# บทที่ 2

## ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับโครงงานวิจัย

### 2.1 ลักษณะของปัญหาและความรู้พื้นฐาน

เพื่อที่จะอธิบายผลของช่องสัญญาณแบบจำกัดช่วงของความถี่ ซึ่งเป็นสาเหตุหลักในเกิดอินเตอร์ซิมโบลอินเตอร์เฟียเรนซ์ (Intersymbol Interference : ISI) นั้น โดยปกติแล้ว เราสามารถที่จะออกแบบสมการที่มีลักษณะเป็นเวลาแบบดิสครีต (Discrete-Time) แทนที่การใช้สมการแบบเวลาต่อเนื่อง (Analog หรือ Continuous-Time) ได้ พิจารณาสมการที่ใช้อธิบายผลลัพธ์ของช่องสัญญาณได้ดังนี้ ซึ่งถูกกล่าวโดย Poakis (2001) และ Thaiupathump (2002)

$$x(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i) \cdot s(n-i) + v(n) \tag{2.1}$$

$$= h(0) \cdot s(n) + \sum_{i \neq 0} h(i) \cdot s(n-i) + v(n) \tag{2.2}$$

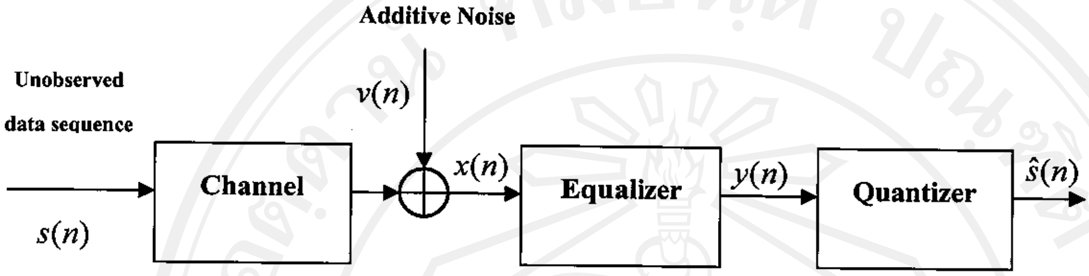
$$= signal + ISI + noise \tag{2.3}$$

โดยที่ $\{h(i)\}$ แทนค่า เบสแบนด์อีควิแวเลนท์อิมเพาสเรสปอนส์ (Baseband Equivalent Impulse Response) ของช่องสัญญาณที่ปกติแล้วเป็นจำนวนคอมเพลกส์ (Complex) ค่าของช่องสัญญาณนี้สามารถเปลี่ยนแปลงได้ (Time Varying) หรือมีการเปลี่ยนแปลงเพียงเล็กน้อยอยู่เนื่องๆ $\{s(n)\}$ แทนข้อมูลที่ต้องการส่ง โดยมีลักษณะเป็นอิสระและไม่เกี่ยวข้องต่อกันและกัน (Independent, Identically Distributed (i.i.d)) เป็นตัวแปรแบบสุ่ม (Random) มีค่าของเฉลี่ย (Mean) เท่ากับศูนย์และค่าเบี่ยงเบน (Variance) เท่ากับ $E\left[|s(n)|^2\right]$ และ $\{v(n)\}$ มีลักษณะเป็นสัญญาณรบกวนแบบไวท์เกาซเซียน (White Gaussian Noise) เราสามารถพิจารณาโครงสร้างของระบบโดยรวมได้จากรูปที่ 2.1 สำหรับโครงสร้างของอีควาไลเซอร์ที่นิยมนำมาใช้กันนั้น มีลักษณะเป็นวงจรกรองแบบขนาดจำกัด (Finite-Duration Response (FIR) Filter) สามารถเรียกได้อีกแบบว่าวงจรกรองทราสเวอซอล (Transversal Filter) พิจารณารูปที่ 2.2

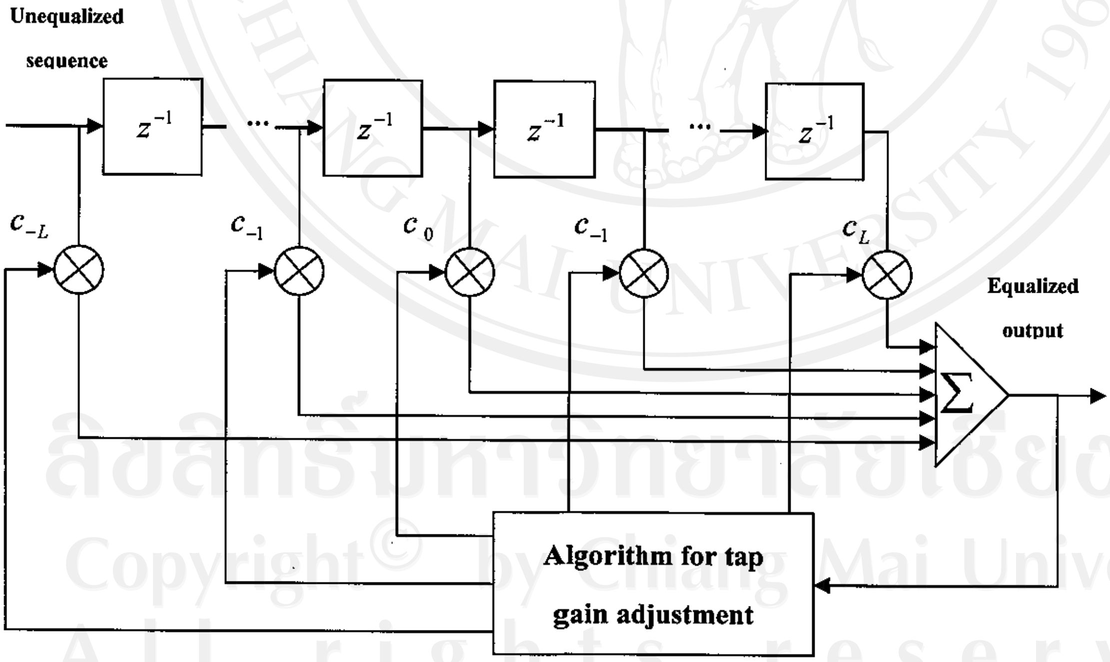
ผลลัพธ์ที่ได้จากอีควาไลเซอร์ (Equalizer) อธิบายได้ด้วยสมการ

$$y(n) = \sum_{i=-L}^{L} c_n(i) \cdot x(n-i) \tag{2.4}$$

โดยที่ $\{c_n(i)\}$ แทนค่าสัมประสิทธิ์ของอีควาไลเซอร์ (Coefficient) ณ เวลา $n$ และ $\{x(n)\}$ แทนค่าที่เป็นอินพุต (Input) สำหรับอีควาไลเซอร์จำนวนสัมประสิทธิ์ของอีควาไลเซอร์เท่ากับ $N = (2 \cdot L + 1)$ ส่วนใหญ่ค่าสัมประสิทธิ์ของอีควาไลเซอร์นี้สามารถปรับได้




**รูปที่ 2.1** โครงสร้างของระบบเบสแบนด์ (Baseband)




**รูปที่ 2.2** โครงสร้างของอีควาไลเซอร์แบบวงจรกรองทราสเวอซอล

อัลกอริทึมที่นิยมนำมาใช้ในการปรับคือ สโตคาสติคกราเดียน (Stochastic Gradient) ซึ่งสมการที่ใช้ในการปรับค่าสัมประสิทธิ์มีรูปแบบมาตรฐานดังนี้

$$c_{n+1} = c_n - \alpha \cdot \nabla_c J_n \tag{2.5}$$

โดยให้ $\{\alpha\}$ คือ ค่าการเรียนรู้ (Step-Size) และ $\nabla_c$ แทนค่ากราเดียน (Gradient) ของคอสท์ฟังก์ชัน (Cost Function ($J_n$)) ที่หาอนุพันธ์อันดับที่ 1 ตามค่าสัมประสิทธิ์ของอีควาไลเซอร์ ในกรณีที่คอสท์ฟังก์ชันที่เลือกใช้มีลักษณะคอนเวกซ์ (Convex) ค่าสัมประสิทธิ์ของอีควาไลเซอร์นั้นจะลู่เข้าหาจุดสมดุล เมื่อค่าของ กราเดียนเท่ากับศูนย์

$$c_{n+1} = c_n \Leftrightarrow \nabla_c J_n = 0 \tag{2.6}$$

ในกรณีวิธีการปรับค่าของอีควาไลเซอร์แบบมาตรฐานนั้น ค่าสัมประสิทธิ์ของอีควาไลเซอร์จะถูกปรับอยู่ตลอดเวลาตามทิศทางของกราเดียน ซึ่งจุดมุ่งหมายคือ การลดค่าเฉลี่ยของกำลังสอง (Mean Square) ของผลต่างระหว่างผลลัพธ์ของอีควาไลเซอร์กับค่าที่ต้องการ (ซึ่งค่าที่ต้องการนั้นได้จากสัญญาณช่วยสอน) แต่ในกรณีของอีควาไลเซชันแบบบอด (Blind Equalization) นั้น ค่าที่ต้องการที่ถูกต้องไม่สามารถจะเข้าถึงได้ วิธีที่ง่ายที่สุดในการปรับค่าสัมประสิทธิ์คือ การใช้ค่าทางสถิติของข้อมูลที่ใช้ส่งแทนค่าที่ถูกต้องในสมการที่เป็นคอสท์ฟังก์ชันแล้วจึงลดปริมาณของค่าเฉลี่ยของกำลังสอง ด้วยวิธีแบบสโตคาสติคกราเดียน

