่าของ csc x จะ(หาค่าได้/หาค่าไม่ได้)

1.3 ค่า sin x เป็นศูนย์เมื่อ x มีค่าเป็น

ใช้เส้นประขนานกับแกน y ณ ตำแหน่ง x เหล่านั้น เพื่อแสดงว่ากราฟ $y = \csc x$ จะไม่ตัดเส้นประเหล่านั้น

2. จงเขียนกราฟของฟังก์ชันทั้งสองโดยใช้ตารางจากข้อ 1.



3. จงพิจารณาจากกราฟข้อ 2 แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

3.1 กราฟของ $y = \csc x$ มีลักษณะอย่างไร ?

.....

3.2 กราฟ $y = \csc x$ มีลักษณะเป็นคาบหรือไม่ ? ถ้าเป็นคาบความยาว 1 คาบ
เท่ากับเท่าไร ?

3.3 กราฟ $y = \csc x$ ค่าสูงสุดของฟังก์ชันเท่ากับเท่าไร ? ค่าต่ำสุดของฟังก์ชันเท่ากับ
เท่าไร ? แล้ว แอมพลิจูดของฟังก์ชันเท่ากับเท่าไร ? เพราะเหตุใด ?

.....

3.4 โดเมนของ $y = \csc x$ คือ เรนจ์ของ $y = \csc x$ คือ

1. จงเติมตารางให้สมบูรณ์

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y = \cos x$	1	0.8	0.5	0	-0.5	-0.8	-1	-0.8	-0.5	0	0.5	0.8	1
$y = \sec x$ $y = \frac{1}{\cos x}$			2		-2		-1			-		1.2	

จากตารางพิจารณาค่าฟังก์ชัน โคไซน์ และ เซแคนท์จะพบว่า

1.1 ถ้าค่า $\cos x$ เพิ่มขึ้น ค่าของ $\csc x$ จะ (เพิ่ม/ลด)

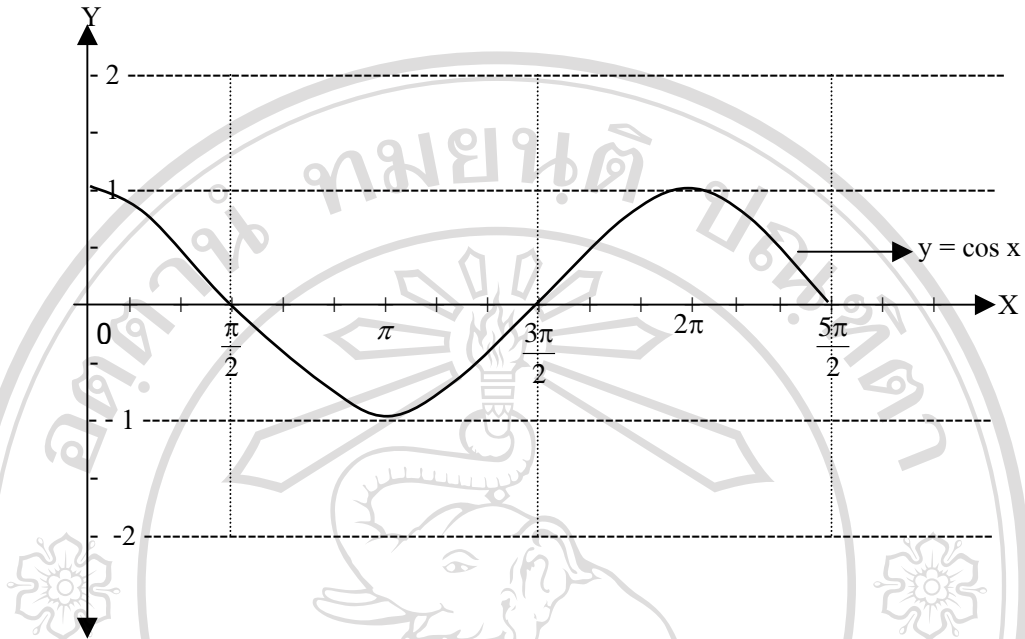
ถ้าค่า $\cos x$ ลดลง ค่าของ $\csc x$ จะ (เพิ่ม/ลด)

1.2 ถ้าค่า $\cos x$ เป็นศูนย์ ค่าของ $\csc x$ จะ (หาค่าได้/หาค่าไม่ได้)

1.3 ค่า $\cos x$ เป็นศูนย์เมื่อ x มีค่าเป็น

ใช้เส้นประขนานกับแกน y ณ ตำแหน่ง x เหล่านั้น เพื่อแสดงว่ากราฟ $y = \csc x$ จะไม่ตัด
เส้นประเหล่านั้น

2. จงเขียนกราฟของฟังก์ชันทั้งสองโดยใช้ตารางจากข้อ 1.



3. จงพิจารณาจากกราฟข้อ 2 แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

3.1 กราฟของ $y = \sec x$ มีลักษณะอย่างไร ?

3.2 กราฟ $y = \csc x$ มีลักษณะเป็นคาบหรือไม่ ? ถ้าเป็นคาบความยาว 1 คาบเท่ากับเท่าไร ?

3.3 กราฟ $y = \sec x$ ค่าสูงสุดของฟังก์ชันเท่ากับเท่าไร ? ค่าต่ำสุดของฟังก์ชันเท่ากับเท่าไร ? แล้ว แอมพลิจูดของฟังก์ชันเท่ากับเท่าไร ? เพราะเหตุใด ?

3.4 โดเมนของ $y = \sec x$ คือ

เรนจ์ของ $y = \sec x$ คือ

จงพิจารณาลักษณะกราฟของ $y = \csc x$ และ $y = \sec x$

1. จากกราฟทั้งสองลักษณะกราฟเป็นอย่างไร ?

2. กราฟของ $y = \csc x$ ตัดแกน X และ Y หรือไม่ ?

3. กราฟของ $y = \sec x$ ตัดแกน X และ Y หรือไม่ ?

4. กราฟของ $y = \csc x$ และ $y = \sec x$ มีแอมพลิจูดหรือไม่ ?

5. คาบของฟังก์ชัน $y = \csc x$ และ $y = \sec x$ คือ ?

บทสรุป เกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชัน โคเซแคนท์ มีดังนี้

ลักษณะกราฟของฟังก์ชัน $y = a \csc bx$ จะมีลักษณะดังนี้

1. เป็นรูปพาราโบลาคว่ำ – หงาย ไม่ตัดแกน X และ Y
2. ไม่มีแอมพลิจูด
3. มีลักษณะเป็นคาบโดย 1 คาบยาว $\frac{2\pi}{b}$ หน่วย

ลักษณะกราฟของฟังก์ชัน $y = a \sec bx$ จะมีลักษณะดังนี้

4. เป็นรูปพาราโบลาคว่ำ – หงาย กราฟไม่ตัดแกน X ตัดแกน Y ที่จุด $(0, a)$
5. ไม่มีแอมพลิจูด
6. มีลักษณะเป็นคาบโดย 1 คาบยาว $\frac{2\pi}{b}$ หน่วย

ข้อแตกต่าง ของลักษณะกราฟของฟังก์ชัน $y = a \csc bx$ กับ ฟังก์ชัน $y = a \sec bx$ คือ

.....

.....

.....

.....

เอกสารฝึกหัด 19.1

ชื่อ
 ชั้น ม. 4 / 1 เลขที่

จงเขียนกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้พร้อมทั้งบอกโดเมน และ เรนจ์ ของฟังก์ชัน

1. $y = 3 \csc 2x$

X	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$
$y = 3 \csc 2x$													

กราฟ



ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright © by Chiang Mai University

All rights reserved

ตอบ :

.....

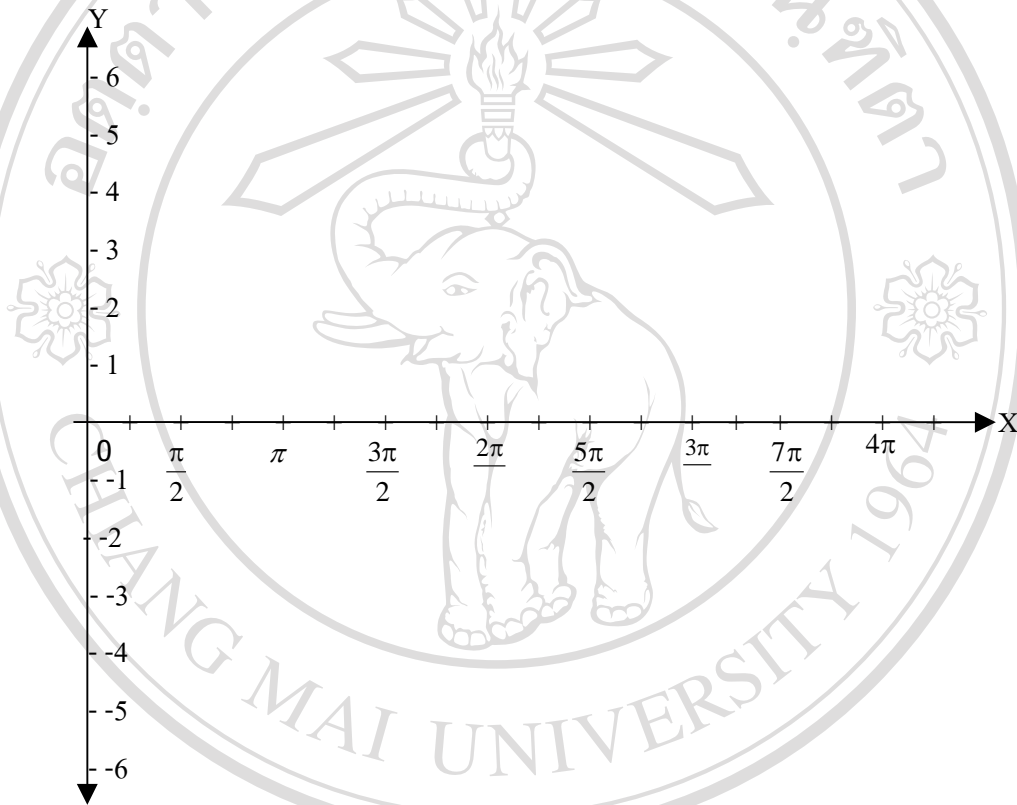
.....

.....

2. $y = 4 \csc \frac{\pi}{2}$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π
$y = 4 \csc \frac{\pi}{2}$									

กราฟ



ตอบ :

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
 Copyright © by Chiang Mai University
 All rights reserved

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 20

เรื่อง กราฟของฟังก์ชันแทนเจนต์ และ โคแทนเจนต์

จำนวน 1 คาบ

วิชาคณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค 012

ภาคเรียนที่ 2

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถ

1. บอกค่าของฟังก์ชันแทนเจนต์ และ โคแทนเจนต์ ของจำนวนจริงและมุมต่างๆ ได้
2. บอกคาบและแอมพลิจูดของฟังก์ชันแทนเจนต์ และ โคแทนเจนต์ ได้
3. เขียนกราฟของฟังก์ชันแทนเจนต์ และ โคแทนเจนต์ ได้

2. เนื้อหาและกิจกรรมการเรียนรู้

2.1 ครูคิดแผนสรุปค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติบนกระดาน แบ่งนักเรียนออกเป็น 9 กลุ่ม แล้วแจกเอกสารประกอบการเรียนการสอนให้กับนักเรียนทุกคน

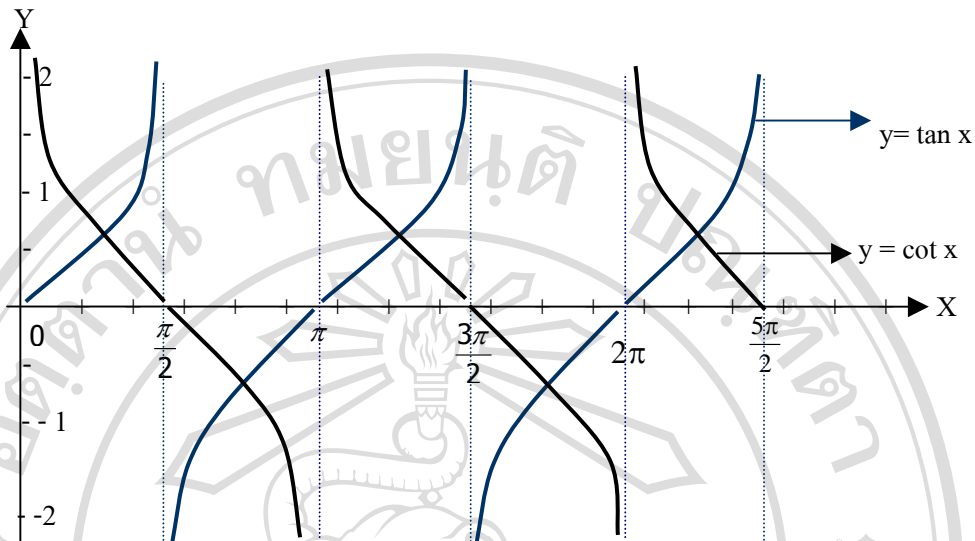
2.2 ให้นักเรียนศึกษาเอกสารประกอบกับฟังการอธิบายจากครูผู้สอน และทำกิจกรรมในเอกสารประกอบการสอนที่ได้แจกให้

กิจกรรม

1. จงเติมตารางให้สมบูรณ์

X	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y = tan x	0	0.6	1.7	-	-1.7	-0.6	0	0.6	1.7	-	-1.7	-0.6	0
y = cot x	-	1.7	0.6	0	-0.6	-1.7	-	1.7	0.6	0	-0.6	-1.7	-
$y = \frac{1}{\tan x}$													

