

### บทที่ 3

#### อัลกอริทึมที่น่าสนใจ : อัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์

สำหรับงานวิจัยนี้จะนำเสนอแนวทางใหม่ ใช้ในการทำอีควาไลเซชันแบบบอด (Blind Equalization) ที่มีชื่อว่า อัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์ (Double-Ellipse Algorithm : DEA) โดยอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์ พยายามรวมข้อดี ที่มีอยู่ในอัลกอริทึมคอนสแตนมอดคูลัส (Constant Modulus Algorithm : CMA) และอัลกอริทึมรีดิวคอนสเทลเลชัน (Reduced Constellation Algorithm : RCA) ไว้ด้วยกัน อัลกอริทึมนี้จะแตกต่างจากอัลกอริทึมมัลติมอดคูลัส (Multimodulus Algorithm : MMA) ตรงที่มีส่วนของเทอมข้าม (Cross-Term) (ส่วนที่ใช้อธิบายความสัมพันธ์ของจำนวนจริงและจำนวนจินตภาพ) และจะแตกต่างจากอัลกอริทึมสแควคอนทัวร์ (Square Contour Algorithm : SCA) ตรงที่ อัลกอริทึมสแควคอนทัวร์จะมีลักษณะโครงร่างของความผิดพลาดที่เท่ากับศูนย์ (Zero-Error Contour) เป็นทรงสี่เหลี่ยม ซึ่งอัลกอริทึมสแควคอนทัวร์สามารถทำงานบนสัญญาณข้อมูลแบบ QAM ได้ดี แต่ให้ผลที่ไม่ดีเมื่อทำงานบนสัญญาณข้อมูลแบบ PSK ในขณะที่อัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์จะเป็นส่วนขยายของอัลกอริทึมคอนสแตนมอดคูลัส แต่ตัวอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์จะรวมเอาอัลกอริทึมคอนสแตนมอดคูลัสเป็นกรณีพิเศษ ซึ่งเราจะอธิบายในขั้นตอนต่อไป ประสิทธิภาพของอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์จะถูกทดสอบบนสัญญาณข้อมูลแบบ 16-QAM, 64-QAM และ 256-QAM ผลที่ได้จะถูกนำไปเปรียบเทียบกับอัลกอริทึมคอนสแตนมอดคูลัสและอัลกอริทึมรีดิวคอนสเทลเลชัน

#### 3.1 ความรู้พื้นฐานของสมการวงรี

เมื่อเราพิจารณาสมการวงรี

$$\frac{(x_1 - x_1')^2}{a} + \frac{(x_2 - x_2')^2}{b} = R \quad (3.1)$$

โดยที่ ค่า  $a$  และ  $b$  แทนขนาดของแกนหลัก (Major Axis) กับแกนรอง (Minor Axis) ของวงรีตามลำดับ ค่า  $R$  ค่าที่ใช้กำหนดจุดศูนย์กลางของวงรี และค่า  $x_1'$  และ  $x_2'$  ใช้กำหนดศูนย์กลางของวงรีในระนาบ 2 มิติ ซึ่งตัวแปร 3 ตัวแรกเป็นตัวแปรที่ใช้ในการกำหนดขนาดของวงรี ในกรณีที่ ค่า  $a$  และ  $b$  คงที่ ค่า  $R$  จะเป็นตัวแปรกำหนดขนาดของวงรี

จากสมการที่ (3.1) เราสามารถหาจุดบนแกนหลักและแกนรองด้วยสมการ

$$x_{Major} = \sqrt{a \cdot \left( R - \frac{(x'_2)^2}{b} \right)} + x'_1 \quad (3.2)$$

$$x_{Minor} = \sqrt{b \cdot \left( R - \frac{(x'_1)^2}{a} \right)} + x'_2 \quad (3.3)$$

และเมื่อเราให้ค่า  $a$  และ  $b$  มีค่าเท่ากับ 1 ผลที่ได้คือ สมการวงกลมทั่วไป

$$(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 = R \quad (3.4)$$

ซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างสมการวงรีกับสมการวงกลมนี้ จะถูกนำมาใช้ในการสร้างความสัมพันธ์ระหว่างอัลกอริทึมคอนสแตนมอดคูลัสและอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์

### 3.2 ที่มาของอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์

จากสมการคอสต์ฟังก์ชัน (Cost Function) ของอัลกอริทึมคอนสแตนมอดคูลัส

$$J_{CMA}(n) = E \left[ \left( |y(n)|^2 - R_{CMA}^2 \right)^2 \right] \quad (3.5)$$

เราสามารถที่จะกระจายส่วนของค่า  $|y(n)|^2$  ให้อยู่ในรูปค่ายกกำลังสองของส่วนที่เป็นจำนวนจริง และจำนวนจินตภาพของผลลัพธ์ที่ได้จากอีควาไลเซอร์(Equalizer) ซึ่งมีลักษณะดังนี้

$$|y(n)|^2 = y_R(n)^2 + y_I(n)^2 \quad (3.6)$$

เมื่อเรานำผลที่ได้จากสมการที่ (3.6) แทนลงในสมการที่ (3.5) ทำให้สมการคอสต์ฟังก์ชันของอัลกอริทึมคอนสแตนมอดคูลัสสามารถจะเขียนให้อยู่ในรูปใหม่ ด้วยสมการ

$$J_{CMA}(n) = E \left[ \left( y_R(n)^2 + y_I(n)^2 - R_{CMA}^2 \right)^2 \right] \quad (3.7)$$

จะพิจารณาได้ว่า สมการที่ (3.7) คือสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่  $(0,0)$  ในระนาบ  $(y_R(n), y_I(n))$  โดยมีรัศมีเท่ากับ  $R_{CMA}^2$

จากสมการที่ (3.7) เมื่อเราเพิ่มค่าคงที่สองค่าลงไปในสมการ กำหนดให้  $R_1$  และ  $R_2$  แทนค่าคงที่ที่เพิ่มลงไปในสมการ โดยที่ค่าคงที่นี้มีค่าที่ไม่เท่ากัน เราจะได้สมการที่ใช้อธิบายวงรี

$$J(n) = E \left[ \left( \frac{y_R(n)^2}{R_1} + \frac{y_I(n)^2}{R_2} - R_{CMA}^2 \right)^2 \right] \quad (3.8)$$

สมการนี้มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่  $(0,0)$  ในระนาบ  $(y_R(n), y_I(n))$  โดยมีตัวแปร  $R_1$  และ  $R_2$  แทนค่าของแกนหลักและแกนรอง การเพิ่มค่าคงที่ให้กับสมการที่ (3.7) นั้น ไม่สามารถเพิ่มประสิทธิภาพใดๆ เราจึงแยกค่าคงที่สองของสมการที่ (3.8) ให้อยู่ในรูปดังนี้

$$J(n) = E \left[ \left( \frac{y_R(n)^2}{R_1} + \frac{y_I(n)^2}{R_2} - R_{CMA}^2 \right) \cdot \left( \frac{y_R(n)^2}{R_1} + \frac{y_I(n)^2}{R_2} - R_{CMA}^2 \right) \right] \quad (3.9)$$

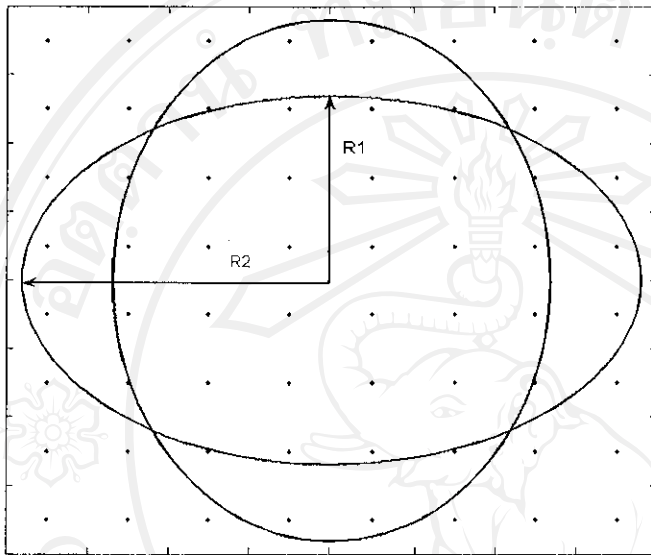
เราพบว่าสมการที่ (3.9) ยังอยู่ในรูปของสมการค่าเฉลี่ยของกำลังสองของความผิดพลาด (Mean Square Error) แต่ในการทำโอควาไลเซชันนั้น เราสามารถพบสมการคอสมอสฟังก์ชันที่ไม่ได้อยู่ในรูปของสมการค่าเฉลี่ยของกำลังสองของความผิดพลาด ตัวอย่างของสมการนี้สามารถพบได้จากผลงานของ Larimore และ Treichler (1983) ซึ่งมีลักษณะสมการคอสมอสฟังก์ชันดังนี้

$$J_{CMA, p-q}(n) = E \left[ \left( |y(n)|^p - R_{CMA, p-q}^p \right)^q \right] \quad (3.10)$$

ให้  $p$  และ  $q$  เป็นจำนวนเต็มที่มีค่าเป็นบวกเสมอ เราพบว่าสมการที่ (3.10) จะไม่ได้อยู่ในรูปของสมการค่าเฉลี่ยของกำลังสองของความผิดพลาดเมื่อค่า  $q$  เท่ากับ 3 เช่นเดียวกันกับกรณีของสมการที่ (3.10) เราจะศึกษาสมการคอสมอสฟังก์ชันที่ไม่ได้อยู่ในรูปของสมการค่าเฉลี่ยของกำลังสองของความผิดพลาด ซึ่งเกิดจากการสลับตำแหน่งของค่าคงที่ในสมการที่ (3.9) โดยสมการใหม่นี้ ภายใต้สมมุติฐานการเป็นอิสระต่อกันของส่วนจำนวนจริงและจินตภาพ เทอมทั้งสองของสมการทำหน้าที่ลดความผิดพลาดของผลลัพธ์บริเวณวงรีตามแกนแนวนอนและแกนแนวตั้ง ลักษณะสมการมีดังนี้

$$J'(n) = E \left[ \left( \frac{y_R(n)^2}{R_1} + \frac{y_I(n)^2}{R_2} - R_{CMA}^2 \right) \cdot \left( \frac{y_R(n)^2}{R_2} + \frac{y_I(n)^2}{R_1} - R_{CMA}^2 \right) \right] \quad (3.11)$$

การลดความผิดพลาดของคอสต์ฟังก์ชันจะเกิดจากการลดขนาดของค่าภายในเทอมทั้งสอง การที่เรา กำหนดให้ส่วนจำนวนจริงและจำนวนจินตภาพมีอยู่ในรูปเทอมข้าม จะทำให้สามารถระบุตำแหน่ง บนระนาบของคอนสเทลเลชัน ลักษณะของโครงสร้างของความผิดพลาดที่เท่ากับศูนย์ของสมการที่ (3.11) นั้น สามารถพิจารณาได้จากรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 ลักษณะของบริเวณที่คอสต์ฟังก์ชันตามอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์มีค่าเท่ากับศูนย์

เราเรียกสมการที่ (3.11) ว่า อัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์ โดยอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์พยายาม จะเพิ่มส่วนที่ใช้ในการระบุเฟส เข้าไปยังสมการคอสต์ฟังก์ชันของอัลกอริทึมคอนสแตนต์มอดคูลัส ลักษณะของการระบุเฟสจะพบในคอสต์ฟังก์ชันที่สามารถหาค่าเฟสได้ รูปที่ 3.2 อธิบายลักษณะ ของโครงสร้างของความผิดพลาดที่เท่ากับศูนย์ที่ไม่สามารถหาค่าเฟสได้ (Phase Blind) แต่โครงสร้าง ของความผิดพลาดที่เท่ากับศูนย์ของอัลกอริทึมสแควคอนทัวร์ และ อัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์มีส่วน ที่ใช้ในการกำหนดเฟสของผลลัพธ์ที่ได้จากอีควาไลเซอร์ (Equalizer) ในทางตรงกันข้าม กรณีที่ เราให้ค่าของ  $R_1$  และ  $R_2$  เท่ากับ 1 เราจะได้สมการคอสต์ฟังก์ชันของอัลกอริทึมคอนสแตนต์มอด คูลัส แต่เมื่อเราพิจารณาอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์ที่ถูกกำหนดด้วยสมการที่ (3.11) เราพบว่า สมการ คอสต์ฟังก์ชันสามารถมีค่าเป็นทั้งลบและบวก เพื่อที่จะให้สมการคอสต์ฟังก์ชันมีค่าบวกเสมอ เรา สามารถทำได้สองวิธี คือ การให้ค่ายกกำลังของเทอมทั้งสองมีค่าเป็นเลขคู่ และอีกวิธีคือการใช้ค่า แอปโซลูท (Absolute) ของเทอมทั้งสอง การทำให้ค่าของคอสต์ฟังก์ชันมีค่าเป็นบวกเสมอนั้น ทำ ให้การทำงานแตกต่างจากการทำงานของอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์ที่ถูกกำหนดไว้ ในสมการที่

