

บทที่ 4

อัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูท

4.1 อัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูท

ในบทที่ผ่านมา เราได้นำเสนออัลกอริทึมที่ใช้อธิบายการทำงานของอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์ที่ค่ายกกำลัง p เท่ากับเลขคู่ อัลกอริทึมนี้คือ อัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูท ซึ่งมีสมการคอสต์ฟังก์ชัน (Cost Function) ดังสมการต่อไปนี้

$$J_{ADEA}(n) = E \left[\left| \frac{y_R(n)^2}{R_1} + \frac{y_I(n)^2}{R_2} - R_{CMA}^2 \right| \cdot \left| \frac{y_R(n)^2}{R_2} + \frac{y_I(n)^2}{R_1} - R_{CMA}^2 \right| \right] \quad (4.1)$$

ถึงแม้ว่า อัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทจะใช้อธิบายการทำงานของอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์ที่ค่ายกกำลัง p เท่ากับเลขคู่ จากการทดสอบ เราพบว่า อัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูท มีความสามารถที่คล้ายคลึงกับอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์ที่ค่ายกกำลัง p เท่ากับ 2 (พิจารณาพื้นผิวสมการคอสต์ฟังก์ชันได้จากรูปที่ 4.1) ซึ่งสามารถแสดงได้จากสมการที่ใช้ในการปรับค่าสัมประสิทธิ์ (Coefficient) ของอีควาไลเซอร์ (Equalizer)

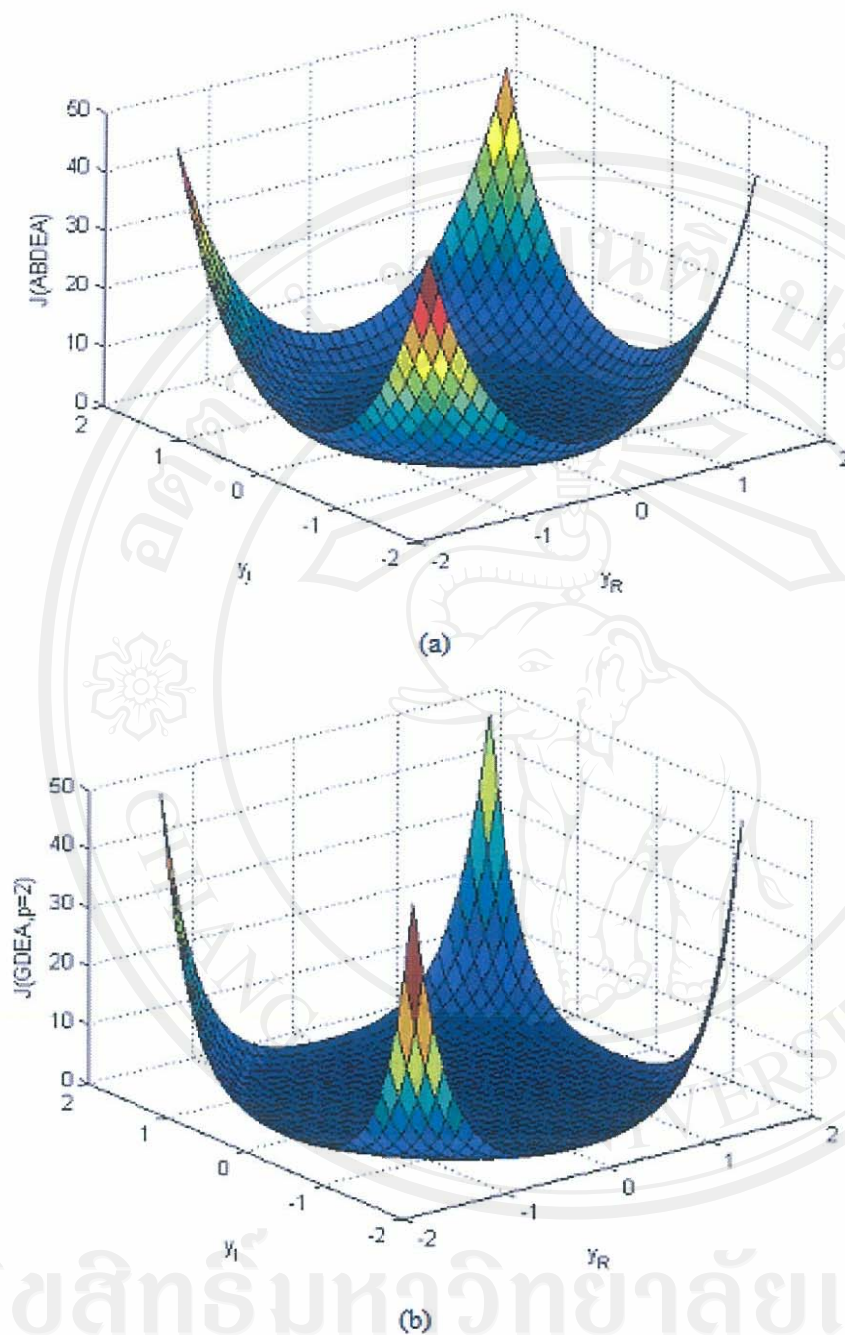
จากสมการที่ (4.1) เราหาค่าของอนุพันธ์อันดับที่ 1 เทียบกับค่าสัมประสิทธิ์ของอีควาไลเซอร์เราจะได้สมการสำหรับปรับค่าสัมประสิทธิ์ของอีควาไลเซอร์โดยกำหนดให้