สมการที่เป็นคอสท์ฟังก์ชันที่นิยมใช้กัน สำหรับกรณีที่อีควาไลเซอร์ทำงานด้วยสัญญาณช่วยสอน นั้น ลักษณะของค่าเฉลี่ยของกำลังสองของความผิดพลาด (Mean Squared Error : MSE) ถูกกำหนดไว้ดังนี้

$$J_n = MSE = E\left[\ \left|\ y(n) - s(n)\ \right|^2\right] \tag{2.7}$$

โดยให้ $\{y(n)\}$ แทนค่าที่เป็นผลลัพธ์ที่ได้จากอีควาไลเซอร์และ $E[\cdot]$ แทนฟังก์ชันการคาดหมาย (Expectation Function) ทำให้เมื่อสมการที่ (2.7) ถูกใช้ร่วมกับสมการที่ (2.5) ผลที่ได้คือวิธีแบบลีสมินสแควร์ (Least-Mean-Square : LMS)

ในการใช้งานปกติ ฟังก์ชันการคาดหมายจะถูกประมาณด้วยค่าที่มีอยู่ในปัจจุบัน หรือค่าของกราเดียนของคอสท์ฟังก์ชันที่มีลักษณะตามสมการนี้

$$\tilde{J}_n = E\left[ \; \left| \; y(n) - s(n) \; \right|^2 \right] \tag{2.8}$$

ด้วยเหตุนี้ การปรับค่าสัมประสิทธิ์ของอีควาไลเซอร์ด้วยวิธีแบบลีสมีนสแควร์นั้น อธิบายได้ด้วยสมการ

$$c_{n+1} = c_n - \alpha \cdot (y(n) - s(n)) \cdot x(n) \tag{2.9}$$

หรือ

$$c_{n+1}(i) = c_n(i) - \alpha \cdot (y(n) - s(n)) \cdot x(n-i) \;\;,\;\; i = -L,.....,-1,0,1,.....L \tag{2.10}$$

ซึ่งเป็นสมการสำหรับปรับค่าสัมประสิทธิ์อันดับที่ $i$ สำหรับใช้ที่เวลา $n+1$ โดยที่ $\alpha$ แทนค่าของค่าการเรียนรู้และ $(y(n)-s(n))$ คือ ค่าของสัญญาณที่ผิดพลาด (Error Signal ($e(n)$)) ในระบบแบบอีควาไลเซชันแบบบอด ด้วยเหตุที่สัญญาณที่ต้องการและที่ถูกต้องนั้นไม่สามารถเข้าถึงได้ ฟังก์ชันที่มีคุณสมบัติแบบไม่เป็นเส้นตรง (Nonlinear) และไร้ความจำ (Memoryless) จึงถูกนำมาใช้ร่วมกับผลลัพธ์ของอีควาไลเซอร์เพื่อที่ใช้ในการสร้าง หรือประมาณค่าของสัญญาณที่ต้องการ

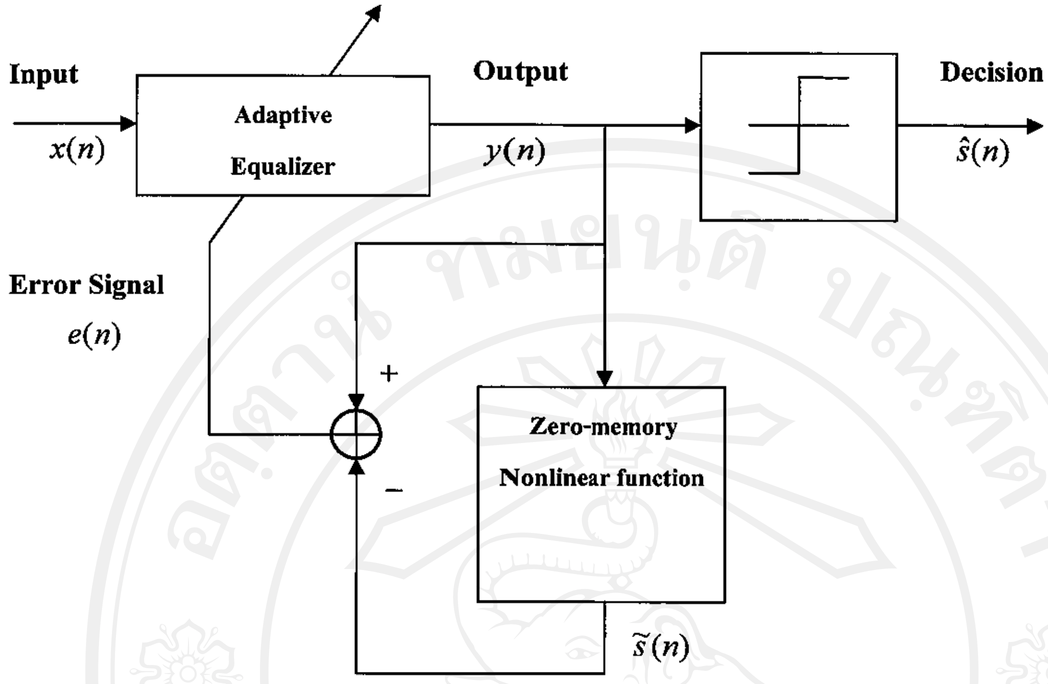
$$\tilde{s}(n) = g(y(n)) \tag{2.11}$$

โดยที่ $g(\cdot)$ แทนฟังก์ชันแบบไม่เป็นเส้นตรงและไร้ความจำ พิจารณาได้จากรูป 2.3

เราสามารถสรุปได้ว่า ค่าของ $\{\tilde{s}(n)\}$ เป็นค่าประมาณของข้อมูลจริงแบบหยาบ และผลที่ได้จากฟังก์ชันแบบไม่เป็นเส้นตรงแทนค่าที่เราต้องการ สิ่งที่เราได้รับคือสัญญาณที่ผิดพลาดที่อธิบายด้วยสมการ

$$e(n) = y(n) - \tilde{s}(n) \tag{2.12}$$
$$= y(n) - g(y(n)) \tag{2.13}$$

โดยที่ค่าของ $\{y(n)\}$ แทนค่าของผลลัพธ์ที่ได้จากอีควาไลเซอร์ตามสมการที่ (2.4)




**รูปที่ 2.3** ลักษณะของระบบอีควาไลเซชันแบบบอด

สำหรับสมการการปรับค่าสัมประสิทธิ์ของอีควาไลเซอร์แบบบอดตามแนวคิดลีสมีนสแควร์นั้น มีลักษณะดังนี้

$$c_{n+1} = c_n - \alpha \cdot (y(n) - g(y(n))) \cdot x(n) \tag{2.14}$$

หรือ

$$c_{n+1}(i) = c_n(i) - \alpha \cdot (y(n) - g(y(n))) \cdot x(n-i) \tag{2.15}$$

ให้ $i = -L,.....,-1,0,1,.....L$ เพื่อที่จะปรับค่าสัมประสิทธิ์ของอีควาไลเซอร์ตามสมการที่ (2.14) หรือ (2.15) ให้ลู่เข้าหาค่าเฉลี่ย สิ่งที่ต้องการคือ การที่ค่าฟังก์ชันการคาดหมายของ $c_n(i)$ ควรเข้าใกล้ค่าคงที่เมื่อ $n$ เข้าหาอนันต์ ซึ่งเงื่อนไขในการลู่เข้าหาค่าเฉลี่ยสามารถอธิบายได้ดังนี้

$$E\left[\ x(n-i) \cdot y(n)\ \right] = E\left[\ x(n-i) \cdot g(y(n))\ \right]$$

เมื่อ $n$ มีปริมาณมาก สำหรับทุก $i = -L,.....,-1,0,1,.....L$ (2.16)