2. จงนำคู่อันดับ (x,y) จากตารางข้อ 1. มาเขียนกราฟ



3. จงพิจารณาจากกราฟข้อ 2 แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

- 3.1 กราฟของ $y = \tan x$ และ $y = \cot x$ มีลักษณะเหมือนกันอย่างไร ? (เป็นรูปคล้ายตัว s (เอส)) ต่างกันอย่างไร ? (กราฟของ $y = \tan x$ จะผ่านจุด $(0,0)$ แต่ กราฟของ $y = \cot x$ ไม่ผ่านจุด $(0,0)$)
- 3.2 กราฟ $y = \tan x$ และ $y = \cot x$ มีลักษณะเป็นคาบหรือไม่ ? (เป็น) ถ้าเป็นคาบความยาว 1 คาบ เท่ากับเท่าไร ? (π)
- 3.3 กราฟ $y = \tan x$ และ $y = \cot x$ มีค่าสูงสุดของฟังก์ชันเท่ากับเท่าไร ? (ไม่มี) ค่าต่ำสุดของฟังก์ชันเท่ากับเท่าไร ? (ไม่มี) แล้วแอมพลิจูดของฟังก์ชันเท่ากับเท่าไร ? (ไม่มี) เพราะเหตุใด (ไม่มีค่าสูงสุดและต่ำสุด)

3.4 โดเมนของ $y = \tan x$ คือ จำนวนจริงที่ไม่ใช่ $\left\{ x / x \in \mathbb{R} - \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{I} \right\}$ เรนจ์ของ

$y = \tan x$ คือ จำนวนจริง หรือ $\{y / y \in \mathbb{R}\}$ และโดเมนของ $y = \cot x$ คือ (จำนวนจริงที่ไม่ใช่ $\{x / x \in \mathbb{R} - n\pi, n \in \mathbb{I}\}$) เรนจ์ของ $y = \cot x$ คือ จำนวนจริง หรือ $\{y / y \in \mathbb{R}\}$

2.3 ครูสนทนากับนักเรียนเกี่ยวกับลักษณะกราฟของ $y = \tan x$ และ $y = \cot x$

1. จากกราฟทั้งสองมีลักษณะกราฟเป็นอย่างไร ? (เป็นรูปคล้ายตัว s)
2. กราฟของ $y = \tan x$ ผ่านจุด $(0,0)$ หรือไม่ ? (ผ่านจุด $(0,0)$)
3. กราฟของ $y = \cot x$ ผ่านจุด $(0,0)$ หรือไม่ ? (ไม่ผ่านจุด $(0,0)$)
4. กราฟของ $y = \tan x$ และ $y = \cot x$ มีแอมพลิจูดหรือไม่ ? (ไม่มีเพราะไม่มีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด)

5. คาบของฟังก์ชัน $y = \tan x$ และ $y = \cot x$ คือ ? (π)

2.4 ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปเกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชันแทนเจนต์ ดังนี้

ลักษณะกราฟของฟังก์ชัน $y = a \tan bx$ จะมีลักษณะดังนี้

1. เป็นรูปตัว s และ ผ่านจุด (0,0)
2. ไม่มีแอมพลิจูด
3. มีลักษณะเป็นคาบโดย 1 คาบยาว $\frac{\pi}{b}$ หน่วย

ลักษณะกราฟของฟังก์ชัน $y = a \cot bx$ จะมีลักษณะดังนี้

1. เป็นรูปตัว s กราฟไม่ผ่านจุด (0,0)
2. ไม่มีแอมพลิจูด
3. มีลักษณะเป็นคาบโดย 1 คาบยาว $\frac{\pi}{b}$ หน่วย

ข้อแตกต่าง ของลักษณะกราฟของฟังก์ชัน $y = a \tan bx$ กับ ฟังก์ชัน $y = a \cot bx$ คือ ?

(กราฟของฟังก์ชัน $y = a \tan bx$ ผ่านจุด (0,0) แต่กราฟของฟังก์ชัน $y = a \cot bx$ ไม่ผ่านจุด (0,0))

2.5 ครูให้แต่ละกลุ่มช่วยกันทำเอกสารฝึกทักษะ 20.1 ในเอกสารประกอบการเรียนการสอน แล้วครูเดินสังเกตการทำงานของแต่ละกลุ่มอยู่ใกล้ๆ เพื่อให้คำปรึกษาเพิ่มเติม เมื่อแต่ละกลุ่มเกิดปัญหา ถ้านักเรียนทำไม่เสร็จให้ทำต่อเป็นการบ้านแล้วส่งในตอนเช้าก่อนเข้าชั้นเรียน ในคาบเรียนที่ 1 ของวันต่อไป

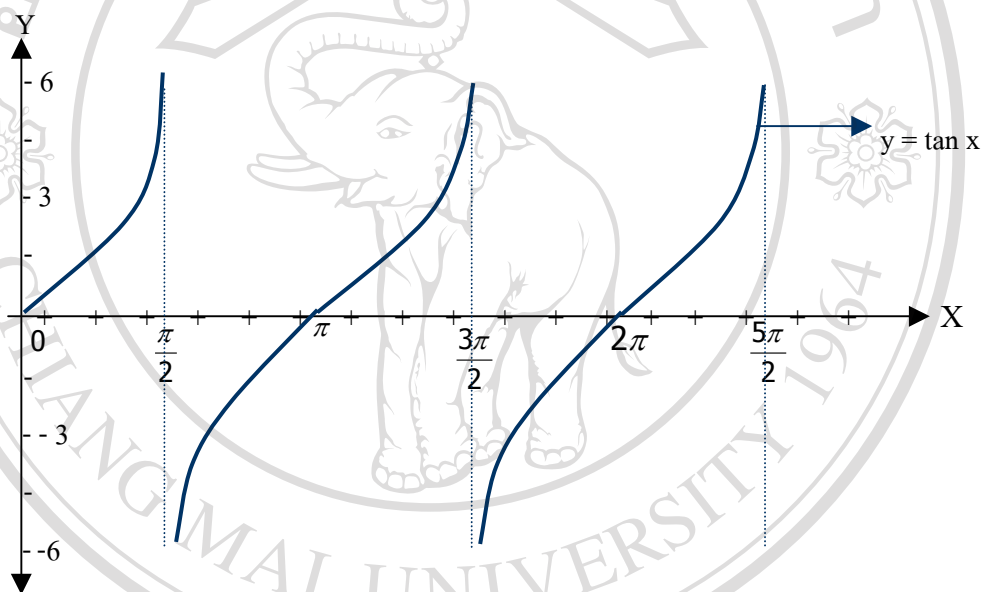
เอกสารฝึกทักษะ 20.1

1. จงเขียนกราฟของ $y = 3 \tan x$

วิธีทำ ความยาว 1 คาบ เท่ากับ $\frac{\pi}{1} = \pi$ หน่วย

X	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y = \tan x$	0	0.6	1.7	-	-1.7	-0.6	0	0.6	1.7	-	-1.7	-0.6	0
$y = 3 \tan x$	0	1.8	5.1	-	-1.8	-5.1	0	1.8	5.1	-	-5.1	-1.8	0

นำคู่อันดับ (x,y) จากตารางมาเขียนกราฟ

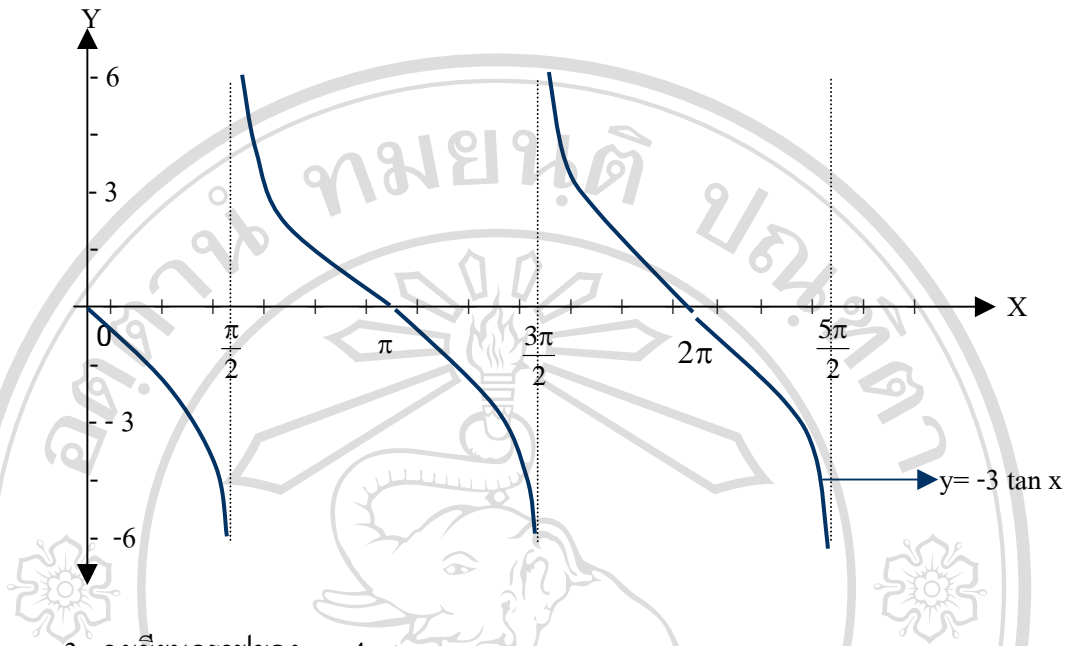


2. จงเขียนกราฟของ $y = -3 \tan x$

วิธีทำ ความยาว 1 คาบ เท่ากับ $\frac{\pi}{1} = \pi$ หน่วย

X	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y = \tan x$	0	0.6	1.7	-	-1.7	-0.6	0	0.6	1.7	-	-1.7	-0.6	0
$y = -3 \tan x$	0	-1.8	-5.1	-	1.8	5.1	0	-1.8	-5.1	-	5.1	1.8	0

นำคู่อันดับ (x,y) จากตารางมาเขียนกราฟ

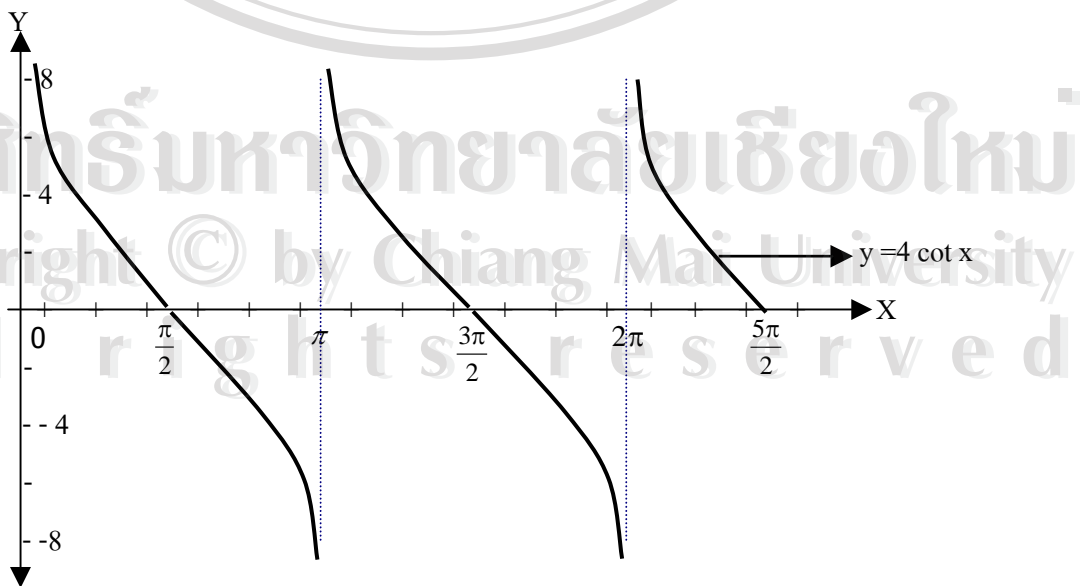


3. จงเขียนกราฟของ $y = 4 \cot x$

วิธีทำ ความยาว 1 คาบ เท่ากับ $\frac{\pi}{1} = \pi$ หน่วย

X	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y = \cot x$	-	1.7	0.6	0	-0.6	-1.7	-	1.7	0.6	0	-0.6	-1.7	-
$y = 4 \cot x$	-	6.8	2.4	0	-2.4	-6.8	-	-6.8	-2.4	0	-2.4	-6.8	-

นำคู่อันดับ (x,y) จากตารางมาเขียนกราฟ



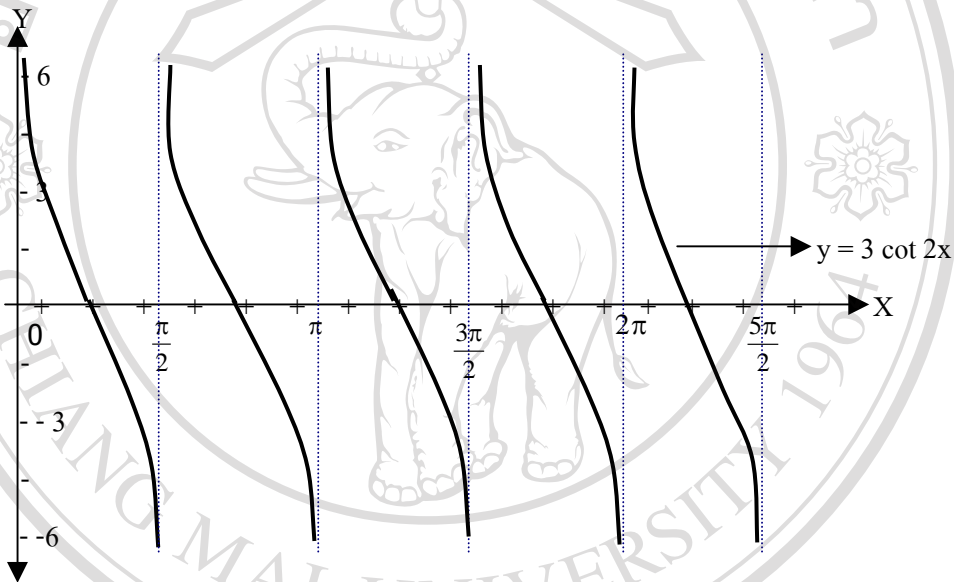
ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright © by Chiang Mai University
All rights reserved