$$A = \frac{y_R(n)^2}{R_1} + \frac{y_I(n)^2}{R_2} - R_{CMA}^2 \quad (4.2)$$

$$B = \frac{y_R(n)^2}{R_2} + \frac{y_I(n)^2}{R_1} - R_{CMA}^2 \quad (4.3)$$

เราจะได้รับสมการอนุพันธ์อันดับที่ 1 ของอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทในลักษณะย่อ

$$\nabla_c J_{ADEA}(n) = E \left[\left\{ \left(|A| \cdot \text{sign}(B) \cdot \frac{1}{R_2} + |B| \cdot \text{sign}(A) \cdot \frac{1}{R_1} \right) \cdot y_R(n) + j \cdot \left(|A| \cdot \text{sign}(B) \cdot \frac{1}{R_1} + |B| \cdot \text{sign}(A) \cdot \frac{1}{R_2} \right) \cdot y_I(n) \right\} \cdot x(n)^* \right] \quad (4.4)$$



รูปที่ 4.1 ความแตกต่างของพื้นผิวคอสม์ฟังก์ชันของ (a) อัลกอริทึมดัดเบิ้ลอีลิฟส์ที่ค่ายกกำลัง p เท่ากับ 2 และ (b) อัลกอริทึมดัดเบิ้ลอีลิฟส์แบบแอฟโซลูท สามารถสังเกตบริเวณพื้นราบที่มากในอัลกอริทึมดัดเบิ้ลอีลิฟส์ที่ค่ายกกำลัง p เท่ากับ 2 ในขณะที่อัลกอริทึมดัดเบิ้ลอีลิฟส์แบบแอฟโซลูทมีความชัน ทำให้ความสามารถในการรู้เข้าหาคำตอบเร็วกว่า อัลกอริทึมดัดเบิ้ลอีลิฟส์ที่ค่ายกกำลัง p เท่ากับ 2

ประมาณค่าฟังก์ชันการคาดหมายด้วยค่าในขณะนั้น เราจะได้สมการที่ใช้ในการปรับค่าสัมประสิทธิ์ตามอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูท อธิบายด้วยสมการ

$$c_{n+1} = c_n - \alpha \cdot \left\{ \left(|A| \cdot \text{sign}(B) \cdot \frac{1}{R_2} + |B| \cdot \text{sign}(A) \cdot \frac{1}{R_1} \right) \cdot y_R(n) + j \cdot \left(|A| \cdot \text{sign}(B) \cdot \frac{1}{R_1} + |A| \cdot \text{sign}(A) \cdot \frac{1}{R_2} \right) \cdot y_I(n) \right\} \cdot x(n)^* \quad (4.5)$$

สำหรับคล้ายคลึงกันระหว่างอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทกับอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์ที่ค่ายกกำลัง p เท่ากับ 2 สามารถแสดงได้จากสมการที่ (4.4) โดยจาก $\text{sign}(u) = \frac{u}{|u|}$ ผลที่ได้เมื่อแทนฟังก์ชันไซน์ (Sign Function) ลงในสมการที่ (4.4) คือ

$$\nabla_c J_{ADEA}(n) = E \left[\left\{ \left(|A| \cdot \frac{(B)}{|B|} \cdot \frac{1}{R_2} + |B| \cdot \frac{(A)}{|A|} \cdot \frac{1}{R_1} \right) \cdot y_R(n) + j \cdot \left(|A| \cdot \frac{(B)}{|B|} \cdot \frac{1}{R_1} + |B| \cdot \frac{(A)}{|A|} \cdot \frac{1}{R_2} \right) \cdot y_I(n) \right\} \cdot x(n)^* \right] \quad (4.6)$$