(3.11) เนื่องจากการที่ทำให้สมการเป็นบวกเสมอ บริเวณที่ทำให้คอสต์ฟังก์ชันมีค่าต่ำสุด จะอยู่บริเวณเส้นของวงรีทั้งสอง แต่ในกรณีที่เรานุญาตให้สมการคอสต์ฟังก์ชันมีค่าเป็นลบได้ จะทำให้บริเวณที่มีค่าต่ำสุด เป็นค่าลบ คือ บริเวณด้านในวงรีที่ไม่ใช่บริเวณที่ทับกัน (บริเวณส่วนตัดกันตรงกลาง) ซึ่งเราจะกล่าวถึงอีกครั้งในหัวข้อของอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์กับความหมายของค่ายกกำลัง

เราสามารถจัดกลุ่มให้สมการที่ (3.11) เป็นกรณีพิเศษของสมการหลักที่เราให้ชื่อว่า อัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบเจนเนอรัลไลส์ (Generalized Double-Ellipse Algorithm : GDEA) โดยการให้ค่ายกกำลังของเทอมภายในมีค่าเท่ากับ  $p$  (เป็นเลขจำนวนเต็ม)

สมการคอสต์ฟังก์ชันของอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบเจนเนอรัลไลส์มีลักษณะดังนี้

$$J_{GDEA}(n) = E \left[ \left( \frac{y_R^2}{R_1} + \frac{y_I^2}{R_2} - R_{CMA}^2 \right)^p \cdot \left( \frac{y_R^2}{R_2} + \frac{y_I^2}{R_1} - R_{CMA}^2 \right)^p \right] \quad (3.12)$$

เมื่อเราหาอนุพันธ์อันดับที่ 1 ของสมการที่ (3.12) เทียบกับค่าสัมประสิทธิ์ของอีควาไลเซอร์ และประมาณค่าของฟังก์ชันการคาดหมาย (Expectation Function) ด้วยค่าในขณะนั้น เราจะได้สมการที่ใช้ในการปรับค่าสัมประสิทธิ์ตามอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบเจนเนอรัลไลส์ ด้วยวิธีการค้นหาแบบสโตคาสติคกราเดียน (Stochastic Gradient) ดังนี้

$$c_{n+1} = c_n - \alpha \cdot \hat{\nabla}_c J_{GDEA}(n) \quad (3.13)$$

$$= c_n - \alpha \cdot e_{GDEA}(n) \cdot x^*(n) \quad (3.14)$$

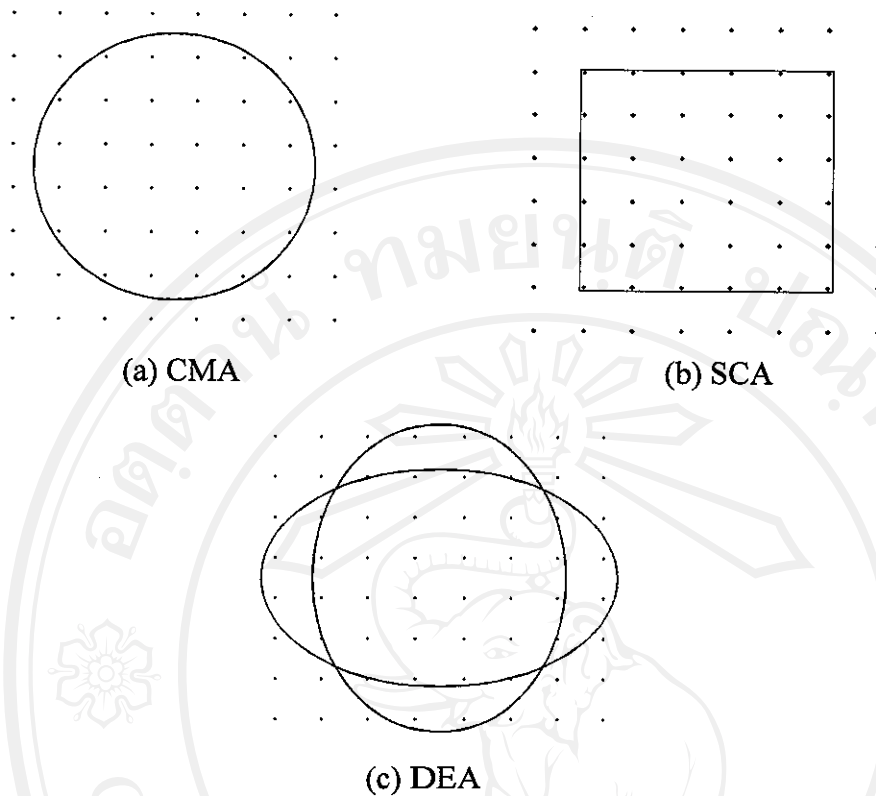
โดยสัญญาณที่ผิดพลาดถูกแบ่งเป็นสองส่วน  $e_{GDEA}(n) = e_{R,GDEA}(n) \cdot y_R + j \cdot e_{I,GDEA}(n) \cdot y_I$

$$e_{R,GDEA}(n) = \left( \frac{y_R^2}{R_1} + \frac{y_I^2}{R_2} - R_{CMA}^2 \right)^{p-1} \cdot \left( \frac{y_R^2}{R_2} + \frac{y_I^2}{R_1} - R_{CMA}^2 \right)^p \cdot \frac{1}{R_1} \quad (3.15)$$

$$+ \left( \frac{y_R^2}{R_1} + \frac{y_I^2}{R_2} - R_{CMA}^2 \right)^p \cdot \left( \frac{y_R^2}{R_2} + \frac{y_I^2}{R_1} - R_{CMA}^2 \right)^{p-1} \cdot \frac{1}{R_2}$$

$$e_{I,GDEA}(n) = \left( \frac{y_R^2}{R_1} + \frac{y_I^2}{R_2} - R_{CMA}^2 \right)^{p-1} \cdot \left( \frac{y_R^2}{R_2} + \frac{y_I^2}{R_1} - R_{CMA}^2 \right)^p \cdot \frac{1}{R_2} \quad (3.16)$$

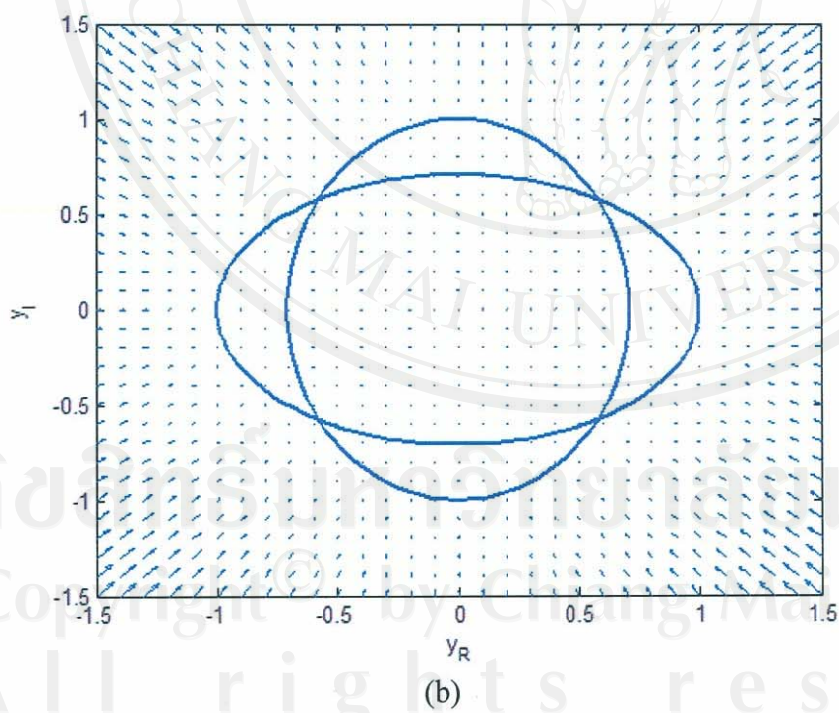
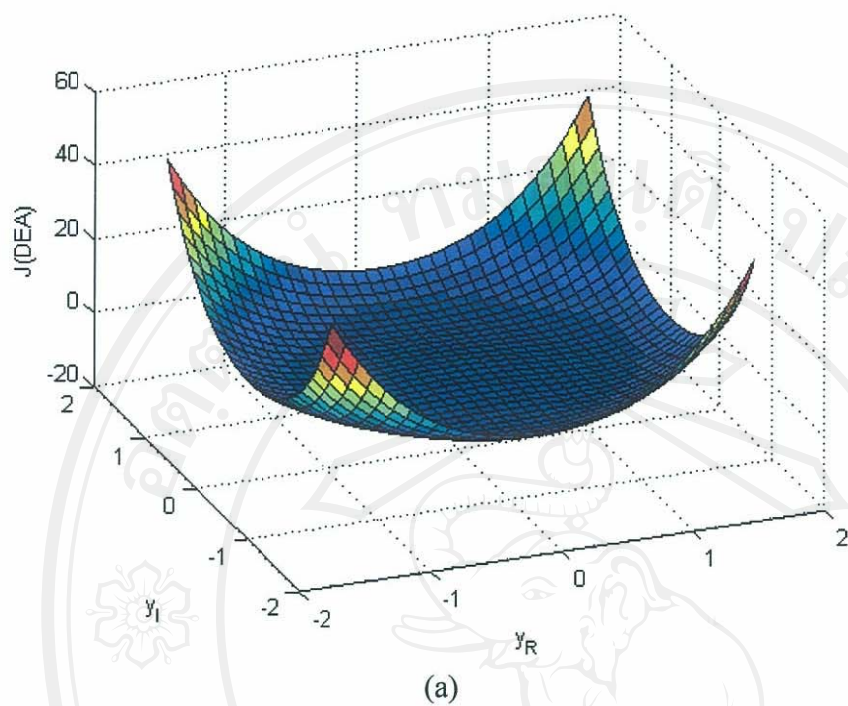
$$+ \left( \frac{y_R^2}{R_1} + \frac{y_I^2}{R_2} - R_{CMA}^2 \right)^p \cdot \left( \frac{y_R^2}{R_2} + \frac{y_I^2}{R_1} - R_{CMA}^2 \right)^{p-1} \cdot \frac{1}{R_1}$$



**รูปที่ 3.2** (a) ลักษณะ โครงร่างของความผิดพลาดที่เท่ากับศูนย์ของอัลกอริทึมคอนสแตนต์มอดคูลัส ที่มีลักษณะของวงกลมจึงไม่สามารถระบุเฟสได้ (b) ลักษณะ โครงร่างของความผิดพลาดที่เท่ากับ ศูนย์ของอัลกอริทึมสแควคอนทัวร์มีส่วนที่ใช้ระบุเฟสคือมุมของสี่เหลี่ยม (c) ลักษณะ โครงร่าง ของความผิดพลาดที่เท่ากับศูนย์ของอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์ที่เพิ่มเติมส่วนของระบุเฟสให้ กับอัลกอริทึมคอนสแตนต์มอดคูลัส

