

## บทที่ 3

### วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยในครั้งนี้เป็นการวิจัยเพื่อหาแนวทางพัฒนาการเรียนการสอนเรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยใช้แบบจำลองการวิจัยเชิงปฏิบัติการที่นำเสนอโดย Kemmis and McTaggart (อ้างใน ผ่องพรรณ ตรียมงคลกุล, 2543, หน้า 33) ซึ่งประกอบด้วยขั้นตอน 3 ขั้นตอน คือ ขั้นวางแผน (Plan) ขั้นปฏิบัติตามแผนและสังเกตผลการปฏิบัติ (Act and Observe) และ ขั้นสะท้อนความคิด (Reflect) กลุ่มที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ คือ นักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4/1 โรงเรียนแม่แจ่ม อำเภอแม่แจ่ม จังหวัดเชียงใหม่ จำนวน 38 คน ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2545 โดยมีขั้นตอนการวิจัย 2 ขั้นตอนหลัก คือขั้นเตรียมการและขั้นดำเนินการ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

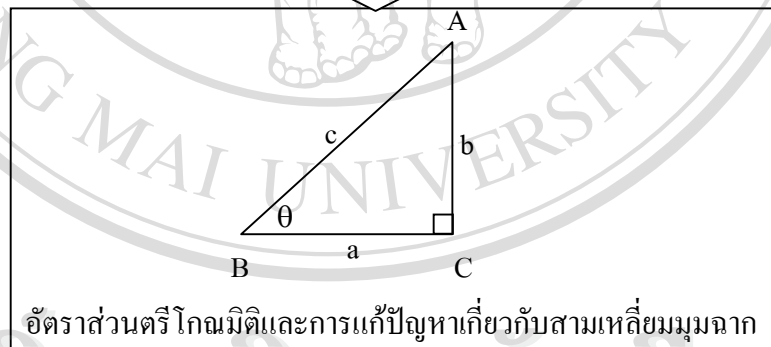
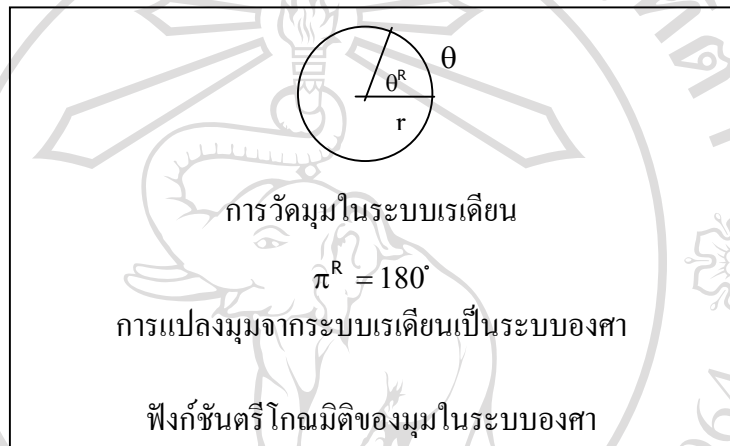
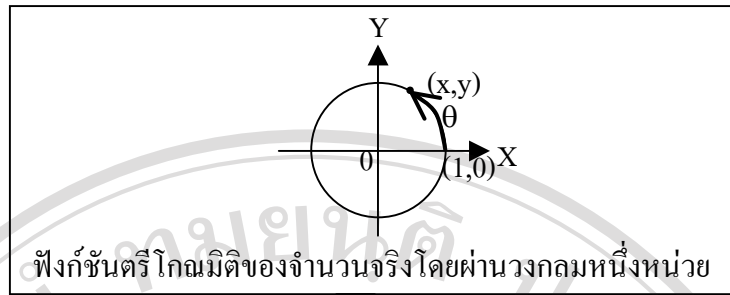
#### ขั้นเตรียมการ

ขั้นเตรียมการเป็นขั้นที่ผู้วิจัยเตรียมเครื่องมือและวิธีการก่อนทำการเก็บรวบรวมข้อมูล โดยแบ่งออกเป็น 4 หัวข้อ ดังต่อไปนี้

#### 1. ออกแบบกิจกรรมการเรียนการสอนเพื่อแก้ปัญหาการวิจัย

จากปัญหาในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ที่กล่าวมาข้างต้น ผู้วิจัยได้กำหนดแนวทางในการแก้ปัญหา ดังนี้

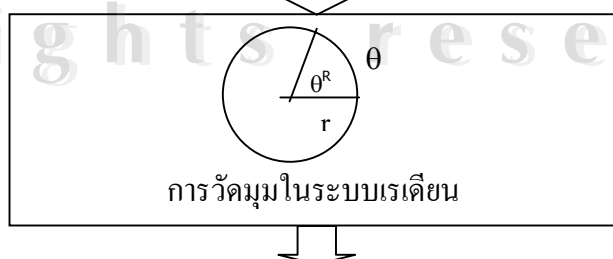
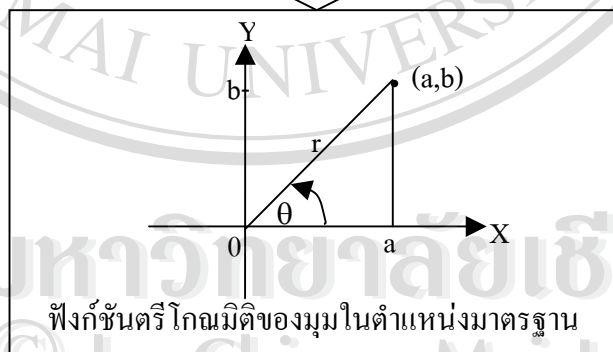
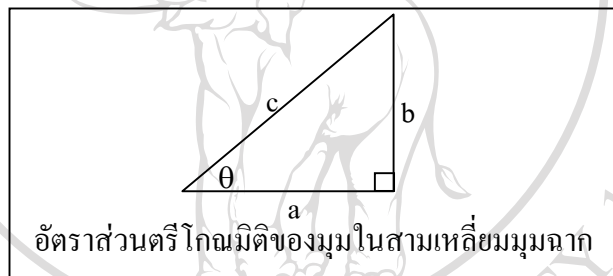
1.1 จัดเรียงลำดับเนื้อหาใหม่ที่มีการเชื่อมโยงความรู้เดิมกับความรู้ใหม่ การจัดเรียงลำดับเนื้อหาเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติในหนังสือแบบเรียน เริ่มจากวงกลมหนึ่งหน่วยและความยาวของส่วนโค้ง จากนั้นให้นิยามฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงและสูตรต่าง ๆ ในการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ แล้วจึงกล่าวถึงฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในระบบเรเดียนและการแปลงมุมจากระบบเรเดียนเป็นระบบองศา จากนั้นจะกล่าวถึงอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมในสามเหลี่ยมมุมฉาก และตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ สุดท้ายจะกล่าวถึงกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ซึ่งสามารถนำเสนอการจัดลำดับเนื้อหาในแบบเรียนโดยใช้แผ่นภาพได้ดังนี้

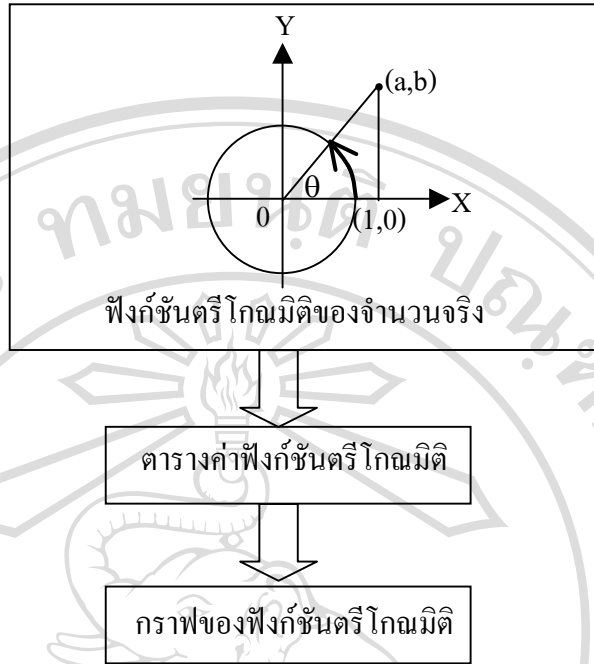


ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ซึ่งจะเห็นได้ว่าเนื้อหาในหนังสือแบบเรียนให้เรียนฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงก่อน ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม ซึ่งการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้จัดเรียงลำดับเนื้อหาใหม่ที่เป็น การเชื่อมโยง ความรู้เดิมกับความรู้ใหม่ โดยเริ่มจากทบทวนความรู้พื้นฐานในเรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัส เพื่อ ช่วยในการหาความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ก่อนที่จะนำไปสู่อัตราส่วนตรีโกณมิติ ของมุมและการแก้ปัญหาเกี่ยวกับสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งนักเรียนเคยเรียนผ่านมามากแล้วใน ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3 แล้วจึงให้ความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในตำแหน่งมาตรฐาน โดยอาศัยพิกัดของจุดบนด้านสิ้นสุดของมุมที่ได้จากความยาวของด้านประกอบมุมฉากของรูป สามเหลี่ยมมุมฉากที่วางทาบไปบนระนาบแกนพิกัดฉาก จากนั้นจึงให้เรียนรู้เกี่ยวกับมุมใน ระบบเรเดียนเชื่อมต่อ ไปยังฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง โดยผ่านความยาวส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่รองรับมุมในตำแหน่งมาตรฐาน จากนั้นเป็นเนื้อหาเกี่ยวกับตารางค่าฟังก์ชัน ตรีโกณมิติ และกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติซึ่งเป็นเนื้อหาสุดท้าย สามารถนำเสนอการจัดลำดับ เนื้อหาใหม่ได้ดังแผนภาพต่อไปนี้





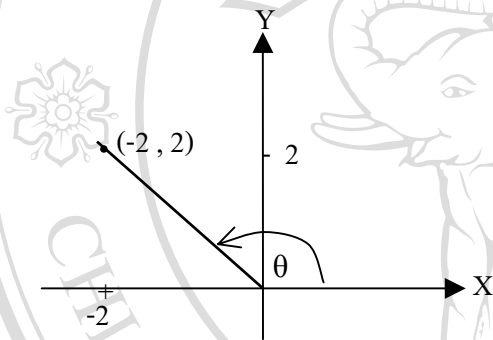
1.2 จัดทำตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติใหม่โดยใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสร้าง เป็นตารางที่แสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้ง 6 ฟังก์ชัน เรียงลำดับจากค่าฟังก์ชันของมุม 0 องศา หรือ 0 เรเดียน ถึง 90 องศา หรือ ประมาณ 1.5708 เรเดียน จากบนลงล่าง ดังตัวอย่าง

ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

Degree	Radians	sine	Cosine	tangent	cosecant	secant	cotangen	
0	0	0.0000	1.0000	0.0000	หาค่าไม่ได้	1.0000	หาค่าไม่ได้	
10	0.0029	0.0029	1.0000	0.0029	344.8276	1.0000	344.827	
20	0.0058	0.0058	1.0000	0.0058	172.4138	1.0000	172.413	
30	0.0087	0.0087	1.0000	0.0087	114.9425	1.0000	114.942	
40	0.0116	0.0116	0.9999	0.0116	86.2069	1.0001	86.2069	
50	0.0145	0.0145	0.9999	0.0145	68.9655	1.0001	68.9655	
1	0	0.0175	0.9998	0.0175	57.1429	1.0002	57.1429	
10	0.0204	0.0204	0.9998	0.0204	49.0196	1.0002	49.0196	
20	0.0233	0.0233	0.9997	0.0233	42.9185	1.0003	42.9185	
.	.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	.	
90	0	1.5708	1.0000	0.0000	หาค่าไม่ได้	1.0000	หาค่าไม่ได้	0.0000

1.3 ใช้หลักการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ โดยการพยายามให้นักเรียนสรุปนิมิตต่างๆด้วยตนเองหรือร่วมกันในกลุ่ม ประกอบกับครูผู้สอนใช้วิธีสอนทั้งแบบอุปนัยและแบบนิรนัย เช่น เมื่อกำหนดสูตรหรือนิยามให้แล้วยกตัวอย่างเกี่ยวกับการนำสูตรหรือนิยามไปใช้ให้หลาย ๆ ตัวอย่างที่แตกต่างกัน เพื่อให้นักเรียนสังเกตวิธีการหรือกระบวนการในการคิด ดังตัวอย่างการหาค่าฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ ของมุมในตำแหน่งมาตรฐาน โดยกำหนดนิยามให้ดังนี้

เมื่อ  $P(a,b)$  เป็นจุดใด ๆ บนด้านสิ้นสุดของมุม  $\theta$  (แขนของมุม  $\theta$ ) และ  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$  แล้ว  $\sin \theta = \frac{b}{r}$ ,  $\cos \theta = \frac{a}{r}$ ,  $\tan \theta = \frac{b}{a}$ ;  $a \neq 0$   
 ดังเช่น เมื่อ  $(-2,2)$  เป็นจุดบนด้านสิ้นสุดของมุม  $\theta$  จะหาค่า  $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$ ,  $\tan \theta$  ได้ดังนี้



จากนิยามจะได้ว่า  $r = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

$$\text{ดังนั้น } \sin \theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \theta = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{และ } \tan \theta = \frac{2}{-2} = -1$$

1.4 ใช้การฝึกทักษะย่อยเป็นส่วนหนึ่งของกิจกรรมการเรียนการสอนในชั้นเรียน เพื่อให้นักเรียนเข้าใจนิมิตของแต่ละเนื้อหามากขึ้นก่อนที่จะให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด เช่น หลังจากที่ครูผู้สอนได้ทบทวนความรู้เกี่ยวกับอัตราส่วนตรีโกณมิติให้แก่ นักเรียน ให้นักเรียนได้ฝึกทักษะการหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมแหลมในสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยกำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีความยาวของด้านแต่ละด้านและมุมที่แตกต่างกันให้ แล้วให้นักเรียนได้ฝึกการหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมในสามเหลี่ยมมุมฉากตามที่โจทย์กำหนดให้ เมื่อนักเรียนสามารถหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมในสามเหลี่ยมมุมฉากได้แล้วให้นักเรียนสรุปอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมในสามเหลี่ยมมุมฉาก รวมทั้งใช้การตอบปากเปล่าในการทบทวนหรือย้ำเตือนเพื่อให้จำอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมในสามเหลี่ยมมุมฉาก เป็นต้น ส่วนแบบฝึกหัดนั้นจะมอบหมายให้เป็นงานนอกชั้นเรียนหรือเป็นการบ้านเพื่อให้นักเรียนใช้เวลาอย่างอิสระตามระดับความสามารถของแต่ละคน