จัดรูปสมการใหม่ เราจะได้สมการต่อไปนี้

$$\nabla_c J_{ADEA}(n) = E \left[\left\{ \left(\frac{|A|^2 \cdot (B)}{|A| \cdot |B|} \cdot \frac{1}{R_2} + \frac{|B|^2 \cdot (A)}{|A| \cdot |B|} \cdot \frac{1}{R_1} \right) \cdot y_R(n) + j \cdot \left(\frac{|A|^2 \cdot (B)}{|A| \cdot |B|} \cdot \frac{1}{R_1} + \frac{|B|^2 \cdot (A)}{|A| \cdot |B|} \cdot \frac{1}{R_2} \right) \cdot y_I(n) \right\} \cdot x(n)^* \right] \quad (4.7)$$

จาก $|u|^2 = (u)^2$ ทำให้สมการที่ (4.4) อยู่ในรูปของ

$$\nabla_c J_{ADEA}(n) = E \left[\left\{ \left(\frac{(A)^2 \cdot (B)}{|A| \cdot |B|} \cdot \frac{1}{R_2} + \frac{(B)^2 \cdot (A)}{|A| \cdot |B|} \cdot \frac{1}{R_1} \right) \cdot y_R(n) + j \cdot \left(\frac{(A)^2 \cdot (B)}{|A| \cdot |B|} \cdot \frac{1}{R_1} + \frac{(B)^2 \cdot (A)}{|A| \cdot |B|} \cdot \frac{1}{R_2} \right) \cdot y_I(n) \right\} \cdot x(n)^* \right] \quad (4.8)$$

ซึ่งก็คือค่าของอนุพันธ์อันดับที่ 1 ของคอสม์ฟังก์ชันสำหรับอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์ที่ค่ายกกำลัง p เท่ากับ 2 โดยที่สมาชิกภายในถูกปรับขนาดโดยการหารด้วย $|A| \cdot |B|$ นั้นเอง แต่อัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทนั้นมีประสิทธิภาพที่ดีกว่าเมื่อทดสอบกับสถานการณ์จำลอง ซึ่งเราจะเปรียบเทียบการทำงานในบทของการทดสอบประสิทธิภาพ

4.2 ค่าคงที่ของอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูท

เนื่องจากสมการที่ใช้หาค่าคงที่สำหรับอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทนั้น มีความซับซ้อนสูง ดังจะเห็นได้จากการสมมติให้ค่าของผลลัพธ์จากอีควาไลเซอร์ถูกอีควาไลเซชันอย่างสมบูรณ์และให้ค่าของสมการอนุพันธ์อันดับที่ 1 มีค่าเท่ากับ 0 เราได้ยกตัวอย่างลักษณะของสมการไว้ที่สมการที่ (4.9) ข้อมูลค่าคงที่ของอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทจึงได้มาจากการทดลอง

จากตัวแปร A และ B ดังที่ได้กำหนดในสมการที่ (4.2) และ (4.3) ตามลำดับ และ $y(n) \rightarrow s(n)$ สมการที่ใช้หาค่าคงที่ของอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทมีลักษณะดังนี้

$$0 = E \left[\frac{\left((A)^2 \cdot (B) \cdot \left(\frac{s_R}{R_2} + j \cdot \frac{s_I}{R_1} \right) + (B)^2 \cdot (A) \cdot \left(\frac{s_R}{R_1} + j \cdot \frac{s_I}{R_2} \right) \right)}{|A| \cdot |B|} \right] \cdot s^* \quad (4.9)$$

โดยที่ค่า s คือ สัญญาณของคอนสเทลเลชันที่ถูกหมุนไป $\frac{\pi}{4}$ เรเดียน เราสามารถสังเกตได้ว่าสมการที่ (4.9) นั้นมีความไม่ใช้เส้นตรงที่สูงมาก ผลจากค่ายกกำลังสองของตัวแปร A และ B

ผลการทดสอบอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูท เราพบว่า ขนาดของอัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองที่ทำงานได้นั้น มีช่วงที่น้อยมาก ดังจะสังเกตได้จากตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 4.1 ค่าประมาณของคงที่ R_1 และ R_2 สำหรับอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูท

Ratio	16-QAM		64-QAM		256-QAM	
	R_1	R_2	R_1	R_2	R_1	R_2
1.5	0.853	1.28	0.76	1.14	0.75	1.125
2	0.64	1.28	0.6	1.2	0.61	1.22
2.5	0.512	1.28	0.51	1.25	0.53	1.325
3	0.427	1.28	0.42	1.26	0.46	1.38

กรณีอัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเกินกว่าที่กำหนดในตารางนี้ ผลลัพธ์ที่ได้จากอีควาไลเซอร์นั้นจะทำให้ลักษณะเฟสของคอนสเตลเลชัน (Constellation) ที่ถูกต้อง แต่ขนาดไม่ถูกต้อง โดยที่ผลลัพธ์ที่ได้เกิดจากการที่ระบบใช้ทรงโครงสร้างคล้ายสี่เหลี่ยมภายใน ซึ่งเกิดจากการตัดกันระหว่างวงรี 2 วง และในการทดสอบประสิทธิภาพของอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทนั้น จะเปรียบเทียบกับอัตราส่วนสองค่า คือ 2 และ 3 แต่เมื่อเราทดสอบความสามารถในการปรับเฟส เราพบว่า ในกรณีอัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองที่เท่ากับ 3 นั้น อัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทจะไม่เสถียรในกรณีทำงานบนสัญญาณข้อมูลแบบ 16-QAM

4.3 ผลการทดสอบประสิทธิภาพในการกำจัดอินเตอร์ซีมโบตอินเตอร์เฟียร์เรนซ์ของอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูท

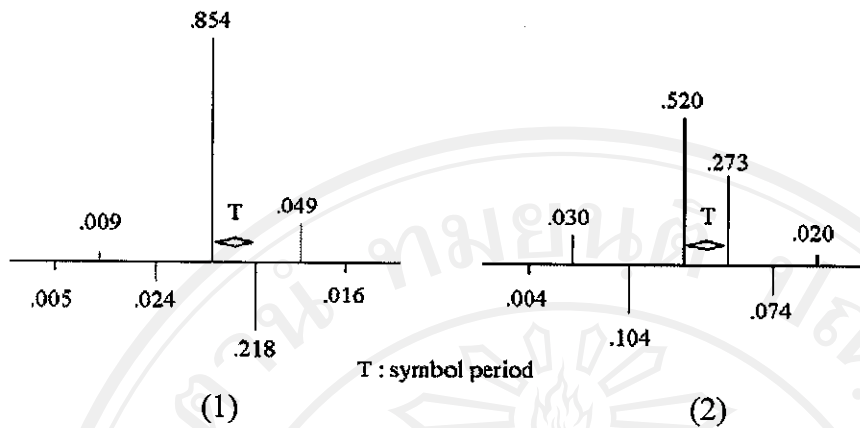
ในการจำลองการทำงาน (Simulation) นี้ จะเป็นผลการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทด้วยอัลกอริทึมคอนสแตนต์มอดดูลัส (Constant Modulus Algorithm : CMA) และอัลกอริทึมรีดิวคอนสเตลเลชัน (Reduction Constellation Algorithm : RCA) ผ่านทางการจำลองสถานการณ์บนสัญญาณข้อมูลแบบ QAM ที่ขนาด 16-QAM, 64-QAM และ 256-QAM

4.3.1 รูปแบบการทดสอบประสิทธิภาพ

ในการจำลองสถานการณ์นี้ เราจะใช้สัญญาณข้อมูลทั้งหมด 3 รูปแบบ คือ 16-QAM, 64-QAM และ 256-QAM โดยที่ช่องสัญญาณสื่อสารจะเป็นแบบช่องสัญญาณเสียงที่มีค่าของคอมเพลกซ์อิมพัลส์เรสปอนส์ (Complex Impulse Response) แบบเดียวกันกับที่แสดงไว้ในรูปที่ 1.1 และในการวัดประสิทธิภาพ เรานำค่าสัมประสิทธิ์ของอีควาไลเซอร์ที่ได้จากอัลกอริทึมคอนสแตนต์มอดดูลัสอัลกอริทึมรีดิวคอนสเตลเลชันและอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์ตามสมการที่ (3.10) มาใช้ใน