สำหรับสมการที่ (2.16) นั้น ค่าของฟังก์ชันการคาดหมายเป็นฟังก์ชันของ $i$ ซึ่งเราสามารถให้ค่า $i$ ถูกแทนที่ด้วยค่าที่เป็นการหน่วง (Delay ( $i+k$ )) หลังจากนั้น เมื่อเราทำการคอนโวลูชัน (Convolution) สมการที่ (2.16) ทั้งสองข้างด้วยค่าสัมประสิทธิ์ของอีควาไลเซอร์เพื่อหาผลลัพธ์ในกรณีที่ $n \to \infty$ และค่า $L$ มีค่าที่มาก เราจะได้

$$E\left[\; y(n)\cdot y(n-i)\;\right] \approx E\left[\; g(y(n))\cdot y(n-i)\;\right] \tag{2.17}$$

สามารถเรียก $y(n)$ ที่มีลักษณะเป็นการประมวลผลแบบสโตคาสติค (Stochastic Process) แบบนี้ว่า มีคุณสมบัติเป็นการประมวลผลแบบบาสแกง (Bussgang Process) ถูกนำเสนอ Bellini (1986) และเมื่อ $y(n)$ มีคุณสมบัติดังนี้ เราสามารถกำหนดได้ว่า

$$E\left[\; y(n)\cdot y(n-i)\;\right] = E\left[\; y(n)\cdot g(y(n-i))\;\right] \tag{2.18}$$

โดยที่ $g(\cdot)$ เป็นฟังก์ชันไม่เป็นเส้นตรงและไร้ความจำ ในกรณีของการประมวลผลแบบบาสแกงนั้น สามารถอธิบายได้อีกวิธี คือเป็นการประมวลผลที่ค่าอัตสหสัมพันธ์ (Autocorrelation) มีค่าเท่ากับค่าสหสัมพันธ์ข้าม (Crosscorrelation) ระหว่างค่าของการประมวลผลกับค่าของผลลัพธ์ที่ได้จากฟังก์ชันแบบไม่เป็นเส้นตรงและไร้ความจำ เมื่อค่าของการหน่วงเท่ากัน วิธีการปรับแบบอีควาไลเซชันแบบบอดที่มีคุณสมบัติตามสมการที่ (2.18) ถูกจัดให้อยู่ในกลุ่มของอัลกอริทึมบาสแกง ในที่นี้เราจะกล่าวถึงวิธีการทำอีควาไลเซชันแบบบอดด้วยอัลกอริทึมคาสติคกราเดียนไอเตอเรทีฟ (Stochastic-Gradient Iterative Algorithm) ที่เป็นที่รู้จักกัน และถูกจัดเป็นมาตรฐาน อัลกอริทึมที่จะกล่าวถึงนี้ประกอบด้วย อัลกอริทึมรีดิวคอนสเตลเลชันและอัลกอริทึมคอนแสตนมอดดูลัส(หรือเรียกอีกแบบว่าอัลกอริทึมก๊อดดาร์ด) ซึ่งเป็นอัลกอริทึมที่นิยมอ้างอิงถึงในการทำงานบนระบบสัญญาณข้อมูลแบบ QAM หรือเฟสชิฟคีย์อิง (Phase Shift Keying : PSK) และยังมีอัลกอริทึมการทำอีควาไลเซชันแบบบอดแบบอื่นๆ ซึ่งแตกต่างจากอัลกอริทึมข้างต้นตรงวิธีการประมาณค่าที่ต้องการ (ประกอบขึ้นมาจากผลลัพธ์ที่ได้จากอีควาไลเซอร์และคุณสมบัติทางสถิติของข้อมูลที่ถูกส่ง) ในการที่จะอีควาไลเซชันช่องสัญญาณที่มีคุณสมบัติแบบนอนมินนิมัมเฟส (Nonminimum Phase) นั้น ค่าของคอสท์ฟังก์ชันส่วนใหญ่แล้วจะใช้ความสามารถทางสถิติอันดับสูง (มากกว่าอันดับที่สอง) ของผลลัพธ์ที่ได้จากช่องสัญญาณ สิ่งที่สำคัญคือ ในกรณีที่ข้อมูลมีคุณสมบัติเป็นเกาซเซียน นั้น จะไม่สามารถทำการประมาณระบบแบบนอนมินนิมัมเฟสที่ถูก

กล่าวใน Benveniste และ Goursat (1984) ได้ ด้วยเหตุนี้ข้อมูลที่ถูกนำมาใช้จึงควรมีคุณสมบัติแบบนอนเกาซเซียน (Non-Gaussian)

**2.2 อัลกอริทึมซาโต**

อัลกอริทึมซาโต (Sato Algorithm : SA) ถูกนำเสนอโดย Sato (1975) ถือว่าเป็นอัลกอริทึมสำหรับอีควาไลเซชันแบบบอดรุ่นแรก แต่เดิมอัลกอริทึมซาโตใช้สำหรับการทำอีควาไลเซชันแบบบอดสำหรับสัญญาณแบบ 1 มิติที่มีหลายระดับ (M-ary Pulse Amplitude Moduated (PAM) Signal) ซึ่งจุดมุ่งหมายคือ อัลกอริทึมที่หยืดหยุ่นกว่าการใช้อัลกอริทึมดีซิสชันไดเรคเต็ด เริ่มแรกอัลกอริทึมจะดำเนินการกับผลลัพธ์ของอีควาไลเซอร์เหมือนว่าสัญญาณมีลักษณะแบบไบนารี่ (Binary) โดยการประมาณค่าของโมสไซนิฟิแคนท์บิต (Most Significant Bit) (บิตที่เหลือถือว่าเป็นสัญญาณรบกวน) โดยใช้แนวทางที่ได้กล่าวมา อัลกอริทึมซาโตทำการปรับแต่งรูปแบบสัญญาณที่ผิดพลาดที่ใช้ในอัลกอริทึมดีซิสชันไดเรคเต็ดแบบมาตรฐาน

อัลกอริทึมซาโตพยายามที่จะลดค่าคอสท์ฟังก์ชันตามสมการ

$$J_{SATO}(n) = E\left[ \left\{ \; y(n) - \gamma \cdot \mathrm{sgn}(y(n)) \; \right\}^2 \right] \tag{2.19}$$

โดยที่ค่าของ $\gamma$ หาจากสมการ

$$\gamma = \frac{E\left[ \; s^2(n) \; \right]}{E\left[ \; |s(n)| \; \right]} \tag{2.20}$$

สมการที่ใช้ในการปรับค่าสัมประสิทธิ์ของอีควาไลเซอร์ด้วยอัลกอริทึมซาโตมีลักษณะดังนี้

$$c_{n+1} = c_n - \alpha \cdot \left\{ y(n) - \gamma \cdot \mathrm{sgn}(y(n)) \right\} \cdot x(n) \tag{2.21}$$

จากสมการที่ (2.21) ค่าของ $\gamma \cdot \mathrm{sgn}(y(n))$ ทำหน้าที่ในการประมาณค่า $s(n)$ ซึ่งมีความเป็นไปได้ทั้งหมด $M$ ค่า

จากกรณีข้างต้น ฟังก์ชันที่ทำหน้าที่เป็นฟังก์ชันแบบไม่เป็นเส้นตรง $g(\cdot)$ คือ

$$g(y(n)) = \gamma \cdot \mathrm{sgn}(y(n)) \tag{2.22}$$

สามารถสังเกตได้ว่า ลักษณะของสมการที่ (2.22) มีหน้าตาคล้ายคลึงกับสมการที่ใช้ในอัลกอริทึมดีซิสชันไดเรคเต็ด สำหรับสัญญาณแบบไบนารี่พีเอเอม (Binary PAM) ยกเว้นค่าของ $\gamma$ ซึ่งในที่นี้มีค่าขึ้นอยู่กับลักษณะคอนสเตลเลชันของข้อมูลที่ใช้ในการส่ง

**2.3 อัลกอริทึมเจนเนอรอลไลส์ซาโต**

Benveniste และ Goursat (1984) ได้นำเสนออัลกอริทึมเจนเนอรอลไลส์ซาโต (Generalized Sato Algorithm : GSA) ซึ่งเป็นอัลกอริทึมที่เป็นโครงสร้างหลักของอัลกอริทึมซาโต [8] สำหรับลักษณะข้อมูลที่เป็นจำนวนคอมเพลกส์ในอัลกอริทึมเจนเนอรอลไลส์ซาโตนั้น ค่าของฟังก์ชัน ผิดพลาด (Error Function) ถูกออกแบบขึ้นมาจากค่าผลลัพธ์ของอีควาไลเซอร์ที่ถูกควันไตส์เซชัน (Quantization) เพื่อที่จะใช้ในการแสดงตำแหน่งของควาดแตนท์ (Quadrant) ที่ข้อมูลอยู่ รูปแบบการแสดงนี้ ใช้แทนที่ค่าที่ต้องการ ด้วยเหตุนี้ อัลกอริทึมเจนเนอรอลไลส์ซาโตสำหรับการทำอีควาไลเซชันแบบบอดนั้น พยายามที่จะลดค่าของคอสท์ฟังก์ชันตามสมการ

$$J_{GSA}(n) = E\left[\left|\, y(n) - R_{GSA}\cdot c\,\mathrm{sgn}(y(n)) \,\right|^2\right] \tag{2.23}$$