1.5 จัดทำเอกสารประกอบการเรียนการสอนให้สอดคล้องกับการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนและความสามารถของนักเรียน เพื่อให้นักเรียนได้สรุปสาระความรู้ด้วยตนเองในแต่ละคาบเรียน เอกสารประกอบการเรียนการสอนประกอบด้วยเอกสารความรู้ เอกสารฝึกทักษะ เอกสารใบงาน เอกสารฝึกหัด ของแต่ละแผนการสอน สำหรับการแจกเอกสารประกอบการเรียนการสอนจะแจกให้นักเรียนทุกครั้งก่อนที่จะเริ่มเรียนตามหัวข้อใน คาบเรียนนั้น ๆ เพื่อให้นักเรียนได้ศึกษาเอกสารไปพร้อม ๆ กับ ได้ฟังครูอธิบายตัวอย่างได้อย่างเต็มที่โดยไม่ต้องกังวลกับการจดบันทึกในสิ่งที่ครูอธิบายบนกระดาน และนักเรียนสามารถเขียนเพิ่มเติมได้ทันทีในเอกสาร หรือถ้าหากเรียนในห้องเรียนไม่เข้าใจ นักเรียนก็สามารถนำเอกสารประกอบการเรียนการสอนไปศึกษาเพิ่มเติมได้

1.6 ใช้การประเมินตามสภาพจริงในระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนหลายรูปแบบ เช่น การสังเกตจากการตอบคำถาม การทำงานกลุ่ม และการแก้ปัญหาโจทย์ การตรวจการทำเอกสารฝึกทักษะ ใบงาน เอกสารฝึกหัด ในแต่ละคาบเรียน และการเขียนบันทึกการเรียนรู้ของนักเรียนแต่ละคน

## 2. จัดทำแผนการสอน

สร้างแผนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ (ค 012) เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ตามแนวทางในการแก้ปัญหาที่กำหนดไว้ ซึ่งแต่ละแผนการสอนประกอบด้วย จุดประสงค์การเรียนรู้ เนื้อหาและกิจกรรมการเรียนการสอน สื่อการเรียนการสอน การวัดและประเมินผล บันทึกหลังการสอน รวมทั้งหมด 20 แผน ใช้เวลาสอนแผนละ 1 คาบเรียน คาบเรียนละ 50 นาที ผู้วิจัยได้จัดทำจัดการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามคาบเรียนดังต่อไปนี้

คาบที่ 1 – 2 เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ

คาบที่ 3 เรื่อง การแก้ปัญหาเกี่ยวกับสามเหลี่ยมมุมฉาก

คาบที่ 4 เรื่อง ฟังก์ชันของมุมในตำแหน่งมาตรฐาน

คาบที่ 5 เรื่อง ค่าฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนของมุม  $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$

คาบที่ 6 เรื่อง ค่าฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจน ของมุมบางมุม

คาบที่ 7 – 10 เรื่อง ค่าฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจน ของมุมใดๆ

คาบที่ 11 เรื่อง การวัดมุมในระบบเรเดียน

คาบที่ 12 – 14 เรื่อง ค่าฟังก์ชันของมุมในระบบเรเดียน

คาบที่ 15 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ

คาบที่ 16 – 17 เรื่อง การหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตาราง

คาบที่ 18 – 20 เรื่อง กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

### 3. เตรียมเครื่องมือในการเก็บรวบรวมข้อมูล

การวิจัยในครั้งนี้ผู้วิจัยเตรียมเครื่องมือในการเก็บรวบรวมข้อมูล ซึ่งประกอบไปด้วย

3.1 แบบบันทึกการสัมภาษณ์นักเรียน ใช้บันทึกผลการสัมภาษณ์ เกี่ยวกับความรู้ ความเข้าใจหรือข้อบกพร่องของนักเรียนขณะจัดกิจกรรมการเรียนรู้ หรือ หลังจากการตรวจ แบบฝึกหัด แบบทดสอบ และการอ่านบันทึกการเรียนรู้ของนักเรียนแล้วพบว่านักเรียนมีปัญหาในการเรียนการสอน (ดูรายละเอียดได้ในภาคผนวก ข หน้า 328)

3.2 แบบบันทึกผลการตรวจแบบฝึกหัด ใบงาน และ แบบฝึกทักษะ โดยบันทึกแยกเป็นรายบุคคล เพื่อคูณผลโดยรวมของนักเรียนแต่ละคน และ บันทึกข้อบกพร่องของแต่ละคน ใน 3 ด้านคือ ด้านความคิดรวบยอด ด้านการคิดคำนวณ และด้านการนำความรู้ไปประยุกต์ใช้ เพื่อนำมาเป็นข้อมูลในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนต่อไป (ดูรายละเอียดได้ในภาคผนวก ข หน้า 326 - 327)

3.3 แบบบันทึกการเรียนรู้ เป็นแบบบันทึกที่ให้นักเรียนบันทึกหลังการเรียนในแต่ละวงจร ซึ่งจะมีคำถามดังนี้ นักเรียนได้ความรู้อะไรบ้างในการเรียนวงจรนี้ มีปัญหาเกิดขึ้นในการเรียนวงจรนี้หรือไม่ อย่างไร ต้องการให้ครูช่วยเหลืออย่างไรบ้าง มีข้อเสนอแนะในการเรียนครั้งต่อไปอย่างไร (ดูรายละเอียดในภาคผนวก ข หน้า 329)

3.4 แบบบันทึกผลการปฏิบัติการสอน ใช้บันทึกผลการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน ปัญหาและอุปสรรคที่เกิดขึ้นในแต่ละแผน โดยบันทึกภายหลังการสอนในแต่ละคาบเรียน (ดูรายละเอียดในภาคผนวก ข หน้า 325)

3.5 แบบทดสอบ ใช้วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนทั้งหมดของนักเรียนเมื่อเรียนครบทั้ง 20 คาบเรียน โดยเป็นการวัดผลสัมฤทธิ์ในด้านความรู้ ความเข้าใจ ทักษะการคิดคำนวณ และการนำความรู้ไปใช้ ในเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ (ดูรายละเอียดในภาคผนวก ง หน้า 345-349)

### 4. กำหนดวิธีการวิเคราะห์ข้อมูล

นำข้อมูลที่ได้จากการสังเกต การสัมภาษณ์ แบบบันทึกผลการปฏิบัติการสอน แบบบันทึกการตรวจแบบฝึกหัด ใบงาน แบบฝึกทักษะ และจากการอ่านบันทึกการเรียนรู้ของนักเรียนในแต่ละวงจรมาจัดหมวดหมู่ตามเป้าหมายของการวิจัย แล้ววิเคราะห์ข้อมูลโดยการหาค่าร้อยละและการวิเคราะห์เนื้อหา จากนั้นจึงนำเสนอผลการวิจัยในลักษณะพรรณนาความ

## ขั้นดำเนินการ

ผู้วิจัยดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูลตามขั้นตอนการวิจัยเชิงปฏิบัติการของ Kemmis and McTaggart ซึ่งประกอบด้วย 3 ขั้นตอน คือ ขั้นวางแผน (Plan) ขั้นปฏิบัติตามแผนและสังเกตผลการปฏิบัติ (Act and Observe) และขั้นสะท้อนความคิด (Reflect) โดยผู้วิจัยแบ่งขั้นตอนการดำเนินการวิจัยออกเป็น 5 วงจร ซึ่งการดำเนินการวิจัยในแต่ละวงจรมีรายละเอียด ดังนี้

### วงจรที่ 1

#### ขั้นวางแผน

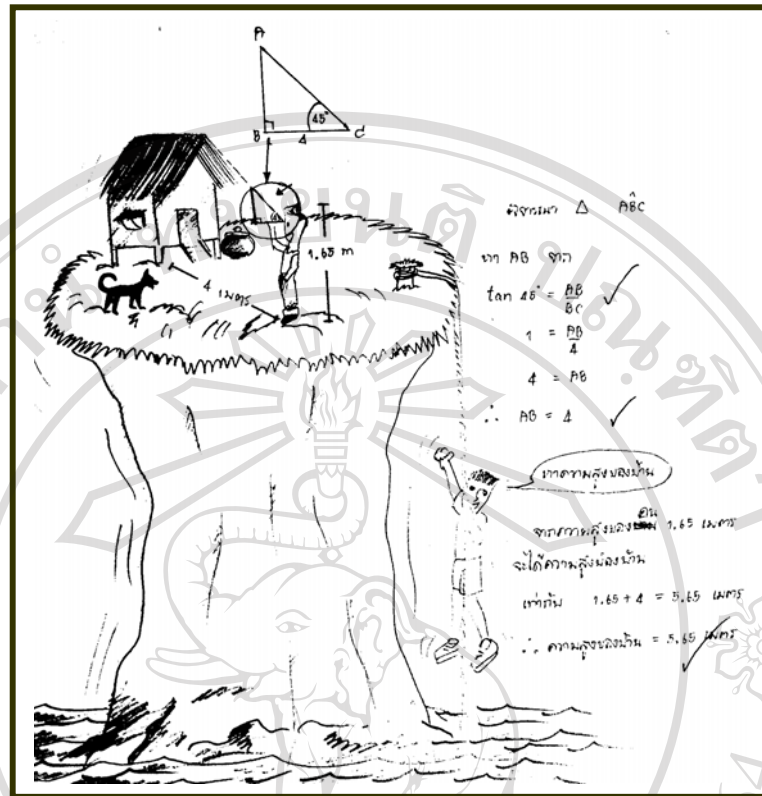
ในวงจรที่ 1 เป็นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ ซึ่งมีเนื้อหาครอบคลุมถึงเรื่อง การแก้ปัญหาเกี่ยวกับสามเหลี่ยมมุมฉาก ตามแผนการจัดการเรียนรู้อาษาที่ 1 – 3 เพื่อแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่พบว่านักเรียนไม่สามารถหาความยาวของด้านของสามเหลี่ยมมุมฉากได้ กล่าวคือ เมื่อกำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดความยาวด้านให้ 2 ด้านแล้วให้บอกอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมแหลมในสามเหลี่ยมมุมฉากนั้น นักเรียนส่วนใหญ่ไม่สามารถหาความยาวของด้านที่เหลือได้ถูกต้อง และส่งผลให้ไม่สามารถบอกอัตราส่วนตรีโกณมิติได้ถูกต้องตามไปด้วย และยังพบอีกว่านักเรียนไม่สามารถแก้โจทย์เกี่ยวกับสามเหลี่ยมมุมฉากได้ เมื่อนักเรียนต้องแก้โจทย์เกี่ยวกับสามเหลี่ยมมุมฉากนักเรียนไม่สามารถบอกได้ว่าจะต้องใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติมาช่วยในการแก้ปัญหานั้นอย่างไร และไม่สามารถหาคำตอบที่ถูกต้องออกมาได้ ซึ่งอาจมีสาเหตุมาจากการจัดการเรียนการสอนที่ขาดการทบทวนความรู้เดิมที่ไม่ได้เน้นให้นักเรียนได้สรุปความคิดรวบยอดด้วยตนเอง มีตัวอย่างที่ไม่หลากหลาย ขาดการฝึกทักษะเฉพาะเรื่อง และไม่ได้เน้นให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติจริง

เป้าหมายการวิจัยในวงจรนี้ จึงอยู่ที่การมุ่งให้นักเรียนมีมโนคติของทฤษฎีบทพีทาโกรัส อัตราส่วนตรีโกณมิติ และสามารถนำความรู้เกี่ยวกับอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้ได้ อย่างถูกต้อง ด้วยการทบทวนความรู้เรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัส อัตราส่วนตรีโกณมิติ โดยใช้เอกสารประกอบการเรียนการสอนรวมทั้งใช้คำถามช่วยกระตุ้นให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ แล้วสรุปมโนคติได้ด้วยตนเอง และให้นักเรียนลงมือปฏิบัติจริงในการหาความยาวหรือความสูงของสิ่งของที่ถูกรอบตัว