การประมาณค่าที่ดีที่สุดของ $s(n)$ ด้วย $y(n)$ ซึ่งการประมาณนี้ มีขอบเขตที่อาจจะมีการหน่วงของเวลาและมีการหมุนของเฟสที่คงที่ เราสามารถที่จะแสดงผลลัพธ์ที่ได้จากการรวมกันระหว่างค่าสัมประสิทธิ์ของช่องสัญญาณ ($h(i)$) กับค่าสัมประสิทธิ์ของอีควาไลเซอร์ ($c_n(i)$) ที่เวลา n ได้จากสมการคอนโวลูชัน (Convolution) ดังต่อไปนี้

$$z(i) = h(i) * c_n(i) = \sum_l h(i-l) \cdot c_n(i) \quad (4.10)$$



รูปที่ 4.2: ลักษณะตัวอย่างของช่องสัญญาณ โดยที่ (1) ส่วนของจำนวนจริงและ (2) ส่วนของ จำนวนจินตภาพ

โดยที่ * แทนที่การทำคอนโวลูชัน โดยเราต้องการที่จะหาเวกเตอร์ของค่าสัมประสิทธิ์ของอีควาไลเซอร์ $c_n = [c_n(-L) \dots c_n(0) \dots c_n(L)]$ (อีควาไลเซอร์มีความยาวเท่ากับ $2L+1$) ที่ทำให้ค่าของเวกเตอร์ $z = (z_1, z_2, \dots)^T$ มีสมาชิกเพียงตัวเดียวที่มีค่าเท่ากับ 1 โดยสมาชิกตัวอื่นๆในเวกเตอร์มีค่าเท่ากับ 0 พิจารณาได้ดังนี้

$$z = e^{j\theta} \cdot \begin{pmatrix} 0 \dots 0 & 1 & 0 \dots 0 \end{pmatrix}^T \quad (4.11)$$

kth element

โดยที่ k แทนที่การหน่วงของเวลา และ θ แทนการหมุนของเฟส ประสิทธิภาพของระบบสามารถคำนวณได้จากสมการต่อไปนี้ ซึ่งถูกนำเสนอโดย Shalvi และ Weinstein (1990)

$$ISI = \frac{\sum_l |z(l)|^2 - |z|_{\max}^2}{|z|_{\max}^2} \quad (4.12)$$

โดยที่ $|z|_{\max}$ แทนค่าแอมพลิจูดของสมาชิกที่มากที่สุดในเวกเตอร์ การจำลองนี้จะหาค่าเฉลี่ยที่ได้รับจากการทดสอบทั้งหมด 100 ครั้ง ซึ่งสัญญาณที่ได้รับจากช่องสัญญาณจะถูกเพิ่มสัญญาณรบกวนจนทำให้มีอัตราส่วนสัญญาณที่ต้องการต่อสัญญาณรบกวน (Signal-To-Noise Ratio) เท่ากับ 30 dB และค่าที่ถูกแสดงในรูปจะเป็นค่าของอัตราส่วนระหว่างอินเตอร์ซิม โบลอินเตอร์เฟียร์เรนซ์กับสัญญาณที่ต้องการ (ISI-To-Signal Ratio)

โดยค่าที่ถูกแสดงจะถูกปรับขนาดด้วยสมการดังต่อไปนี้ จากสมการที่ (4.12)

$$ISI \text{ (dB)} = 10 \cdot \frac{\log (ISI)}{\log (10)} \quad (4.13)$$

ในการจำลอง เราจะใช้อีควาไลเซอร์ที่มีความยาวเท่า 9 โดยที่ค่าเริ่มต้นของเวกเตอร์ค่าสัมประสิทธิ์ของอีควาไลเซอร์นั้น ถูกกำหนดให้ค่าสมาชิกทุกตัวเท่ากับ 0 ยกเว้นตำแหน่งเดียวที่ถูกกำหนดให้มีค่าเท่ากับ 1 คือ สมาชิกตัวกลางของอีควาไลเซอร์