ในที่นี้ฟังก์ชัน $c\,\mathrm{sgn}$ แทนฟังก์ชันไซน์แบบคอมเพลกส์ (Complex Sign) ถูกกำหนดให้มีลักษณะดังนี้

$$c\,\mathrm{sgn}(x_R + j\cdot x_I) = \mathrm{sgn}(x_R) + j\cdot \mathrm{sgn}(x_I) \tag{2.24}$$

เช่นเดียวกับสมการที่ (2.21) โดยการใช้สโตคาสติคกราเดียนของสมการที่ (2.23) เราจะได้สมการที่ใช้ในการปรับค่าสัมประสิทธิ์ของอีควาไลเซอร์ดังนี้

$$c_{n+1} = c_n - \alpha\cdot\{\, y(n) - R_{GSA}\cdot c\,\mathrm{sgn}(y(n))\}\cdot x^*(n) \tag{2.25}$$

โดยฟังก์ชันที่ใช้เป็นฟังก์ชันแบบไม่เป็นเส้นตรง $g(\cdot)$ สำหรับอัลกอริทึมเจนเนอรอลไลส์ซาโต ในกรณีที่เป็นรูปมาตรฐาน $e(n) = y(n) - g(y(n))$ คือ

$$g(y(n)) = R_{GSA}\cdot c\,\mathrm{sgn}(y(n)) \tag{2.26}$$

เพื่อที่จะคำนวณค่าของ $R_{GSA}$ นั้นจำเป็นต้องพิจารณาเมื่อสมการที่ (2.25) เข้าหาจุดสมดุลย์ เราจะได้

$$E\left[\ (y(n) - R_{GSA} \cdot c\,\mathrm{sgn}(y(n))) \cdot x^*(n)\ \right] = 0 \tag{2.27}$$

ซึ่งค่า $R_{GSA}$ เป็นค่าคงที่ที่ใช้ในการกำหนดค่าขนาดของผลลัพธ์เมื่อระบบเข้าสู่จุดสมดุล ในกรณีค่าผลลัพธ์ของอีควาไลเซอร์ลู่เข้าหาค่า $s(n)$ เราสามารถแทนค่า $y(n) = s(n)$ ในสมการที่ (2.27) สมมุติให้ส่วนที่เป็นจำนวนจริงและส่วนที่เป็นจำนวนจินตภาพของ $s(n)$ มีคุณสมบัติเป็นอิสระและไม่เกี่ยวข้องต่อกันและกันทำให้เราสามารถคำนวณค่า $R_{GSA}$ ได้จากสมการ

$$R_{GSA} = \frac{E\left[\ s_R^2(n)\right]}{E\left[\ |s_R(n)|\right]} = \frac{E\left[\ s_I^2(n)\right]}{E\left[\ |s_I(n)|\right]} \tag{2.28}$$

**2.4 อัลกอริทึมรีดิวคอนสเตลเลชัน**

อัลกอริทึมรีดิวคอนสเตลเลชัน (Reduced Constellation Algorithm : RCA) ถูกนำเสนอโดย Godard และ Thirion (1980) เราสามารถพิจารณาให้เป็นส่วนขยายของอัลกอริทึมเจนเนอรอลไลส์ซาโต ซึ่งอัลกอริทึมรีดิวคอนสเตลเลชันพยายามทำอีควาไลเซชันช่องสัญญาณ โดยการหาค่าสัมประสิทธิ์ของอีควาไลเซอร์ที่ลดค่าของคอสท์ฟังก์ชันตามสมการ

$$J_{RCA}(n) = E\left[\ \left|\ y(n) - \hat{b}(n)\ \right|^2\right] \tag{2.29}$$

โดยที่ $\hat{b}(n)$ แทนค่าที่เกิดจากการลดจำนวนจุดบนคอนสเตลเลชันของข้อมูลที่อยู่ใกล้ $y(n)$ อีควาไลเซอร์จะถูกสอนโดยการตรวจหาข้อมูลที่อยู่บนบริเวณที่เกิดจากการรีดิวคอนสเตลเลชัน ซึ่งเกิดจากการลดจำนวนของจุดที่เป็นคอนสเตลเลชันของข้อมูลที่ใช้ในการส่ง และโดยการปรับค่าสัมประสิทธิ์ของอีควาไลเซอร์ตามทิศทางที่ถูกกำหนดโดยสัญญาณที่ผิดพลาด ที่คำนวณจากผลที่ได้รับจากการตรวจบนพื้นที่ของรีดิวคอนสเตลเลชัน

หนึ่งในกลุ่มอัลกอริทึมรีดิวคอนสเตลเลชันที่ถูกนำเสนอโดย Godard และ Thirion (1980) จุดที่ได้จากการลดจุดของ Constellation นั้นสามารถหาได้จาก การนำบริเวณของคอนสเตลเลชันมาแบ่งออกเป็น $L$ กลุ่ม $S_l, l = 1,2,\ldots\ldots,L$ และจุดที่ได้จากกลุ่มแต่ละกลุ่ม $\hat{b} = b_l$ หาจากความสัมพันธ์

$$b_l = \frac{\sum_{k \in S_l} |s_k|^2}{\left(\sum_{k \in S_l} s_k\right)^*} \quad , \text{ สำหรับ } l = 1,2,\ldots\ldots,L \tag{2.30}$$

โดยที่ $s_k$ คือจุดข้อมูลที่อยู่ในกลุ่มของ $S_l$ สามารถจะพิจารณาให้อัลกอริทึมเจนเนอรอลไลส์ซาโตเป็นอัลกอริทึมกรณีพิเศษของอัลกอริทึมรีดิวคอนสเตลเลชัน ซึ่งให้ค่า $L = 4$ และ

$$\hat{b}(n) = R_{GSA} \cdot c\,\mathrm{sgn}(y(n)) \tag{2.31}$$

โดยที่

$$R_{GSA} = \frac{E\left[\ s_R^2(n)\right]}{E\left[\ |s_R(n)|\right]} = \frac{E\left[\ s_I^2(n)\right]}{E\left[\ |s_I(n)|\right]} \tag{2.32}$$

ลักษณะของคอนสเตลเลชันและรีดิวคอนสเตลเลชันพอยท์ (Reduced Constellation Point) ของอัลกอริทึมรีดิวคอนสเตลเลชัน เมื่อ

$$\hat{b}(n) = R \cdot c\,\mathrm{sgn}(y(n)) \tag{2.33}$$

และ

$$R = \frac{E\left[\ s_R^2(n)\right]}{E\left[\ |s_R(n)|\right]} = \frac{E\left[\ s_I^2(n)\right]}{E\left[\ |s_I(n)|\right]} \tag{2.34}$$

กรณีสัญญาณข้อมูลแบบ 64-QAM สามารถพิจารณาตัวอย่างได้ในรูปที่ 2.4

สำหรับสมการที่ใช้ในการปรับค่าสัมประสิทธิ์ของอีควาไลเซอร์เป็นไปตามสมการ

$$c_{n+1} = c_n - \alpha \cdot e(n) \cdot x^*(n) \tag{2.35}$$

โดยที่ค่าของสัญญาณที่ผิดพลาด $e(n)$ หาจากกระบวนการตรวจวัดบนจุดของรีดิวคอนสเตลเลชัน จาก Godard และ Thirion (1980)