### ขั้นปฏิบัติตามแผนและสังเกตผลการปฏิบัติ

ผู้วิจัยได้ดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามที่วางแผนไว้ ซึ่งเน้นให้นักเรียนได้สรุปโน้มนคติของอัตราส่วนตรีโกณมิติ แล้ว นำความรู้ที่ได้ไปใช้ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับสามเหลี่ยมมุมฉาก และ แก้ปัญหาในชีวิตประจำวัน ในคาบเรียนที่ 1 นั้นผู้วิจัยได้ทบทวนความรู้เดิมเกี่ยวกับทฤษฎีบทพีทาโกรัสและอัตราส่วนตรีโกณมิติ เริ่มจากการกำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากให้นักเรียนและใช้คำถามเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนได้เกิดการเรียนรู้และบอกส่วนประกอบของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก แล้วนำไปสู่ทฤษฎีบทพีทาโกรัส เมื่อนักเรียนเข้าใจในโน้มนคติของทฤษฎีบทพีทาโกรัสแล้วผู้วิจัยได้ให้นักเรียนฝึกทักษะโดยการหาความยาวของด้านที่เหลือเมื่อกำหนดความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมให้ 2 ด้าน เมื่อนักเรียนเข้าใจในโน้มนคติของทฤษฎีบทพีทาโกรัสแล้วก็นำเข้าสู่อัตราส่วนตรีโกณมิติ โดยเริ่มจากการใช้คำถามประกอบรูปภาพในเอกสารประกอบการเรียนการสอนเพื่อตรวจสอบความรู้เดิมของนักเรียน แล้วใช้คำถามกระตุ้นให้นักเรียนได้เกิดการเรียนรู้โดยให้นักเรียนได้ตอบคำถามลงในเอกสารประกอบการเรียนการสอน และสรุปโน้มนคติเกี่ยวกับทฤษฎีบทพีทาโกรัสและอัตราส่วนตรีโกณมิติด้วยตนเอง จากนั้นให้นักเรียนฝึกทักษะการหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดให้ ในเอกสารประกอบการเรียนการสอน ในคาบเรียนที่ 2 เป็นการฝึกการวิเคราะห์โจทย์ในเอกสารประกอบการเรียนการสอนและพิจารณาตามหัวข้อดังนี้ คือ โจทย์กำหนดอะไรให้บ้าง โจทย์ต้องการหาอะไร จากโจทย์สามารถหาอะไรได้บ้าง และมีวิธีการหาอย่างไร จากนั้นให้นักเรียนได้ฝึกทักษะจากการทำโจทย์ไปพร้อมๆกันในชั้นเรียน แล้วให้นักเรียนนำความรู้ไปใช้แก้ปัญหาเกี่ยวกับสามเหลี่ยมมุมฉากในเอกสารฝึกหัด คาบเรียนที่ 3 เป็นการเรียนรู้จากการปฏิบัติจริง โดยแบ่งนักเรียนออกเป็น 9 กลุ่ม กลุ่มละ 4-5 คน กำหนดให้ 2 กลุ่มหาความสูงของเสาธง 2 กลุ่มหาความสูงของอาคารเรียน 2 กลุ่มหาความสูงของหอประชุม 2 กลุ่มหาความยาวของเชือกที่ใช้ชักธงชาติ และ 1 กลุ่มหาความสูงของต้นไม้ โดยทั้งสองกลุ่มนั้นใช้มุมการวัดที่ต่างกัน (ใช้มุม  $45^{\circ}$ ,  $60^{\circ}$ ) แล้วให้แต่ละกลุ่มเขียนสรุปวิธีการหาความสูง ความยาว ที่แต่ละกลุ่มได้ลงมือปฏิบัติในการแก้ปัญหาในกระดาษรูปที่แจกให้พร้อมกับส่งตัวแทนนำเสนอวิธีการแก้ปัญหานั้น แล้วให้นักเรียนแต่ละคนได้นำความรู้ที่ได้ในคาบเรียนนี้ไปประยุกต์ใช้ในการหาความสูงของบ้านของตนเองพร้อมทั้งวาดรูปประกอบ ดังภาพ 2



ภาพ 2 กระดาษคำตอบแสดงการหาความสูงของบ้านนักเรียน

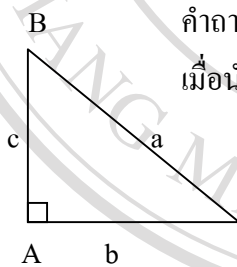
ผู้วิจัยได้บันทึกผลการปฏิบัติการสอน ปัญหาหรืออุปสรรคที่เกิดขึ้นจากการสังเกต พฤติกรรมการเรียนของนักเรียน ในด้านการตอบคำถามในชั้นเรียน การทำกิจกรรมในชั้นเรียน ลงในแบบบันทึกหลังการสอนในแต่ละคาบเรียน ส่วนผลการตรวจแบบฝึกหัดการบ้านได้บันทึก ลงในแบบบันทึกความก้าวหน้า ตอนท้ายของคาบเรียนที่ 3 ให้นักเรียนได้เขียนบันทึกการเรียนรู้ ซึ่งมีข้อคำถามเกี่ยวกับความรู้ที่ได้รับ ปัญหาที่เกิดขึ้นในการเรียน ต้องการความช่วยเหลืออย่างไร และข้อเสนอแนะในการเรียนครั้งต่อไป

#### ขั้นสะท้อนความคิด

ผู้วิจัยนำข้อมูลที่ได้จากขั้นการปฏิบัติและสังเกตผลการปฏิบัติมาจัดกลุ่มตาม เป้าหมายของการวิจัยที่ระบุไว้ในขั้นวางแผนแล้ววิเคราะห์ เพื่อหาข้อสรุปของการดำเนินการ วิจัยในวงจรนี้ว่า นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจในมโนคติเกี่ยวกับอัตราส่วนตรีโกณมิติเป็น อย่างไร มีทักษะในการคิดคำนวณและนำความรู้เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติไปช่วยในการแก้ปัญหา ได้หรือไม่ อย่างไร ซึ่งสามารถสรุปผลการวิจัยในวงจรที่ 1 ตามเป้าหมายของการวิจัยได้ดังนี้

1. นักเรียนประมาณ 80% มีความรู้ความเข้าใจที่ถูกต้องในนิยามของทฤษฎีบทพีทาโกรัส อัตราส่วนตรีโกณมิติ ซึ่งข้อมูลที่ได้จากการสังเกตพฤติกรรมในชั้นเรียน การตรวจแบบฝึกหัด การอ่านบันทึกการเรียนรู้ของนักเรียนค่อนข้างสอดคล้องกัน เช่น จากการสังเกตพฤติกรรมของนักเรียน พบว่า นักเรียนเกือบทั้งชั้นสามารถตอบคำถามของครูได้ถูกต้อง สามารถบอกความยาวของด้านที่เหลือของสามเหลี่ยมมุมฉากได้โดยใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส และสามารถบอกอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมแหลมในสามเหลี่ยมมุมฉากได้อย่างถูกต้องเป็นส่วนใหญ่ จากการตรวจแบบฝึกหัดของนักเรียนพบว่า นักเรียนส่วนใหญ่สามารถใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและอัตราส่วนตรีโกณมิติในการหาความยาวของด้านที่เหลือและหาอัตราส่วนตรีโกณมิติได้ถูกต้อง และจากการอ่านบันทึกการเรียนรู้ของนักเรียน นักเรียนส่วนใหญ่เขียนบอกว่าได้รับความรู้เรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัสและอัตราส่วนตรีโกณมิติมากขึ้น ข้อมูลเหล่านี้ชี้ให้เห็นว่าการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนในวงจรที่ 1 สามารถทำให้นักเรียนส่วนใหญ่มีความรู้ ความเข้าใจที่ถูกต้องเกี่ยวกับทฤษฎีบทพีทาโกรัส และอัตราส่วนตรีโกณมิติ

แต่อย่างไรก็ตามยังมีนักเรียนประมาณ 5 – 6 คน ที่ยังต้องใช้คำถามเพิ่มเติมเพื่อเป็นแนวทางในการนำไปสู่คำตอบและความเข้าใจในนิยามทฤษฎีบทพีทาโกรัส เช่น เมื่อกำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากให้หนึ่งรูปแล้วต้องการถามถึงด้านประกอบมุมฉาก ดังตัวอย่าง



คำถามถามว่าด้าน AB และ AC เราเรียกว่าด้านอะไร ?

เมื่อนักเรียนยังตอบไม่ได้ผู้วิจัยก็ถามเพิ่มเติมไปอีกว่า ด้านทั้งสอง

ประกอบกันแล้วทำให้เกิดมุมเป็นมุมอะไร ? (ตอบมุมฉาก)

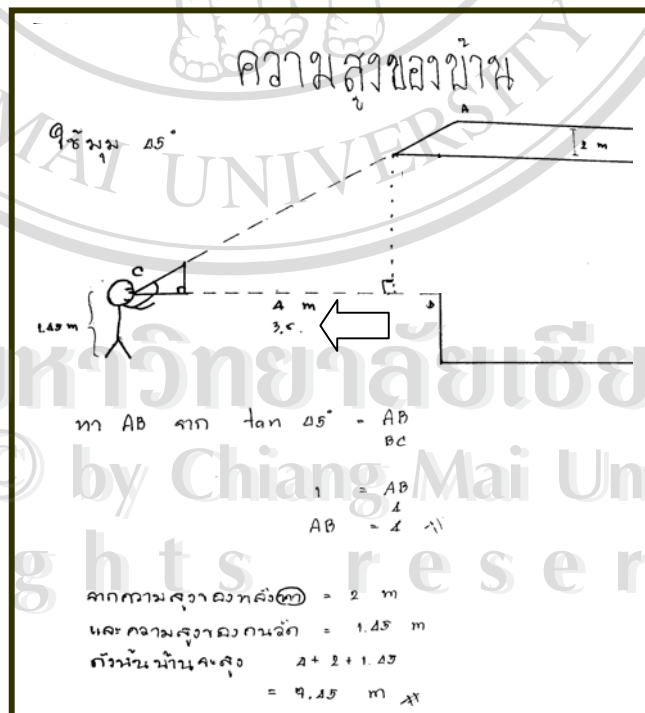
ดังนั้นเราเรียกด้าน AB และ AC ว่า ? (ตอบด้านประกอบมุมฉาก)

A b C เป็นต้น

และมีนักเรียนบางคนที่ยังสับสนในความหมายอัตราส่วนตรีโกณมิติ เช่น จำอัตราส่วนของไซน์เป็นโคไซน์ เป็นต้น

2. ในส่วนของทักษะในการคิดคำนวณ นักเรียนประมาณ 80% มีทักษะในการบวก การลบ เลขยกกำลัง และการหารจำนวนจริงในรูปกรณฑ์ในระดับที่น่าพอใจ โดยดูได้จากการตอบคำถามของนักเรียนเกี่ยวกับความยาวของด้านที่เหลือของสามเหลี่ยมมุมฉากเมื่อกำหนดความยาวให้สองด้าน การหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมแหลมในสามเหลี่ยมมุมฉาก และจากการทำแบบฝึกหัด นักเรียนประมาณ 33 คนทำได้ถูกต้อง มีนักเรียนประมาณ 4 – 5 ที่สับสนในเรื่องของการยกกำลังสองของกรณฑ์ เช่น  $(3\sqrt{2})^2 = 12$  ผู้วิจัยได้ทำการอธิบายให้นักเรียนได้ฟังพร้อมกันทั้งชั้นเรียนก่อนที่จะเรียนในคาบเรียนต่อไปทำให้นักเรียนเข้าใจ และ หาผลลัพธ์ที่ถูกต้องได้ในที่สุด

3. ในส่วนของการนำความรู้เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติไปช่วยในการแก้ปัญหา พอสรุปได้ว่า นักเรียนประมาณ 80% สามารถนำความรู้เกี่ยวกับอัตราส่วนตรีโกณมิติไปช่วยในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับสามเหลี่ยมมุมฉาก และแก้ปัญหาในชีวิตประจำวันได้ถูกต้อง โดยดูได้จาก การทำกิจกรรมกลุ่มในการหาความยาวของเชือกที่ใช้ชักธงชาติ ความสูงของเสาธง ความสูงของอาคารเรียน ความสูงของหอประชุม ความสูงของต้นไม้ และจากการทำการบ้านของนักเรียน โดยการหาความสูงของบ้านของแต่ละคน มีนักเรียนบางคนที่ยังจำอัตราส่วนตรีโกณมิติไม่ได้ ผู้วิจัยจึงทบทวนความรู้เกี่ยวกับอัตราส่วนตรีโกณมิติให้อีกครั้งหนึ่งจนนักเรียนสามารถหาอัตราส่วนตรีโกณมิติได้ จากการสอบถามนักเรียนในห้องเรียนเกี่ยวกับการเรียนในเนื้อหาเรื่องนี้ว่ามี ปัญหาอะไรบ้าง ทราบว่ายังจำค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม  $30^{\circ}, 45^{\circ}, 60^{\circ}$  ผู้วิจัยจึงนำคอน ซ่อมเสริมในเรื่องของค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมตั้งแต่  $0^{\circ}$  ถึง  $90^{\circ}$  โดยใช้มือช่วยจำ ปรากฏว่านักเรียนจำค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมตั้งแต่  $0^{\circ}$  ถึง  $90^{\circ}$  ได้ดีขึ้น เวลาถามถึงค่าฟังก์ชันของ มุมต่างๆ นักเรียนสามารถตอบได้อย่างรวดเร็ว และมีนักเรียนประมาณ 4 – 5 คน ที่ยังสับสนใน การวัดระยะทางที่จะนำมาเป็นอัตราส่วน โดยนักเรียนเริ่มวัดระยะห่างจากจุดที่ นักเรียนยืนมอง ไปยังชายคาบ้านจากการใช้สามเหลี่ยมมุมฉาก ไปจนถึงผนังบ้านแทนที่นักเรียนจะวัดระยะห่าง จากจุดยืนไปจนถึงชายคาบ้านจึงทำให้ผลลัพธ์ที่ได้คลาดเคลื่อน แต่ว่ากระบวนการคิดหาความ สูงของบ้านนั้นถูกต้อง ดังภาพ 3



ภาพ 3 กระดาษคำตอบของนักเรียนที่วัดระยะผิด

จากบันทึกการเรียนรู้ของนักเรียน นักเรียนส่วนใหญ่เขียนแสดงความประทับใจต่อวิธีการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนว่าเป็นวิธีสอนที่แปลกใหม่ไม่เหมือนเดิม ทำให้เข้าใจมากขึ้น และนักเรียนบางส่วนยังบอกว่าชอบที่มีสื่อและอุปกรณ์การเรียนการสอนที่เป็นแบบแผนและเป็นระบบ โดยเฉพาะมีเอกสารประกอบการเรียนการสอนทำให้ไม่ต้องกังวลกับการบันทึกขณะที่ฟังครูอธิบาย มีเวลาในการฟังครูอธิบายได้อย่างเต็มที่

สิ่งที่นักเรียนให้ข้อเสนอแนะมากที่สุดคืออยากให้ครูพูดให้ช้าลงอีกเพราะฟังไม่ทัน และให้ยกตัวอย่างให้มากกว่านี้ ผู้วิจัยนำข้อมูลที่ได้นำไปปรับแผนสอนในส่วนของกรยกตัวอย่างในวงจรต่อไป

ข้อมูลเหล่านี้ชี้ให้เห็นว่าการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนในวงจรที่ 1 สามารถทำให้นักเรียนส่วนใหญ่มีความรู้ความเข้าใจที่ถูกต้องในมโนคติของอัตราส่วนตรีโกณมิติ และสามารถนำความรู้เกี่ยวกับอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับสามเหลี่ยมมุมฉากได้ถูกต้อง