4. จงเขียนกราฟของ $y = 3 \cot 2x$

วิธีทำ ความยาว 1 คาบ เท่ากับ $\frac{\pi}{2}$ หน่วย

X	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$
$y = \cot 2x$	-	0.6	0	-0.6	-	0.6	0	-0.6	-	0.6	0	-0.6	-
$y = 3 \cot 2x$	-	1.8	0	-1.8	-	1.8	0	-1.8	-	1.8	0	-1.8	-

นำคู่อันดับ (x,y) จากตารางมาเขียนกราฟ



2.6 ครูให้นักเรียนเขียนบันทึกการเรียนรู้หลังการเรียนเรื่องกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

โดยครูกำหนดส่งในตอนเช้าของวันรุ่งขึ้น แล้ว ครูนัดทดสอบความรู้ในเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้งหมด โดย ครูแนะแนวข้อสอบว่าข้อสอบจะมี 3 ตอน คือ ตอนที่ 1 เป็นข้อสอบแบบปรนัยจำนวน 10 ข้อ ตอนที่ 2 เป็นข้อสอบแบบเติมเฉพาะคำตอบ 5 ข้อ ตอนที่ 3 เป็นข้อสอบแบบอัตนัย 3 ข้อ

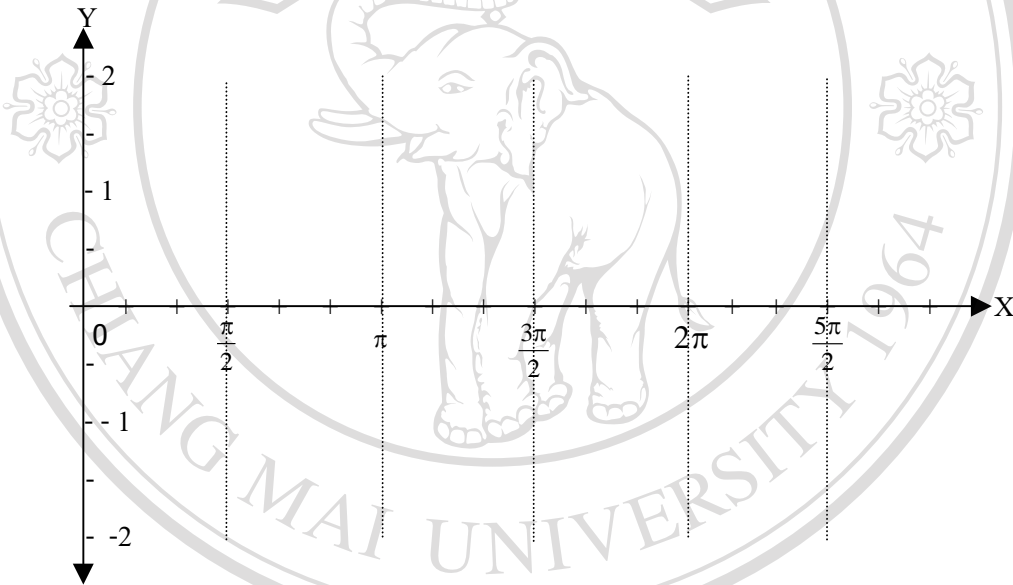
เอกสารประกอบการเรียนการสอน คาบที่ 20

กิจกรรม

1. จงเติมตารางให้สมบูรณ์

X	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y = \tan x$			1.7		-1.7		0			-		-0.6	
$y = \cot x$			0.6		-0.6		-			0		-1.7	
$y = \frac{1}{\tan x}$													

2. จงนำคู่อันดับ (x,y) จากตารางข้อ 1. มาเขียนกราฟ



3. จงพิจารณาจากกราฟข้อ 2 แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

3.5 กราฟของ $y = \tan x$ และ $y = \cot x$ มีลักษณะเหมือนกันอย่างไร ?

..... ต่างกันอย่างไร ?

3.6 กราฟ $y = \tan x$ และ $y = \cot x$ มีลักษณะเป็นคาบหรือไม่ ? ถ้าเป็นคาบความยาว 1

คาบ เท่ากับเท่าไร ?

3.7 กราฟ $y = \tan x$ และ $y = \cot x$ มีค่าสูงสุดของฟังก์ชันเท่ากับเท่าไร ?

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชันเท่ากับเท่าไร ?

แล้ว แอมพลิจูดของฟังก์ชันเท่ากับเท่าไร ?

เพราะเหตุใด ?

- 3.8 โดเมนของ $y = \tan x$ คือ เรนจ์ของ
 $y = \tan x$ คือ และโดเมนของ
 $y = \cot x$ คือ
 เรนจ์ของ $y = \cot x$ คือ

ให้นักเรียนบอกลักษณะเกี่ยวกับกราฟของ $y = \tan x$ และ $y = \cot x$

1. จากกราฟทั้งสองมีลักษณะกราฟเป็นอย่างไร ?
2. กราฟของ $y = \tan x$ ผ่านจุด $(0,0)$ หรือไม่ ?
3. กราฟของ $y = \cot x$ ผ่านจุด $(0,0)$ หรือไม่ ?
4. กราฟของ $y = \tan x$ และ $y = \cot x$ มีแอมพลิจูดหรือไม่ ?
5. คาบของฟังก์ชัน $y = \tan x$ และ $y = \cot x$ คือ ?

ให้นักเรียนสรุปเกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชันแทนเจนต์ ดังนี้

ลักษณะกราฟของฟังก์ชัน $y = a \tan bx$ จะมีลักษณะดังนี้

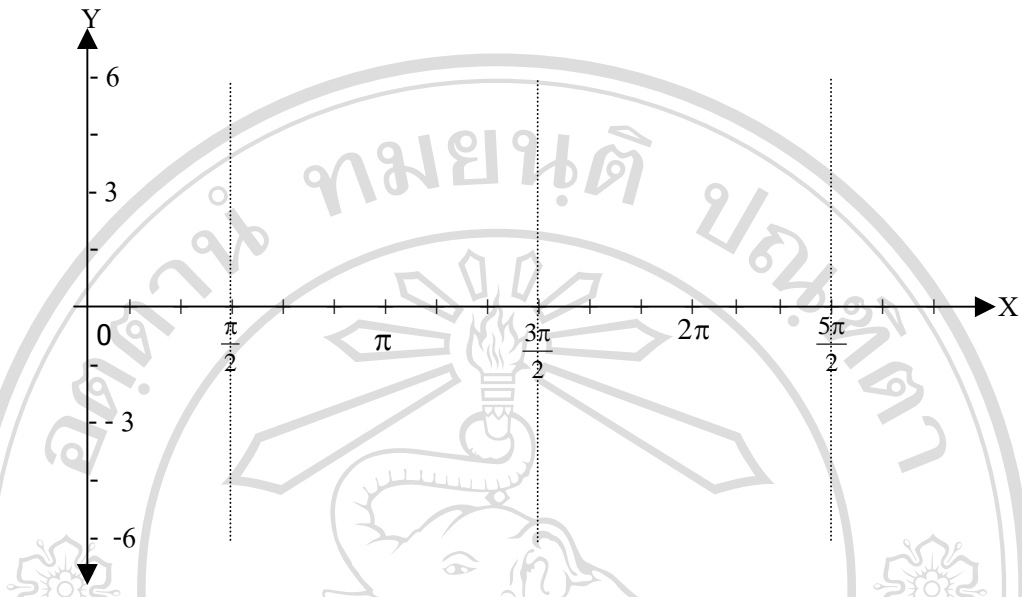
1. ลักษณะกราฟ คือ เป็นรูปคล้ายตัว.....
2. แอมพลิจูด คือ
3. ความยาวคาบยาว หน่วย

ลักษณะกราฟของฟังก์ชัน $y = a \cot bx$ จะมีลักษณะดังนี้

1. ลักษณะกราฟ คือ เป็นรูปคล้ายตัว.....
2. แอมพลิจูด คือ
3. ความยาวคาบยาว หน่วย

ข้อแตกต่าง ของลักษณะกราฟของฟังก์ชัน $y = a \tan bx$ กับ ฟังก์ชัน $y = a \cot bx$ คือ ?

นำคู่อันดับ (x,y) จากตารางมาเขียนกราฟ

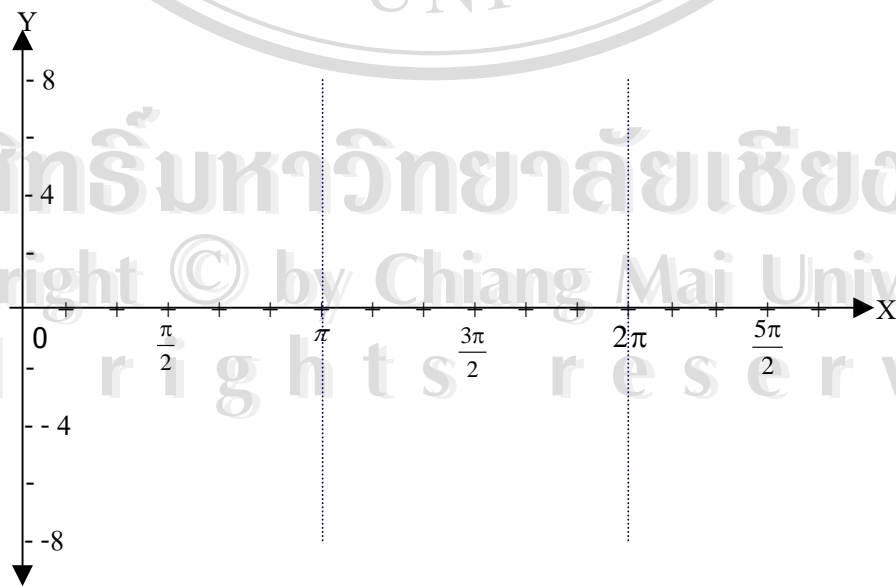


3. จงเขียนกราฟของ $y = 4 \cot x$

วิธีทำ ความยาว 1 คาบ เท่ากับหน่วย

X	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y = \cot x$													
$y = 4\cot x$													

นำคู่อันดับ (x,y) จากตารางมาเขียนกราฟ



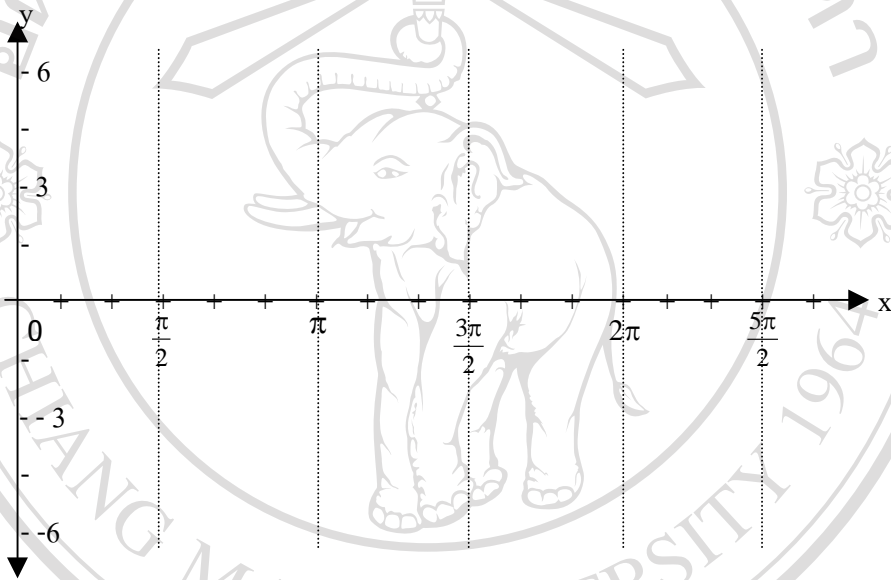
ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright © by Chiang Mai University
All rights reserved

4. จงเขียนกราฟของ $y = 3 \cot 2x$

วิธีทำ ความยาว 1 คาบ เท่ากับหน่วย

X	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$
$y = \cot 2x$													
$y = 3 \cot 2x$													

นำคู่อันดับ (x,y) จากตารางมาเขียนกราฟ



เฮ้ ! เรียนจบแล้ว





ภาคผนวก ข

เครื่องมือที่ใช้เก็บรวบรวมข้อมูล

- ตัวอย่างแบบบันทึกผลการปฏิบัติการสอน
- ตัวอย่างแบบบันทึกผลการตรวจแบบฝึกหัด
- ตัวอย่างแบบบันทึกการสัมภาษณ์
- ตัวอย่างแบบบันทึกการเรียนรู้ของนักเรียน

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright © by Chiang Mai University

All rights reserved

แบบบันทึกผลการปฏิบัติการสอน

1. ผลที่เกิดขึ้นกับนักเรียน

1.1 ด้านความคิดรวบยอด

.....
.....
.....
.....

1.2 ด้านทักษะการคิดคำนวณ

.....
.....
.....
.....

1.3 ด้านทักษะการนำความรู้ไปใช้ในการแก้ปัญหา

.....
.....
.....
.....

2 ปัญหา/อุปสรรค

.....
.....
.....
.....