$$e(n) = y(n) - \hat{b}(n) \tag{2.36}$$

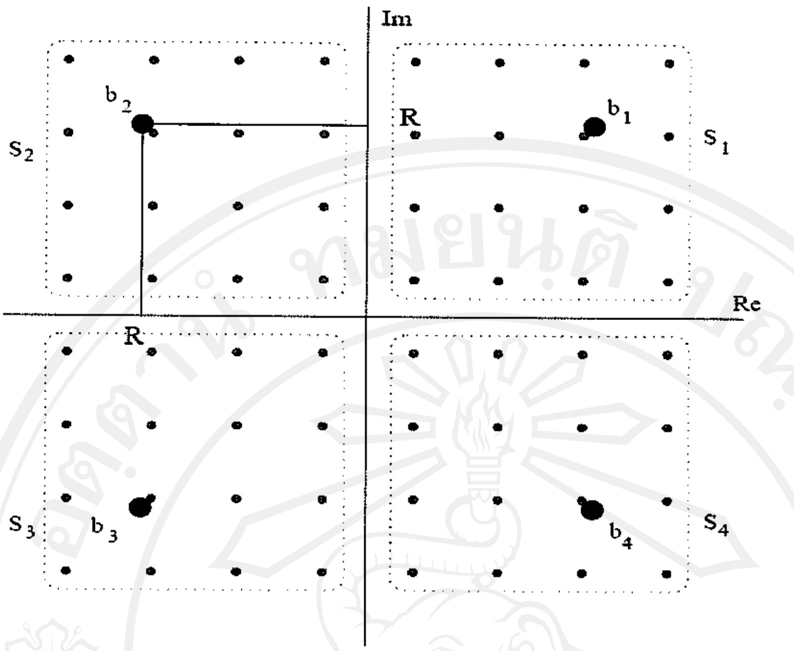
และเมื่ออีควาไลเซอร์ลู่เข้าหาจุดสมดุลย์ เราจะได้

$$E\left[ \left(y(n) - \hat{b}(n)\right) \cdot x^*(n) \right] = 0 \tag{2.37}$$

**2.5 อัลกอริทึมคอนแสตนมอดดูลัส**

อัลกอริทึมคอนแสตนมอดดูลัส (Constant Modulus Algorithm : CMA) เป็นอัลกอริทึมสำหรับอีควาไลเซชันแบบบอดนิยมใช้กันมากที่สุด ซึ่ง Godard (1980) (หรือเรียกโดยรวมว่า อัลกอริทึมก๊อดดาร์ด (Godard Algorithm : GA )) เป็นคนที่แรกที่นำเสนออัลกอริทึมที่ใช้กับระบบสื่อสารสัญญาณแบบดิจิตอลขนาด 2 มิติ ที่มีขนาดมอดดูลัสคงที่ อัลกอริทึมคอนแสตนมอดดูลัสแบบมาตรฐานยังถูกค้นพบโดย Treichler และ Agee (1983) ถูกจัดให้เป็นอัลกอริทึมกรณีพิเศษของอัลกอริทึมก๊อดดาร์ด แนวคิดของอัลกอริทึมคอนแสตนมอดดูลัสมีรูปแบบที่ง่ายต่อการเข้า (สัญญาณที่อยู่ในกลุ่มของคอนแสตนมอดดูลัส เช่น สัญญาณข้อมูลแบบ PSK เนื่องจากลักษณะของคอนสเตลเลชันมีขนาดที่คงที่ทุกๆ สัญญาณ ในการบังคับผลลัพธ์ของอีควาไลเซอร์ให้เข้าหาบริเวณที่ขนาดถูกต้อง กลายเป็นอัลกอริทึมสำหรับอีควาไลเซชันช่องสัญญาณ เมื่อลักษณะของสัญญาณมีค่ามอดดูลัสคงที่ ถึงอย่างไรก็ตาม อัลกอริทึมนี้ถูกขยายผลไปใช้กับสัญญาณที่มีขนาดของมอดดูลัสไม่คงที่เช่น ลักษณะของคอนสเตลเลชันที่เป็นสัญญาณข้อมูลแบบ QAM การบังคับค่าผลลัพธ์ของอีควาไลเซอร์ให้มีขนาดคงที่ถูกนำมาใช้เป็นคอสท์ฟังก์ชัน สำหรับอัลกอริทึมก๊อดดาร์ด สมการคอสท์ฟังก์ชันสำหรับอัลกอริทึมก๊อดดาร์ดมีดังนี้

$$J_{GA}(n) = E\left[ \left( |y(n)|^p - R_p \right)^2 \right] \tag{2.38}$$




**รูปที่ 2.4** ลักษณะจุดที่ค่าผิดพลาดมีค่าเท่ากับศูนย์ของรีดิวคอนสเตลเลชันพอยท์สำหรับสัญญาณข้อมูลแบบ 64-QAM

โดยให้ ค่าคงที่ของอัลกอริทึมก๊อดดาร์ดสามารถหาได้จากสมการ

$$R_p = \frac{E\left[\ |s(n)|^{2p}\right]}{E\left[\ |s(n)|^{p}\right]} \tag{2.39}$$

ซึ่งมีหน้าที่ในการกำหนดขนาดผลลัพธ์ของอีควาไลเซอร์เช่นเดียวกับค่าของ $\gamma$ ในสมการที่ (2.20) ของอัลกอริทึมซาโตถูกนำมาใช้ในการนอมอลไลส์เซชัน (Normalization) ค่าผลลัพธ์ของอีควาไลเซอร์ในกรณีพิเศษ เมื่อเรากำหนดให้

$$R_1 = \frac{E\left[\ |s(n)|^{2}\right]}{E\left[\ |s(n)|\ \right]} \tag{2.40}$$

ในสมการที่ (2.39) เราสามารถพิจารณาอัลกอริทึมนี้ให้เป็นอัลกอริทึมซาโตได้ เนื่องจากเรามีความสัมพันธ์สำหรับจำนวนจริง ซึ่งถูกกล่าวโดย Thaiupathump (2002)

$$J_{GA,p=1}(n) = E\left[ \left( |y(n)| - R_1 \right)^2 \right] \tag{2.41}$$

$$= E\left[ \left( y(n).\mathrm{sgn}(y(n)) - R_1 \right)^2 \right] \tag{2.42}$$

$$= E\left[ \left( y(n) - R_1 \cdot \mathrm{sgn}(y(n)) \right)^2 \right] = J_{SATO}(n) \tag{2.43}$$

ในรูปที่ 2.5 จะแสดงให้เห็นถึงบริเวณที่ค่าของ $J_{GA}(n)$ มีค่าเท่ากับศูนย์ (Zero-Error Contour) ซึ่งมีลักษณะเป็นวงกลม เราสามารถพิจารณาการทำงานของอัลกอริทึมก๊อดดาร์ด ได้จากรูปที่ 2.5 อัลกอริทึมก๊อดดาร์ด จะพยายามบังคับให้ค่าผลลัพธ์ของอีควาไลเซอร์เกาะกลุ่มกันบริเวณเส้นวงกลม เพราะฉะนั้น ในการที่จะลดค่าคอสท์ฟังก์ชันของอัลกอริทึมก๊อดดาร์ด จึงมีค่าเท่ากับการพยายามที่จะลดขนาดของความเสื่อมทางขนาดผลลัพธ์ของอีควาไลเซอร์ ซึ่งเกิดจากช่องสัญญาณ สมการที่ใช้ในการปรับค่าสัมประสิทธิ์ของอีควาไลเซอร์สำหรับอัลกอริทึมก๊อดดาร์ดมีลักษณะดังนี้

$$c_{n+1} = c_n - \alpha \cdot y(n) \cdot |y(n)|^{p-2} \cdot \left( |y(n)|^p - R_p \right) \cdot x^*(n) \tag{2.44}$$

จากลักษณะคอสท์ฟังก์ชันของอัลกอริทึมก๊อดดาร์ดที่ถูกกำหนดไว้ที่สมการที่ (2.38) การปรับค่าสัมประสิทธิ์ของอีควาไลเซอร์ด้วยอัลกอริทึมก๊อดดาร์ดนั้นไม่มีความพยายามที่จะค้นหาเฟส ของสัญญาณที่เปลี่ยนแปลงไป ด้วยเหตุนี้อัลกอริทึมนี้จึงมีแนวโน้มเข้าถึงจุดสมดุลช้า ถึงอย่างไรก็ตาม อัลกอริทึมก๊อดดาร์ดได้แยกปัญหาการกำจัดผลกระทบของอินเตอร์ซิมโบลอินเตอร์เฟียเรนซ์ ออกจากปัญหาการค้นหาเฟสที่เปลี่ยนแปลง

อัลกอริทึมคอนแสตนมอดดูลัสเป็นอัลกอริทึมกรณีพิเศษของอัลกอริทึมก๊อดดาร์ด ซึ่งลักษณะคอสท์ฟังก์ชันของอัลกอริทึมคอนแสตนมอดดูลัส แบบเดิมนั้นคืออัลกอริทึมก๊อดดาร์ด ที่เรากำหนดให้ค่า $p = 2$ ในสมการที่ (2.38)

$$J_{CMA}(n) = E\left[ \left( |y(n)|^2 - R_{CMA}^2 \right)^2 \right] \tag{2.45}$$

โดยที่

$$R^2_{CMA} = \frac{E\left[\ |s(n)|^4\right]}{E\left[\ |s(n)|^2\right]} \tag{2.46}$$