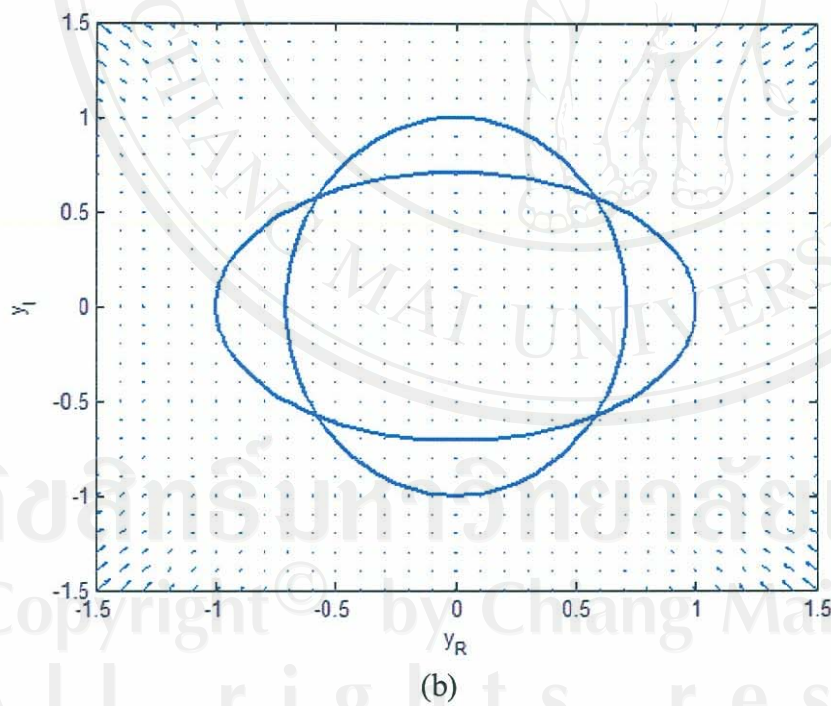
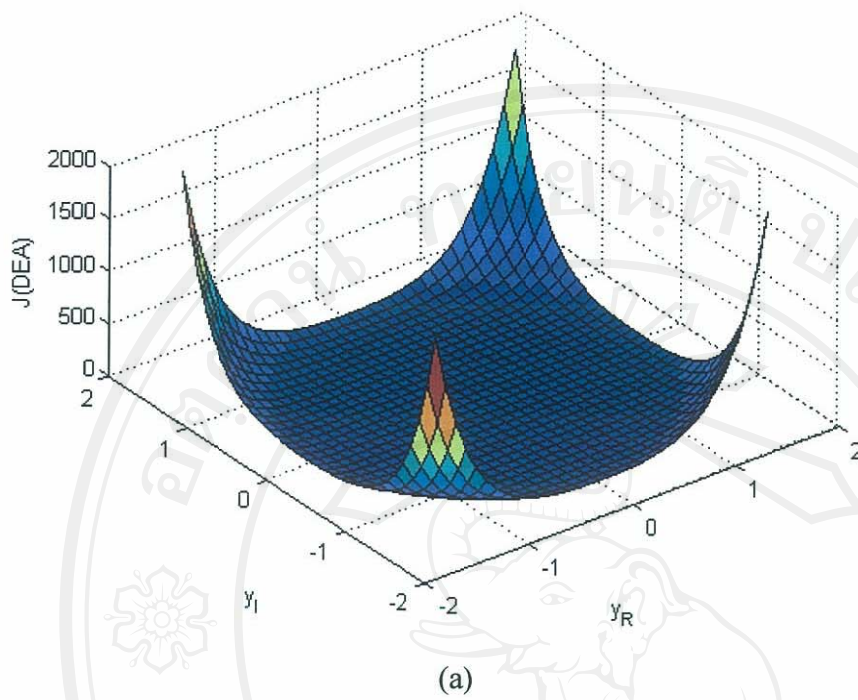
เราสามารถพิจารณาลักษณะ โครงร่างของความผิดพลาดที่เท่ากับศูนย์ และทิศทางของกราเดียนของ สมการคอสท์ฟังก์ชันตามแนวคิดอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบเจนเนอเรลไลส์ ที่จำนวน  $p$  ต่างๆ ได้จากรูปที่ 3.3 ถึงรูปที่ 3.6 สำหรับอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์นั้น ค่า  $p$  มีผลต่อการทำงานของ อัลกอริทึม โดยที่ค่าของ  $p$  เป็นตัวแปรที่ใช้ในการแบ่งการทำงานของอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์ โดยการทำงานของอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์จะถูกแบ่งออกเป็นสองแบบ คือ กรณีที่มีค่า  $p$  เป็นเลข คี่ (1, 3, 5 ....) และกรณีที่ค่า  $p$  เป็นเลขคู่ (2, 4, 6 ....) ซึ่งแต่ละแบบมีคุณสมบัติที่แตกต่างกัน มาก เราจะกล่าวถึงจุดนี้ในหัวข้อต่อไป





รูปที่ 3.3 (a) พื้นผิวของคอสต์ฟังก์ชันของอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์ ที่  $p$  เท่ากับ 1

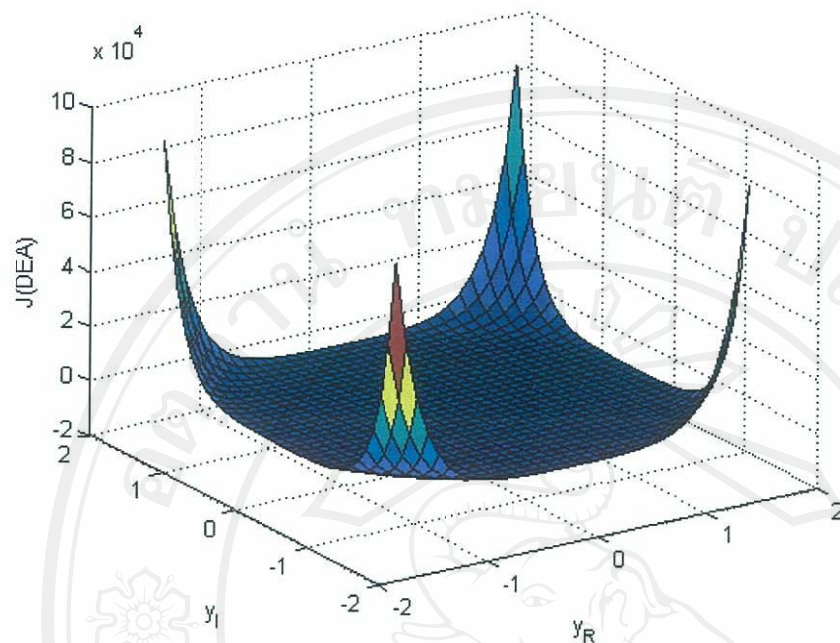
(b) ทิศทางกราเดียนของอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์ ที่  $p$  เท่ากับ 1



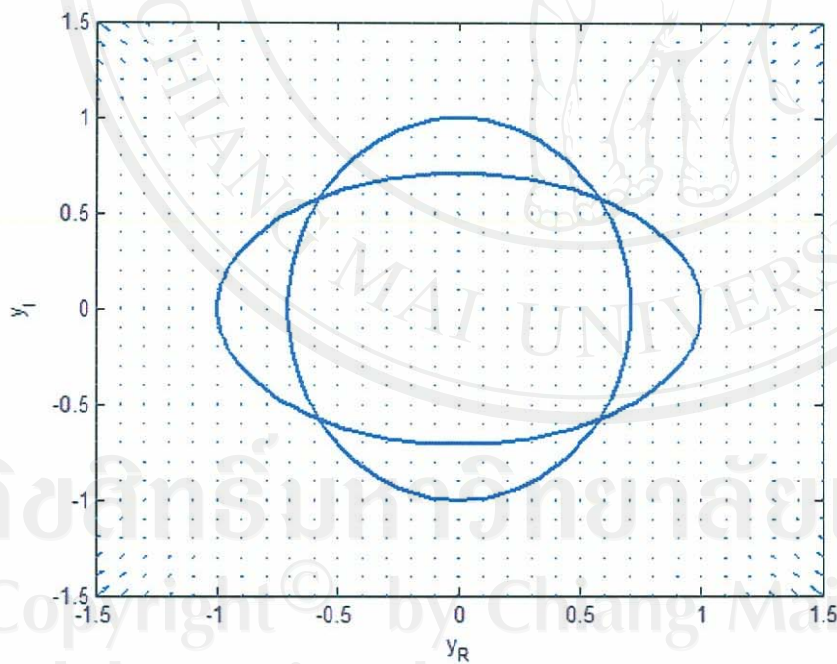
รูปที่ 3.4 (a) พื้นผิวของคอสต์ฟังก์ชันของอัลกอริทึมดับเบิลอีลีฟส์ ที่  $p$  เท่ากับ 2

(b) ทิศทางการเคลื่อนของอัลกอริทึมดับเบิลอีลีฟส์ ที่  $p$  เท่ากับ 2





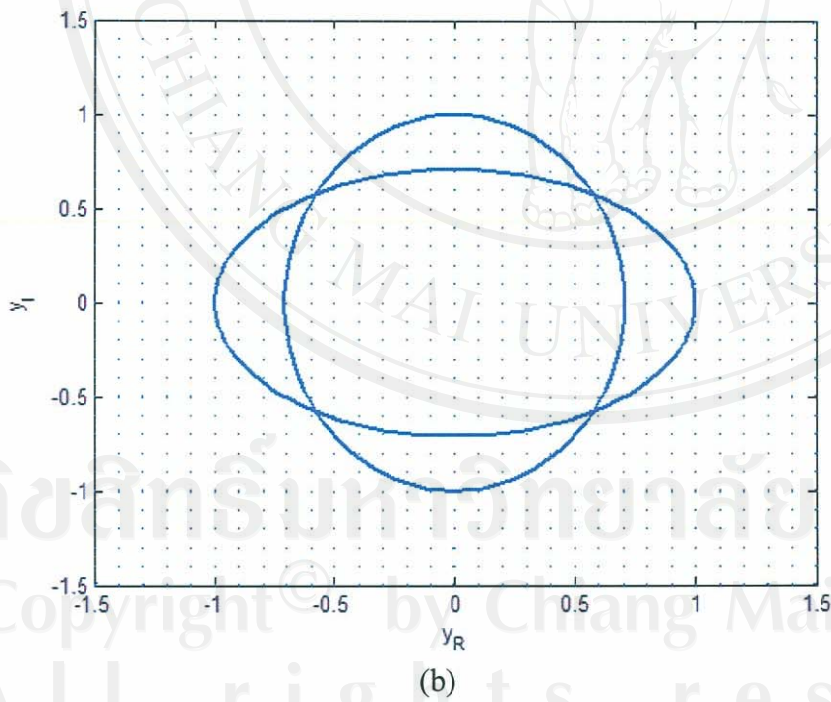
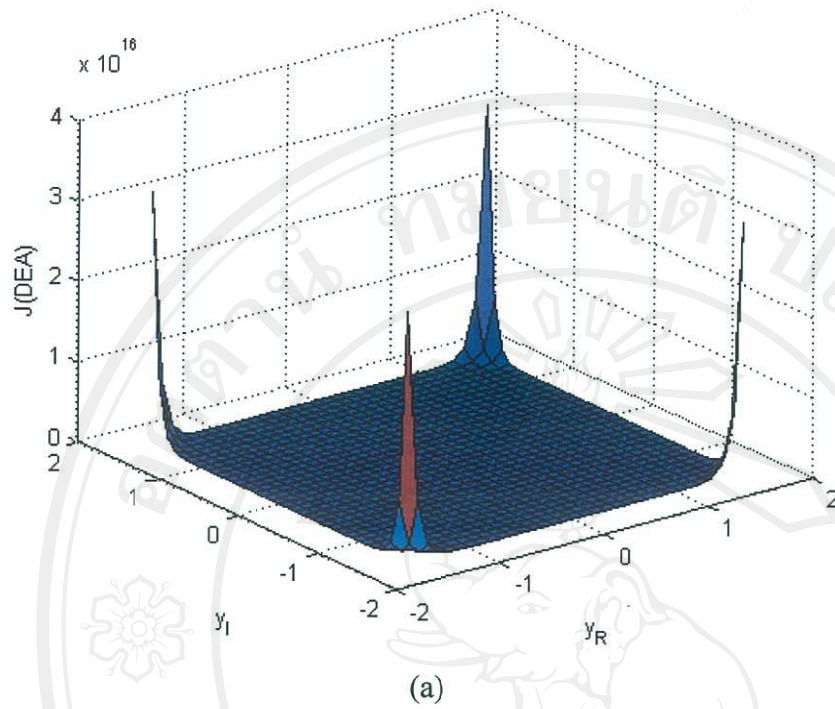
(a)



(b)

รูปที่ 3.5 (a) พื้นผิวของคอสต์ฟังก์ชันของอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์ ที่  $p$  เท่ากับ 3

(b) ทิศทางกราเดียนของอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์ ที่  $p$  เท่ากับ 3



รูปที่ 3.6 (a) พื้นผิวของคอสต์ฟังก์ชันของอัลกอริทึมดับเบิลอีลีฟส์ ที่  $p$  เท่ากับ 10