3. ข้อเสนอแนะ / แนวทางแก้ไข

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright © by Chiang Mai University
All rights reserved

ลงชื่อ

(นายณรงค์ อึ้งฟูใจ)

แบบบันทึกผลการตรวจแบบฝึกหัด (การบ้าน)

เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ คาบเรียนที่ ...

เลข ที่	ชื่อ - สกุล	ความรู้ ความเข้าใจ	ทักษะการคิด คำนวณ	การนำความรู้ ไปใช้แก้ปัญหา	หมายเหตุ
1	นายอภิสิทธิ์ สมรินทร์				
2	นายสามารถ ไสญาติ				
3	นายอชิปติ ปิงกุล				
4	นายเอกภพ ชนะเพิ่ม				
5	นายพีรพันธ์ ทามูล				
6	นายอนุชา เลิศศรี				
7	นายอัคริยะ เกิดอาชาชาญ				
8	นายโชคนิรันดร์ เส่พรรณ				
9	นายเทพดล กุลอนันท์				
10	นายอนุวัฒน์ จิตมณี				
11	นายเอกพันธ์ เพ็ญธรรม				
12	นางสาวราพร คำไต้ะ				
13	นางสาวนภาพร ทองคำ				
14	นางสาววาสนา คิตสม				
15	นางสาวนภาพร สุขใจ				
16	นางสาวกนกานต์ ดิอุโมงค์				
17	นางสาวภาวินี ปิงกุล				
18	นางสาวกาญจนา นิปุณะ				
19	นางสาวสายสุรีย์ สุกใส				
20	นางสาวอรรรณ กุลเรือน				
21	นางสาวไพรินทร์ เทียงจันตา				
22	นางสาวจินตนา โชกชัยเจริญทวี				
23	นางสาวดาวเรือง สิงห์คำ				
24	นางสาวปรีศนีย์ นามแปง				
25	นางสาวสุนิสา สุปีนะ				

เลข ที่	ชื่อ - สกุล	ความรู้ ความเข้าใจ	ทักษะการคิด คำนวณ	การนำความรู้ ไปใช้แก้ปัญหา	หมายเหตุ
26	นางสาวดวงระวี โยระภัตร				
27	นางสาวนงลักษณ์ แกนุ				
28	นางสาวนิฐา ครองรัตน์				
29	นางสาวเรวดี ศรีเที่ยง				
30	นางสาวรัตน์ เจริญวงศ์				
31	นางสาวแหวดดาว ฟองดา				
32	นางสาวพรพิมล ฟองดา				
33	นางสาวภัทรา คุณละวัน				
34	นางสาวธิดารัตน์ ตาปัญญา				
35	นางสาวพัชราพร สนธิคุณ				
36	นางสาวนุชบา เตปิน				
37	นางสาววิภาภรณ์ เก่งการทำ				
38	นางสาวสาวิตรี เจนจิตรสันติ				

บันทึกเพิ่มเติม

.....

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
 Copyright © by Chiang Mai University
 All rights reserved

ลงชื่อ.....

(นายณรงค์ อู่ฟูใจ)

แบบบันทึกการสัมภาษณ์

เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ผู้ให้สัมภาษณ์.....

1. นักเรียนมีวิธีการทำแบบฝึกหัด หรือการบ้านอย่างไร ?

.....
.....
.....
.....

2. นักเรียนคิดว่าการจัดการเรียนการสอนแบบที่นักเรียนได้เรียนอยู่นี้เป็นอย่างไร ?

.....
.....
.....
.....

3. นักเรียนเกิดปัญหาอะไรบ้างในเวลาเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ ?

.....
.....
.....
.....

4. ข้อเสนอแนะอื่นๆ

.....
.....
.....

ลงชื่อ.....

(นายณรงค์ อู่ฟูใจ)

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright © by Chiang Mai University
All rights reserved

แบบบันทึกการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์

ชื่อ ชั้น ม. 4 / 1 เลขที่

1. ได้รับความรู้อะไรบ้างในการเรียนหัวข้อนี้ ?

.....
.....
.....
.....
.....

2. มีปัญหาเกิดขึ้นในการเรียนหัวข้อนี้หรือไม่ ? อย่างไร ?

.....
.....
.....
.....

3. ต้องการให้ครูช่วยเหลืออย่างไรบ้าง ?

.....
.....
.....
.....

4. ข้อเสนอแนะในการเรียนครั้งต่อไป

.....
.....

5. อื่นๆ

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright © by Chiang Mai University

All rights reserved



ภาคผนวก ค
ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright © by Chiang Mai University
All rights reserved

ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

Degree	Radians	sine	cosine	tangent	cosecant	secant	cotangent
0	0	0.0000	1.0000	0.0000	หาค่าไม่ได้	1.0000	หาค่าไม่ได้
10	0.0029	0.0029	1.0000	0.0029	344.8276	1.0000	344.8276
20	0.0058	0.0058	1.0000	0.0058	172.4138	1.0000	172.4138
30	0.0087	0.0087	1.0000	0.0087	114.9425	1.0000	114.9425
40	0.0116	0.0116	0.9999	0.0116	86.2069	1.0001	86.2069
50	0.0145	0.0145	0.9999	0.0145	68.9655	1.0001	68.9655
1	0	0.0175	0.9998	0.0175	57.1429	1.0002	57.1429
10	0.0204	0.0204	0.9998	0.0204	49.0196	1.0002	49.0196
20	0.0233	0.0233	0.9997	0.0233	42.9185	1.0003	42.9185
30	0.0262	0.0262	0.9997	0.0262	38.1679	1.0003	38.1679
40	0.0291	0.0291	0.9996	0.0291	34.3643	1.0004	34.3643
50	0.0320	0.0320	0.9995	0.0320	31.2500	1.0005	31.2500
2	0	0.0349	0.9994	0.0349	28.6533	1.0006	28.6533
10	0.0378	0.0378	0.9993	0.0378	26.4550	1.0007	26.4550
20	0.0407	0.0407	0.9992	0.0407	24.5700	1.0008	24.5700
30	0.0436	0.0436	0.9990	0.0436	22.9358	1.0010	22.9358
40	0.0465	0.0465	0.9989	0.0465	21.5054	1.0011	21.5054
50	0.0495	0.0495	0.9988	0.0495	20.2020	1.0012	20.2020
3	0	0.0524	0.9986	0.0524	19.0840	1.0014	19.0840
10	0.0553	0.0553	0.9985	0.0554	18.0832	1.0015	18.0505
20	0.0582	0.0582	0.9983	0.0583	17.1821	1.0017	17.1527
30	0.0611	0.0611	0.9981	0.0612	16.3666	1.0019	16.3399
40	0.0640	0.0640	0.9980	0.0641	15.6250	1.0020	15.6006
50	0.0669	0.0669	0.9978	0.0670	14.9477	1.0022	14.9254
4	0	0.0698	0.9976	0.0699	14.3472	1.0024	14.3062
10	0.0727	0.0726	0.9974	0.0728	13.7741	1.0026	13.7363
20	0.0756	0.0755	0.9971	0.0757	13.2450	1.0029	13.2100
30	0.0785	0.0784	0.9969	0.0787	12.7551	1.0031	12.7065
40	0.0814	0.0813	0.9967	0.0816	12.3001	1.0033	12.2549
50	0.0844	0.0843	0.9964	0.0846	11.8624	1.0036	11.8203
5	0	0.0873	0.9962	0.0875	11.4679	1.0038	11.4286
10	0.0902	0.0901	0.9959	0.0904	11.0988	1.0041	11.0619
20	0.0931	0.0930	0.9957	0.0934	10.7527	1.0043	10.7066
30	0.0960	0.0959	0.9954	0.0963	10.4275	1.0046	10.3842
40	0.0989	0.0987	0.9951	0.0992	10.1317	1.0049	10.0806
50	0.1018	0.1016	0.9948	0.1022	9.8425	1.0052	9.7847
6	0	0.1047	0.9945	0.1051	9.5694	1.0055	9.5147
10	0.1076	0.1074	0.9942	0.1080	9.3110	1.0058	9.2593
20	0.1105	0.1103	0.9939	0.1110	9.0662	1.0061	9.0090
30	0.1134	0.1132	0.9936	0.1139	8.8339	1.0064	8.7796
40	0.1164	0.1161	0.9932	0.1169	8.6133	1.0068	8.5543
50	0.1193	0.1190	0.9929	0.1199	8.4034	1.0072	8.3403

ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ(ต่อ)

Degree	Radians	sine	cosine	tangent	Cosecant	secant	cotangent	
7	0	0.1222	0.1219	0.9925	0.1228	8.2034	1.0076	8.1433
	10	0.1251	0.1248	0.9922	0.1258	8.0128	1.0079	7.9491
	20	0.1280	0.1277	0.9918	0.1287	7.8309	1.0083	7.7700
	30	0.1309	0.1305	0.9914	0.1317	7.6628	1.0087	7.5930
	40	0.1338	0.1334	0.9911	0.1346	7.4963	1.0090	7.4294
	50	0.1367	0.1363	0.9907	0.1376	7.3368	1.0094	7.2674
8	0	0.1396	0.1391	0.9903	0.1405	7.1891	1.0098	7.1174
	10	0.1425	0.1420	0.9899	0.1435	7.0423	1.0102	6.9686
	20	0.1454	0.1449	0.9894	0.1464	6.9013	1.0107	6.8306
	30	0.1484	0.1479	0.9890	0.1495	6.7613	1.0111	6.6890
	40	0.1513	0.1507	0.9886	0.1525	6.6357	1.0115	6.5574
	50	0.1542	0.1536	0.9881	0.1554	6.5104	1.0120	6.4350
9	0	0.1571	0.1565	0.9877	0.1584	6.3898	1.0125	6.3131
	10	0.1600	0.1593	0.9872	0.1614	6.2775	1.0130	6.1958
	20	0.1629	0.1622	0.9868	0.1644	6.1652	1.0134	6.0827
	30	0.1658	0.1650	0.9863	0.1673	6.0606	1.0139	5.9773
	40	0.1687	0.1679	0.9858	0.1703	5.9559	1.0144	5.8720
	50	0.1716	0.1708	0.9853	0.1733	5.8548	1.0149	5.7703
10	0	0.1745	0.1736	0.9848	0.1763	5.7604	1.0154	5.6721
	10	0.1774	0.1765	0.9843	0.1793	5.6657	1.0160	5.5772
	20	0.1804	0.1794	0.9838	0.1824	5.5741	1.0165	5.4825
	30	0.1833	0.1823	0.9832	0.1854	5.4855	1.0171	5.3937
	40	0.1862	0.1851	0.9827	0.1884	5.4025	1.0176	5.3079
	50	0.1891	0.1880	0.9822	0.1914	5.3191	1.0181	5.2247
11	0	0.1920	0.1908	0.9816	0.1944	5.2411	1.0187	5.1440
	10	0.1949	0.1937	0.9811	0.1974	5.1626	1.0193	5.0659
	20	0.1978	0.1965	0.9805	0.2004	5.0891	1.0199	4.9900
	30	0.2007	0.1994	0.9799	0.2034	5.0150	1.0205	4.9164
	40	0.2036	0.2022	0.9793	0.2065	4.9456	1.0211	4.8426
	50	0.2065	0.2050	0.9788	0.2095	4.8780	1.0217	4.7733
12	0	0.2094	0.2079	0.9782	0.2125	4.8100	1.0223	4.7059
	10	0.2123	0.2107	0.9775	0.2155	4.7461	1.0230	4.6404
	20	0.2153	0.2136	0.9769	0.2187	4.6816	1.0236	4.5725
	30	0.2182	0.2165	0.9763	0.2217	4.6189	1.0243	4.5106
	40	0.2211	0.2193	0.9757	0.2248	4.5600	1.0249	4.4484
	50	0.2240	0.2221	0.9750	0.2278	4.5025	1.0256	4.3898
13	0	0.2269	0.2250	0.9744	0.2309	4.4444	1.0263	4.3309
	10	0.2298	0.2278	0.9737	0.2339	4.3898	1.0270	4.2753
	20	0.2327	0.2306	0.9730	0.2370	4.3365	1.0277	4.2194
	30	0.2356	0.2334	0.9724	0.2401	4.2845	1.0284	4.1649
	40	0.2385	0.2362	0.9717	0.2431	4.2337	1.0291	4.1135
	50	0.2414	0.2391	0.9710	0.2462	4.1824	1.0299	4.0617

ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ(ต่อ)