## วงจรที่ 2

### ขั้นวางแผน

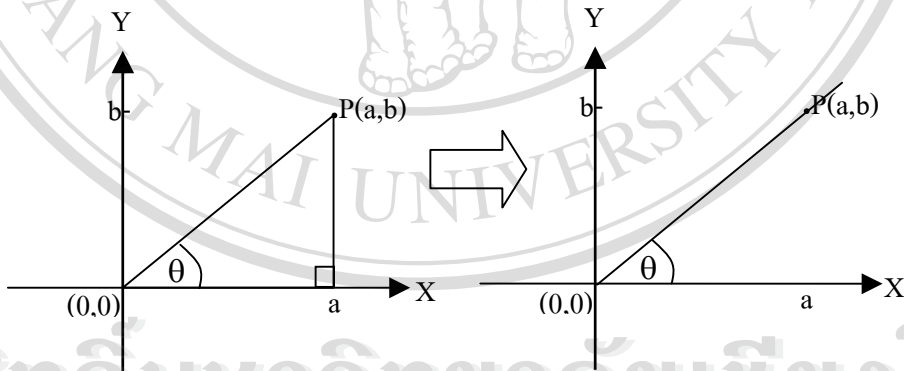
ในวงจรที่ 2 เป็นการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนในเรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในตำแหน่งมาตรฐาน โดยมีเนื้อหาตั้งนี้ ฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ แทนเจนต์ ของมุม  $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$  ฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ แทนเจนต์ของมุมบางมุม และของมุมใดๆ ตามแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คาบที่ 4-10 เพื่อแก้ปัญหาค่าการเรียนการสอนที่พบว่านักเรียนไม่สามารถหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่มีขนาดน้อยกว่า  $0^\circ$  และมากกว่า  $90^\circ$  ได้ถูกต้อง กล่าวคือ เมื่อนักเรียนต้องการหาค่าของ  $\cos 150^\circ$  นักเรียนส่วนใหญ่ไม่สามารถบอกได้ว่า  $\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ$  หรือ  $\cos(-30^\circ) = \cos 30^\circ$  ซึ่งอาจมีสาเหตุมาจากการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่ไม่ต่อเนื่องกับความรู้เดิมที่นักเรียนเคยเรียนมาเกี่ยวกับอัตราส่วนตรีโกณมิติของสามเหลี่ยมมุมฉาก ขาดการฝึกทักษะ และขาดการสรุปความรู้ด้วยตนเอง

ผู้วิจัยแก้ปัญหาในวงจรนี้ด้วยการจัดเรียงเนื้อหาใหม่และให้นักเรียนได้ฝึกทักษะในเอกสารประกอบการเรียนการสอน เริ่มจากผู้วิจัยให้ความรู้เรื่องมุมในตำแหน่งมาตรฐานก่อน แล้วให้นิยามฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ของมุมในตำแหน่งมาตรฐาน จากนั้นให้นักเรียนได้ฝึกทักษะในการนำนิยามไปใช้หาค่าของฟังก์ชันของมุมในตำแหน่งมาตรฐานในเอกสารประกอบการเรียนการสอน ใช้คำถามและกระบวนการกลุ่มช่วยกระตุ้นให้นักเรียนเกิด

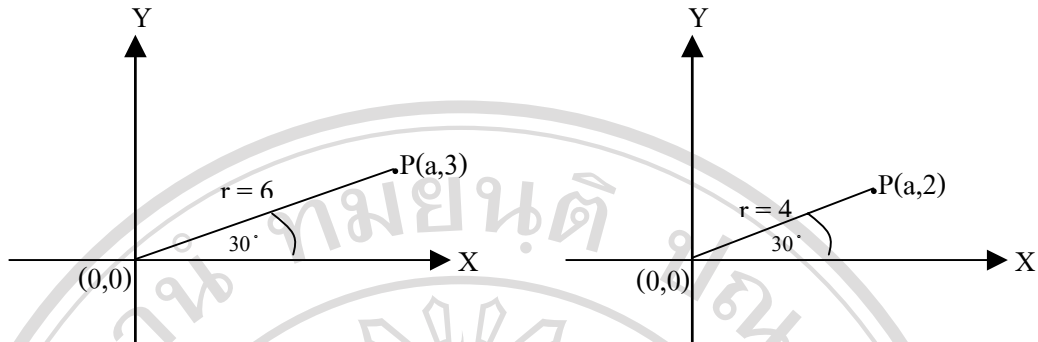
การเรียนรู้แล้วสรุปโน้มนัดด้วยตนเอง และใช้การฝึกทักษะทบทวนความรู้ในคาบเรียนที่ผ่านมา ก่อนที่จะเริ่มเรียนในคาบเรียนนั้นทุกครั้ง เช่น การถามถึงค่าฟังก์ชันของมุมในตำแหน่งมาตรฐาน และ เขียนมุมในตำแหน่งมาตรฐาน เป็นต้น แล้วให้นักเรียนได้นำความรู้ที่ได้ไปประยุกต์ใช้ในการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมใด ๆ ในการทำแบบฝึกหัดต่อไป

### ขั้นปฏิบัติและสังเกตผลการปฏิบัติ

ผู้วิจัยดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนคาบเรียนที่ 4-10 ซึ่งเน้นให้นักเรียนสรุปโน้มนัดเกี่ยวกับมุมในตำแหน่งมาตรฐาน ฝึกทักษะในการหาค่าฟังก์ชันของมุมในตำแหน่งมาตรฐาน ได้นำความรู้ที่ได้ไปประยุกต์ใช้ในการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมใด ๆ เริ่มจากผู้วิจัยให้ความรู้เกี่ยวกับมุมในตำแหน่งมาตรฐาน ด้วยการใช้คำถามและให้นักเรียนตอบคำถามในเอกสารประกอบการเรียนการสอนและให้นิยามของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในตำแหน่งมาตรฐาน ดังเช่น ให้นักเรียนพิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านประกอบมุมฉากด้านหนึ่งวางทับไปกับแกน X แล้วให้พิจารณาจุดยอดของสามเหลี่ยมหรือจุดตัดของด้านตรงข้ามมุมฉากกับด้านประกอบมุมฉากว่าพิกัดของจุดได้มาอย่างไร แล้วบอกนักเรียนว่ามุมแหลมในสามเหลี่ยมที่วัดจากแกน X ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาเรียกว่า มุมในตำแหน่งมาตรฐาน และ พิกัดของจุดที่ได้ เรียกว่า พิกัดของจุดบนด้านสิ้นสุดของมุม  $\theta$  ดังรูป



จากนั้นให้นิยามฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในตำแหน่งมาตรฐาน โดยพิจารณาจากรูปของมุมในตำแหน่งมาตรฐาน โดยให้นิยามว่า เมื่อ  $P(a,b)$  เป็นจุดใด ๆ บนด้านสิ้นสุดของมุม  $\theta$  (แขนของมุม  $\theta$ ) และ  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$  แล้ว  $\sin \theta = \frac{b}{r}$ ,  $\cos \theta = \frac{a}{r}$ ,  $\tan \theta = \frac{b}{a}$ ;  $a \neq 0$  แล้วให้นักเรียนได้ฝึกทักษะในการหานิยามฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในตำแหน่งมาตรฐาน ไปใช้ โดยแบ่งกลุ่มฝึกทักษะเป็น 9 กลุ่ม กลุ่มละ 4 - 5 คน กำหนดให้ 3 กลุ่ม หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม  $30^\circ$  โดยกำหนดพิกัดของจุดที่แตกต่างกัน เช่น



$$\text{จะได้ } a = 3\sqrt{3}, r = 6$$

$$\text{แล้ว } \sin 30^\circ = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{จะได้ } a = 2\sqrt{3}, r = 4$$

$$\text{แล้ว } \sin 30^\circ = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

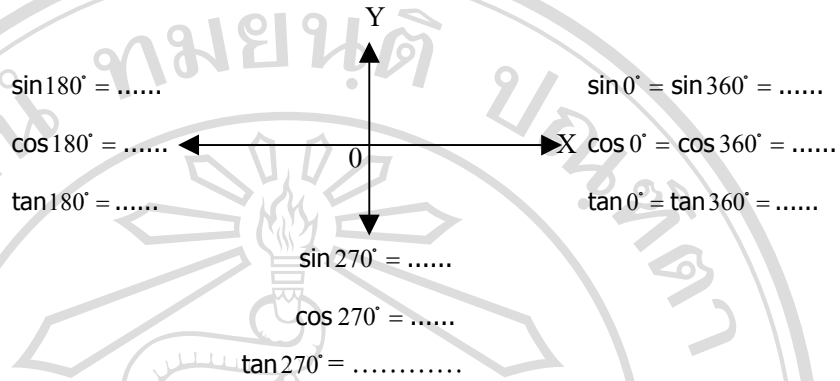
ในการทำงานเดียวกันอีก 6 กลุ่มที่เหลืหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม  $45^\circ, 60^\circ$  จากนั้นให้นักเรียนสรุปค่าฟังก์ชันของมุม  $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  ในตำแหน่งมาตรฐาน โดยเทียบค่ากับค่าฟังก์ชันของมุมแหลมในสามเหลี่ยมมุมฉาก เมื่อนักเรียนมีความรู้ความเข้าใจในมโนคติของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในตำแหน่งมาตรฐาน แล้วให้นักเรียนฝึกหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมบางมุมในช่วง  $0^\circ - 360^\circ$  จากการนำนิยามไปใช้โดยแบ่งฝึกทักษะเป็นกลุ่ม ๆ เมื่อแต่ละกลุ่มหาค่าของฟังก์ชันเสร็จแล้วให้สรุปค่าที่ได้ลงในแผ่นภาพในเอกสารประกอบการเรียนการสอนที่แจกให้ ดังตัวอย่างแผ่นภาพสรุปค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม  $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่  
Copyright © by Chiang Mai University  
All rights reserved

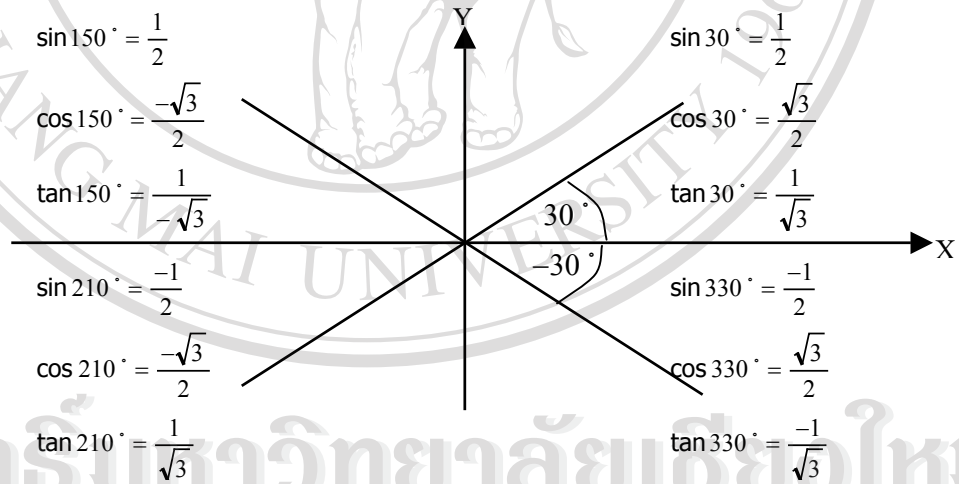
$\sin 90^\circ = \dots\dots$

$\cos 90^\circ = \dots\dots$

$\tan 90^\circ = \dots\dots\dots$



จากนั้นผู้วิจัยให้นักเรียนได้รู้จักกับการวัดมุมในทิศทางตามเข็มนาฬิกา เริ่มจากทำความเข้าใจในการวัดมุมในตำแหน่งมาตรฐาน ให้นักเรียนเขียนแผ่นภาพสรุปค่าฟังก์ชันของมุม  $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  และมุมในตำแหน่งสมมาตร แล้วพิจารณาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในทิศทางตามเข็มนาฬิกา โดยให้พิจารณาแผ่นภาพเดิมของมุมในตำแหน่งมาตรฐาน เช่น

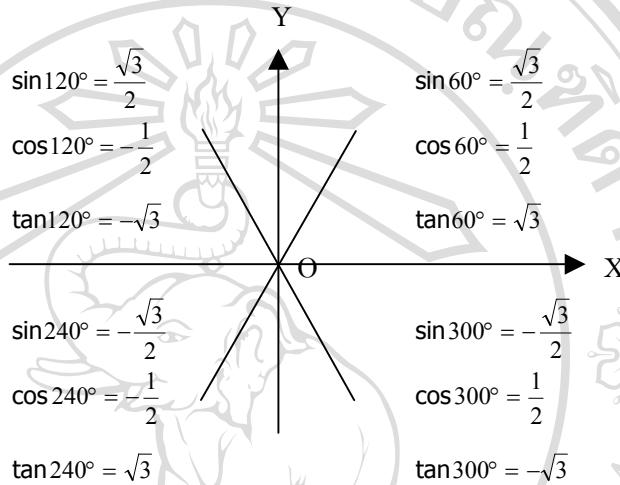


จากแผ่นภาพสรุปค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม  $30^\circ$  จะได้ว่า

$\sin(-30^\circ) = -\frac{1}{2}$  ,  $\cos(-30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$  ,  $\tan(-30^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$   
 $\sin(-150^\circ) = -\frac{1}{2}$  ,  $\cos(-150^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  ,  $\tan(-150^\circ) = -\frac{1}{-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$   
 $\sin(-210^\circ) = \frac{1}{2}$  ,  $\cos(-210^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  ,  $\tan(-210^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$   
 $\sin(-330^\circ) = \frac{1}{2}$  ,  $\cos(-330^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$  ,  $\tan(-330^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$



จากนั้นให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดเป็นการบ้าน เมื่อนักเรียนมีความรู้ความเข้าใจในมโนคติค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่วัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาและทิศทางตามเข็มนาฬิกาแล้ว ให้นักเรียนได้เปรียบเทียบค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่วัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกากับค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่วัดในทิศทางตามเข็มนาฬิกา แล้วสรุปเป็นสูตรการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ ดังตัวอย่าง



จากแผนภาพจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \sin(-60^\circ) &= \dots \text{ และ } \sin 60^\circ = \dots \text{ ดังนั้น } \sin(-60^\circ) = \dots = -\sin 60^\circ \\ \sin(-120^\circ) &= \dots \text{ และ } \sin 120^\circ = \dots \text{ ดังนั้น } \sin(-120^\circ) = \dots = -\sin 120^\circ \\ \sin(-240^\circ) &= \dots \text{ และ } \sin 240^\circ = \dots \text{ ดังนั้น } \sin(-240^\circ) = \dots = \dots \\ \sin(-300^\circ) &= \dots \text{ และ } \sin 300^\circ = \dots \text{ ดังนั้น } \sin(-300^\circ) = \dots = \dots \end{aligned}$$

จากการเปรียบเทียบค่าฟังก์ชันข้างต้นสรุปได้ว่า

$$\sin(-\theta) \dots - \sin \theta$$

$$\cos(-\theta) \dots \cos \theta$$

$$\tan(-\theta) \dots - \tan \theta$$

จากนั้นให้นักเรียนวัดมุมที่มีขนาดมากกว่า 360 องศา พร้อมทั้งหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมเหล่านั้นแล้วสรุปเป็นสูตรทั่วไป เช่น  $\cos(n \cdot 360^\circ + \theta) = \cos \theta; 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$  เมื่อ n เป็นจำนวนรอบของการวัดมุม ดังภาพ 4



ภาพ 4 กระจายคำตอบแสดงการสรุปสูตรฟังก์ชันตรีโกณมิติ

จากนั้นให้นักเรียนได้ฝึกทักษะการเขียนฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมใดๆ ให้อยู่ในรูปฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่มีขนาดมากกว่า 0 องศา แต่ไม่ต่ำกว่า 90 องศา และให้ทำแบบฝึกหัดในเอกสารประกอบการเรียนการสอนและเขียนบันทึกการเรียนรู้ในการเรียนจริงนี้เป็นการบ้าน

ผู้วิจัยบันทึกข้อมูลจากการสังเกตการปฏิบัติการเรียนการสอน พฤติกรรมการเรียน ลงในแบบบันทึกหลังการสอนของแต่ละคาบเรียน บันทึกข้อมูลการตรวจแบบฝึกทักษะ แบบฝึกหัดลงในแบบบันทึกการตรวจการบ้านและแบบบันทึกความก้าวหน้า และอ่านบันทึกการเรียนรู้ของนักเรียนที่เขียนเกี่ยวกับเนื้อหาที่เรียนในวงจริงนี้

### ขั้นสะท้อนความคิด

ผู้วิจัยนำข้อมูลที่ได้จากการสังเกตพฤติกรรมทางการเรียนของนักเรียน การตรวจแบบฝึกทักษะ แบบฝึกหัด และจากการอ่านบันทึกการเรียนรู้ของนักเรียนมาวิเคราะห์ เพื่อหาข้อสรุปในการดำเนินการวิจัยในวงจริงนี้ว่า นักเรียนสามารถเข้าใจในมโนคติของมุมในตำแหน่งมาตรฐาน ฟังก์ชันของมุมในตำแหน่งมาตรฐาน สรุปสูตรการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมได้หรือไม่ อย่างไร นักเรียนสามารถคิดคำนวณหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในตำแหน่งมาตรฐานได้หรือไม่ อย่างไร และนักเรียนสามารถใช้ความรู้เกี่ยวกับมุมในตำแหน่งมาตรฐาน ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในตำแหน่งมาตรฐาน และสูตรการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมไป

ใช้ในการแก้ปัญหาโจทย์ได้หรือไม่ อย่างไร ซึ่งสามารถสรุปผลการวิจัยในวงจรที่ 2 ตามเป้าหมายของการวิจัยได้ดังนี้

1. ด้านความรู้ความเข้าใจในมโนมติฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในตำแหน่งมาตรฐาน ข้อมูลที่ได้จากการสังเกตพฤติกรรมในชั้นเรียน พบว่า นักเรียนเกือบทั้งห้องเรียนสามารถตอบคำถามเกี่ยวกับมุมในตำแหน่งมาตรฐานได้ถูกต้อง เช่น เมื่อกำหนดจุด  $(-3,4)$  บนด้านสิ้นสุดของมุม  $\theta$  ให้ นักเรียนสามารถบอกได้ว่า  $r = 5, \sin \theta = \frac{4}{5}, \cos \theta = \frac{-3}{5}, \tan \theta = \frac{4}{-3}$  และสามารถบอกได้อีกว่าจุดบนด้านสิ้นสุดของมุม  $-150^\circ$  อยู่ในควอดรันต์ที่ 3 ค่าของ  $\sin(-150^\circ) = -\sin 30^\circ, \cos(-150^\circ) = -\cos 30^\circ, \tan(-150^\circ) = \tan 30^\circ$  ข้อมูลจากการตรวจแบบฝึกหัด พบว่า นักเรียนประมาณ 31 – 32 คน สามารถหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ถูกต้อง มีนักเรียน 2 คนที่ทำแบบฝึกหัดผิด เพราะไม่สามารถถอดรากที่สองของจำนวนจริงได้ถูกต้องทำให้หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติผิด และนักเรียนประมาณ 30 – 31 คน สามารถสรุปสูตรในการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ถูกต้อง มีนักเรียนประมาณ 5 – 6 คน ยังสรุปสูตรผิดส่วนใหญ่ผิดตรงเครื่องหมาย เช่น  $\sin(180^\circ - \theta) = -\sin \theta$  จากการอ่านบันทึกการเรียนรู้ของนักเรียน นักเรียนส่วนใหญ่เขียนแสดงความรู้สึกรับบอกว่าได้รับความรู้เกี่ยวกับมุมในตำแหน่งมาตรฐานมากขึ้น และ หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในตำแหน่งมาตรฐานได้ถูกต้องมากขึ้น ยังมีประมาณ 4 – 5 คน ที่เขียนบอกว่ายังไม่สามารถบอกได้ว่าพิกัดหน้า พิกัดหลัง หามาได้อย่างไร

ข้อมูลเหล่านี้ชี้ให้เห็นว่าการจัดกิจกรรมในวงจรที่ 2 สามารถทำให้นักเรียนส่วนใหญ่มีความรู้ ความเข้าใจที่ถูกต้องเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในตำแหน่งมาตรฐาน

2. ด้านทักษะในการคิดคำนวณหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในตำแหน่งมาตรฐาน ข้อมูลจากการสังเกตพฤติกรรมขณะที่ทำกิจกรรมในชั้นเรียน พบว่า เมื่อกำหนดรูปภาพและพิกัดของจุดบนด้านสิ้นสุดของมุมให้ นักเรียนเกือบทั้งห้องเรียนสามารถแสดงวิธีการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในตำแหน่งมาตรฐานและบอกค่าฟังก์ชันของมุมในตำแหน่งมาตรฐานได้ถูกต้อง มีนักเรียนประมาณ 4 – 5 คนที่ยังตอบคำถามผิดเนื่องจากคิดคำนวณผิด เช่น ถ้า  $x^2 = 25$  แล้ว  $x = \sqrt{5}$  จากการตรวจแบบฝึกทักษะและแบบฝึกหัด พบว่า จากแบบฝึกหัดจำนวน 6 ข้อ มีนักเรียน 18 คนสามารถทำได้ถูกต้องทุกข้อ มีนักเรียน 12 คน ทำถูกต้องตั้งแต่ 4 – 5 ข้อ มีนักเรียน 4 คน ทำถูกต้องตั้งแต่ 1 – 3 ข้อ และมีนักเรียน 3 คน ที่ทำแบบฝึกหัดผิดทั้ง 6 ข้อ ซึ่งเป็นเพราะการบวก ลบ รากที่สองผิด เช่น  $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$  ในการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในตำแหน่งมาตรฐานที่มีการวัดมุมในทิศทางตามเข็มนาฬิกาโดยการเปรียบเทียบค่าฟังก์ชันจากแผนภาพและค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในตำแหน่งมาตรฐานที่มีการวัดมุมใน

ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา พบว่ามีนักเรียน 33 คน ทำให้ถูกต้อง มีนักเรียนประมาณ 4 – 5 คน เขียนค่าฟังก์ชันผิตรงซึ่งส่วนใหญ่จะผิตรงค่าฟังก์ชันจากลบเป็นบวก หรือจากบวกเป็นลบ เช่น

$$\sin(-60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ เป็นต้น}$$

จากข้อมูลสรุปได้ว่าการจัดกิจกรรมในวงจรที่ 2 ทำให้นักเรียนส่วนใหญ่มีทักษะในการคิดคำนวณหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในตำแหน่งมาตรฐานได้ถูกต้อง

3. ด้านการนำความรู้เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในตำแหน่งมาตรฐานไปใช้ในการแก้ปัญหา ข้อมูลจากการสังเกตการทำกิจกรรมในชั้นเรียนและการตรวจแบบฝึกหัดให้ผลที่สอดคล้องกัน โดยพบว่า นักเรียนประมาณ 31 – 32 คน สามารถนำสูตรในการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในตำแหน่งมาตรฐานไปช่วยในการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในตำแหน่งมาตรฐานที่มีขนาดน้อยกว่า 0 องศา และ มากกว่า 90 องศาได้ถูกต้อง และมีนักเรียนประมาณ 4 – 5 คนที่ยังนำสูตรไปใช้ไม่ถูกต้องทำให้เขียนฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่มีขนาดน้อยกว่า 0 องศา และมากกว่า 90 องศาในรูปฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมบวกที่ไม่เกิน 90 องศา ผิดพลาด ดังภาพ 5

1.  $160^\circ$   
 $160^\circ = 140^\circ - 20^\circ$   
 กำหนด  $\sin 160^\circ = \sin(140^\circ - 20^\circ)$ ,  $\cos 160^\circ = \cos(140^\circ - 20^\circ)$   
 $\tan 160^\circ = \tan(140^\circ - 20^\circ)$   
 จาก  $\sin(180^\circ - \theta) = +\sin \theta$ ,  $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$ ,  $\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta$   
 จะได้  $\sin 160^\circ = \sin(140^\circ - 20^\circ) = \sin 20^\circ$ ,  $\cos 160^\circ = \cos(140^\circ - 20^\circ) = -\cos 20^\circ$   
 $\tan 160^\circ = \tan(140^\circ - 20^\circ) = -\tan 20^\circ$

2.  $230^\circ$   
 $230^\circ = 180^\circ + 50^\circ$   
 กำหนด  $\sin 230^\circ = \sin(180^\circ + 50^\circ)$ ,  $\cos 230^\circ = \cos(180^\circ + 50^\circ)$   
 $\tan 230^\circ = \tan(180^\circ + 50^\circ)$   
 จาก  $\sin(180^\circ + \theta) = -\sin \theta$ ,  $\cos(180^\circ + \theta) = -\cos \theta$ ,  $\tan(180^\circ + \theta) = +\tan \theta$   
 จะได้  $\sin 230^\circ = \sin(180^\circ + 50^\circ) = -\sin 50^\circ$ ,  $\cos 230^\circ = \cos(180^\circ + 50^\circ) = -\cos 50^\circ$   
 $\tan 230^\circ = \tan(180^\circ + 50^\circ) = +\tan 50^\circ$

ภาพ 5 กระดาษคำตอบของนักเรียนที่จำสูตรผิด

ข้อมูลเหล่านี้ชี้ให้เห็นว่าการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนในวงจรที่ 2 สามารถทำให้นักเรียนส่วนใหญ่มีความรู้ความเข้าใจที่ถูกต้องในนิยามฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในตำแหน่งมาตรฐาน มีทักษะการคิดคำนวณและสามารถนำความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมใน

ตำแหน่งมาตรฐานไปใช้ในการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในตำแหน่งมาตรฐานที่อยู่ในควอดรันต์ต่าง ๆ ได้

### วงจรถ้า 3

#### ขั้นวางแผน

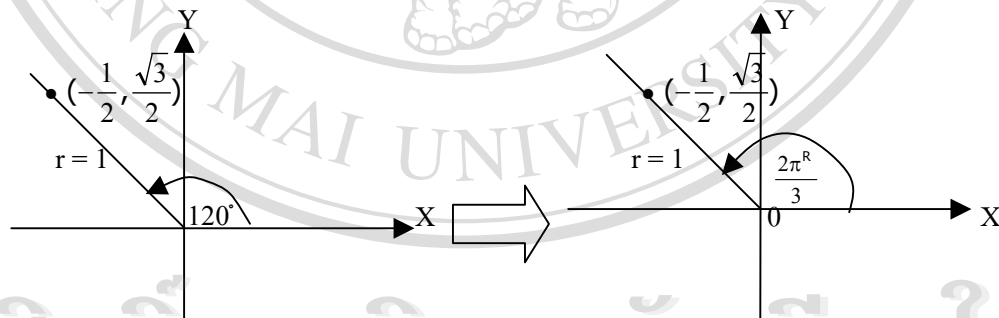
ในวงจรถ้านี้เป็นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในระบบเรเดียนและจำนวนจริง ตามแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คาบเรียนที่ 11-15 เพื่อแก้ปัญหาการเรียนการสอนที่พบว่า เมื่อกำหนดกราฟวงกลมหนึ่งหน่วยให้กับนักเรียนแล้วให้นักเรียนบอกความยาวของส่วนโค้งและจุดปลายของส่วนโค้ง นักเรียนไม่สามารถบอกความยาวของส่วนโค้งและบอกจุดปลายของส่วนโค้งได้ และนักเรียนไม่สามารถหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในระบบเรเดียนและจำนวนจริงได้ เช่น เมื่อกำหนดให้นักเรียนหาค่าของ  $\sin \frac{5\pi^R}{4}$  นักเรียนไม่สามารถบอกได้ว่า  $\sin \frac{5\pi^R}{4} = \sin 225^\circ$  และมีค่าเท่ากับ  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$  และไม่สามารถหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงได้ ซึ่งอาจมีสาเหตุมาจากการจัดการเรียนการสอนที่ไม่สอดคล้องกับความรู้เดิม กล่าวคือ การนำเข้าสู่ฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยผ่านวงกลมหนึ่งหน่วย ทำให้นักเรียนเกิดความสับสนในการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงและมุม เพราะความรู้เดิมของนักเรียนนั้นนักเรียนมีความรู้เกี่ยวกับอัตราส่วนตรีโกณมิติในสามเหลี่ยมมุมฉาก