(b) ทิศทางกราเดียนของอัลกอริทึมดับเบิลอีลีฟส์ ที่  $p$  เท่ากับ 10

เมื่อพิจารณาลักษณะพื้นผิวของคอสท์ฟังก์ชันในพื้นที่ 3 มิติได้จากรูปที่ 3.3(a) เราสามารถสังเกตได้ว่า บริเวณที่มีค่าเท่ากับศูนย์จะอยู่บนเส้นของวงรีสองวงที่ซ้อนทับกัน และบริเวณที่มีค่าน้อยมากแต่ยังไม่เท่ากับศูนย์จะเป็นพื้นที่รอบวงรี รูปที่ 3.3(b) แสดงทิศทางของกราเดียนของสมการคอสท์ฟังก์ชันบริเวณที่มีความชันสูงนั้นจะอยู่รอบนอกของโครงสร้างวงรี บริเวณที่อยู่ด้านในจะมีความชันต่ำเนื่องจากสมการคอสท์ฟังก์ชันมีลักษณะของการคูณ การคูณของบริเวณที่มีค่าน้อย ผลคือค่าที่ยิ่งต่ำกว่าเดิม ทำให้ความชันบริเวณนี้จึงต่ำกว่าบริเวณรอบนอก จากรูปที่ 3.4(a) แสดงพื้นผิวของคอสท์ฟังก์ชันตามแนวคิดอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบเจนเนอเรตไลส์ที่  $p = 2$  เราสามารถสังเกตพื้นที่ราบที่มากขึ้นเมื่อเทียบกับรูปที่ 3.3(a) จากรูปนี้เราไม่สามารถสร้างรายละเอียดได้มากเนื่องจากบริเวณที่อยู่ภายในโครงสร้างวงรีที่ตัดกัน และบริเวณที่อยู่รอบโครงสร้างวงรีที่ตัดกันภายนอกนั้นมีค่าต่ำมาก และเมื่อเราพิจารณารูปที่ 3.4(b) เราจะสังเกตได้ว่า ทิศทางของกราเดียนจะไม่ชัดเจนเมื่อเทียบกับรูปที่ 3.3(b) ข้อสังเกตนี้สามารถพิจารณาได้กับพื้นผิวของคอสท์ฟังก์ชันตามแนวคิดอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบเจนเนอเรตไลส์ที่  $p = 3$  และที่  $p = 10$  จากรูปที่ 3.5(a) และ 3.6(a) ตามลำดับ และเมื่อพิจารณาลักษณะทิศทางของกราเดียนในรูปที่ 3.5(b) และ 3.6(b) ตามลำดับ เราจะพบข้อแตกต่างอย่างชัดเจน

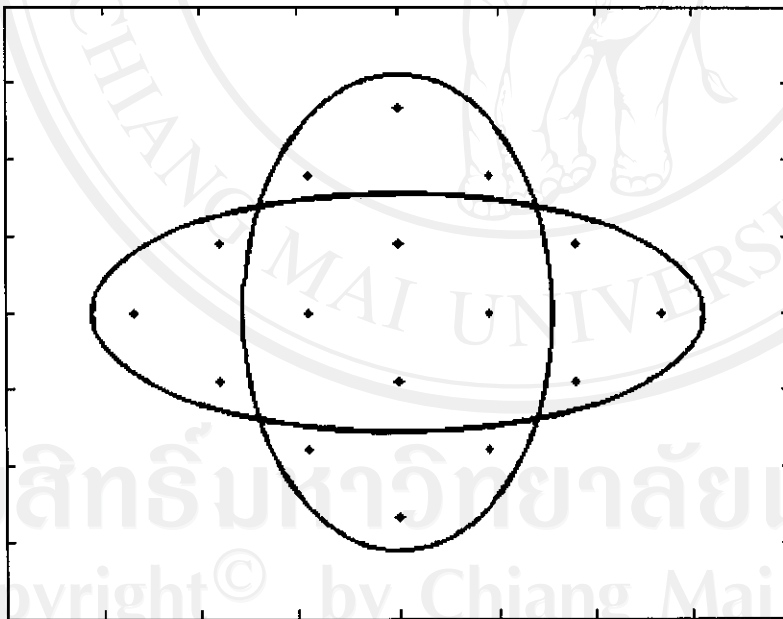
เมื่อพิจารณารูปทั้งหมดข้างต้นแล้ว เราสรุปได้ดังนี้ ถ้าเราเพิ่มค่าของ  $p$  ขึ้น ลักษณะพื้นผิวของคอสท์ฟังก์ชันจะแบนราบ เนื่องจากบริเวณที่เคยมีปริมาณค่าน้อย (ใกล้บริเวณเส้นของวงรีทั้งสอง) ซึ่งน้อยกว่าหนึ่งแต่ยังไม่เท่ากับศูนย์นั้น เมื่อถูกยกค่ายกกำลังเพิ่มขึ้น ผลที่ได้คือมีค่าใกล้เคียงศูนย์มากขึ้น ทำให้บริเวณพื้นที่ราบแผ่ขยายออกไปทุกครั้งที่มีการเพิ่มค่ายกกำลัง ปรากฏการณ์นี้สามารถพิจารณาได้จากทิศทางของกราเดียนเมื่อ  $p$  เพิ่มขึ้น ทิศทางของกราเดียนจะไม่ชัดเจนเปรียบเทียบกับได้จากรูปที่ 3.3(b), 3.4(b) และ 3.5(b) และเมื่อพิจารณารูปที่ 3.6(b) ในภาพนี้ค่าของ  $p$  เท่ากับ 10 เราพบว่า ทิศทางของกราเดียนบริเวณที่เราสนใจนั้น ไม่สามารถสังเกตได้ เป็นผลให้การดูเข้าหาจุดคำตอบที่เราต้องการนั้น ไปไม่ถึงหรือผิดพลาด เราจึงศึกษาอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบเจนเนอเรตไลส์ ที่  $p$  เท่ากับ 1 (ใช้อธิบายการทำงานของค่า  $p$  ที่เป็นเลขคี่) และอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูท (ใช้อธิบายการทำงานของค่า  $p$  ที่เป็นเลขคู่)

### 3.3 ผลลัพธ์ที่ได้จากอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์

ในส่วนนี้เราจะกล่าวถึง ผลลัพธ์ที่ได้จากอีควาไลเซอร์ตามอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์ ซึ่งมีลักษณะที่แตกต่างจากผลลัพธ์ที่ได้จากอัลกอริทึมรีดิวคอนสเทลเลชัน อัลกอริทึมมัลติมอดคูลัส

และอัลกอริทึมสแควคอนทัวตรงที่ ผลลัพธ์ที่ได้จากอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์จะหมุนระนาบคอนสเทลเลชันของผลลัพธ์ไป  $\frac{\pi}{4}$  เรเดียน (Radian)

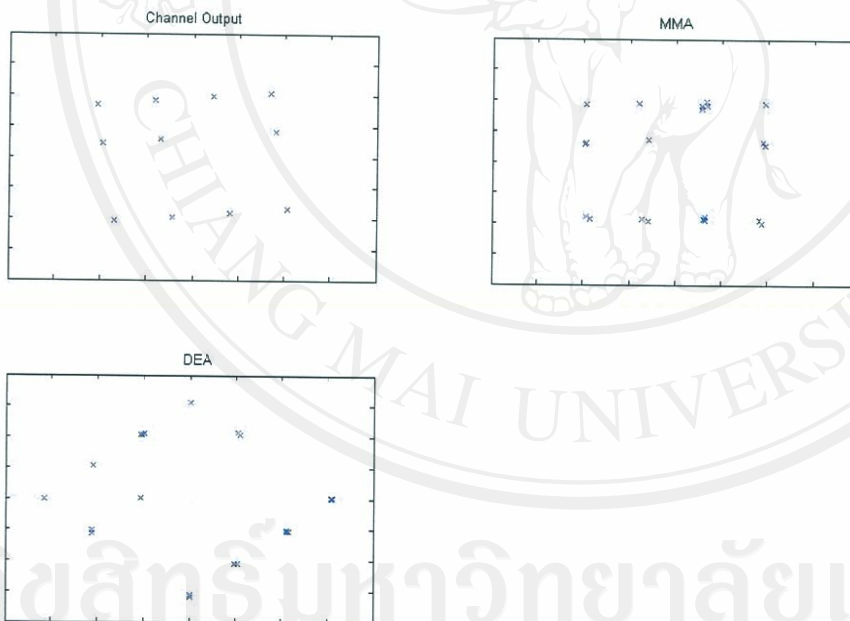
เพื่อที่จะทำให้เข้าใจถึงผลลัพธ์ที่ได้จากอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์ เราจะพิจารณาโครงร่างของความผิดพลาดที่เท่ากับศูนย์ของอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์ และลักษณะคอนสเทลเลชันของสัญญาณข้อมูลแบบ QAM ที่เหมาะสมกับอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์ จากรูปที่ 3.7 แสดงภาพของคอนสเทลเลชันของสัญญาณข้อมูลแบบ 16-QAM ที่ทำให้คอสต์ฟังก์ชันตามอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์มีค่าต่ำสุดเมื่ออัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 4 เมื่อพิจารณาส่วนที่ขยายออกมานั้น (ตามแกนหลักของวงรีทั้งสอง) เราสามารถสรุปได้ว่า ส่วนนี้ใช้ในการบังคับเฟส ของผลลัพธ์ที่ได้จากอีควาไลเซอร์และเนื่องจากส่วนที่ใช้บังคับเฟส นี้อยู่ตามแนวแกนตั้งและแนวนอน ผลที่ได้คือ การหมุนคอนสเทลเลชันของผลลัพธ์ที่ได้จากอีควาไลเซอร์ไป  $\frac{\pi}{4}$  เรเดียน ด้วยเหตุนี้ การคำนวณหาค่าคงที่ของอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์บนสัญญาณข้อมูลแบบ QAM มาตรฐาน มีความจำเป็นที่จะต้องหมุนคอนสเทลเลชันของสัญญาณไป  $\frac{\pi}{4}$  เรเดียน



รูปที่ 3.7 ลักษณะของคอนสเทลเลชันของสัญญาณข้อมูลแบบ 16-QAM ที่ทำให้คอสต์ฟังก์ชันมีค่าต่ำสุด เมื่อขนาดอัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองมีค่าเท่ากับ 4

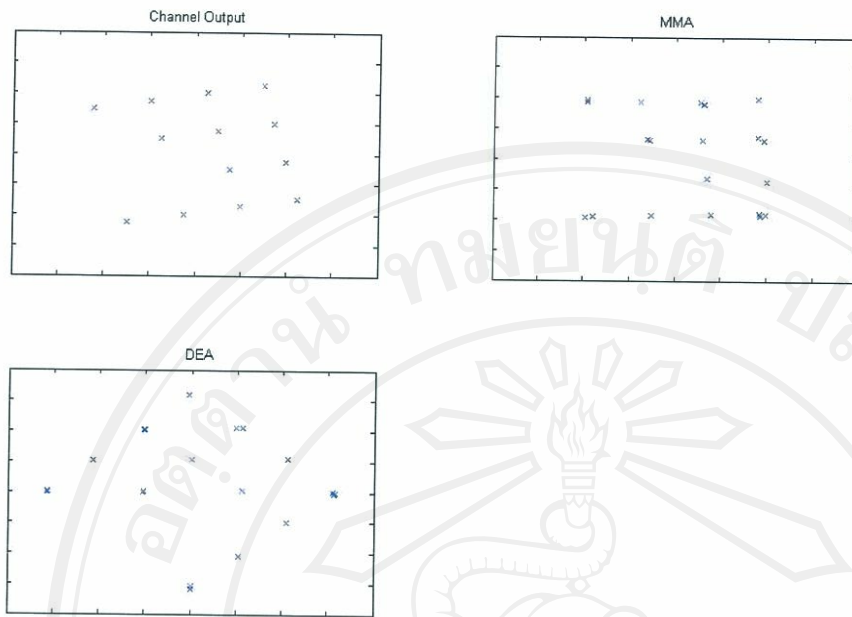


ในรูปที่ 3.7 อธิบายถึงการหมุนคอนสเตลเลชันของผลลัพธ์ที่ได้จากอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์ เราจะนำผลลัพธ์ที่ได้จากอัลกอริทึมคอนสเตลเลชันมอดคูลัสและอัลกอริทึมมัลติมอดคูลัสมาเปรียบเทียบตำแหน่งของสัญญาณที่ได้รับหลังจากการทำอีควาไลเซชันด้วยอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์ ในรูปที่ 3.8 ถึงรูปที่ 3.11 แสดงให้เห็นถึงตำแหน่งของผลลัพธ์ที่ได้จากอีควาไลเซอร์ด้วยแนวคิดแบบต่างๆ ในการนำเสนอส่วนนี้อีควาไลเซอร์จะทำงานบนสัญญาณข้อมูลแบบ 16-QAM สัญญาณที่ได้รับนั้นจะถูกหมุนระนาบของคอนสเตลเลชันด้วยมุมที่แตกต่างกันออกไป ภายในรูปจะแสดงถึงข้อมูลที่ไม่ได้นำมาทั้ง 16 จุดบนคอนสเตลเลชันจุดประสงค์เพื่อที่จะให้ง่ายต่อการพิจารณาตำแหน่ง ซึ่งตำแหน่งของผลลัพธ์นี้เป็นสิ่งที่ใช้ยืนยันว่า ผลลัพธ์ที่ได้จากอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์จะถูกหมุนไป  $\frac{\pi}{4}$  เรเดียน เปรียบเทียบกับคอนสเตลเลชันของสัญญาณข้อมูลแบบ QAM (ซึ่งได้จากอัลกอริทึมมัลติมอดคูลัส)