Degree	Radians	sine	cosine	tangent	cosecant	secant	cotangent	
14	0	0.2443	0.2419	0.9703	0.2493	4.1339	1.0306	4.0112
	10	0.2473	0.2448	0.9696	0.2525	4.0850	1.0314	3.9604
	20	0.2502	0.2476	0.9689	0.2556	4.0388	1.0321	3.9124
	30	0.2531	0.2504	0.9681	0.2586	3.9936	1.0330	3.8670
	40	0.2560	0.2532	0.9674	0.2617	3.9494	1.0337	3.8212
	50	0.2589	0.2560	0.9667	0.2648	3.9063	1.0344	3.7764
15	0	0.2618	0.2588	0.9659	0.2679	3.8640	1.0353	3.7327
	10	0.2647	0.2616	0.9652	0.2711	3.8226	1.0361	3.6887
	20	0.2676	0.2644	0.9644	0.2742	3.7821	1.0369	3.6470
	30	0.2705	0.2672	0.9636	0.2773	3.7425	1.0378	3.6062
	40	0.2734	0.2700	0.9629	0.2804	3.7037	1.0385	3.5663
	50	0.2763	0.2728	0.9621	0.2836	3.6657	1.0394	3.5261
16	0	0.2793	0.2757	0.9612	0.2868	3.6271	1.0404	3.4868
	10	0.2822	0.2785	0.9604	0.2899	3.5907	1.0412	3.4495
	20	0.2851	0.2813	0.9596	0.2931	3.5549	1.0421	3.4118
	30	0.2880	0.2840	0.9588	0.2962	3.5211	1.0430	3.3761
	40	0.2909	0.2868	0.9580	0.2994	3.4868	1.0438	3.3400
	50	0.2938	0.2896	0.9572	0.3026	3.4530	1.0447	3.3047
17	0	0.2967	0.2924	0.9563	0.3057	3.4200	1.0457	3.2712
	10	0.2996	0.2951	0.9555	0.3089	3.3887	1.0466	3.2373
	20	0.3025	0.2979	0.9546	0.3121	3.3568	1.0476	3.2041
	30	0.3054	0.3007	0.9537	0.3153	3.3256	1.0485	3.1716
	40	0.3083	0.3034	0.9529	0.3185	3.2960	1.0494	3.1397
	50	0.3113	0.3063	0.9519	0.3218	3.2648	1.0505	3.1075
18	0	0.3142	0.3091	0.9510	0.3250	3.2352	1.0515	3.0769
	10	0.3171	0.3118	0.9501	0.3282	3.2072	1.0525	3.0469
	20	0.3200	0.3146	0.9492	0.3314	3.1786	1.0535	3.0175
	30	0.3229	0.3173	0.9483	0.3346	3.1516	1.0545	2.9886
	40	0.3258	0.3201	0.9474	0.3378	3.1240	1.0555	2.9603
	50	0.3287	0.3228	0.9465	0.3411	3.0979	1.0565	2.9317
19	0	0.3316	0.3256	0.9455	0.3443	3.0713	1.0576	2.9044
	10	0.3345	0.3283	0.9446	0.3476	3.0460	1.0586	2.8769
	20	0.3374	0.3310	0.9436	0.3508	3.0211	1.0598	2.8506
	30	0.3403	0.3338	0.9427	0.3541	2.9958	1.0608	2.8241
	40	0.3432	0.3365	0.9417	0.3573	2.9718	1.0619	2.7988
	50	0.3462	0.3393	0.9407	0.3607	2.9472	1.0630	2.7724
20	0	0.3491	0.3421	0.9397	0.3640	2.9231	1.0642	2.7473
	10	0.3520	0.3448	0.9387	0.3673	2.9002	1.0653	2.7226
	20	0.3549	0.3475	0.9377	0.3706	2.8777	1.0664	2.6983
	30	0.3578	0.3502	0.9367	0.3739	2.8555	1.0676	2.6745
	40	0.3607	0.3529	0.9357	0.3772	2.8337	1.0687	2.6511
	50	0.3636	0.3556	0.9346	0.3805	2.8121	1.0700	2.6281

ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ(ต่อ)

Degree	Radians	sine	cosine	tangent	cosecant	secant	cotangent	
21	0	0.3665	0.3584	0.9336	0.3838	2.7902	1.0711	2.6055
	10	0.3694	0.3611	0.9325	0.3872	2.7693	1.0724	2.5826
	20	0.3723	0.3638	0.9315	0.3905	2.7488	1.0735	2.5608
	30	0.3752	0.3665	0.9304	0.3939	2.7285	1.0748	2.5387
	40	0.3782	0.3692	0.9293	0.3973	2.7086	1.0761	2.5170
	50	0.3811	0.3719	0.9283	0.4007	2.6889	1.0772	2.4956
22	0	0.3840	0.3746	0.9272	0.4041	2.6695	1.0785	2.4746
	10	0.3869	0.3773	0.9261	0.4074	2.6504	1.0798	2.4546
	20	0.3898	0.3800	0.9250	0.4108	2.6316	1.0811	2.4343
	30	0.3927	0.3827	0.9239	0.4142	2.6130	1.0824	2.4143
	40	0.3956	0.3854	0.9228	0.4176	2.5947	1.0837	2.3946
	50	0.3985	0.3880	0.9216	0.4210	2.5773	1.0851	2.3753
23	0	0.4014	0.3907	0.9205	0.4244	2.5595	1.0864	2.3563
	10	0.4043	0.3934	0.9194	0.4279	2.5419	1.0877	2.3370
	20	0.4072	0.3960	0.9182	0.4313	2.5253	1.0891	2.3186
	30	0.4102	0.3988	0.9170	0.4349	2.5075	1.0905	2.2994
	40	0.4131	0.4015	0.9159	0.4383	2.4907	1.0918	2.2815
	50	0.4160	0.4041	0.9147	0.4418	2.4746	1.0933	2.2635
24	0	0.4189	0.4068	0.9135	0.4453	2.4582	1.0947	2.2457
	10	0.4218	0.4094	0.9124	0.4487	2.4426	1.0960	2.2287
	20	0.4247	0.4120	0.9112	0.4522	2.4272	1.0975	2.2114
	30	0.4276	0.4147	0.9100	0.4557	2.4114	1.0989	2.1944
	40	0.4305	0.4173	0.9088	0.4592	2.3964	1.1004	2.1777
	50	0.4334	0.4200	0.9075	0.4627	2.3810	1.1019	2.1612
25	0	0.4363	0.4226	0.9063	0.4663	2.3663	1.1034	2.1445
	10	0.4392	0.4252	0.9051	0.4698	2.3518	1.1049	2.1286
	20	0.4422	0.4279	0.9038	0.4735	2.3370	1.1064	2.1119
	30	0.4451	0.4305	0.9026	0.4770	2.3229	1.1079	2.0964
	40	0.4480	0.4332	0.9013	0.4806	2.3084	1.1095	2.0807
	50	0.4509	0.4358	0.9001	0.4842	2.2946	1.1110	2.0653
26	0	0.4538	0.4384	0.8988	0.4878	2.2810	1.1126	2.0500
	10	0.4567	0.4410	0.8975	0.4913	2.2676	1.1142	2.0354
	20	0.4596	0.4436	0.8962	0.4950	2.2543	1.1158	2.0202
	30	0.4625	0.4462	0.8949	0.4986	2.2411	1.1174	2.0056
	40	0.4654	0.4488	0.8936	0.5022	2.2282	1.1191	1.9912
	50	0.4683	0.4514	0.8923	0.5058	2.2153	1.1207	1.9771
27	0	0.4712	0.4540	0.8910	0.5095	2.2026	1.1223	1.9627
	10	0.4741	0.4565	0.8897	0.5131	2.1906	1.1240	1.9489
	20	0.4771	0.4592	0.8883	0.5169	2.1777	1.1257	1.9346
	30	0.4800	0.4618	0.8870	0.5206	2.1654	1.1274	1.9209
	40	0.4829	0.4643	0.8857	0.5243	2.1538	1.1291	1.9073
	50	0.4858	0.4669	0.8843	0.5280	2.1418	1.1308	1.8939

ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ(ต่อ)

Degree	Radians	sine	cosine	tangent	cosecant	secant	cotangent	
28	0	0.4887	0.4695	0.8829	0.5317	2.1299	1.1326	1.8808
	10	0.4916	0.4720	0.8816	0.5354	2.1186	1.1343	1.8678
	20	0.4945	0.4746	0.8802	0.5392	2.1070	1.1361	1.8546
	30	0.4974	0.4771	0.8788	0.5429	2.0960	1.1379	1.8420
	40	0.5003	0.4797	0.8774	0.5467	2.0846	1.1397	1.8292
	50	0.5032	0.4822	0.8760	0.5505	2.0738	1.1416	1.8165
29	0	0.5061	0.4848	0.8746	0.5542	2.0627	1.1434	1.8044
	10	0.5091	0.4874	0.8732	0.5582	2.0517	1.1452	1.7915
	20	0.5120	0.4899	0.8718	0.5620	2.0412	1.1471	1.7794
	30	0.5149	0.4924	0.8703	0.5658	2.0309	1.1490	1.7674
	40	0.5178	0.4950	0.8689	0.5696	2.0202	1.1509	1.7556
	50	0.5207	0.4975	0.8675	0.5735	2.0101	1.1527	1.7437
30	0	0.5236	0.5000	0.8660	0.5774	2.0000	1.1547	1.7319
	10	0.5265	0.5025	0.8646	0.5812	1.9900	1.1566	1.7206
	20	0.5294	0.5050	0.8631	0.5851	1.9802	1.1586	1.7091
	30	0.5323	0.5075	0.8616	0.5890	1.9704	1.1606	1.6978
	40	0.5352	0.5100	0.8602	0.5929	1.9608	1.1625	1.6866
	50	0.5381	0.5125	0.8587	0.5968	1.9512	1.1646	1.6756
31	0	0.5411	0.5151	0.8571	0.6009	1.9414	1.1667	1.6642
	10	0.5440	0.5176	0.8556	0.6049	1.9320	1.1688	1.6532
	20	0.5469	0.5200	0.8541	0.6088	1.9231	1.1708	1.6426
	30	0.5498	0.5225	0.8526	0.6128	1.9139	1.1729	1.6319
	40	0.5527	0.5250	0.8511	0.6168	1.9048	1.1750	1.6213
	50	0.5556	0.5275	0.8496	0.6208	1.8957	1.1770	1.6108
32	0	0.5585	0.5299	0.8481	0.6249	1.8871	1.1791	1.6003
	10	0.5614	0.5324	0.8465	0.6289	1.8783	1.1813	1.5901
	20	0.5643	0.5348	0.8450	0.6330	1.8699	1.1834	1.5798
	30	0.5672	0.5373	0.8434	0.6370	1.8612	1.1857	1.5699
	40	0.5701	0.5397	0.8418	0.6411	1.8529	1.1879	1.5598
	50	0.5730	0.5422	0.8403	0.6452	1.8443	1.1901	1.5499
33	0	0.5760	0.5447	0.8386	0.6495	1.8359	1.1925	1.5396
	10	0.5789	0.5471	0.8371	0.6536	1.8278	1.1946	1.5300
	20	0.5818	0.5495	0.8355	0.6577	1.8198	1.1969	1.5205
	30	0.5847	0.5519	0.8339	0.6619	1.8119	1.1992	1.5108
	40	0.5876	0.5544	0.8323	0.6661	1.8038	1.2015	1.5013
	50	0.5905	0.5568	0.8307	0.6703	1.7960	1.2038	1.4919
34	0	0.5934	0.5592	0.8290	0.6745	1.7883	1.2063	1.4826
	10	0.5963	0.5616	0.8274	0.6787	1.7806	1.2086	1.4734
	20	0.5992	0.5640	0.8258	0.6830	1.7730	1.2109	1.4641
	30	0.6021	0.5664	0.8241	0.6872	1.7655	1.2134	1.4552
	40	0.6050	0.5688	0.8225	0.6915	1.7581	1.2158	1.4461
	50	0.6080	0.5712	0.8208	0.6959	1.7507	1.2183	1.4370

ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ(ต่อ)

Degree	Radians	sine	cosine	tangent	cosecant	secant	cotangent	
35	0	0.6109	0.5736	0.8191	0.7003	1.7434	1.2209	1.4280
	10	0.6138	0.5760	0.8175	0.7046	1.7361	1.2232	1.4192
	20	0.6167	0.5783	0.8158	0.7089	1.7292	1.2258	1.4106
	30	0.6196	0.5807	0.8141	0.7133	1.7221	1.2284	1.4019
	40	0.6225	0.5831	0.8124	0.7177	1.7150	1.2309	1.3933
	50	0.6254	0.5854	0.8107	0.7221	1.7082	1.2335	1.3848
36	0	0.6283	0.5878	0.8090	0.7265	1.7013	1.2361	1.3765
	10	0.6312	0.5901	0.8073	0.7310	1.6946	1.2387	1.3680
	20	0.6341	0.5925	0.8056	0.7354	1.6878	1.2413	1.3598
	30	0.6370	0.5948	0.8039	0.7399	1.6812	1.2439	1.3515
	40	0.6400	0.5972	0.8021	0.7445	1.6745	1.2467	1.3432
	50	0.6429	0.5995	0.8004	0.7491	1.6681	1.2494	1.3349
37	0	0.6458	0.6018	0.7986	0.7536	1.6617	1.2522	1.3270
	10	0.6487	0.6042	0.7969	0.7582	1.6551	1.2549	1.3189
	20	0.6516	0.6065	0.7951	0.7627	1.6488	1.2577	1.3111
	30	0.6545	0.6088	0.7934	0.7673	1.6426	1.2604	1.3033
	40	0.6574	0.6111	0.7916	0.7719	1.6364	1.2633	1.2955
	50	0.6603	0.6134	0.7898	0.7766	1.6303	1.2661	1.2877
38	0	0.6632	0.6156	0.7880	0.7812	1.6244	1.2690	1.2801
	10	0.6661	0.6179	0.7862	0.7859	1.6184	1.2719	1.2724
	20	0.6690	0.6202	0.7844	0.7906	1.6124	1.2749	1.2649
	30	0.6720	0.6226	0.7826	0.7955	1.6062	1.2778	1.2571
	40	0.6749	0.6248	0.7808	0.8003	1.6005	1.2807	1.2495
	50	0.6778	0.6271	0.7790	0.8050	1.5946	1.2837	1.2422
39	0	0.6807	0.6293	0.7771	0.8098	1.5891	1.2868	1.2349
	10	0.6836	0.6316	0.7753	0.8146	1.5833	1.2898	1.2276
	20	0.6865	0.6338	0.7735	0.8195	1.5778	1.2928	1.2203
	30	0.6894	0.6361	0.7716	0.8243	1.5721	1.2960	1.2132
	40	0.6923	0.6383	0.7698	0.8292	1.5667	1.2990	1.2060
	50	0.6952	0.6405	0.7679	0.8341	1.5613	1.3023	1.1989
40	0	0.6981	0.6428	0.7661	0.8390	1.5557	1.3053	1.1919
	10	0.7010	0.6450	0.7642	0.8440	1.5504	1.3086	1.1848
	20	0.7039	0.6472	0.7623	0.8490	1.5451	1.3118	1.1779
	30	0.7069	0.6495	0.7604	0.8542	1.5396	1.3151	1.1707
	40	0.7098	0.6517	0.7585	0.8592	1.5344	1.3184	1.1639
	50	0.7127	0.6539	0.7566	0.8642	1.5293	1.3217	1.1571
41	0	0.7156	0.6561	0.7547	0.8693	1.5242	1.3250	1.1504
	10	0.7185	0.6583	0.7528	0.8744	1.5191	1.3284	1.1436
	20	0.7214	0.6604	0.7509	0.8795	1.5142	1.3317	1.1370
	30	0.7243	0.6626	0.7490	0.8847	1.5092	1.3351	1.1303
	40	0.7272	0.6648	0.7470	0.8899	1.5042	1.3387	1.1237
	50	0.7301	0.6669	0.7451	0.8951	1.4995	1.3421	1.1172

ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ(ต่อ)

Degree	Radians	sine	cosine	tangent	cosecant	secant	cotangent
42	0	0.7330	0.6691	0.7432	0.9003	1.4945	1.3455
	10	0.7359	0.6713	0.7412	0.9056	1.4896	1.3492
	20	0.7389	0.6735	0.7392	0.9111	1.4848	1.3528
	30	0.7418	0.6756	0.7373	0.9164	1.4802	1.3563
	40	0.7447	0.6778	0.7353	0.9217	1.4754	1.3600
	50	0.7476	0.6799	0.7333	0.9271	1.4708	1.3637
43	0	0.7505	0.6820	0.7313	0.9325	1.4663	1.3674
	10	0.7534	0.6841	0.7294	0.9380	1.4618	1.3710
	20	0.7563	0.6862	0.7274	0.9434	1.4573	1.3748
	30	0.7592	0.6883	0.7254	0.9489	1.4529	1.3785
	40	0.7621	0.6904	0.7234	0.9545	1.4484	1.3824
	50	0.7650	0.6925	0.7214	0.9600	1.4440	1.3862
44	0	0.7679	0.6946	0.7194	0.9656	1.4397	1.3900
	10	0.7709	0.6968	0.7173	0.9714	1.4351	1.3941
	20	0.7738	0.6989	0.7153	0.9771	1.4308	1.3980
	30	0.7767	0.7009	0.7132	0.9828	1.4267	1.4021
	40	0.7796	0.7030	0.7112	0.9885	1.4225	1.4061
	50	0.7825	0.7051	0.7092	0.9942	1.4182	1.4100
45	0	0.7854	0.7071	0.7071	1.0000	1.4142	1.4142
	10	0.7883	0.7092	0.7051	1.0058	1.4100	1.4182
	20	0.7912	0.7112	0.7030	1.0117	1.4061	1.4225
	30	0.7941	0.7132	0.7009	1.0176	1.4021	1.4267
	40	0.7970	0.7153	0.6989	1.0235	1.3980	1.4308
	50	0.7999	0.7173	0.6968	1.0294	1.3941	1.4351
46	0	0.8029	0.7194	0.6946	1.0356	1.3900	1.4397
	10	0.8058	0.7214	0.6925	1.0417	1.3862	1.4440
	20	0.8087	0.7234	0.6904	1.0477	1.3824	1.4484
	30	0.8116	0.7254	0.6883	1.0538	1.3785	1.4529
	40	0.8145	0.7274	0.6862	1.0600	1.3748	1.4573
	50	0.8174	0.7294	0.6841	1.0661	1.3710	1.4618
47	0	0.8203	0.7314	0.6820	1.0724	1.3672	1.4663
	10	0.8232	0.7333	0.6799	1.0786	1.3637	1.4708
	20	0.8261	0.7353	0.6777	1.0849	1.3600	1.4756
	30	0.8290	0.7373	0.6756	1.0912	1.3563	1.4802
	40	0.8319	0.7392	0.6735	1.0976	1.3528	1.4848
	50	0.8348	0.7412	0.6713	1.1040	1.3492	1.4896
48	0	0.8378	0.7432	0.6691	1.1107	1.3455	1.4945
	10	0.8407	0.7451	0.6669	1.1172	1.3421	1.4995
	20	0.8436	0.7470	0.6648	1.1237	1.3387	1.5042
	30	0.8465	0.7490	0.6626	1.1303	1.3351	1.5092
	40	0.8494	0.7509	0.6604	1.1370	1.3317	1.5142
	50	0.8523	0.7528	0.6583	1.1436	1.3284	1.5191

ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ(ต่อ)

Degree	Radians	sine	cosine	tangent	cosecant	secant	cotangent	
49	0	0.8552	0.7547	0.6561	1.1503	1.3250	1.5242	0.8693
	10	0.8581	0.7566	0.6539	1.1571	1.3217	1.5293	0.8642
	20	0.8610	0.7585	0.6517	1.1639	1.3184	1.5344	0.8592
	30	0.8639	0.7604	0.6495	1.1708	1.3151	1.5396	0.8541
	40	0.8668	0.7623	0.6473	1.1777	1.3118	1.5449	0.8491
	50	0.8698	0.7642	0.6450	1.1848	1.3086	1.5504	0.8440
50	0	0.8727	0.7661	0.6428	1.1918	1.3053	1.5557	0.8391
	10	0.8756	0.7679	0.6405	1.1989	1.3023	1.5613	0.8341
	20	0.8785	0.7698	0.6383	1.2060	1.2990	1.5667	0.8292
	30	0.8814	0.7716	0.6361	1.2131	1.2960	1.5721	0.8243
	40	0.8843	0.7735	0.6338	1.2203	1.2928	1.5778	0.8195
	50	0.8872	0.7753	0.6316	1.2276	1.2898	1.5833	0.8146
51	0	0.8901	0.7771	0.6293	1.2349	1.2868	1.5891	0.8098
	10	0.8930	0.7790	0.6271	1.2422	1.2837	1.5946	0.8050
	20	0.8959	0.7808	0.6248	1.2496	1.2807	1.6005	0.8003
	30	0.8988	0.7826	0.6225	1.2571	1.2778	1.6064	0.7955
	40	0.9018	0.7844	0.6202	1.2648	1.2749	1.6124	0.7906
	50	0.9047	0.7862	0.6179	1.2724	1.2719	1.6184	0.7859
52	0	0.9076	0.7880	0.6156	1.2800	1.2690	1.6244	0.7813
	10	0.9105	0.7898	0.6134	1.2877	1.2661	1.6303	0.7766
	20	0.9134	0.7916	0.6111	1.2954	1.2633	1.6364	0.7720
	30	0.9163	0.7934	0.6088	1.3032	1.2604	1.6426	0.7673
	40	0.9192	0.7951	0.6065	1.3111	1.2577	1.6488	0.7627
	50	0.9221	0.7969	0.6041	1.3190	1.2549	1.6554	0.7582
53	0	0.9250	0.7986	0.6018	1.3270	1.2522	1.6617	0.7536
	10	0.9279	0.8004	0.5995	1.3350	1.2494	1.6681	0.7491
	20	0.9308	0.8021	0.5972	1.3431	1.2467	1.6745	0.7445
	30	0.9338	0.8039	0.5948	1.3516	1.2439	1.6812	0.7399
	40	0.9367	0.8056	0.5924	1.3598	1.2413	1.6880	0.7354
	50	0.9396	0.8073	0.5901	1.3681	1.2387	1.6946	0.7309
54	0	0.9425	0.8090	0.5878	1.3764	1.2361	1.7013	0.7265
	10	0.9454	0.8107	0.5854	1.3849	1.2335	1.7082	0.7221
	20	0.9483	0.8124	0.5831	1.3934	1.2309	1.7150	0.7177
	30	0.9512	0.8141	0.5807	1.4019	1.2284	1.7221	0.7133
	40	0.9541	0.8158	0.5783	1.4106	1.2258	1.7292	0.7089
	50	0.9570	0.8175	0.5760	1.4193	1.2232	1.7361	0.7046
55	0	0.9599	0.8191	0.5736	1.4281	1.2209	1.7434	0.7002
	10	0.9628	0.8208	0.5712	1.4369	1.2183	1.7507	0.6959
	20	0.9657	0.8224	0.5688	1.4458	1.2160	1.7581	0.6917
	30	0.9687	0.8242	0.5664	1.4551	1.2133	1.7655	0.6872
	40	0.9716	0.8258	0.5640	1.4642	1.2109	1.7730	0.6830
	50	0.9745	0.8274	0.5616	1.4734	1.2086	1.7806	0.6787

ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ(ต่อ)

Degree	Radians	sine	cosine	tangent	cosecant	secant	cotangent
56	0	0.9774	0.8290	0.5592	1.4826	1.2063	1.7883
	10	0.9803	0.8307	0.5568	1.4919	1.2038	1.7960
	20	0.9832	0.8323	0.5544	1.5013	1.2015	1.8038
	30	0.9861	0.8339	0.5519	1.5108	1.1992	1.8119
	40	0.9890	0.8355	0.5495	1.5204	1.1969	1.8198
	50	0.9919	0.8371	0.5471	1.5300	1.1946	1.8278
57	0	0.9948	0.8387	0.5447	1.5397	1.1923	1.8359
	10	0.9977	0.8402	0.5422	1.5496	1.1902	1.8443
	20	1.0007	0.8418	0.5397	1.5598	1.1879	1.8529
	30	1.0036	0.8434	0.5373	1.5698	1.1857	1.8612
	40	1.0065	0.8450	0.5348	1.5799	1.1834	1.8699
	50	1.0094	0.8465	0.5324	1.5901	1.1813	1.8783
58	0	1.0123	0.8481	0.5299	1.6004	1.1791	1.8871
	10	1.0152	0.8496	0.5275	1.6107	1.1770	1.8957
	20	1.0181	0.8511	0.5250	1.6212	1.1750	1.9048
	30	1.0210	0.8526	0.5225	1.6318	1.1729	1.9139
	40	1.0239	0.8541	0.5200	1.6425	1.1708	1.9231
	50	1.0268	0.8556	0.5176	1.6532	1.1688	1.9320
59	0	1.0297	0.8571	0.5151	1.6641	1.1667	1.9414
	10	1.0327	0.8587	0.5125	1.6755	1.1646	1.9512
	20	1.0356	0.8602	0.5100	1.6866	1.1625	1.9608
	30	1.0385	0.8616	0.5075	1.6978	1.1606	1.9704
	40	1.0414	0.8631	0.5050	1.7091	1.1586	1.9802
	50	1.0443	0.8646	0.5025	1.7205	1.1566	1.9900
60	0	1.0472	0.8660	0.5000	1.7321	1.1547	2.0000
	10	1.0501	0.8675	0.4975	1.7437	1.1527	2.0101
	20	1.0530	0.8689	0.4950	1.7555	1.1509	2.0202
	30	1.0559	0.8703	0.4924	1.7674	1.1490	2.0309
	40	1.0588	0.8718	0.4899	1.7794	1.1471	2.0412
	50	1.0617	0.8732	0.4874	1.7916	1.1452	2.0517
61	0	1.0647	0.8746	0.4848	1.8043	1.1434	2.0627
	10	1.0676	0.8760	0.4822	1.8167	1.1416	2.0738
	20	1.0705	0.8774	0.4797	1.8292	1.1397	2.0846
	30	1.0734	0.8788	0.4771	1.8419	1.1379	2.0960
	40	1.0763	0.8802	0.4746	1.8547	1.1361	2.1070
	50	1.0792	0.8816	0.4720	1.8676	1.1343	2.1186
62	0	1.0821	0.8829	0.4695	1.8807	1.1326	2.1299
	10	1.0850	0.8843	0.4669	1.8939	1.1308	2.1418
	20	1.0879	0.8857	0.4643	1.9073	1.1291	2.1538
	30	1.0908	0.8870	0.4618	1.9208	1.1274	2.1654
	40	1.0937	0.8883	0.4592	1.9345	1.1257	2.1777
	50	1.0966	0.8897	0.4566	1.9483	1.1240	2.1901

ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ(ต่อ)