หลังจากนั้นได้มีการค้นพบคอสท์ฟังก์ชันที่รวมเอาสมการที่ (2.45) เป็นกรณีพิเศษ ซึ่งถูกค้นพบโดย Larimore และ Treichler [10]

$$J_{CMA,p-q}(n) = E\left[\ \left(\ |y(n)|^p - R^p_{CMA,\,p-q}\ \right)^q\right] \tag{2.47}$$

ให้ $p$ และ $q$ เป็นจำนวนเต็มที่มีค่าเป็นบวกเสมอ สมการที่ (2.47) ถูกให้ชื่อว่า อัลกอริทึมคอนแสตนมอดดูลัสแบบ p-q โดยปกติแล้วค่าของ $p$ และ $q$ จะถูกกำหนดให้มีค่าระหว่าง 1 กับ 2 เป็นผลให้เราได้รับแนวทาง 4 วิธีที่ใช้ในการปรับค่าสัมประสิทธิ์ของอีควาไลเซอร์แต่อัลกอริทึมที่นิยมใช้กันมากที่สุดคือ อัลกอริทึมคอนแสตนมอดดูลัสแบบ 2-2

$$J_{CMA,2-2}(n) = E\left[\ \left(\ |y(n)|^2 - R^2_{CMA,2-2}\ \right)^2\right] \tag{2.48}$$

สำหรับสมการที่ใช้ในการปรับค่าสัมประสิทธิ์ของอีควาไลเซอร์ด้วยวิธีสโตคาสติคกราเดียนของสมการที่ (2.48) มีลักษณะตามสมการ

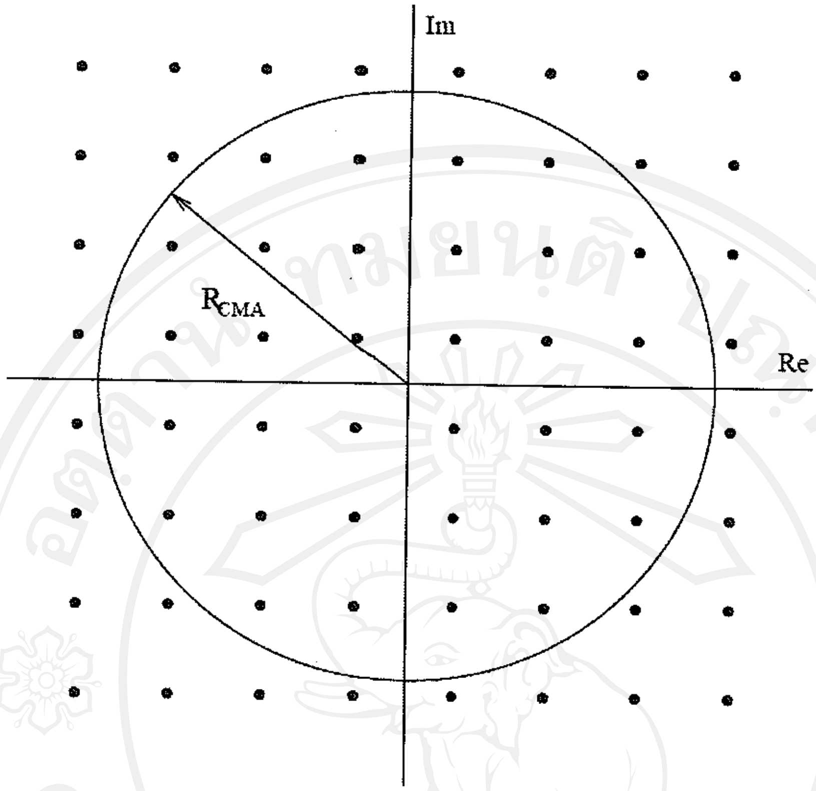
$$c_{n+1} = c_n - \alpha \cdot y(n) \cdot \left(|y(n)|^2 - R^2_{CMA}\right) \cdot x^*(n) \tag{2.49}$$

ในสมการนี้ ค่าที่เป็นสัญญาณที่ผิดคือ

$$e(n) = y(n) \cdot \left(|y(n)|^2 - R^2_{CMA}\right) \tag{2.50}$$

และฟังก์ชันที่ไม่เป็นเส้นตรงในรูปแบบมาตรฐาน $e(n) = y(n) - g(y(n))$ คือ

$$g(y(n)) = y(n) \cdot \left(1 + R^2_{CMA} - |y(n)|^2\right) \tag{2.51}$$




**รูปที่ 2.5** ลักษณะโครงร่าง (Contour) ที่ค่าคอสท์ฟังก์ชัน
ของอัลกอริทึมก๊อดดาร์ดเท่ากับศูนย์ [4]

## 2.6 อัลกอริทึมมัลติมอดดูลัส

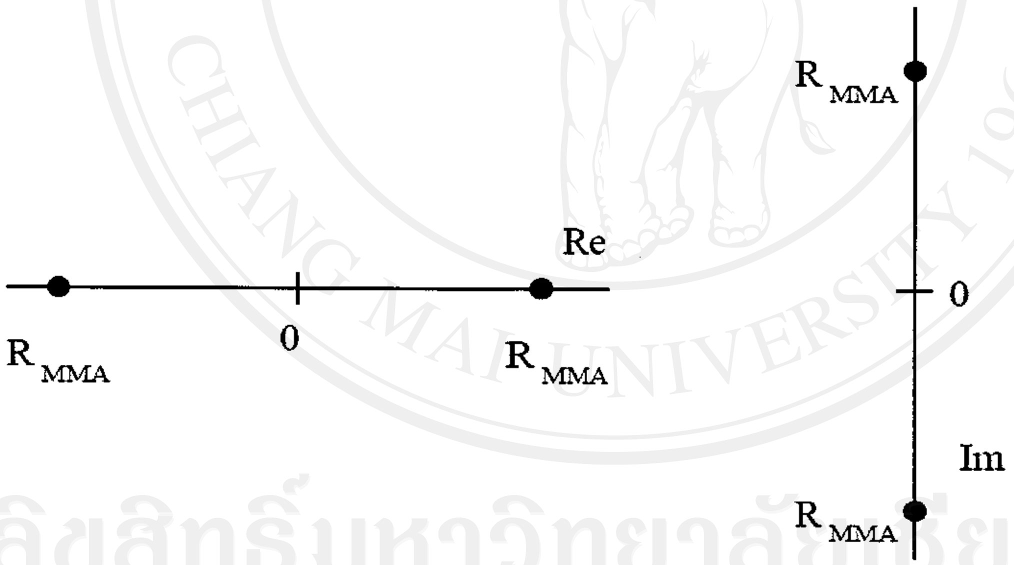
อัลกอริทึมมัลติมอดดูลัส (Multimodulus Algorithm : MMA) ถูกนำเสนอโดย Yang et al. (1997 และ 2002) แนวคิดของอัลกอริทึมมัลติมอดดูลัส คือ การรวมข้อดีที่มีอยู่ในอัลกอริทึมรีดิวคอนสเตลเลชันและอัลกอริทึมคอนแสตนมอดดูลัส ถึงแม้ว่าอัลกอริทึมรีดิวคอนสเตลเลชันนั้นจะง่ายต่อการนำไปใช้งานจริง แต่อัลกอริทึมนี้จะให้ผลที่ผิดพลาดในบางกรณีที่ทำงานร่วมกับอีควาไลเซอร์แบบแบ่งเฟส (Phase Splitting Equalizer) ขณะที่อัลกอริทึมคอนแสตนมอดดูลัส ไม่ลู่เข้าหาผลที่ผิดพลาดเช่นเกิดขึ้นกับอัลกอริทึมรีดิวคอนสเตลเลชัน แต่อัลกอริทึมคอนแสตนมอดดูลัสนั้นจะไม่สนใจเฟสของสัญญาณที่เปลี่ยนไป สำหรับอัลกอริทึมมัลติมอดดูลัสที่ถูกนำเสนอโดย Yang et al. (1997 และ 2002) นั้น เชื่อถือกันว่าสามารถลู่เข้าหาคำตอบได้อย่างถูกต้อง และไม่มีความจำเป็นต้องการอุปกรณ์ประมาณค่าของเฟสที่เปลี่ยนแปลงไป นอกจากนี้ Yang et al. (1997 และ 2002) ยังกล่าวไว้ว่า อัลกอริทึมมัลติมอดดูลัสมีคุณสมบัติที่หยืดหยุ่นกว่า

อัลกอริทึมรีดิวคอนสเตลเลชัน และอัลกอริทึมคอนแสตนมอดดูลัส ซึ่งสามารถใช้ข้อมูลทางสถิติของลักษณะคอนสเตลเลชันของสัญญาณ (เช่น สัญญาณที่มีลักษณะคอนสเตลเลชันที่ไม่เป็นสี่เหลี่ยม และลักษณะคอนสเตลเลชันที่มีความหนาแน่นสูง ซึ่งอัลกอริทึมรีดิวคอนสเตลเลชันและอัลกอริทึมคอนแสตนมอดดูลัสไม่เหมาะกับลักษณะสัญญาณแบบนี้) ได้อย่างมีประสิทธิภาพ