การวิจัยในวงจรถ้านี้จึงแก้ปัญหาดังกล่าวด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่สอดคล้องกับความรู้เดิมของนักเรียนโดยใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในตำแหน่งมาตรฐานเป็นตัวเชื่อมแล้วนำไปสู่ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในระบบเรเดียนจากนั้นจึงเข้าสู่ฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง และใช้เอกสารประกอบการเรียนการสอนช่วยเสริมในเนื้อหาที่เป็นเนื้อหาใหม่ และฝึกทักษะเฉพาะเรื่อง เช่น ให้นักเรียนได้ฝึกทักษะการแปลงมุมจากระบบองศาเป็นระบบเรเดียน ฝึกการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในระบบเรเดียน และฝึกการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง เป็นต้น

#### ขั้นปฏิบัติตามแผนและสังเกตผลการปฏิบัติ

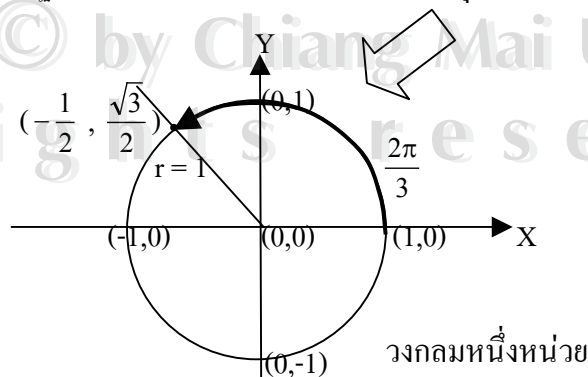
ผู้วิจัยได้ดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามแผนที่วางไว้ ใช้เวลาในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน 5 คาบ ตั้งแต่คาบที่ 11 - 15 โดยเริ่มจากการทบทวนความรู้เกี่ยวกับมุมในตำแหน่งมาตรฐาน แล้วให้นักเรียนสร้างรูปวงกลมจากกราฟของมุมในตำแหน่งมาตรฐาน และนำไปสู่นิมิตของการวัดมุมในระบบเรเดียนแล้วฝึกทักษะการแปลงมุมจากระบบองศาเป็น

ระบบเรเดียนในเอกสารประกอบการเรียนการสอน เมื่อนักเรียนสามารถแปลงมุมได้แล้วให้นักเรียนฝึกหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในระบบเรเดียน โดยแบ่งฝึกเป็นกลุ่มให้แต่ละกลุ่มช่วยเหลือกันและกัน แล้วร่วมกันสรุปสูตรในการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในระบบเรเดียนลงในแผ่นสรุปสูตรในเอกสารประกอบการเรียนการสอน แล้วผู้วิจัยนำเข้าสู่ฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง เริ่มจากให้นักเรียนพิจารณาถึงความสัมพันธ์ระหว่างมุมในตำแหน่งมาตรฐาน มุมในระบบเรเดียน และความยาวของส่วนโค้ง แล้วนำเข้าสู่วงกลมหนึ่งหน่วย จากนั้นให้นักเรียนฝึกการหาจุดปลายส่วนโค้งในเอกสารเมื่อกำหนดความยาวส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยให้ แล้วนำไปสู่ข้อสรุปที่ว่าในกรณีที่จุดบนด้านสิ้นสุดของมุมในตำแหน่งมาตรฐานอยู่ห่างจากจุดกำเนิด 1 หน่วยจุดปลายของส่วนโค้งเป็นจุดเดียวกันกับจุดบนด้านสิ้นสุดของมุมในตำแหน่งมาตรฐาน และของมุมในระบบเรเดียน ดังนั้นค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในตำแหน่งมาตรฐานและของจำนวนจริงจะเท่ากัน และจุดปลายส่วนโค้งนั้นสามารถหาได้จาก ค่าฟังก์ชันโคไซน์และไซน์ของมุมหรือความยาวส่วนโค้งนั้น โดยพิกัดหน้าเป็นค่าฟังก์ชันโคไซน์ และพิกัดหลังเป็นค่าฟังก์ชันไซน์ เช่น  $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$  หรือ  $(\cos 120^\circ, \sin 120^\circ)$  หรือ  $(\cos \frac{2\pi}{3}, \sin \frac{2\pi}{3})$  คือพิกัดของจุดบนด้านสิ้นสุดของมุมในตำแหน่งมาตรฐานที่มีขนาด  $120^\circ$  หรือ  $\frac{2\pi^R}{3}$  หรือพิกัดของจุดปลายส่วนโค้ง  $\frac{2\pi}{3}$  บนวงกลมหนึ่งหน่วย ดังรูป



มุมในตำแหน่งมาตรฐาน

มุมในระบบเรเดียน



วงกลมหนึ่งหน่วย

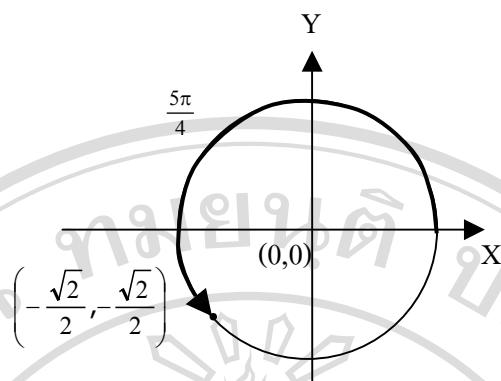
จากนั้นให้นักเรียนฝึกทักษะการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติในเอกสารประกอบการเรียนการสอน เมื่อนักเรียนได้ทราบถึงความสัมพันธ์ฟังก์ชันของมุมและจำนวนจริงแล้วได้นำสู่ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ โดยใช้มุมในตำแหน่งมาตรฐานในการให้นิยามของฟังก์ชันโคเซแคนท์ เซแคนท์ และ โคแทนเจนต์

ผู้วิจัยได้บันทึกผลการปฏิบัติกิจกรรมการเรียนการสอน ปัญหาหรืออุปสรรคที่เกิดขึ้น จากการสังเกตพฤติกรรมของนักเรียน ในด้านการตอบคำถาม การทำกิจกรรมในชั้นเรียน การฝึกทักษะในชั้นเรียน ลงในแบบบันทึกหลังการสอนในแต่ละคาบเรียน ส่วนผลการตรวจแบบฝึกหัดได้บันทึกลงในแบบบันทึกการตรวจแบบฝึกหัด(การบ้าน) และแบบบันทึกความก้าวหน้า และในคาบเรียนที่ 15 ให้นักเรียนเขียนบันทึกการเรียนรู้เกี่ยวกับความรู้ที่ได้ในการเรียนครั้งนี้ ปัญหา/อุปสรรคที่เกิดขึ้นในการเรียนครั้งนี้ ต้องการความช่วยเหลือในการเรียนอย่างไร และข้อเสนอแนะในการเรียนครั้งต่อไป

#### ขั้นสะท้อนความคิด

ผู้วิจัยนำข้อมูลที่ได้มาจัดหมวดหมู่ใน 3 ด้านคือ ด้านความรู้ความเข้าใจในมโนคติของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในระบบเรเดียน ฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง ด้านทักษะในการคิดคำนวณหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ และด้านการนำความรู้ไปประยุกต์ใช้ในการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในระบบเรเดียนและของจำนวนจริง เพื่อหาข้อสรุปของการดำเนินการวิจัยในวงจรที่ 3 นี้ว่าในแต่ละด้านนั้นนักเรียนเป็นอย่างไร ซึ่งสามารถสรุปได้ดังนี้

1. ด้านมโนคติ จากการสังเกตพฤติกรรมการเรียนในชั้นเรียน พบว่า นักเรียนเกือบทั้งห้องสามารถตอบคำถามเกี่ยวกับการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในระบบเรเดียนหรือของจำนวนจริงได้ถูกต้อง เช่น บอกได้ว่าค่าของ  $\sin \frac{5\pi}{3}$  มีค่าเท่ากับ  $\sin 300^\circ$  ซึ่งมีค่าเท่ากับ  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  มีนักเรียนประมาณ 35 คน แสดงวิธีการแปลงมุมได้ถูกต้อง และเมื่อกำหนดรูปภาพที่กำหนดความยาวส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยให้ นักเรียนทุกกลุ่มสามารถบอกพิกัดของจุดปลายของส่วนโค้งได้ถูกต้อง เช่น เมื่อกำหนดรูปและความยาวส่วนโค้ง  $\frac{5\pi}{4}$  ให้แล้วนักเรียนสามารถบอกได้ว่าจุดปลายส่วนโค้งคือ  $(\cos \frac{5\pi}{4}, \sin \frac{5\pi}{4}) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$  ดังรูป



จากการตรวจแบบฝึกหัดเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในระบบเรเดียน ฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง พบว่า นักเรียนประมาณ 30 คน สามารถใช้สูตร และหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ถูกต้อง มีนักเรียนประมาณ 5 – 7 คน ที่ยังกระจายมุมผิด เช่น  $\frac{5\pi}{3} = 2\pi + \frac{\pi}{3}$  และจำสูตรผิด ทำให้การหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติผิดไปด้วย เช่น  $\sin\left(-\frac{7\pi}{2}\right)^R = -\sin\left(-\frac{7\pi}{2}\right)^R$  และการจำค่าของฟังก์ชันผิด เช่น  $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)^R = \frac{\sqrt{2}}{2}$  จากการอ่านบันทึกการเรียนรู้ของนักเรียน พบว่า มีนักเรียนประมาณ 4 – 5 คน ที่มีปัญหาในการเรียนวงจริงนี้ และ อยากให้ครูผู้สอนอธิบายให้มากกว่าเดิม และ เพิ่มจำนวนตัวอย่างให้มากขึ้น

ข้อมูลดังกล่าวแสดงให้เห็นว่าการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนในวงจริงที่ 3 สามารถทำให้นักเรียนประมาณ 82% มีความรู้ความเข้าใจที่ถูกต้องในมโนคติของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในระบบเรเดียน และ ฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง

2. ในด้านทักษะการคิดคำนวณ จากการตรวจแบบฝึกหัดและการสังเกตการทำกิจกรรมในชั้นเรียน พบว่า นักเรียนประมาณ 30 คน สามารถกระจายมุมหรือจำนวนจริงแล้วหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในระบบเรเดียนและค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงได้ถูกต้อง มีนักเรียนประมาณ 4 – 5 คน ที่บวก ลบ และคูณเศษส่วนผิด ทำให้ผลลัพธ์ที่ได้ผิดพลาด ดังภาพ 6



$$\begin{aligned}
 & 2. \quad \sin\left(-\frac{11\pi^R}{4}\right) \cos \frac{15\pi^R}{4} + \tan\left(-\frac{21\pi^R}{4}\right) \tan \frac{23\pi^R}{4} \\
 & = -\sin \frac{11\pi^R}{4} \cdot \cos \frac{15\pi^R}{4} + (-\tan \frac{21\pi^R}{4}) \cdot \tan \frac{23\pi^R}{4} \\
 & = -\sin\left(\frac{3\pi^R - \pi^R}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{4\pi^R - \pi^R}{4}\right) + (-\tan \frac{5\pi^R + \pi^R}{4}) \cdot \tan\left(\frac{6\pi^R - \pi^R}{4}\right) \\
 & = -\sin \frac{\pi^R}{4} \cdot \cos \frac{\pi^R}{4} + (-\tan \frac{\pi^R}{4}) \cdot \tan \frac{\pi^R}{4} \\
 & = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + (-1) \cdot (-1) \\
 & = -\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{8} + 1 = \frac{7}{8} = \frac{7 \cdot 0}{2} = \frac{1}{2} \\
 & = -\frac{1}{8} + 1 = \frac{7}{8} \\
 & \therefore \sin\left(-\frac{11\pi^R}{4}\right) \cdot \cos \frac{15\pi^R}{4} + \tan\left(-\frac{21\pi^R}{4}\right) \cdot \tan \frac{23\pi^R}{4} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

ภาพ 6 กระจายคำตอบแสดงการคิดคำนวณค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติผิด

ข้อมูลดังกล่าวแสดงให้เห็นว่าการจัดกิจกรรมในวงจรที่ 3 สามารถทำให้นักเรียนประมาณ 79% กระจายมุม บวก ลบ คูณ และหารจำนวนจริงในการแสดงการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในระบบเรเดียน และ ฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงได้ถูกต้อง