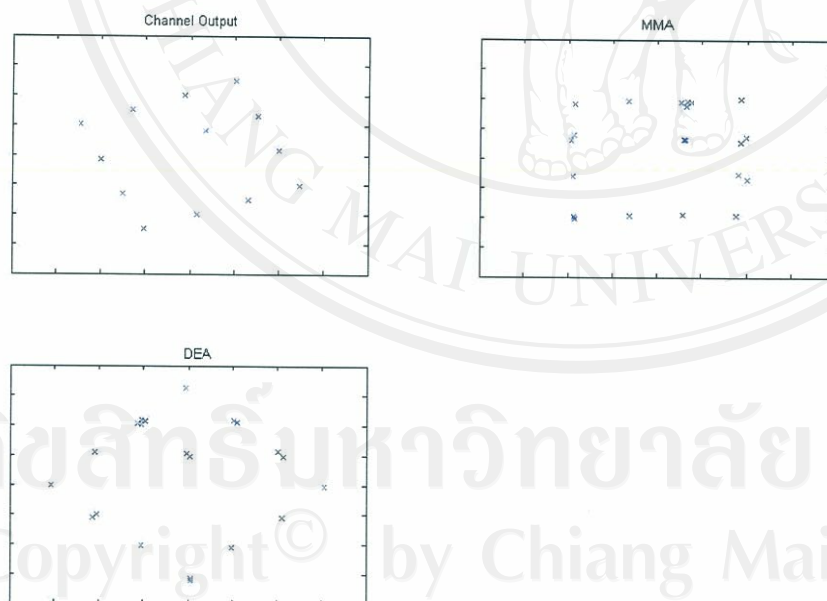


รูปที่ 3.8 ผลลัพธ์หลังจากที่ทำอีควาไลเซชันกับสัญญาณข้อมูลแบบ 16-QAM ที่ถูกหมุนไป 11.2 องศา (หมุนทวนเข็มนาฬิกา)

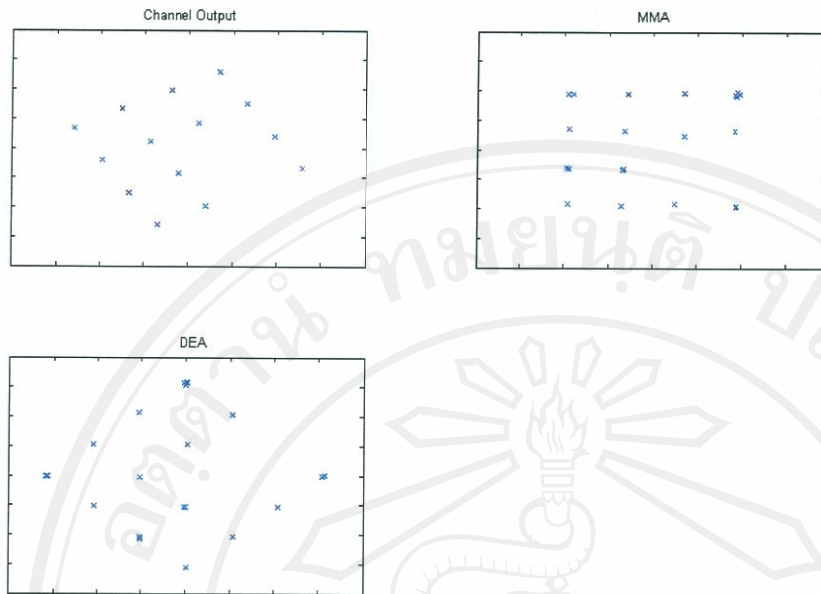




รูปที่ 3.9 ผลลัพธ์หลังจากที่ทำอีควาไลเซชันกับสัญญาณแบบ 16-QAM ที่ถูกหนุมไป 22.5 องศา (หมุนทวนเข็มนาฬิกา)



รูปที่ 3.10 ผลลัพธ์หลังจากที่ทำอีควาไลเซชันกับสัญญาณข้อมูลแบบ 16-QAM ที่ถูกหนุมไป 45 องศา (หมุนทวนเข็มนาฬิกา)



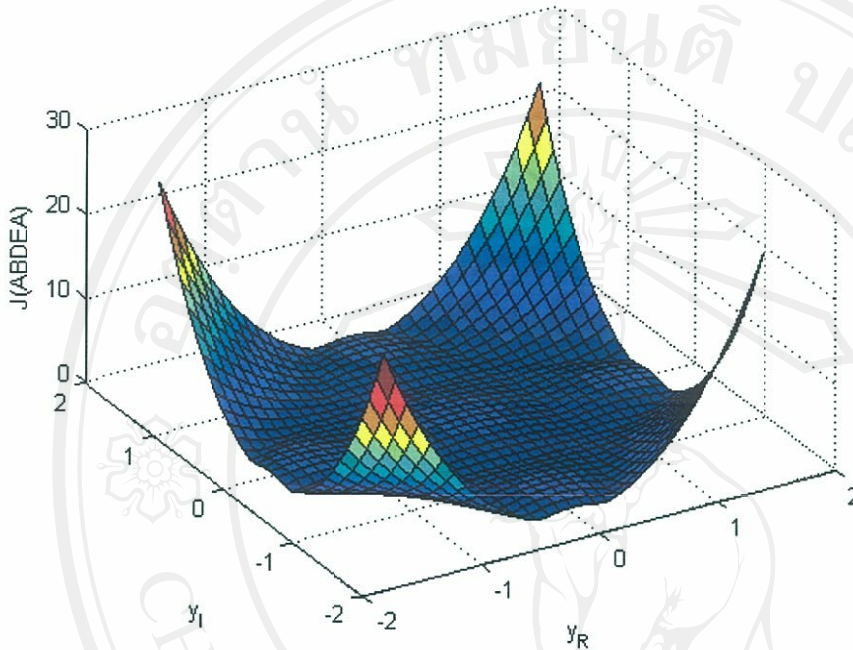
รูปที่ 3.11 ผลลัพธ์หลังจากที่ทำอีควาไลเซชันกับสัญญาณข้อมูลแบบ 16-QAM ที่ถูกหนุมไป 60 องศา (หมุนทวนเข็มนาฬิกา)

### 3.4 อัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์กับความหมายของค่ายกกำลัง $p$

หลังจากที่เราได้นำเสนออัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบเจนเนอเรลไลส์แล้ว สิ่งที่ยังไม่ได้กล่าวถึงคือ ผลกระทบของค่ายกกำลัง  $p$  ที่มีต่ออัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์ และการทำงานของอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์ เมื่อเราพิจารณาพื้นผิวคอสม์ฟังก์ชันของอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์ที่ค่ายกกำลัง  $p$  เท่ากับ 1 และ 2 จากรูปต่อที่ 3.3(a) และ 3.4(a) เราสามารถสังเกตได้ว่า พื้นผิวคอสม์ฟังก์ชันของอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์ที่ค่ายกกำลัง  $p$  เท่ากับเลขคี่ จะมีส่วนที่มีค่าเป็นจำนวนติดลบ แต่ในทางกลับกันอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์ที่ค่ายกกำลัง  $p$  เท่ากับเลขคู่ จะไม่มีส่วนที่ติดลบ เนื่องจากคอสม์ฟังก์ชันที่ค่ายกกำลังสูง (ทั้งกรณีเลขคู่และเลขคี่) ค่าของคอสม์ฟังก์ชันมีค่าสูงและพื้นผิวเป็นแนวราบ ทำให้เราไม่สามารถพิจารณารายละเอียดได้ เราจึงนำเสนออัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูท (Absolute Double-Ellipse Algorithm : ADEA) ซึ่งมีคอสม์ฟังก์ชันตามสมการต่อไปนี้

$$J(n) = E \left[ \left| \frac{y_R(n)^2}{R_1} + \frac{y_I(n)^2}{R_2} - R_{CMA}^2 \right| \cdot \left| \frac{y_R(n)^2}{R_2} + \frac{y_I(n)^2}{R_1} - R_{CMA}^2 \right| \right] \quad (3.17)$$

เนื่องอัลกอริทึมดับเบิลลิพส์แบบแอฟโซลูทมีลักษณะที่คล้ายถึงกับอัลกอริทึมดับเบิลลิพส์กรณีที่  
มีค่ายกกำลังเป็นเลขคู่ แต่เราสามารถพิจารณาพื้นผิวได้ชัดเจนกว่า สามารถพิจารณาได้จากรูปที่  
3.12

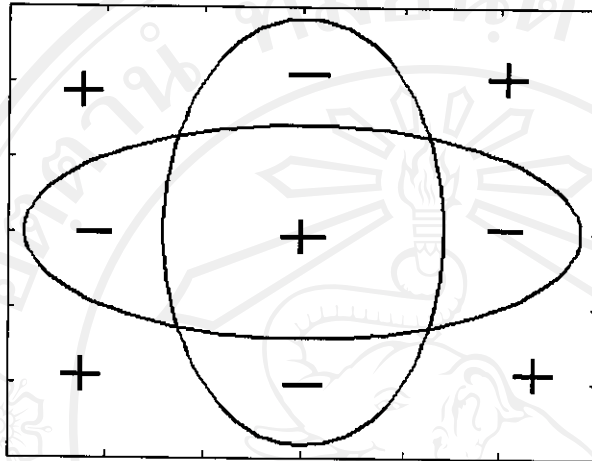


รูปที่ 3.12 พื้นผิวของคอสต์ฟังก์ชันตามแนวคิดอัลกอริทึมดับเบิลลิพส์แบบแอฟโซลูท

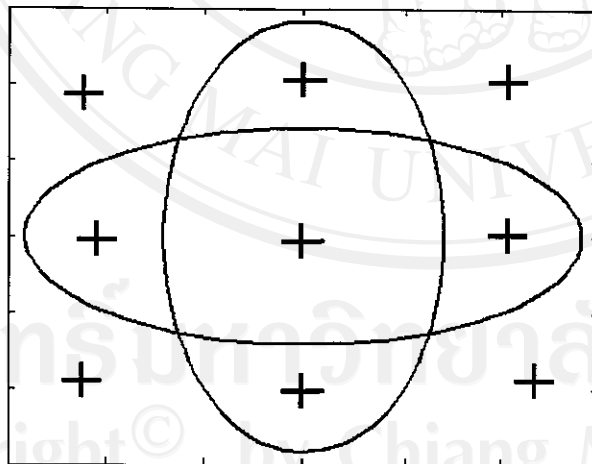
ในส่วนของบทนี้ เราจะพิจารณาการทำงานของอัลกอริทึมดับเบิลลิพส์ ซึ่งแบ่งเป็นสอง  
กรณี กรณีที่หนึ่ง การทำงานเมื่อค่ายกกำลังมีค่าเป็นจำนวนคี่ ซึ่งเราจะศึกษาจากค่ายกกำลังเท่ากับ 1  
และกรณีที่สอง การทำงานเมื่อค่ายกกำลังมีค่าเป็นจำนวนคู่ โดยเราจะศึกษาจากอัลกอริทึมดับเบิล  
ลิพส์แบบแอฟโซลูท ซึ่งรายละเอียดจะกล่าวถึงในหัวข้อต่อไป เมื่อเราพิจารณาพื้นผิวกอสต์ฟังก์ชัน  
ที่มีค่ายกกำลังเป็นคี่ พิจารณาจากคอสต์ฟังก์ชันเราสามารถสรุป บริเวณที่มีค่าเป็นบวกและลบ  
สำหรับทั้งสองกรณี จะมีขอบเขตดังรูปที่ 3.13 สำหรับกรณีที่ค่ายกกำลังเป็นคี่และรูปที่ 3.14  
สำหรับกรณีที่ค่ายกกำลังเป็นคู่