Degree	Radians	sine	cosine	tangent	cosecant	secant	cotangent	
63	0	1.0996	0.8910	0.4540	1.9628	1.1223	2.2026	0.5095
	10	1.1025	0.8923	0.4514	1.9770	1.1207	2.2153	0.5058
	20	1.1054	0.8936	0.4488	1.9913	1.1191	2.2282	0.5022
	30	1.1083	0.8949	0.4462	2.0058	1.1174	2.2411	0.4986
	40	1.1112	0.8962	0.4436	2.0204	1.1158	2.2543	0.4950
	50	1.1141	0.8975	0.4410	2.0352	1.1142	2.2676	0.4914
64	0	1.1170	0.8988	0.4384	2.0502	1.1126	2.2810	0.4878
	10	1.1199	0.9001	0.4358	2.0654	1.1110	2.2946	0.4842
	20	1.1228	0.9013	0.4332	2.0808	1.1095	2.3084	0.4806
	30	1.1257	0.9026	0.4305	2.0963	1.1079	2.3229	0.4770
	40	1.1286	0.9038	0.4279	2.1121	1.1064	2.3370	0.4735
	50	1.1316	0.9051	0.4252	2.1286	1.1049	2.3518	0.4698
65	0	1.1345	0.9063	0.4226	2.1447	1.1034	2.3663	0.4663
	10	1.1374	0.9075	0.4200	2.1610	1.1019	2.3810	0.4627
	20	1.1403	0.9088	0.4173	2.1776	1.1004	2.3964	0.4592
	30	1.1432	0.9100	0.4147	2.1944	1.0989	2.4114	0.4557
	40	1.1461	0.9112	0.4120	2.2113	1.0975	2.4272	0.4522
	50	1.1490	0.9124	0.4094	2.2285	1.0960	2.4426	0.4487
66	0	1.1519	0.9135	0.4068	2.2459	1.0947	2.4582	0.4453
	10	1.1548	0.9147	0.4041	2.2636	1.0933	2.4746	0.4418
	20	1.1577	0.9159	0.4014	2.2815	1.0918	2.4913	0.4383
	30	1.1606	0.9170	0.3988	2.2996	1.0905	2.5075	0.4349
	40	1.1636	0.9182	0.3960	2.3186	1.0891	2.5253	0.4313
	50	1.1665	0.9194	0.3934	2.3372	1.0877	2.5419	0.4279
67	0	1.1694	0.9205	0.3907	2.3560	1.0864	2.5595	0.4244
	10	1.1723	0.9216	0.3880	2.3752	1.0851	2.5773	0.4210
	20	1.1752	0.9228	0.3854	2.3946	1.0837	2.5947	0.4176
	30	1.1781	0.9239	0.3827	2.4142	1.0824	2.6130	0.4142
	40	1.1810	0.9250	0.3800	2.4342	1.0811	2.6316	0.4108
	50	1.1839	0.9261	0.3773	2.4544	1.0798	2.6504	0.4074
68	0	1.1868	0.9272	0.3746	2.4749	1.0785	2.6695	0.4041
	10	1.1897	0.9283	0.3719	2.4957	1.0772	2.6889	0.4007
	20	1.1926	0.9293	0.3692	2.5168	1.0761	2.7086	0.3973
	30	1.1956	0.9304	0.3665	2.5390	1.0748	2.7285	0.3939
	40	1.1985	0.9315	0.3638	2.5608	1.0735	2.7488	0.3905
	50	1.2014	0.9325	0.3611	2.5829	1.0724	2.7693	0.3872
69	0	1.2043	0.9336	0.3583	2.6053	1.0711	2.7910	0.3838
	10	1.2072	0.9346	0.3556	2.6280	1.0700	2.8121	0.3805
	20	1.2101	0.9357	0.3529	2.6511	1.0687	2.8337	0.3772
	30	1.2130	0.9367	0.3502	2.6746	1.0676	2.8555	0.3739
	40	1.2159	0.9377	0.3475	2.6984	1.0664	2.8777	0.3706
	50	1.2188	0.9387	0.3448	2.7226	1.0653	2.9002	0.3673

ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ(ต่อ)

Degree	Radians	sine	cosine	tangent	cosecant	secant	cotangent	
70	0	1.2217	0.9397	0.3420	2.7472	1.0642	2.9240	0.3640
	10	1.2246	0.9407	0.3393	2.7722	1.0630	2.9472	0.3607
	20	1.2275	0.9417	0.3366	2.7976	1.0619	2.9709	0.3574
	30	1.2305	0.9427	0.3338	2.8243	1.0608	2.9958	0.3541
	40	1.2334	0.9436	0.3310	2.8505	1.0598	3.0211	0.3508
	50	1.2363	0.9446	0.3283	2.8772	1.0586	3.0460	0.3476
71	0	1.2392	0.9455	0.3256	2.9044	1.0576	3.0713	0.3443
	10	1.2421	0.9465	0.3228	2.9320	1.0565	3.0979	0.3411
	20	1.2450	0.9474	0.3201	2.9600	1.0555	3.1240	0.3378
	30	1.2479	0.9483	0.3173	2.9886	1.0545	3.1516	0.3346
	40	1.2508	0.9492	0.3146	3.0176	1.0535	3.1786	0.3314
	50	1.2537	0.9501	0.3118	3.0472	1.0525	3.2072	0.3282
72	0	1.2566	0.9510	0.3091	3.0773	1.0515	3.2352	0.3250
	10	1.2595	0.9519	0.3063	3.1079	1.0505	3.2648	0.3218
	20	1.2625	0.9529	0.3034	3.1402	1.0494	3.2960	0.3185
	30	1.2654	0.9537	0.3007	3.1720	1.0485	3.3256	0.3153
	40	1.2683	0.9546	0.2979	3.2044	1.0476	3.3568	0.3121
	50	1.2712	0.9555	0.2951	3.2374	1.0466	3.3887	0.3089
73	0	1.2741	0.9563	0.2924	3.2710	1.0457	3.4200	0.3057
	10	1.2770	0.9572	0.2896	3.3052	1.0447	3.4530	0.3026
	20	1.2799	0.9580	0.2868	3.3401	1.0438	3.4868	0.2994
	30	1.2828	0.9588	0.2840	3.3757	1.0430	3.5211	0.2962
	40	1.2857	0.9596	0.2812	3.4120	1.0421	3.5562	0.2931
	50	1.2886	0.9604	0.2785	3.4491	1.0412	3.5907	0.2899
74	0	1.2915	0.9612	0.2757	3.4868	1.0404	3.6271	0.2868
	10	1.2945	0.9621	0.2728	3.5267	1.0394	3.6657	0.2836
	20	1.2974	0.9629	0.2700	3.5661	1.0385	3.7037	0.2804
	30	1.3003	0.9636	0.2672	3.6063	1.0378	3.7425	0.2773
	40	1.3032	0.9644	0.2644	3.6473	1.0369	3.7821	0.2742
	50	1.3061	0.9652	0.2616	3.6893	1.0361	3.8226	0.2711
75	0	1.3090	0.9659	0.2588	3.7321	1.0353	3.8640	0.2679
	10	1.3119	0.9667	0.2560	3.7759	1.0344	3.9063	0.2648
	20	1.3148	0.9674	0.2532	3.8206	1.0337	3.9494	0.2617
	30	1.3177	0.9681	0.2504	3.8663	1.0330	3.9936	0.2586
	40	1.3206	0.9689	0.2476	3.9131	1.0321	4.0388	0.2556
	50	1.3235	0.9696	0.2448	3.9610	1.0314	4.0850	0.2525
76	0	1.3265	0.9703	0.2419	4.0116	1.0306	4.1339	0.2493
	10	1.3294	0.9710	0.2391	4.0618	1.0299	4.1824	0.2462
	20	1.3323	0.9717	0.2362	4.1131	1.0291	4.2337	0.2431
	30	1.3352	0.9724	0.2334	4.1657	1.0284	4.2845	0.2401
	40	1.3381	0.9730	0.2306	4.2196	1.0277	4.3365	0.2370
	50	1.3410	0.9737	0.2278	4.2748	1.0270	4.3898	0.2339

ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ(ต่อ)

Degree	Radians	sine	cosine	tangent	cosecant	secant	cotangent	
77	0	1.3439	0.9744	0.2250	4.3314	1.0263	4.4444	0.2309
	10	1.3468	0.9750	0.2221	4.3894	1.0256	4.5025	0.2278
	20	1.3497	0.9757	0.2193	4.4490	1.0249	4.5600	0.2248
	30	1.3526	0.9763	0.2165	4.5101	1.0243	4.6189	0.2217
	40	1.3555	0.9769	0.2136	4.5728	1.0236	4.6816	0.2187
	50	1.3584	0.9775	0.2108	4.6372	1.0230	4.7438	0.2156
78	0	1.3614	0.9782	0.2079	4.7056	1.0223	4.8100	0.2125
	10	1.3643	0.9788	0.2050	4.7737	1.0217	4.8780	0.2095
	20	1.3672	0.9793	0.2022	4.8436	1.0211	4.9456	0.2065
	30	1.3701	0.9799	0.1994	4.9156	1.0205	5.0150	0.2034
	40	1.3730	0.9805	0.1965	4.9896	1.0199	5.0891	0.2004
	50	1.3759	0.9811	0.1937	5.0658	1.0193	5.1626	0.1974
79	0	1.3788	0.9816	0.1908	5.1443	1.0187	5.2411	0.1944
	10	1.3817	0.9822	0.1880	5.2251	1.0181	5.3191	0.1914
	20	1.3846	0.9827	0.1851	5.3085	1.0176	5.4025	0.1884
	30	1.3875	0.9832	0.1823	5.3944	1.0171	5.4855	0.1854
	40	1.3904	0.9838	0.1794	5.4831	1.0165	5.5741	0.1824
	50	1.3934	0.9843	0.1765	5.5778	1.0160	5.6657	0.1793
80	0	1.3963	0.9848	0.1736	5.6725	1.0154	5.7604	0.1763
	10	1.3992	0.9853	0.1708	5.7703	1.0149	5.8548	0.1733
	20	1.4021	0.9858	0.1679	5.8715	1.0144	5.9559	0.1703
	30	1.4050	0.9863	0.1650	5.9761	1.0139	6.0606	0.1673
	40	1.4079	0.9868	0.1622	6.0845	1.0134	6.1652	0.1644
	50	1.4108	0.9872	0.1593	6.1967	1.0130	6.2775	0.1614
81	0	1.4137	0.9877	0.1565	6.3131	1.0125	6.3898	0.1584
	10	1.4166	0.9881	0.1536	6.4338	1.0120	6.5104	0.1554
	20	1.4195	0.9886	0.1507	6.5590	1.0115	6.6357	0.1525
	30	1.4224	0.9890	0.1479	6.6892	1.0111	6.7613	0.1495
	40	1.4254	0.9894	0.1449	6.8292	1.0107	6.9013	0.1464
	50	1.4283	0.9899	0.1420	6.9702	1.0102	7.0423	0.1435
82	0	1.4312	0.9903	0.1391	7.1169	1.0098	7.1891	0.1405
	10	1.4341	0.9907	0.1363	7.2699	1.0094	7.3368	0.1376
	20	1.4370	0.9911	0.1334	7.4294	1.0090	7.4963	0.1346
	30	1.4399	0.9914	0.1305	7.5960	1.0087	7.6628	0.1316
	40	1.4428	0.9918	0.1276	7.7700	1.0083	7.8370	0.1287
	50	1.4457	0.9922	0.1248	7.9521	1.0079	8.0128	0.1258
83	0	1.4486	0.9925	0.1219	8.1428	1.0076	8.2034	0.1228
	10	1.4515	0.9929	0.1190	8.3427	1.0072	8.4034	0.1199
	20	1.4544	0.9932	0.1161	8.5525	1.0068	8.6133	0.1169
	30	1.4573	0.9936	0.1133	8.7730	1.0064	8.8261	0.1140
	40	1.4603	0.9939	0.1103	9.0132	1.0061	9.0662	0.1109
	50	1.4632	0.9942	0.1074	9.2581	1.0058	9.3110	0.1080

ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ(ต่อ)

Degree	Radians	sine	cosine	tangent	cosecant	secant	cotangent	
84	0	1.4661	0.9945	0.1045	9.5165	1.0055	9.5694	0.1051
	10	1.4690	0.9948	0.1016	9.7896	1.0052	9.8425	0.1021
	20	1.4719	0.9951	0.0987	10.0786	1.0049	10.1317	0.0992
	30	1.4748	0.9954	0.0958	10.3850	1.0046	10.4384	0.0963
	40	1.4777	0.9957	0.0930	10.7105	1.0043	10.7527	0.0934
	50	1.4806	0.9959	0.0901	11.0568	1.0041	11.0988	0.0904
85	0	1.4835	0.9962	0.0872	11.4261	1.0038	11.4679	0.0875
	10	1.4864	0.9964	0.0843	11.8207	1.0036	11.8624	0.0846
	20	1.4893	0.9967	0.0814	12.2433	1.0033	12.2850	0.0817
	30	1.4923	0.9969	0.0784	12.7133	1.0031	12.7551	0.0787
	40	1.4952	0.9971	0.0755	13.2029	1.0029	13.2450	0.0757
	50	1.4981	0.9974	0.0726	13.7316	1.0026	13.7741	0.0728
86	0	1.5010	0.9976	0.0697	14.3041	1.0024	14.3472	0.0699
	10	1.5039	0.9978	0.0668	14.9262	1.0022	14.9701	0.0670
	20	1.5068	0.9980	0.0640	15.6046	1.0020	15.6250	0.0641
	30	1.5097	0.9981	0.0611	16.3472	1.0019	16.3666	0.0612
	40	1.5126	0.9983	0.0582	17.1638	1.0017	17.1821	0.0583
	50	1.5155	0.9985	0.0553	18.0659	1.0015	18.0832	0.0554
87	0	1.5184	0.9986	0.0524	19.0678	1.0014	19.0840	0.0524
	10	1.5213	0.9988	0.0495	20.1870	1.0012	20.2020	0.0495
	20	1.5243	0.9989	0.0465	21.4916	1.0011	21.5054	0.0465
	30	1.5272	0.9990	0.0436	22.9232	1.0010	22.9358	0.0436
	40	1.5301	0.9992	0.0407	24.5587	1.0008	24.5700	0.0407
	50	1.5330	0.9993	0.0378	26.4450	1.0007	26.4550	0.0378
88	0	1.5359	0.9994	0.0349	28.6447	1.0006	28.6533	0.0349
	10	1.5388	0.9995	0.0320	31.2429	1.0005	31.2500	0.0320
	20	1.5417	0.9996	0.0291	34.3589	1.0004	34.3643	0.0291
	30	1.5446	0.9997	0.0262	38.1646	1.0003	38.1679	0.0262
	40	1.5475	0.9997	0.0233	42.9175	1.0003	42.9185	0.0233
	50	1.5504	0.9998	0.0204	49.0216	1.0002	49.0196	0.0204
89	0	1.5533	0.9998	0.0175	57.1490	1.0002	57.1429	0.0175
	10	1.5563	0.9999	0.0145	68.9782	1.0001	68.9655	0.0145
	20	1.5592	0.9999	0.0116	86.2303	1.0001	86.2069	0.0116
	30	1.5621	1.0000	0.0087	114.9882	1.0000	114.9425	0.0087
	40	1.5650	1.0000	0.0058	172.5211	1.0000	172.4138	0.0058
	50	1.5679	1.0000	0.0029	345.2639	1.0000	344.8276	0.0029
90	0	1.5708	1.0000	0.0000	หาค่าไม่ได้	1.0000	หาค่าไม่ได้	0.0000
	10	1.5737	1.0000	-0.0029	-344.3904	1.0000	-344.8276	-0.0029
	20	1.5766	1.0000	-0.0058	-172.3027	1.0000	-172.4138	-0.0058
	30	1.5795	1.0000	-0.0087	-114.8911	1.0000	-114.9425	-0.0087
	40	1.5824	0.9999	-0.0116	-86.1757	1.0001	-86.2069	-0.0116
	50	1.5853	0.9999	-0.0145	-68.9432	1.0001	-68.9655	-0.0145