3. ในด้านการนำความรู้ไปใช้ในการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในระบบเรเดียน ฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง จากการตรวจแบบฝึกหัดและการสังเกตการทำกิจกรรมในชั้นเรียนของนักเรียน พบว่า จากการทำแบบฝึกหัด 7 ข้อ มีนักเรียน 16 คนสามารถนำความรู้เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในระบบเรเดียนไปช่วยในการแก้ปัญหาโจทย์ได้อย่างถูกต้องทุกข้อ มีนักเรียน 12 คน ที่ทำแบบฝึกหัดถูกต้องตั้งแต่ 5 – 6 ข้อ มีนักเรียน 2 คน ที่ทำแบบฝึกหัดถูกต้อง 4 ข้อ และมีนักเรียนที่ทำแบบฝึกหัดผิด 4 – 5 ข้อจำนวน 4 คน ในส่วนของแบบฝึกหัดเกี่ยวกับการนำความรู้เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงไปช่วยในการแก้ปัญหาโจทย์จำนวน 4 ข้อ มีนักเรียนที่สามารถทำได้ถูกต้องทุกข้อจำนวน 4 คน ทำถูกต้องตั้งแต่ 2 – 3 ข้อ จำนวน 18 คน ทำผิด 3 ข้อ จำนวน 6 คน และทำผิดทั้ง 4 ข้อ จำนวน 3 คน นักเรียนที่ทำแบบฝึกหัดผิดสาเหตุส่วนใหญ่มาจากการบวก การลบ จำนวนจริงผิด การจำค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติผิด และการเขียนสูตรผิดจึงทำให้ผิดพลาดในการคิดคำนวณ ดังภาพ 7

$$\begin{aligned}
 & 4. \cot \frac{7\pi}{2} \csc \left(-\frac{15\pi}{4}\right) + \sec \frac{11\pi}{4} \cos \left(\frac{19\pi}{4}\right) \\
 & \cot \frac{7\pi}{2} = \cot 3\pi + \frac{\pi}{2} \cdot \csc \left(-4\pi - \frac{\pi}{4}\right) + \sec 3\pi - \frac{\pi}{4} \cos 5\pi - \frac{\pi}{4} \\
 & = \cot 3\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{2}} \cdot \csc \left(-4\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -1 + \sec 3\pi - \frac{\pi}{4} = 1, -\cos \frac{\pi}{4} \\
 & = 0 \times \frac{1}{\sqrt{2}} + -1 \times -1 = \cot \left(\frac{19\pi}{2}\right) \cdot \csc \left(\frac{7\pi}{2}\right) + \sec \left(\frac{11\pi}{2}\right) \cdot \cos \left(\frac{19\pi}{4}\right) \\
 & = (-\cot \frac{\pi}{2}) \cdot (-\csc \frac{\pi}{2}) + (\sec \frac{\pi}{2}) \cdot (-\cos \frac{\pi}{4}) \\
 & = \frac{1}{2} = \left(-\frac{1}{\tan \frac{\pi}{2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sin \frac{\pi}{2}}\right) + \left(\frac{1}{\cos \frac{\pi}{2}}\right) \cdot \left(-\cos \frac{\pi}{4}\right) \\
 & = -\frac{1}{\frac{1}{0}} \cdot \sqrt{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{-1}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
 & = (-1) \cdot \sqrt{2} + \frac{-\sqrt{2}}{-1} = 0 + 1 = 1
 \end{aligned}$$

ภาพ 7 กระดาษคำตอบของนักเรียนแสดงการแก้ปัญหาโจทย์ผิด

ข้อมูลดังกล่าวชี้ให้เห็นว่าการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนในวงจรที่ 3 นักเรียนส่วนใหญ่สามารถนำความรู้เกี่ยวกับค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม ฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงไปช่วยในการแก้โจทย์ปัญหาได้

#### วงจรที่ 4

##### ชั้นวางแผน

ในวงจรนี้เป็นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง การหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตาราง ตามแผนการจัดการเรียนรู้คาบที่ 16-17 เพื่อแก้ปัญหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตารางได้ กล่าวคือ เมื่อนักเรียนต้องการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่มีขนาดเกิน  $45^\circ$  จากตาราง เช่น การอ่านค่าของ  $\sin 83^\circ 30'$  นักเรียนไม่สามารถอ่านค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตารางได้ นักเรียนจะสับสนว่าจะใช้ค่าใดจาก 0.1132 หรือ 0.1305 หรือ 0.9936 หรือ 0.9914 ดังภาพ 8

ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ							
Degree	Radians	Sine	Tangent	Cotangent	Cosine		
6° 00'	.1047	.1045	.1051	9.5144	.9945	1.4661	84° 00'
10'	.1076	.1074	.1080	9.2553	.9942	1.4632	50'
20'	.1105	.1103	.1110	9.0098	.9939	1.4603	40'
30'	.1134	.1132	.1139	8.7769	.9936	1.4573	30'
40'	.1164	.1161	.1169	8.5555	.9932	1.4544	20'
50'	.1193	.1190	.1198	8.3450	.9929	1.4515	10'
7° 00'	.1222	.1219	.1228	8.1443	.9925	1.4486	83° 00'
10'	.1251	.1248	.1257	7.9530	.9922	1.4457	50'
20'	.1280	.1276	.1287	7.7704	.9918	1.4428	40'
30'	.1309	.1305	.1317	7.5958	.9914	1.4399	30'
		Cosine	Cotangent	Tangent	Sine	Radians	Degree

ภาพ 8 ตัวอย่างตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติในหนังสือเรียนคณิตศาสตร์

นอกจากนี้ นักเรียนยังไม่สามารถหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่มีขนาดเกิน  $90^\circ$  และค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่ไม่ได้กำหนดไว้ในตาราง เช่น  $\cos 71^\circ 23'$  ซึ่งอาจมีสาเหตุมาจากตารางที่ใช้ในการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทำให้นักเรียนเกิดความสับสนในการเปิดตารางหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ และการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนไม่ได้เน้นให้นักเรียนได้ฝึกทักษะในการเปิดตารางด้วยตนเอง

ในวงจรมนี้ผู้วิจัยจึงแก้ปัญหาโดยใช้คอมพิวเตอร์ช่วยในการสร้างตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติขึ้นมาใหม่ เพื่อใช้แทนตารางเดิม ซึ่งตารางนี้จะแสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้ง 6 ฟังก์ชันและเรียงลำดับมุมตั้งแต่มุมที่มีขนาด  $0^\circ$  หรือ 0 เรเดียนถึงมุมที่มีขนาด  $90^\circ$  หรือ ประมาณ 1.5708 เรเดียน จากบนลงล่าง ดังตัวอย่างในภาพ 9

**ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ**

Degree	Radians	sine	cosine	tangent	cosecant	secant	cotangent
0	0	0.0000	1.0000	0.0000	-	1.0000	-
	10	0.0029	1.0000	0.0029	344.8276	1.0000	344.8276
	20	0.0058	1.0000	0.0058	172.4138	1.0000	172.4138
	30	0.0087	1.0000	0.0087	114.9425	1.0000	114.9425
	40	0.0116	0.9999	0.0116	86.2069	1.0001	86.2069
	50	0.0145	0.9999	0.0145	68.9655	1.0001	68.9655
1	0	0.0175	0.9998	0.0175	57.1429	1.0002	57.1429
	10	0.0204	0.9998	0.0204	49.0196	1.0002	49.0196
	20	0.0233	0.9997	0.0233	42.9185	1.0003	42.9185
	30	0.0262	0.9997	0.0262	38.1679	1.0003	38.1679
	40	0.0291	0.9996	0.0291	34.3643	1.0004	34.3643
	50	0.0320	0.9995	0.0320	31.2500	1.0005	31.2500
2	0	0.0349	0.9994	0.0349	28.6533	1.0006	28.6533
	10	0.0378	0.9993	0.0378	26.4550	1.0007	26.4550
	20	0.0407	0.9992	0.0407	24.5700	1.0008	24.5700
	30	0.0436	0.9990	0.0436	22.9358	1.0010	22.9358
	40	0.0465	0.9989	0.0465	21.5054	1.0011	21.5054
	50	0.0495	0.9988	0.0495	20.2020	1.0012	20.2020
3	0	0.0524	0.9986	0.0524	19.0840	1.0014	19.0840
	10	0.0553	0.9985	0.0554	18.0832	1.0015	18.0505
	20	0.0582	0.9983	0.0583	17.1821	1.0017	17.1527
	30	0.0611	0.9981	0.0612	16.3666	1.0019	16.3399
	40	0.0640	0.9980	0.0641	15.6250	1.0020	15.6006
	50	0.0669	0.9978	0.0670	14.9477	1.0022	14.9254
4	0	0.0698	0.9976	0.0699	14.3472	1.0024	14.3062
	10	0.0727	0.9974	0.0728	13.7741	1.0026	13.7363
	20	0.0756	0.9971	0.0757	13.2450	1.0029	13.2100
	30	0.0785	0.9969	0.0787	12.7551	1.0031	12.7065
	40	0.0814	0.9967	0.0816	12.3001	1.0033	12.2549
	50	0.0844	0.9964	0.0846	11.8624	1.0036	11.8203
5	0	0.0873	0.9962	0.0875	11.4679	1.0038	11.4286
	10	0.0902	0.9959	0.0904	11.0988	1.0041	11.0619
	20	0.0931	0.9957	0.0934	10.7527	1.0043	10.7066
	30	0.0960	0.9954	0.0963	10.4275	1.0046	10.3842
	40	0.0989	0.9951	0.0992	10.1317	1.0049	10.0806
	50	0.1018	0.9948	0.1022	9.8425	1.0052	9.7847

ภาพ 9 ตัวอย่างตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติที่สร้างขึ้นใหม่

(ดูรายละเอียดตารางในภาคผนวก ก หน้า 330) ให้นักเรียนฝึกการเปิดตารางหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมด้วยตนเอง และฝึกทักษะในการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่มีขนาดเกิน  $90^\circ$  และมุมที่ไม่ได้กำหนดไว้ในตาราง จากเอกสารประกอบการเรียนการสอน

### ขั้นปฏิบัติตามแผนและสังเกตผลการปฏิบัติ

ผู้วิจัยได้ดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามแผนที่วางไว้ ใช้เวลาในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน 2 คาบ ตั้งแต่คาบที่ 16 – 17 เริ่มจากผู้วิจัยได้อธิบายวิธีการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมจากตารางที่ได้สร้างขึ้นใหม่ให้นักเรียน และกำหนดมุมให้แล้วให้นักเรียนได้ฝึกการใช้ตารางในการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติด้วยตนเองไปพร้อม ๆ กันแล้วทดสอบความเข้าใจด้วยการถามกับนักเรียนเป็นรายบุคคล เมื่อนักเรียนมีความรู้ความเข้าใจในการเปิดตารางหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติแล้ว ผู้วิจัยให้นักเรียนได้หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ไม่ได้กำหนดไว้ในตาราง เริ่มด้วยผู้วิจัยอธิบายขั้นตอนและวิธีการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่ไม่ได้กำหนดไว้ในตารางโดยใช้การเทียบบัญญัติไตรยางค์ และการเทียบสัดส่วน ตัวอย่างเช่นในการหาค่าของ  $\cos 47^{\circ}43'$  ถ้าใช้การเทียบบัญญัติไตรยางค์ จะมีวิธีการหาค่าได้ดังนี้

จากตารางค่าของ  $\cos 47^{\circ}43'$  อยู่ระหว่าง  $\cos 47^{\circ}40'$  และ  $\cos 47^{\circ}50'$

ดังนั้น ค่าของ  $\cos 47^{\circ}40' = 0.6734$  และ  $\cos 47^{\circ}50' = 0.6713$

มุมเพิ่มขึ้น 10' ค่าฟังก์ชันลดลง 0.0021

มุมเพิ่มขึ้น 3' ค่าฟังก์ชันลดลง  $\frac{3' \times 0.0021}{10} = 0.00063 \approx 0.0006$

จะได้ว่า ค่าของ  $\cos 47^{\circ}43' = \cos 47^{\circ}40' - 0.0006 = 0.6734 - 0.0006 = 0.6728$

ดังนั้นสรุปได้ว่าค่าของ  $\cos 47^{\circ}43' = 0.6728$

และในการหาค่าของ  $\sin 40^{\circ}17'$  โดยใช้การเทียบสัดส่วน จะมีวิธีการหาได้ดังนี้

จากตาราง  $\sin 40^{\circ}17'$  มีค่าอยู่ระหว่าง  $\sin 40^{\circ}10' = 0.6450$  และ  $\sin 40^{\circ}20' = 0.6472$

มุมเพิ่มขึ้น 10 ค่าของฟังก์ชันเพิ่มขึ้น 0.0022

ถ้ามุมเพิ่มขึ้น 7 ค่าของฟังก์ชันเพิ่มขึ้น x

จะได้สัดส่วนเป็น  $\frac{x}{7} = \frac{0.0022}{10}$  หรือ  $\frac{x}{0.0022} = \frac{7}{10}$

ดังนั้น  $x = \frac{0.0022 \times 7}{10} = \frac{0.0154}{10} \approx 0.0015$

$\therefore \sin 40^{\circ}17' = \sin 40^{\circ}10' + 0.0015 = 0.6450 + 0.0015 = 0.6465$

ให้นักเรียนได้พิจารณาค่าของฟังก์ชันกับมุมว่ามีฟังก์ชันใดที่ค่าของฟังก์ชันแปรผันโดยตรงกับมุมและมีฟังก์ชันใดที่แปรผันแบบผกผันกับมุมบ้าง แล้วให้นักเรียนได้สังเกตวิธีการคิดคำนวณเมื่อค่าฟังก์ชันเพิ่มขึ้นหรือลดลงจากตัวอย่างในเอกสารประกอบการเรียนการสอน จากนั้นให้ฝึกทักษะการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่ไม่ได้กำหนดในตารางในเอกสารประกอบการเรียนการสอน เมื่อนักเรียนสามารถหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้แล้ว ให้นักเรียนได้ฝึกทักษะ

การนำความรู้เกี่ยวกับสูตรการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ และตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติไปใช้ในการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่มีขนาดน้อยกว่า 0 องศา และมากกว่า 90 องศา ในเอกสารประกอบการเรียนการสอน โดยฝึกทักษะเป็นกลุ่มเหมือนกับวงจรที่ผ่านมา เมื่อนักเรียนสามารถหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติได้จนเป็นที่น่าพอใจแล้ว ผู้วิจัยได้อธิบายวิธีการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตารางในหนังสือเรียนแบบเรียนคณิตศาสตร์ของกระทรวงศึกษาธิการ กรมสามัญศึกษา จากนั้นจึงให้นักเรียนแต่ละคนได้ฝึกการนำความรู้ไปใช้โดยการทำแบบฝึกหัดในเอกสารประกอบการเรียนการสอน และ ให้นักเรียนแต่ละคนเขียนบันทึกการเรียนรู้ในการเรียนวงจรนี้

ผู้วิจัยบันทึกผลการสังเกตการปฏิบัติในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนลงในแบบบันทึกหลังการสอนในท้ายคาบเรียนของแต่ละคาบเรียน ผลการตรวจแบบฝึกหัดผู้วิจัยบันทึกลงในแบบบันทึกการตรวจแบบฝึกหัดและแบบบันทึกความก้าวหน้าของนักเรียน และอ่านบันทึกการเรียนรู้ที่นักเรียนเขียนหลังจากที่เรียนจบในวงจรนี้เพื่อจะได้ทราบว่านักเรียนได้รับความรู้อะไรบ้าง มีปัญหาในการเรียนวงจรนี้หรือไม่ ต้องการให้ผู้วิจัยช่วยเหลืออย่างไร และมีข้อเสนอแนะในการเรียนครั้งต่อไปอย่างไร