ในกรณีที่อัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองมีค่าน้อย ซึ่งในที่นี้จะยกตัวอย่างจาก  
อัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองที่มีค่าเท่ากับ 2 โดยการศึกษาต่อไปนี้จะใช้สัญญาณ  
คอนสเตลเลชันแบบ 16-QAM ลักษณะของคอนสเตลเลชันที่เหมาะสมกับอัลกอริทึมดับเบิล  
ลิพส์ตามที่ได้กล่าวมานั้น สามารถพิจารณาได้จากรูปที่ 3.15

เพื่อที่จะเข้าใจถึงพฤติกรรมของอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์ เราจะกำหนดให้ค่า  $y_I(n)$  มีค่าคงที่ โดยให้มีค่าเท่ากับศูนย์ แล้วปล่อยให้ค่า  $y_R(n)$  เปลี่ยนแปลง เราจะได้ภาพตัดขวาง ซึ่งสามารถสังเกตการณ์การลู่เข้าหาคำตอบของอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์ในทีละค่าของค่ากำลังเป็นคู่ และกรณีทีละค่าของค่ากำลังเป็นคี่

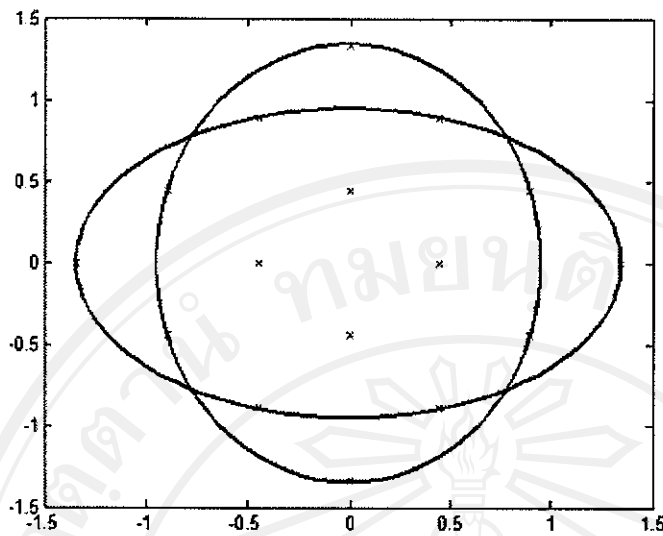


รูปที่ 3.13 กรณีทีละค่าของค่ากำลังเป็นคู่ บริเวณที่มีค่าเป็นบวกจะแทนด้วย + และบริเวณที่มีค่าเป็นลบจะแทนด้วย -



รูปที่ 3.14 กรณีทีละค่าของค่ากำลังเป็นคี่และแอฟโซลูท บริเวณที่มีค่าเป็นบวกจะแทนด้วย +



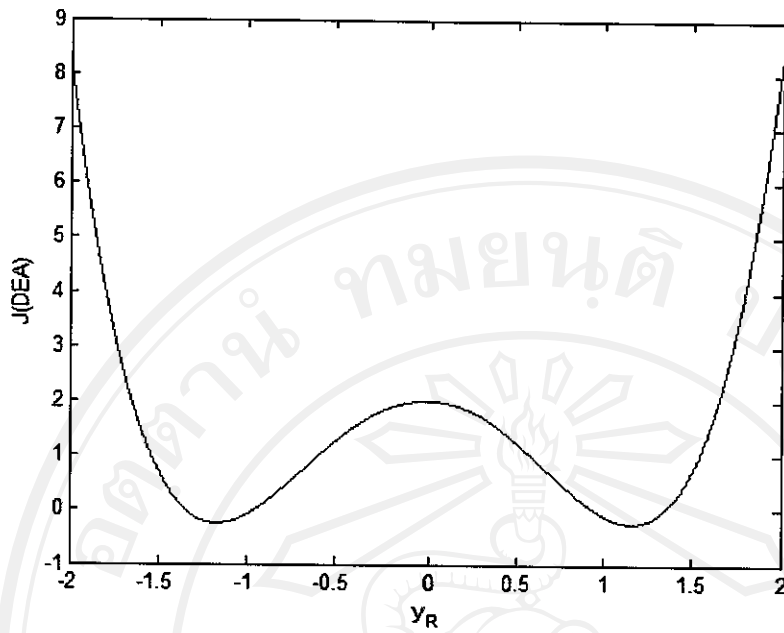


**รูปที่ 3.15** ลักษณะคอนสเทลเลชันที่สามารถลดค่าคอสต์ฟังก์ชันได้ต่ำสุด ในกรณีที่สำคัญ  
เป็น 16-QAM และขนาดของอัตราส่วนเท่าระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 2

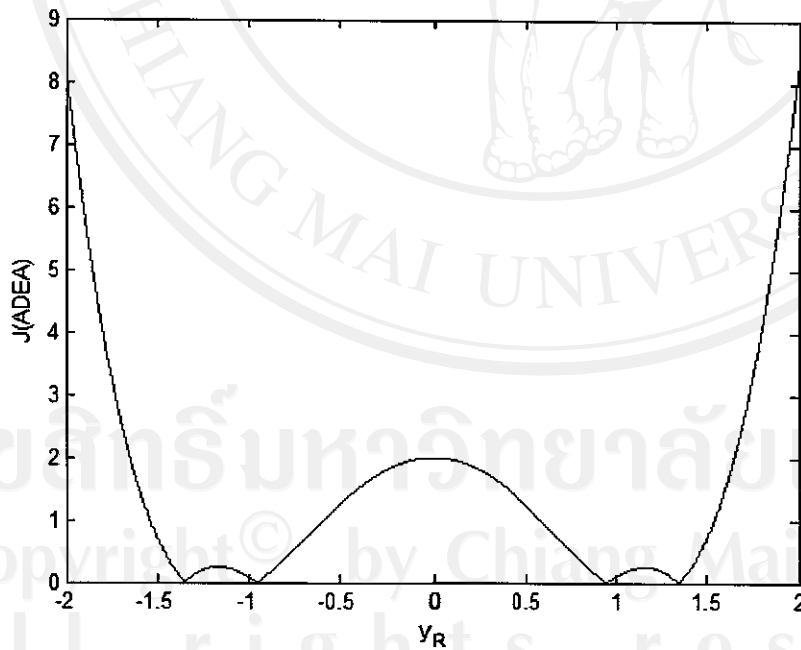
สำหรับภาพตัดขวางคอสต์ฟังก์ชันของอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์ที่ค่ายกกำลังเท่ากับ 1 และอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทเมื่ออัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 2 นั้นสามารถพิจารณาได้จากรูปที่ 3.16 และรูปที่ 3.17 เราจะสังเกตเห็นตำแหน่งของจุดที่ทำให้ค่าของคอสต์ฟังก์ชันเท่ากับศูนย์นั้น มีคุณสมบัติที่แตกต่างกัน เมื่อค่ายกกำลังเท่ากับ 1 จุดที่คอสต์ฟังก์ชันเท่ากับศูนย์จะไม่ใช่ว่าจะอยู่ที่จุดต่ำสุด เช่นที่เกิดกับกรณีอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูท โดยภาพตัดขวางช่วยวิเคราะห์ถึงผลของพื้นผิวคอสต์ฟังก์ชันที่มีต่อลักษณะผลลัพธ์

เมื่อเราพิจารณาภาพตัดขวางทั้งสอง และลักษณะคอนสเทลเลชันที่สามารถลดค่าคอสต์ฟังก์ชันได้ต่ำสุด ในกรณีนี้ บริเวณที่เป็นจุดสนใจและเป็นส่วนที่ทำให้ผลลัพธ์มีการหมุนคือ บริเวณช่วง  $1 \leq y_R(n) \leq 1.5$  ของจำนวนจริงของสัญญาณ เราพบว่าอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์ทั้งแบบค่ายกกำลัง 1 และแอฟโซลูทจะบังคับให้ส่วนจำนวนจริงของสัญญาณเคลื่อนเข้าหาตำแหน่งศูนย์ ด้วยเหตุนี้ การทำงานของทั้งสองกรณีจะเหมือนกัน ผลที่ได้คือ ผลลัพธ์ของอีควาไลเซอร์จะถูกหมุนไป  $\frac{\pi}{4}$  เรเดียน แต่สิ่งที่เกิดขึ้นกับอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบค่ายกกำลัง 1 นั้นจะแตกต่างกันกับที่เกิดขึ้นกับอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูท เนื่องจากอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบค่ายกกำลัง 1 ใช้หลุมทั้งสี่ในการลดการกระจายของผลลัพธ์ที่ได้จากอีควาไลเซอร์ซึ่งเมื่อพิจารณาแล้ว การทำงานของอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบค่ายกกำลัง 1 คล้ายคลึงกับอัลกอริทึมรีดิวคอนสเทลเลชันซึ่งเราจะกล่าวถึงอีกครั้งในบทต่อไป



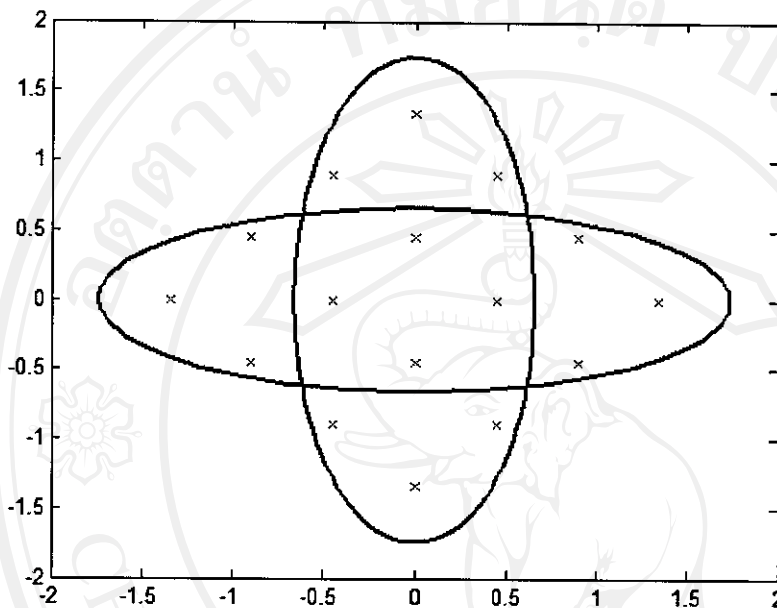


รูปที่ 3.16 ภาพตัดขวางของคอสต์ฟังก์ชันที่ถ่ายกกำลังเท่ากับ 1 เมื่อข้อมูลเป็นสัญญาณแบบ 16-QAM ตำแหน่งที่มีค่าเท่ากับศูนย์จะอยู่ระหว่างจุดสูงสุดและจุดต่ำสุด



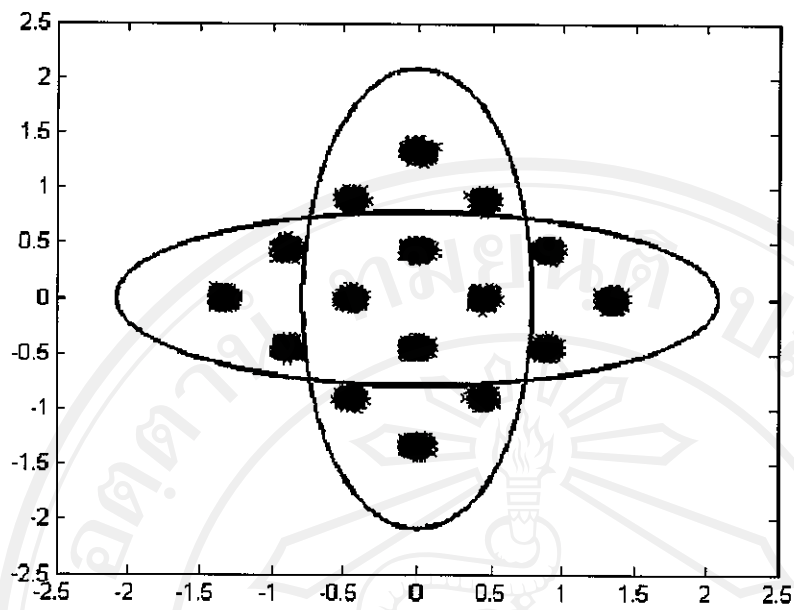
รูปที่ 3.17 ภาพตัดขวางของคอสต์ฟังก์ชันอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูท เมื่อข้อมูลเป็นสัญญาณแบบ 16-QAM ซึ่งตำแหน่งที่มีค่าเท่ากับศูนย์ ณ จุดต่ำสุด