ในกรณีที่สัญญาณมีลักษณะคอนสเตลเลชันเป็นสี่เหลี่ยมคอสท์ฟังก์ชันของอัลกอริทึมมัลติมอดดูลัส สัญญาณที่มีคอนสเตลเลชันแบบนี้ จะมีลักษณะตามสมการ

$$J_{MMA}(n) = E\left[ \left( |y_R(n)|^p - R^p_{MMA} \right)^2 + \left( |y_I(n)|^p - R^p_{MMA} \right)^2 \right] \qquad (2.52)$$

โดยที่ $p$ เป็นจำนวนเต็มบวกเสมอ และ $y(n) = y_R(n) + j \cdot y_I(n)$ คือผลลัพธ์ที่ได้จากอีควาไลเซอร์สำหรับค่าที่เหมาะสมและนิยมใช้กันคือ $p = 2$ [11, 12] เนื่องจากความสมดุลระหว่างประสิทธิภาพกับความซับซ้อนในการนำไปใช้




**รูปที่ 2.6** อัลกอริทึมมัลติมอดดูลัสพยายามลดการกระจายตัวของผลลัพธ์ที่ได้จากอีควาไลเซอร์ โดยแยกส่วนที่เป็นจำนวนจริงออกจากส่วนของจำนวนจินตภาพ ซึ่งจุดที่เป็นบริเวณใช้กำหนดของขนาดผลลัพธ์คือ $\pm R_{MMA}$

Thaiupathump (2002) แสดงให้เห็นว่า ลักษณะของคอสท์ฟังก์ชันตามอัลกอริทึมมัลติมอดดูลัส (สมการที่ (2.52)) ที่มีค่า $p = 2$ นั้นมีลักษณะคล้ายคลึงกับคอสท์ฟังก์ชันของอัลกอริทึมคอนแสตนมอดดูลัส (สมการที่ (2.48)) ความแตกต่างอยู่ที่คอสท์ฟังก์ชันของอัลกอริทึมมัลติมอดดูลัสส่วนที่เป็นเทอมข้าม (Cross-Term) $2\cdot\left(y_R^2(n) - R_{MMA}^2\right)\cdot\left(y_I^2(n) - R_{MMA}^2\right)$ จะหายไป ด้วยเหตุนี้คอสท์ฟังก์ชันของอัลกอริทึมมัลติมอดดูลัส จึงไม่ใช้อัลกอริทึมที่มีคอสท์ฟังก์ชันเป็น 2 มิติอย่างแท้จริง จึงสามารถแยกผลลัพธ์ของอีควาไลเซอร์ออกเป็นสองส่วนได้ พิจารณาจากรูปที่ 2.6 แสดงให้เห็นถึงลักษณะของการแยกคอสท์ฟังก์ชันออกเป็นสองส่วน

สมการคอสท์ฟังก์ชันของอัลกอริทึมมัลติมอดดูลัสสามารถแยกออกเป็นสองส่วน คือส่วนที่เกี่ยวข้องกับจำนวนจริงกับส่วนที่เกี่ยวข้องกับจำนวนจินตภาพ ดังสมการ

$$J_{MMA}(n) = J_R(n) + J_I(n) \tag{2.53}$$

ฟังก์ชัน $J_R(n)$ และ $J_I(n)$ แทน คอสท์ฟังก์ชันสำหรับส่วนของจำนวนจริงและจำนวนจินตภาพตามของผลลัพธ์จากอีควาไลเซอร์ $y(n) = y_R(n) + j\cdot y_I(n)$ ลำดับ ถูกกำหนดไว้ดังนี้

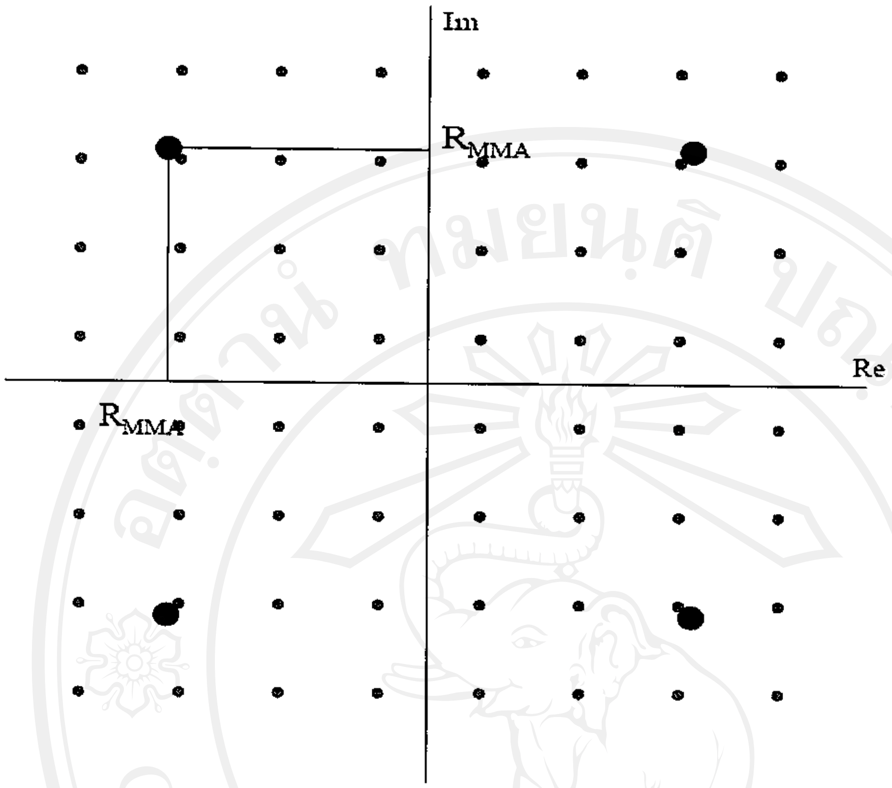
$$J_R(n) = E\left[\left(\left|y_R(n)\right|^p - R_{MMA}^p\right)^2\right] \tag{2.54}$$

$$J_I(n) = E\left[\left(\left|y_I(n)\right|^p - R_{MMA}^p\right)^2\right] \tag{2.55}$$

โดยที่

$$R_{MMA}^p = \frac{E\left[\left|s_R(n)\right|^{2p}\right]}{E\left[\left|s_R(n)\right|^p\right]} = \frac{E\left[\left|s_I(n)\right|^{2p}\right]}{E\left[\left|s_I(n)\right|^p\right]} \tag{2.56}$$

จากคอสท์ฟังก์ชันของอัลกอริทึมมัลติมอดดูลัสตามสมการที่ (2.52) จะเห็นได้ว่า บริเวณที่ค่าของคอสท์ฟังก์ชันเท่ากับศูนย์นั้นคือ จุด $(\pm R_{MMA}, \pm j\cdot R_{MMA})$ บนระนาบคอมเพลกส์สามารถพิจารณาได้จากรูปที่ 2.7 ซึ่งมีลักษณะคล้ายคลึงกับอัลกอริทึมรีดิวคอนสเตลเลชัน




**รูปที่ 2.7** ลักษณะโครงร่างที่ค่าคอสท์ฟังก์ชันของอัลกอริทึมมัลติมอดดูลัสเท่ากับศูนย์

สำหรับสมการที่ใช้ในการปรับค่าสัมประสิทธิ์ตามอัลกอริทึมมัลติมอดดูลัส อธิบายด้วยสมการ

$$c_{n+1} = c_n - \alpha \cdot \hat{\nabla}_c J_{MMA}(n) \tag{2.57}$$
$$= c_n - \alpha \cdot e_{MMA}(n) \cdot x^*(n) \tag{2.58}$$

โดยที่ค่าของสัญญาณที่ผิดพลาด $e_{MMA}(n) = e_R(n) + j \cdot e_I(n)$

$$e_R(n) = y_R(n) \cdot |y_R(n)|^{p-2} \cdot \left(|y_R(n)|^p - R_{MMA}^p\right) \tag{2.59}$$

$$e_I(n) = y_I(n) \cdot |y_I(n)|^{p-2} \cdot \left(|y_I(n)|^p - R_{MMA}^p\right) \tag{2.60}$$

และฟังก์ชันที่ทำหน้าที่เป็นฟังก์ชันแบบไม่เป็นเส้นตรงตามรูปแบบมาตรฐานคือ

$$g(y_R(n)) = \frac{y_R(n)}{|y_R(n)|} \cdot \left( |y_R(n)| + R_{MMA}^{P} \cdot |y_R(n)|^{p-1} - |y_R(n)|^{2p-1} \right) \qquad (2.61)$$

$$g(y_I(n)) = \frac{y_I(n)}{|y_I(n)|} \cdot \left( |y_I(n)| + R_{MMA}^{P} \cdot |y_I(n)|^{p-1} - |y_I(n)|^{2p-1} \right) \qquad (2.62)$$