### ขั้นสะท้อนความคิด

ผู้วิจัยนำข้อมูลที่ได้จากการปฏิบัติและสังเกตผลการปฏิบัติมาวิเคราะห์เพื่อหาข้อสรุปของการดำเนินการวิจัยในวงจรนี้ว่า นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจในมโนคติของตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ ทั้งแบบเดิมและแบบที่สร้างขึ้นใหม่หรือไม่ อย่างไร นักเรียนมีทักษะในการคิดคำนวณหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ไม่ได้กำหนดค่าในตารางได้หรือไม่ อย่างไร และนักเรียนสามารถนำความรู้เกี่ยวกับตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติและการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยการเทียบบัญญัติไตรยางค์ และเทียบสัดส่วนไปใช้ในการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่น้อยกว่า 0 องศาและมากกว่า 90 องศาได้หรือไม่ อย่างไร ซึ่งสามารถสรุปผลการวิจัยได้ดังนี้

1. นักเรียนส่วนใหญ่มีความรู้ความเข้าใจที่ถูกต้องเกี่ยวกับตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ ซึ่งข้อมูลที่ได้จากการสังเกตพฤติกรรมในชั้นเรียน พบว่า เมื่อกำหนดมุม  $48^{\circ}30'$  ให้แล้วให้นักเรียนเปิดตารางหาค่าฟังก์ชันโคไซน์ของมุม  $48^{\circ}30'$  และโคแทนเจนต์ของมุม  $48^{\circ}30'$  นักเรียนเกือบทั้งห้องสามารถบอกค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตารางได้ถูกต้องว่า  $\cos 48^{\circ}30' = 0.6626$ ,  $\cot 48^{\circ}30' = 0.8847$  มีนักเรียนบางคนที่ยังเปิดตารางได้ช้าแต่ก็สามารถบอกค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ถูกต้อง จากการตรวจแบบฝึกหัด พบว่า แบบฝึกหัดจำนวน 5 ข้อ มีนักเรียนสามารถหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้องทุกข้อ จำนวน 16 คน ทำผิด 1 ข้อ จำนวน 13 คน ทำผิด 2 ข้อ จำนวน 3 คน และทำผิด 3 ข้อ จำนวน 1 คน ในส่วน

ของแบบฝึกหัดที่นักเรียนหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่มีขนาดน้อยกว่า 0 องศาและมากกว่า 90 องศา จำนวน 4 ข้อ พบว่า มีนักเรียนที่ทำถูกต้องทุกข้อ จำนวน 9 คน ทำผิด 1 ข้อ จำนวน 14 คน ทำผิด 2 ข้อ จำนวน 3 คน ทำผิด 3 ข้อ จำนวน 3 คน และทำผิดทุกข้อจำนวน 3 คน นักเรียนที่ทำผิดบางคนยังจำสูตรในการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติผิดทำให้ค่าที่ได้ออกมาผิดพลาดเช่น  $\sin(-205^{\circ}34') = \sin 205^{\circ}34'$  สืบสนในการเปรียบเทียบค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติว่ามีค่าเพิ่มขึ้นหรือลดลง และในการหาผลลัพธ์สุดท้ายจะนำไปบวกหรือลบกับค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม ตั้งต้น ดังภาพ 10

3.  $\csc 13^{\circ}42'$   
 $\csc 13^{\circ}40' = 4.2337$   
 $\csc 13^{\circ}50' = 4.1821$   
 มุมดาว 10 ฟังก์ชันค่าคงที่ 0.0513  
 มุมดาว 2 ฟังก์ชันค่าคงที่  $0.0513 \times 2 = 0.01026 = 0.01026 \approx 0.0103$   
 $\csc 13^{\circ}42' = \csc 13^{\circ}40' + 0.0103 = 4.2337 + 0.0103 = 4.244$   
 $\csc 13^{\circ}42' = 4.244$  #

ภาพ 10 กระดาษคำตอบของนักเรียนที่เทียบค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติผิด

จากการอ่านบันทึกการเรียนรู้ของนักเรียนและการสัมภาษณ์ นักเรียนส่วนใหญ่บอกว่าสามารถหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตารางใหม่ได้ง่ายและเข้าใจกว่าตารางในหนังสือเรียน

2. ในส่วนของทักษะในการคิดคำนวณ จากการสังเกตการฝึกทักษะในห้องเรียนและการตรวจแบบฝึกหัด (ข้อมูลเหมือนกับข้อ 1) สรุปได้ว่า นักเรียนมีทักษะการคิดคำนวณหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ไม่ได้กำหนดค่าไว้ในตาราง

3. การนำความรู้เรื่องตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติไปใช้ในการช่วยหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่มีขนาดน้อยกว่า 0 องศา และมากกว่า 90 องศา จากการสังเกตการฝึกทักษะในห้องเรียนและการตรวจแบบฝึกหัด (ข้อมูลเหมือนกับข้อ 1) นักเรียนส่วนใหญ่สามารถนำความรู้เรื่องตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติไปใช้ในการช่วยหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่มีขนาดมากกว่า  $90^{\circ}$  ได้ถูกต้อง

ข้อมูลเหล่านี้ชี้ให้เห็นว่าการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนในวงจรที่ 4 สามารถทำให้นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจในมโนคติของตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ สามารถเปิดตารางหา

ค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่กำหนดให้ได้ สามารถคิดคำนวณและนำความรู้เกี่ยวกับตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติไปช่วยหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่ไม่ได้กำหนดไว้ในตารางได้ถูกต้อง

## วจนรที่ 5

### ขั้นวางแผน

ในวจนรที่ 5 เป็นการจ้ดกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่องกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ตามแผนการจัดการเรียนรู้คาบที่ 18 – 20 เพื่อแก้ปัญหการเรียนการสอนที่พบว่านักเรียนไม่สามารถเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ ไม่สามารถบอกคาบและแอมพลิจูดของกราฟได้ และไม่สามารถบอกลักษณะของกราฟได้ ซึ่งอาจมีสาเหตุมาจากการจ้ดกิจกรรมการเรียนการสอนที่ไม่เน้นให้นักเรียนได้ฝึกการเขียนกราฟด้วยตนเอง ขาดการแนะแนวทางในการเขียนกราฟ และนักเรียนไม่ได้สรุปความรู้ในการเขียนกราฟด้วยตนเอง

ผู้วิจัยแก้ปัญหในวจนรนี้ โดยใช้เอกสารประกอบการเรียนการสอนแนะแนวทางในการเขียนกราฟ รวมทั้งมีคำถามชี้แนะเพื่อเป็นแนวทางไปสู่ข้อสรุปของการเขียนกราฟของฟังก์ชันแต่ละฟังก์ชัน และให้นักเรียนได้สรุปมโนคติเกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติด้วยตนเอง แล้วให้ฝึกทักษะการเขียนกราฟของฟังก์ชันเป็นกลุ่ม โดยให้กลุ่มช่วยกันในการทำงาน และสรุปวิธีการเขียนกราฟและลักษณะของกราฟในแต่ละฟังก์ชันในเอกสารประกอบการเรียนการสอนของนักเรียนแต่ละคน

### ขั้นปฏิบัติตามแผนและสังเกตผลการปฏิบัติ

ผู้วิจัยได้ดำเนินการจ้ดกิจกรรมการเรียนการสอนตามที่วางแผนไว้ เช่น แบ่งนักเรียนออกเป็น 9 กลุ่ม กลุ่มละ 4 – 5 คน แล้วให้นักเรียนเขียนกราฟของฟังก์ชันและร่วมกันจากนั้นแต่ละกลุ่มร่วมกันสรุปเกี่ยวกับลักษณะกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้ง 6 ฟังก์ชัน ซึ่งประกอบด้วยลักษณะของกราฟ ความสูงของกราฟ(แอมพลิจูด) ความยาวของกราฟใน 1 คาบ (คาบ) ดังตัวอย่างกราฟของฟังก์ชัน  $y = 2\sin x$  จะมีลักษณะเป็นลูกคลื่นผ่านจุด (0,0) มีแอมพลิจูด คือ  $|2| = 2$  มีลักษณะเป็นคาบโดย 1 คาบยาว  $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$  หน่วย เป็นต้น เมื่อนักเรียนมีความเข้าใจในเนื้อหาแล้วผู้วิจัยให้นักเรียนได้ฝึกการนำความรู้ไปใช้ด้วยการทำแบบฝึกหัดและเขียนบันทึกการเรียนรู้อในเอกสารประกอบการเรียนการสอนเป็นการบ้าน



### ขั้นสะท้อนความคิด

ผู้วิจัยนำข้อมูลที่ได้จากการปฏิบัติและสังเกตผลการปฏิบัติมาวิเคราะห์ เพื่อหาข้อสรุปของการดำเนินการวิจัยในวงจรนี้ว่า นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจในลักษณะของกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ มีทักษะในการเขียนกราฟฟังก์ชันตรีโกณมิติ และสามารถนำความรู้เกี่ยวกับลักษณะของกราฟไปใช้ในการเขียนกราฟฟังก์ชันตรีโกณมิติได้หรือไม่ อย่างไร ผู้วิจัยสามารถสรุปผลการวิจัยในวงจรที่ 5 ตามเป้าหมายของการวิจัยได้ดังนี้

1. นักเรียนส่วนใหญ่มีความรู้ความเข้าใจในมโนคติของกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ และบอกลักษณะกราฟ ความยาวใน 1 คาบ ความสูง ของกราฟได้อย่างถูกต้อง ซึ่งจากการสังเกตพฤติกรรมในชั้นเรียนของนักเรียน พบว่า นักเรียนทุกกลุ่มสามารถตอบคำถามของครูและในตอบคำถามในเอกสารได้ถูกต้อง เช่น เมื่อกำหนดฟังก์ชัน  $y = 2 \cos x$  ให้แล้วนักเรียนสามารถบอกลักษณะของกราฟได้ว่ามีลักษณะเป็นลูกคลื่นผ่านจุด  $(0,2)$  มีแอมพลิจูดเท่ากับ 2 และคาบยาวใน 1 คาบเท่ากับ  $2\pi$  หน่วย และจากถามนักเรียนเกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ นักเรียนเกือบทั้งห้องบอกว่าสามารถเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ สามารถบอกแอมพลิจูด และ ความยาวใน 1 คาบได้ มีนักเรียนบางคนบอกว่ายังไม่แน่ใจในการเขียนกราฟกลัวว่ากราฟจะออกมาผิด

2. ในส่วนทักษะการเขียนกราฟ จากการสังเกตการเขียนกราฟของฟังก์ชันในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียน พบว่า นักเรียนทุกกลุ่มสามารถเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ถูกต้อง และยังสามารถบอกลักษณะกราฟ บอกแอมพลิจูด และความยาวใน 1 คาบ ได้

3. ในส่วนของการนำความรู้เรื่องกราฟไปช่วยในการเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ จากการสังเกตการทำกิจกรรมกลุ่ม และ การฝึกทักษะการเขียนกราฟฟังก์ชันตรีโกณมิติในชั้นเรียน พบว่า ในการเขียนกราฟของ  $y = 3 \sin \frac{x}{2}$  นักเรียนทุกกลุ่มสามารถบอกได้ว่ากราฟมีลักษณะเป็นคลื่นผ่านจุด  $(0,0)$  แอมพลิจูดเท่ากับ 3 และ ความยาวใน 1 คาบเท่ากับ  $\pi$  หน่วย

ข้อมูลเหล่านี้ชี้ให้เห็นว่าการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนในวงจรที่ 5 สามารถทำให้นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจที่ถูกต้องในมโนคติกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ สามารถบอกลักษณะของกราฟ แอมพลิจูด และ ความยาวใน 1 คาบของกราฟ มีทักษะในการเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติแล้วยังสามารถนำความรู้เรื่องกราฟฟังก์ชันตรีโกณมิติไปประยุกต์ใช้ในการเขียนกราฟที่มีแอมพลิจูดและความยาวคาบเปลี่ยนไปได้เป็นอย่างดี

เมื่อนักเรียนเรียนเนื้อหาเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติครบทั้ง 20 คาบ แล้ว ผู้วิจัยได้ทำการวัดผลการเรียนรู้ด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ ซึ่งแบ่งออกเป็น 3 ตอน ตอนที่ 1 เป็นข้อสอบแบบปรนัย เป็นการวัดความรู้ความเข้าใจในมโนคติของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ตอนที่ 2 เป็นข้อสอบแบบเติมคำตอบ เป็นการวัดความรู้ด้านทักษะการคิดคำนวณในการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ตอนที่ 3 เป็นข้อสอบแบบอัตนัย เป็นการวัดความรู้ด้านการนำความรู้เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติไปใช้ในการแก้ปัญหา จากการตรวจข้อสอบ พบว่า แบบทดสอบตอนที่ 1 มีนักเรียนสอบผ่าน 50% ของคะแนน จำนวน 19 คน คิดเป็น 50 % ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด แบบทดสอบตอนที่ 2 มีนักเรียนสอบผ่าน 50% ของคะแนน จำนวน 11 คน คิดเป็น 29% ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด และแบบทดสอบตอนที่ 3 มีนักเรียนสอบผ่าน 50 % ของคะแนน จำนวน 9 คน คิดเป็น 24 % ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด และสรุปโดยรวมมีนักเรียนที่สอบผ่าน 50% ของคะแนนทั้งหมด 8 คน คิดเป็น 21% ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด เมื่อเทียบกับผลการสอบเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติของนักเรียนที่เรียนตามแนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามแบบเรียนในปีที่ผ่านมา ซึ่งมีนักเรียนที่สอบผ่าน 50% ของคะแนนเดิม ประมาณ 14 - 15 % ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด พอจะกล่าวได้ว่า นักเรียนที่เรียนตามแนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนในการวิจัยในครั้งนี้มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนดีขึ้นกว่าการเรียนตามแนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนในแบบเรียนบ้างเล็กน้อย