ในขณะที่อัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์ที่ค่ายกกำลังเท่ากับ 1 และอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟไซลูทเมื่ออัตราส่วนเท่าระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 2 ทำงานเหมือนกัน กรณีที่อัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองมีค่าเท่ากับ 7 จะให้ผลที่แตกต่างออกไป เราสามารถพิจารณาลักษณะคอนสเทลเลชันของสัญญาณที่เหมาะสมได้จากรูปต่อไปนี้

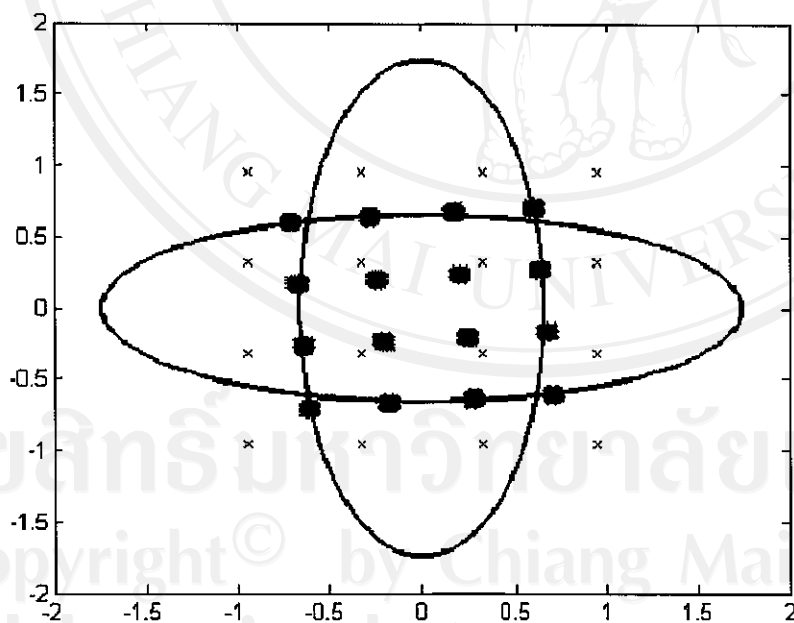


**รูปที่ 3.18** ลักษณะคอนสเทลเลชันที่สามารถลดค่าคอสม์ฟังก์ชันได้ต่ำสุด ในกรณีที่สัญญาณเป็น 16-QAM และขนาดของอัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 7

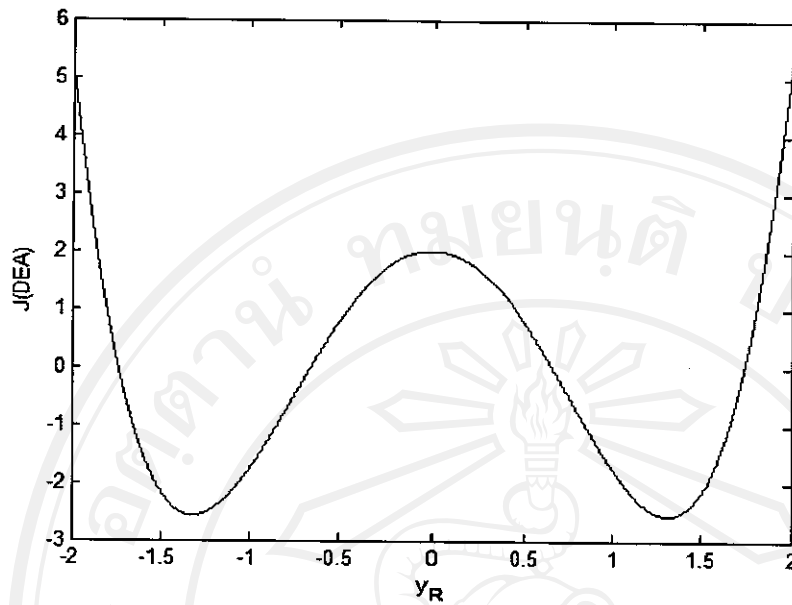
เมื่อเรากำหนดให้ค่าคงที่เท่ากันทั้งสองกรณี ผลที่ได้รับแตกต่างกันอย่างสิ้นเชิง พิจารณาจากรูปที่ 3.20 เราพบว่าอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟไซลูทสามารถให้คอนสเทลเลชันของผลลัพธ์แบบไม่ถูกหมุนไป  $\frac{\pi}{4}$  เรเดียน แต่ผลลัพธ์ที่ได้จากอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟไซลูทนั้น อัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟไซลูทไม่ได้ใช้ทุกส่วนของโครงร่างอย่างที่เกิดขึ้น กับกรณีที่อัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองมีค่าน้อย กรณีนี้อัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟไซลูทใช้ส่วนที่มีลักษณะคล้ายสี่เหลี่ยม ที่ได้รับการตัดกันของวงรีสองวงในการบังคับผลลัพธ์ที่ได้จากอีควาไลเซอร์ ทำให้กรณีนี้ การทำงานของอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟไซลูทคล้ายคลึงกับอัลกอริทึมสแควคอนทัว ในทางตรงกันข้ามอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์ค่ายกกำลัง 1 มีการทำงานเหมือนกับกรณีแรก เราสามารถอธิบายสาเหตุได้จากการศึกษาภาพตัดขวางดังรูปที่ 3.21 สำหรับกรณีที่ค่ายกกำลังเป็นคู่และรูปที่ 3.22 สำหรับกรณีที่ค่ายกกำลังเป็นคี่



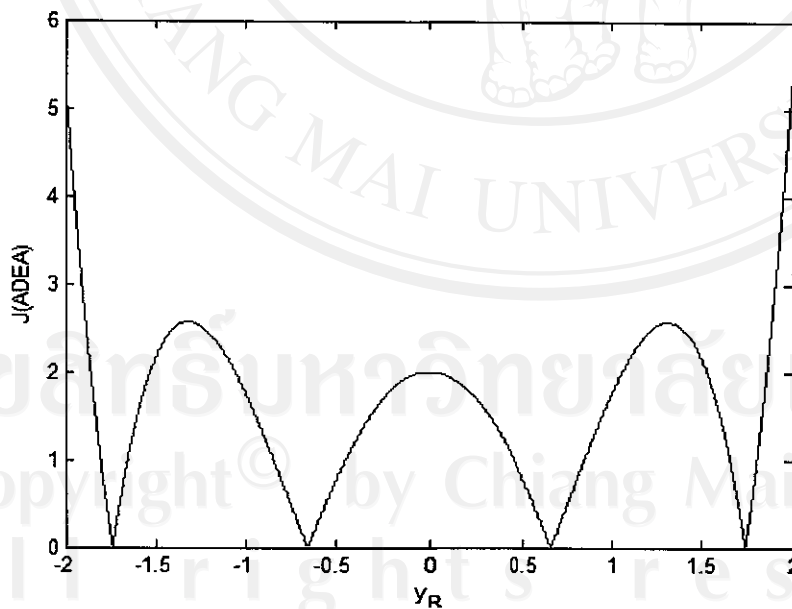
รูปที่ 3.19 ผลลัพธ์ที่ได้จากอัลกอริทึมดับเบิลอีลิพส์ที่ค่ายกกำลังเท่ากับ 1 และกากบาทแทนจุดของ  
สัญญาณที่ถูกต้อง จำนวนของข้อมูลเท่ากับ 10000



รูปที่ 3.20 ผลลัพธ์ที่ได้จากอัลกอริทึมดับเบิลอีลิพส์แบบแอฟโซลูทและกากบาทแทนจุดของ  
สัญญาณที่ถูกต้อง จำนวนของข้อมูลเท่ากับ 10000



**รูปที่ 3.21** ภาพตัดขวางของคอสท์ฟังก์ชันอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์ที่ค่ายกกำลังเท่ากับ 1 เมื่อข้อมูลเป็นสัญญาณข้อมูลแบบ 16-QAM ตำแหน่งที่มีค่าเท่ากับศูนย์ จะอยู่ระหว่างจุดสูงสุดและจุดต่ำสุด



**รูปที่ 3.22** ภาพตัดขวางของคอสท์ฟังก์ชันอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูท เมื่อข้อมูลเป็นสัญญาณข้อมูลแบบ 16-QAM ตำแหน่งที่มีค่าเท่ากับศูนย์ ณ จุดต่ำสุด

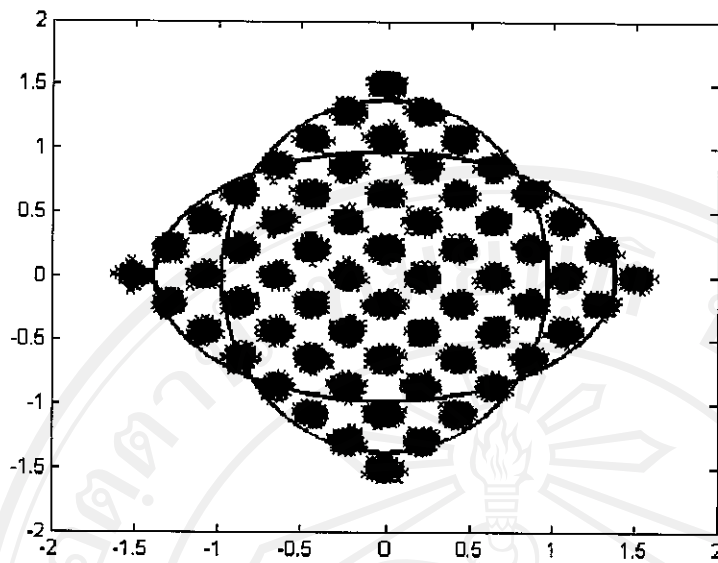


ภาพตัดขวางพื้นผิวคอสมอสฟังก์ชันของอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์ค่ายกกำลัง 1 เมื่ออัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 7 นั้น มีลักษณะที่ไม่แตกต่างจากกรณีที่อัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 2 การทำงานจึงเหมือนกับที่เกิดขึ้นกรณีที่อัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 2 ผลที่ได้คือ ผลลัพธ์ของอีควาไลเซอร์มีลักษณะหมุนไป  $\frac{\pi}{4}$  เรเดียน และเนื่องจากการปรับตำแหน่งของหลุมให้สอดคล้องกับขนาดของรัศมี ทำให้ผลลัพธ์ที่ได้มีค่าเท่าเดิม ในทางกลับกันถึงแม้ว่าลักษณะภาพตัดขวางของอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูท จะคล้ายคลึงกับกรณีที่อัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 2 แต่เมื่อเราพิจารณาช่วง  $1 \leq y_R(n) \leq 1.5$  ส่วนจำนวนจริงของสัญญาณผลลัพธ์มีแนวโน้มที่จะไหลลงตำแหน่งศูนย์ที่ค่าประมาณ  $\pm 0.6$  เป็นผลให้ผลลัพธ์ที่ได้จากกรณีนี้จึงมีลักษณะคอนสเทลเลชันที่เป็นทรงสี่เหลี่ยมและไม่มีการหมุนไป  $\frac{\pi}{4}$  เรเดียน เช่นที่เกิดขึ้นกับอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์ค่ายกกำลัง 1

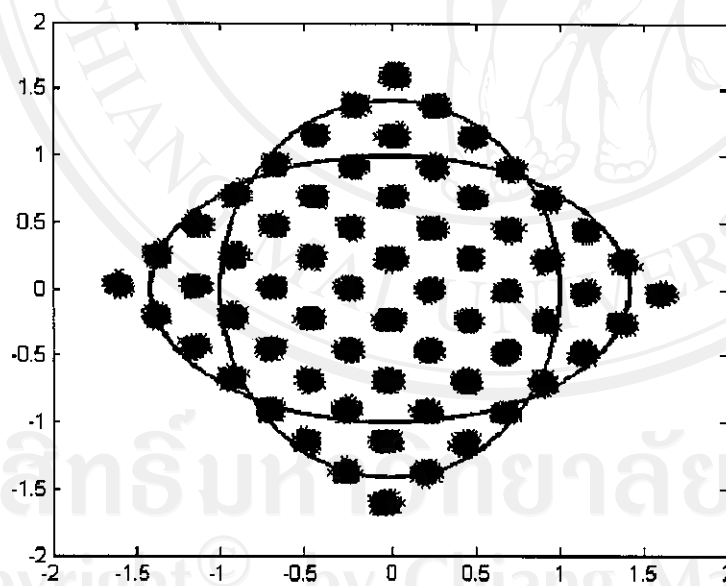
ผลที่ได้จากการศึกษาในส่วนนี้ แสดงให้เห็นว่า อัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์ที่มีค่ายกกำลังเป็นจำนวนคู่ใช้ส่วนที่เป็นวงรีในการลดการกระจายของผลลัพธ์ที่ได้จากอีควาไลเซอร์แต่เสถียรภาพในการลู่เข้าหาคำตอบที่ถูกต้องนั้นจะต่ำ เมื่ออัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเพิ่มมากขึ้นระบบจะไม่นำส่วนที่มีลักษณะเป็นวงรีมาใช้ทั้งหมด มีพฤติกรรมคล้ายคลึงกับอัลกอริทึมสแควคอนทัวและสำหรับอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์ที่มีค่ายกกำลังเป็นเลขคี่นั้นก็มีลักษณะที่คล้ายคลึงกับอัลกอริทึมรีคิวกอนสเทลเลชันเพราะว่า อัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์ที่มีค่ายกกำลังเป็นเลขคี่ใช้หลุมสี่หลุมในการลดการกระจายของผลลัพธ์ที่ได้จากอีควาไลเซอร์ แต่รีคิวกอนสเทลเลชันใช้จุดในการลดการกระจายผลลัพธ์ที่ได้จากอีควาไลเซอร์จากการทดลองกับสัญญาณข้อมูลแบบ 16-QAM