**2.7 อัลกอริทึมสแควคอนทัวร์**

อัลกอริทึมสแควคอนทัวร์ (Square Contour Algorithm : SCA) นำเสนอโดย Thaiupathump (2002) เป็นแนวทางหนึ่งที่สามารถรวมข้อดีที่มีอยู่ในอัลกอริทึมรีดิวคอนสเตลเลชันและอัลกอริทึมคอนแสตนมอดดูลัสเข้าด้วยกัน ที่มาของอัลกอริทึมสแควคอนทัวร์ คือการพิจารณาส่วนที่ค่าคอสท์ฟังก์ชันเป็นศูนย์ สำหรับอัลกอริทึมคอนแสตนมอดดูลัสมีลักษณะเป็นวงกลม และส่วนที่ค่าคอสท์ฟังก์ชันเป็นศูนย์ สำหรับอัลกอริทึมรีดิวคอนสเตลเลชันมีลักษณะเป็นจุด ผลที่ได้คือการทำให้ผลลัพธ์จากอีควาไลเซอร์เกาะกลุ่มกันบริเวณของเส้นสี่เหลี่ยม และเมื่อเราพิจารณาสมการสี่เหลี่ยม ในระนาบ $x_1 x_2$

$$\max\{|x_1|,|x_2|\} = R \qquad (2.63)$$

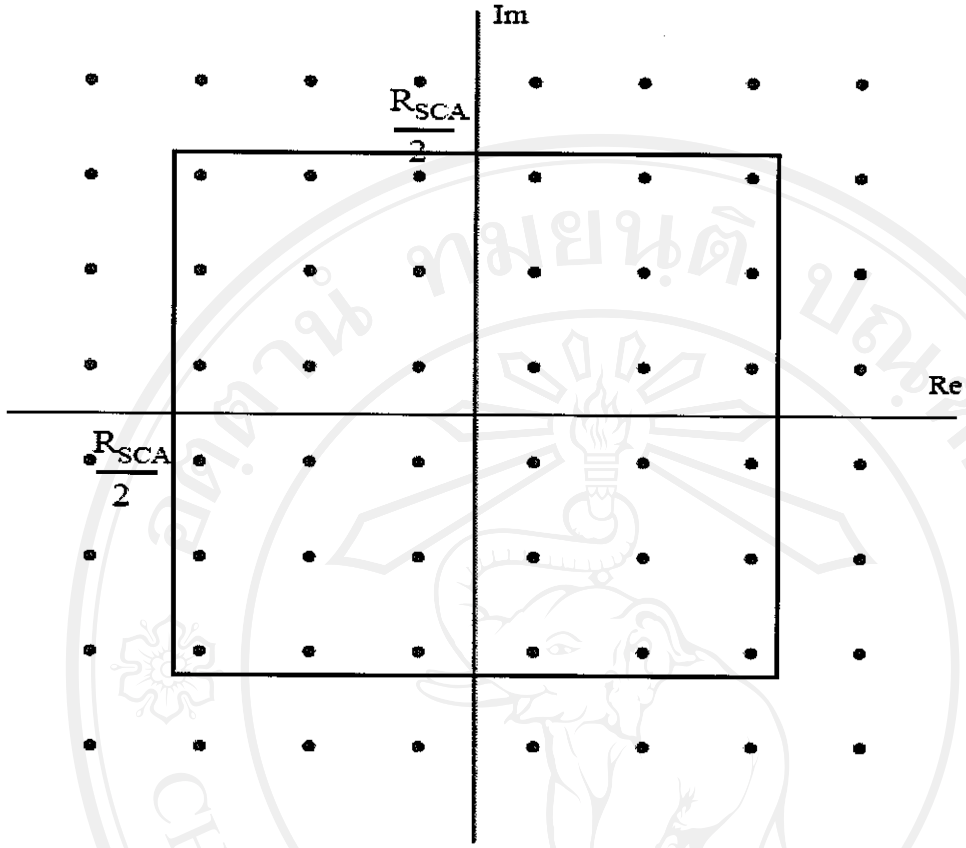
ทำการปรับสมการเพื่อที่จะให้ง่ายต่อการใช้หากราเดี่ยน

$$\max\{|x_1|,|x_2|\} = \frac{|x_1 + x_2| + |x_1 - x_2|}{2} = R \qquad (2.64)$$

ผลที่ได้จากมาสมการที่ (2.64) คือสมการที่ใช้เป็นคอสท์ฟังก์ชันในระนาบคอมเพลกส์ตามอัลกอริทึมสแควคอนทัวร์ มีลักษณะดังนี้ [4] (พิจารณาลักษณะของโครงร่างได้จากรูปที่ 2.8)

$$J_{SCA}(n) = E\left[ \left( |y_R(n) + y_I(n)| + |y_R(n) - y_I(n)| - R_{SCA} \right)^2 \right] \qquad (2.65)$$

ด้วยเหตุที่คอสท์ฟังก์ชันของอัลกอริทึมสแควคอนทัวร์นั้นใช้ข้อมูลของมอดดูลัส และเฟสทำให้อัลกอริทึมนี้ สามารถที่จะทำอีควาไลเซชันแบบบอดไปพร้อมกับการหาเฟสที่เปลี่ยนแปลงไป




**รูปที่ 2.8** ลักษณะโครงร่างที่ค่าคอสท์ฟังก์ชันของอัลกอริทึมสแควคอนทัวร์เท่ากับศูนย์

สำหรับสมการที่ใช้ในการปรับค่าสัมประสิทธิ์ตามอัลกอริทึมสแควคอนทัวร์อธิบายด้วยสมการ

$$c_{n+1} = c_n - \alpha \cdot \hat{\nabla}_c J_{SCA}(n) \tag{2.66}$$

$$= c_n - \alpha \cdot e_{SCA}(n) \cdot x^*(n) \tag{2.67}$$

โดยที่ค่าของสัญญาณที่ผิดพลาด $e_{SCA}(n) = e_R(n) + j \cdot e_I(n)$

$$\begin{aligned} e_R(n) = &\left( \left| y_R(n) + y_I(n) \right| + \left| y_R(n) - y_I(n) \right| - R_{SCA} \right) \\ &\cdot \left( \operatorname{sgn}\left(y_R(n) + y_I(n)\right) + \operatorname{sgn}\left(y_R(n) - y_I(n)\right) \right) \end{aligned} \tag{2.68}$$

$$\begin{aligned} e_I(n) = &\left( \left| y_R(n) + y_I(n) \right| + \left| y_R(n) - y_I(n) \right| - R_{SCA} \right) \\ &\cdot \left( \operatorname{sgn}\left(y_R(n) + y_I(n)\right) - \operatorname{sgn}\left(y_R(n) - y_I(n)\right) \right) \end{aligned} \tag{2.69}$$

โดยที่

$$R_{SCA} = \frac{E\left[\ \left(\left|s_{R,n} + s_{I,n}\right| + \left|s_{R,n} - s_{I,n}\right|\right)\cdot R'\ \right]}{E\left[\ R'\ \right]} \tag{2.70}$$

ในขณะค่าคงที่ $R'$ ในสมการที่ (2.70) หาได้จากสมการต่อไปนี้

$$R' = \Big\{\ \mathrm{sgn}\left[s_{R,n} + s_{I,n}\right] + \mathrm{sgn}\left[s_{R,n} - s_{I,n}\right] + j\cdot\left(\mathrm{sgn}\left[s_{R,n} + s_{I,n}\right] - \mathrm{sgn}\left[s_{R,n} - s_{I,n}\right]\right)\ \Big\}\cdot s_n^* \tag{2.71}$$

ในบทนี้ เราได้ยกตัวอย่างอัลกอริทึมที่ใช้ทำอีควาไลเซชันที่มีอยู่ในปัจจุบัน จะเห็นได้ว่า อัลกอริทึมคอนแสตนมอดดูลัสและอัลกอริทึมรีดิวคอนสเตลเลชันนั้นได้คลอบคลุมอัลกอริทึมอื่นๆ ในช่วงเวลานั้นให้เป็นกรณีพิเศษของทั้งสองอัลกอริทึม ด้วยเหตุนี้ จึงมีความพยายามมากมายที่ต้องการนำความสามารถของทั้งสองอัลกอริทึมมารวมกัน เช่นที่เราพบในอัลกอริทึมมัลติมอดดูลัส และอัลกอริทึมสแควคอนทัวร์