ภาคผนวก ง

แบบทดสอบ

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright © by Chiang Mai University

All rights reserved

แบบทดสอบวิชาคณิตศาสตร์

เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

โรงเรียนแม่แจ่ม

อำเภอแม่แจ่ม

จังหวัดเชียงใหม่

ชื่อ ชั้น ม. 4 / 1 เลขที่

- คำชี้แจง 1. ให้นักเรียนทำลงในข้อสอบ
2. ข้อสอบมี 3 ตอน

ตอนที่ 1 ให้เลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียวแล้วทำเครื่องหมายวงกลม (○) ล้อมรอบตัวอักษรที่ต้องการ แต่ถ้าต้องการเปลี่ยนคำตอบให้เขียนเครื่องหมายกากบาททับ กับวงกลม (⊗) หรือลบเครื่องหมาย ○ ให้สะอาด (10 คะแนน)

ข้อ 1. รูปสามเหลี่ยม ABC ซึ่งมีมุม C เป็นมุมฉาก ความยาวของด้าน AC ยาว 3 เซนติเมตร และ ความยาวด้าน AB ยาว 6 เซนติเมตร ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง ?

ก. BC ยาว 27 เซนติเมตร

ข. $\sin A = \frac{1}{2}$

ค. $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ง. $\tan A = 2$

ข้อ 2. ถ้า $\sin \theta = \frac{4}{5}$ แล้ว $\tan \theta$ เท่ากับเท่าใด เมื่อใช้ความรู้เกี่ยวกับสามเหลี่ยมมุมฉาก ?

ก. $\tan \theta = \frac{5}{3}$

ข. $\tan \theta = \frac{3}{5}$

ค. $\tan \theta = \frac{3}{4}$

ง. $\tan \theta = \frac{4}{3}$

ข้อ 3. ถ้าจุด P(a,b) เป็นจุดใดๆ บนด้านสิ้นสุดของมุม θ ที่ไม่ใช่จุด (0,0) ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง ?

ก. ระยะจุด P(a,b) ถึงจุด (0,0) คือ $a^2 + b^2$

ข. $\sin \theta = \frac{a}{b}$

ค. $\cos \theta = \frac{b}{a}$

ง. $\tan \theta = \frac{b}{a}$

ข้อ 4. กำหนด $\sin 15^\circ = k$ ข้อใดสรุปถูกต้อง ?

ก. $\sin 30^\circ = 2k$

ข. $\sin 165^\circ = k$

ค. $\sin(-15^\circ) = k$

ง. $\sin(-345^\circ) = -k$

ข้อ 5. ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง ?

ก. $\sin 30^\circ + \cos 120^\circ = 0$

ข. $\sin 120^\circ + \cos 90^\circ = 0$

ค. $\cos 60^\circ + \sin 150^\circ = 0$

ง. $\tan 225^\circ + \tan 45^\circ = 0$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright © Chiang Mai University
All rights reserved

ข้อ 6. กำหนด $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ข้อใดต่อไปนี้ ไม่ถูกต้อง ?

ก. $\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ข. $\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ค. $\cos(-30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ง. $\cos \frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ข้อ 7. ข้อใดต่อไปนี้ มีค่าเท่ากับ 1

ก. $\sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{6}$

ข. $\sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{6}$

ค. $\tan \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{3} \cdot \tan \frac{\pi}{4}$

ง. $\sec \frac{\pi}{6} \cdot \csc \frac{\pi}{2} + \cos(-\frac{\pi}{6}) \cdot \csc \frac{\pi}{3}$

ข้อ 8. กำหนด $\sin 40^\circ 20' = 0.6481$, $\sin 40^\circ 30' = 0.6494$ แล้ว $\sin 40^\circ 28'$ ตรงกับข้อใด ?

ก. 0.6484

ข. 0.6487

ค. 0.6491

ง. 0.6501

ข้อ 9. ค่าของ $\cos(-\frac{28\pi}{3})$ ตรงกับข้อใด ?

ก. $-\frac{1}{2}$

ข. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

ค. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

ง. 1

ข้อ 10. ข้อใดต่อไปนี้ ไม่ถูกต้อง ?

ก. $y = 3 \cos x$ มีคาบเป็น 2π หน่วย แอมพลิจูดคือ 3

ข. $y = -2 \cos x$ มีคาบเป็น 2π หน่วย แอมพลิจูดคือ 2

ค. $y = -\sin 4x$ มีคาบเป็น π หน่วย แอมพลิจูดคือ 1

ง. $y = -4 \sin \frac{x}{2}$ มีคาบเป็น 4π หน่วย แอมพลิจูดคือ 4

ตอนที่ 2 ให้เติมเฉพาะคำตอบที่ถูกต้อง (10 คะแนน)

ข้อ 1. จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้ (2 คะแนน)

$\sin 585^\circ = \dots\dots\dots$

ข้อ 2. จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้ (2 คะแนน)

$\csc \frac{21\pi}{4} = \dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

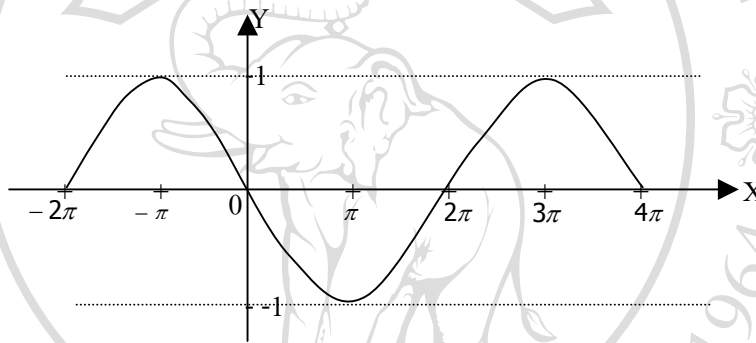
ข้อ 3. ค่าของ $\frac{2 \sin(-330^\circ) + \tan(-405^\circ)}{\cot 225^\circ}$ เท่ากับเท่าใด ? (2 คะแนน)

ตอบ

ข้อ 4. จากสมการ $y = 4 \sin 2x$ และ $y = -3 \tan \frac{x}{2}$ คาบและแอมพลิจูดเท่ากับเท่าใด ? (2 คะแนน)

ตอบ	$y = 4 \sin 2x$	$y = -3 \tan \frac{x}{2}$
	ความยาว 1 คาบ เท่ากับ	ความยาว 1 คาบ เท่ากับ
	แอมพลิจูด เท่ากับ	แอมพลิจูด เท่ากับ

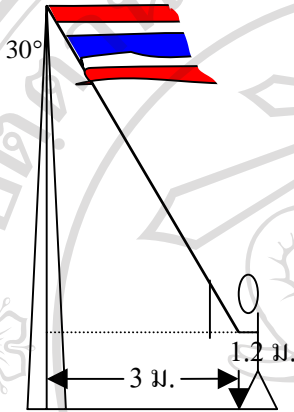
ข้อ 5. จงตอบคำถามจากกราฟต่อไปนี้ (2 คะแนน)



- ความยาว 1 คาบ เท่ากับหน่วย
- แอมพลิจูด เท่ากับ
- กราฟนี้เป็นกราฟของฟังก์ชัน

ตอนที่ 3 จงแสดงวิธีทำให้ละเอียด (10 คะแนน)

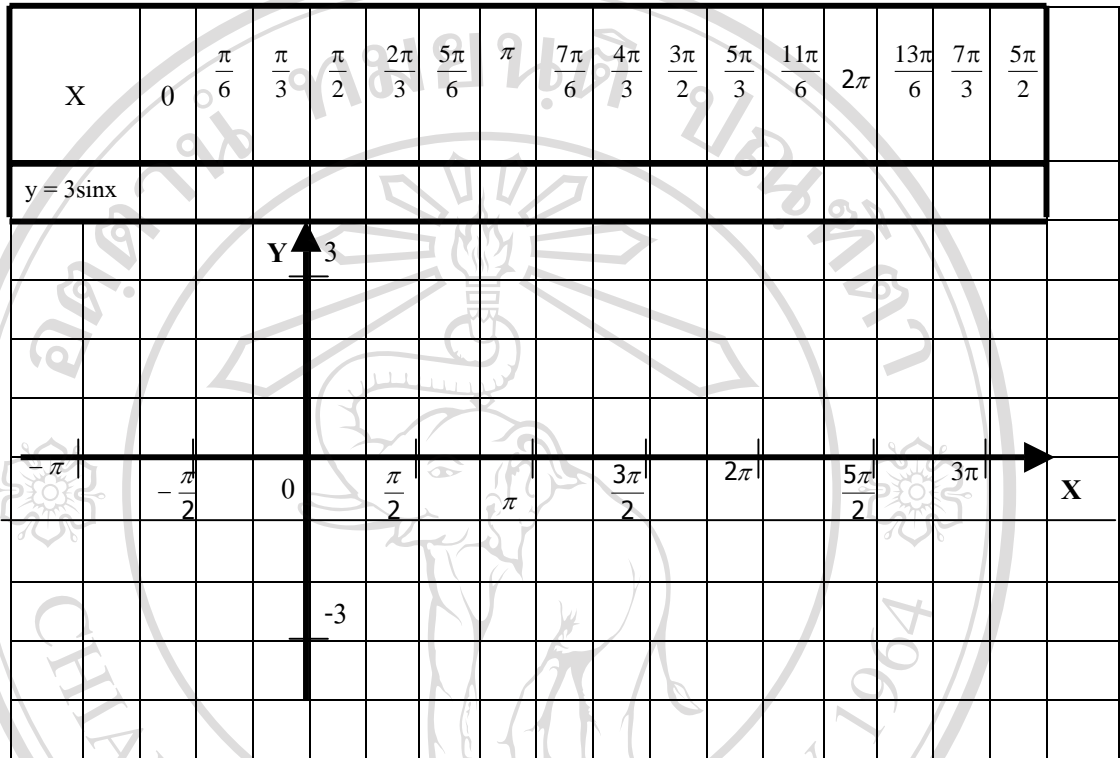
ข้อ 1. นายป้อมไปชักธงชาติในตอนเช้าในการทำกิจกรรมหน้าเสาธง นายป้อมดึงเชือกทำมุม 30 องศากับยอดเสาธง ปลายเชือกอยู่ระดับอกที่เขาสามารถชักธงได้พอดี เขายืนห่างจากเสาธง 3 เมตร และจากระดับที่เขาชักธงชาติถึงพื้นดินห่างกัน 1.2 เมตร ถ้านายป้อมต้องการหาความสูงของเสาธง และความยาวของเชือก (วัดทบเดียว) (เมื่อ $\sqrt{3} \approx 1.73$) จะหาได้อย่างไร (4 คะแนน)



ข้อ 2. จงหาค่าของ $\sin \frac{7\pi}{4} \cos \frac{13\pi}{6} - \tan 60^\circ \cos \frac{23\pi}{4} + \sin 90^\circ \cos 180^\circ$ (3 คะแนน)

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright © by Chiang Mai University
All rights reserved

ข้อ 3. จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน $y = 3\sin x$ พร้อมทั้งบอกลักษณะของกราฟ บอกคาบ และ แอมพลิจูด (3 คะแนน)



1. ลักษณะของกราฟ
2. ความยาว 1 คาบ เท่ากับ หน่วย
3. แอมพลิจูด เท่ากับ

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-นามสกุล	นายณรงค์ อู่ฟูใจ
วัน เดือน ปีเกิด	6 พฤศจิกายน 2517
ที่อยู่ปัจจุบัน	65/1 หมู่ 5 ต.แม่สอย อ.จอมทอง จ.เชียงใหม่ 50240
ประวัติการศึกษา	
ปีการศึกษา 2534	สำเร็จการศึกษาชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย โรงเรียนจอมทอง อำเภอจอมทอง จังหวัดเชียงใหม่
ปีการศึกษา 2538	สำเร็จการศึกษาปริญญาตรีครุศาสตรบัณฑิต (วิชาเอกคณิตศาสตร์) สถาบันราชภัฏเชียงใหม่
ประวัติการทำงาน	
พ.ศ. 2539 - 2542	อาจารย์ 1 ระดับ 3 โรงเรียนแม่แจ่ม อำเภอแม่แจ่ม จังหวัดเชียงใหม่
พ.ศ. 2542 - 2546	อาจารย์ 1 ระดับ 4 โรงเรียนแม่แจ่ม อำเภอแม่แจ่ม จังหวัดเชียงใหม่
พ.ศ. 2547 ถึงปัจจุบัน	อาจารย์ 1 ระดับ 5 โรงเรียนดอยเต่าวิทยาคม อำเภอดอยเต่า จังหวัดเชียงใหม่