จากผลที่ได้รับ เราสามารถนำข้อมูลที่ได้ขยายผลที่ไปยังคอนสเทลเลชันที่สูงกว่าแบบ 16-QAM เช่นคอนสเทลเลชันแบบ 64-QAM และคอนสเทลเลชันแบบ 256-QAM พิจารณาได้จากรูปที่ 3.23 ถึงรูปที่ 3.26 สำหรับสัญญาณข้อมูลแบบ 64-QAM และรูปที่ 3.27 ถึงรูปที่ 3.30 สำหรับสัญญาณข้อมูลแบบ 256-QAM

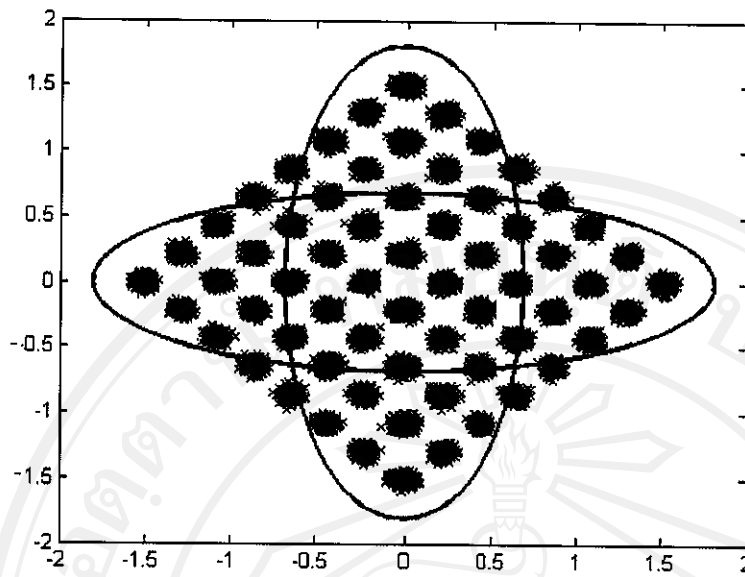
ที่ได้กล่าวมานั้น เป็นลักษณะของอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์โดยรวม ในบทต่อไปนั้น เราจะศึกษาเกี่ยวกับอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทและแบบโมดิฟาย ซึ่งเป็นอัลกอริทึมที่ใช้อธิบายการทำงานของอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์ที่มีค่ายกกำลัง  $p$  เป็นคู่และคี่ตามลำดับ และเราจะทำการทดสอบประสิทธิภาพของอัลกอริทึมดังกล่าว โดยเปรียบเทียบกับอัลกอริทึมคอนสเทลเลชันมอดูเลตและอัลกอริทึมรีคิวกอนสเทลเลชัน



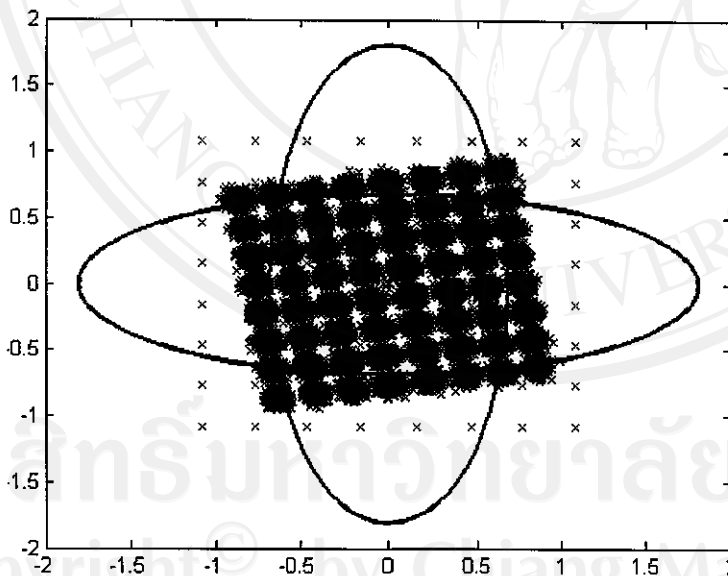
รูปที่ 3.23 ผลลัพธ์จากอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์ที่ค่ายกกำลังเท่ากับ 1 ให้กากบาทแทนจุดสัญญาณที่ถูกต้อง บนสัญญาณข้อมูลแบบ 64-QAM และอัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 2



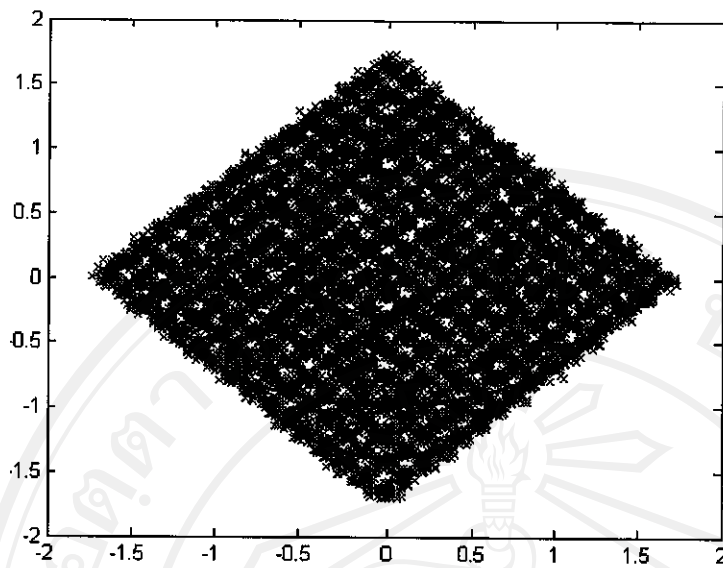
รูปที่ 3.24 ผลลัพธ์จากอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูท ให้กากบาทแทนจุดสัญญาณที่ถูกต้อง บนสัญญาณข้อมูลแบบ 64-QAM และอัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 2



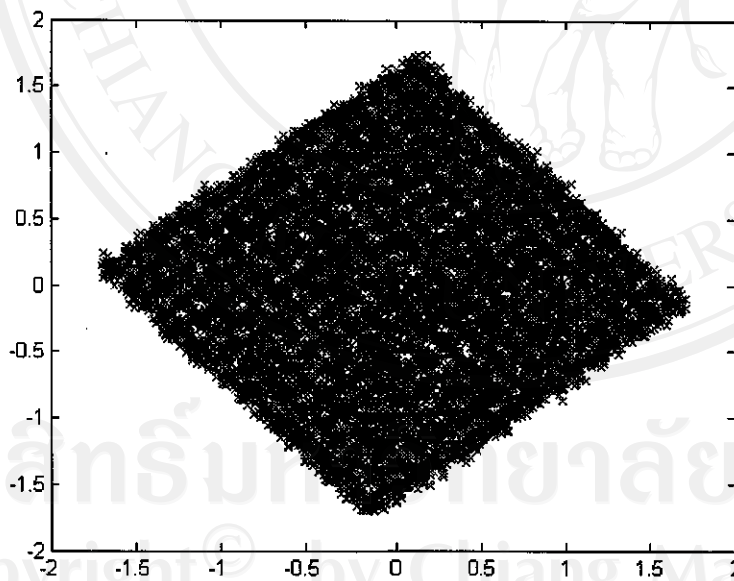
รูปที่ 3.25 ผลลัพธ์จากอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์ที่ค่ายกกำลังเท่ากับ 1 ให้กากบาทแทนจุดสัญญาณที่ถูกต้อง บนสัญญาณข้อมูลแบบ 64-QAM และอัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 7



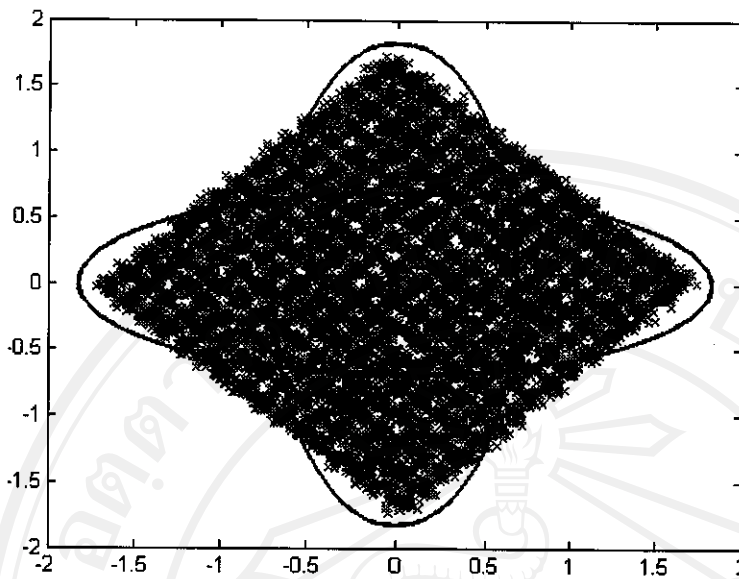
รูปที่ 3.26 ผลลัพธ์จากอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูท ให้กากบาทแทนจุดสัญญาณที่ถูกต้อง บนสัญญาณข้อมูลแบบ 64-QAM และอัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 7



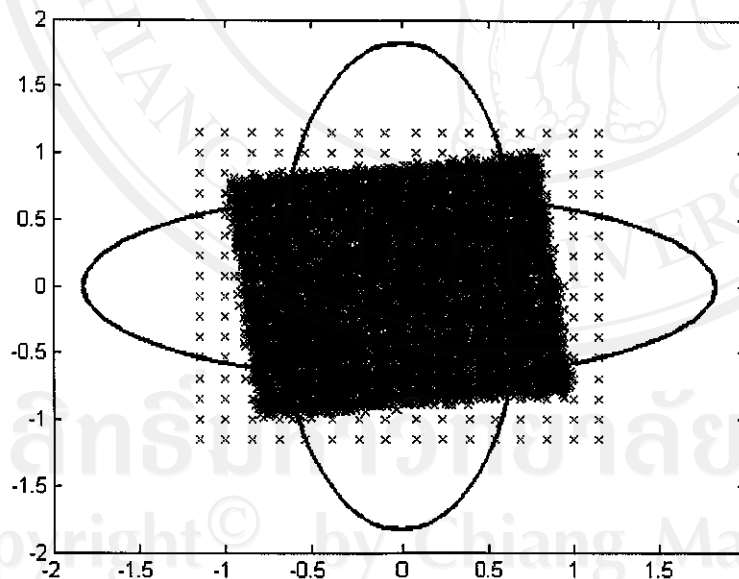
**รูปที่ 3.27** ผลลัพธ์จากอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์ที่ค่ายกกำลังเท่ากับ 1 ให้กากบาท  
แทนจุดสัญญาณที่ถูกต้อง บนสัญญาณข้อมูลแบบ 256-QAM  
และอัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 2



**รูปที่ 3.28** ผลลัพธ์จากอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูท ให้กากบาท  
แทนจุดสัญญาณที่ถูกต้อง บนสัญญาณข้อมูลแบบ 256-QAM  
และอัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 2



**รูปที่ 3.29** ผลลัพธ์จากอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์ที่ค่ายกกำลังเท่ากับ 1 ให้กากบาทแทนจุดสัญญาณที่ถูกต้อง บนสัญญาณข้อมูลแบบ 256-QAM และอัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 7



**รูปที่ 3.30** ผลลัพธ์จากอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูท ให้กากบาทแทนจุดสัญญาณที่ถูกต้อง บนสัญญาณข้อมูลแบบ 256-QAM และอัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 7