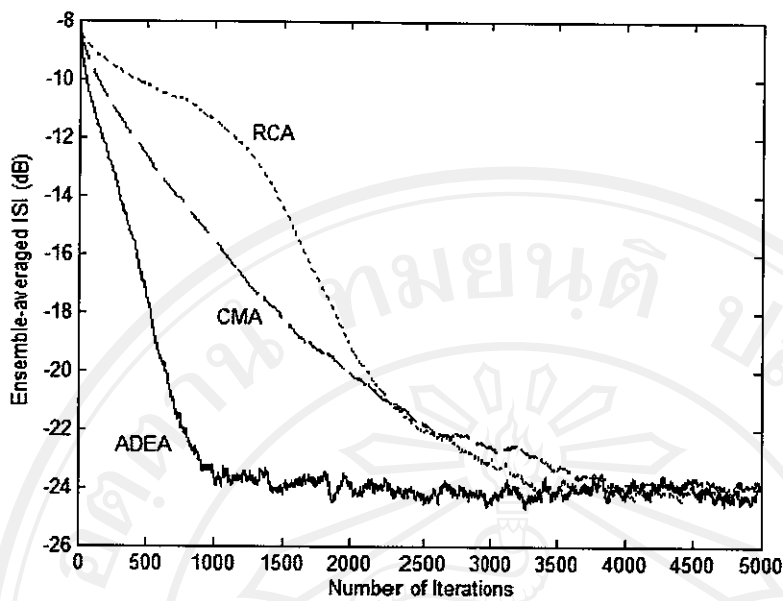
ระบบตามแนวคิดต่างๆจะถูกนำมาทดสอบ โดยจะวัดความเร็วในการเข้าหาระดับ -24 dB ของประสิทธิภาพที่คำนวณได้ตามสมการที่ (4.13)

4.3.2 ผลการทดลองที่ได้จากลักษณะสัญญาณข้อมูลแบบ 16-QAM

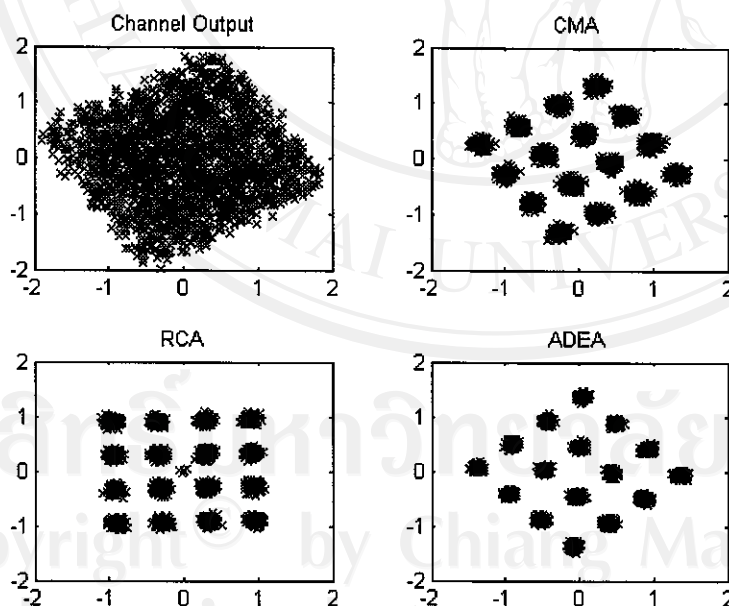
การทดสอบประสิทธิภาพของระบบ ในการกำจัดอินเตอร์ซิมโบลอินเตอร์เฟียร์เรนซ์ (Intersymbol Interference : ISI) ที่เกิดขึ้นกับสัญญาณ 16-QAM นั้น เราจะกำหนดให้ค่าการเรียนรู้ของอัลกอริทึมคอนสแตนต์มอดุลัสและอัลกอริทึมรีดิวคอนสเทลเลชันมีค่าเท่ากับ 0.0022 และ 0.0032 ตามลำดับ โดยที่เราจะทดสอบการทำงานของอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทที่อัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองตามที่ได้กำหนดไว้ในตารางที่ 4.1

ในกรณีอัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 2 ค่าการเรียนรู้ของอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทเท่ากับ 0.0033 เราสามารถเปรียบเทียบประสิทธิภาพในการเข้าถึงระดับอินเตอร์ซิมโบลอินเตอร์เฟียร์เรนซ์เท่ากับ -24 dB ได้จากรูปที่ 4.3 และผลลัพธ์ที่ได้หลังจากใช้ข้อมูลไป 2500 จุด ในรูปที่ 4.4 เราสรุปได้ว่า สำหรับสัญญาณข้อมูลแบบ 16-QAM นี้ อัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทที่อัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 2 มีความเร็วในการเข้าหาระดับ -24 dB ได้อย่างรวดเร็วจนเห็นได้ชัด และที่จำนวนข้อมูลเท่ากับ 2500 จุด ผลลัพธ์ถูกปรับเฟสได้ถูกต้อง

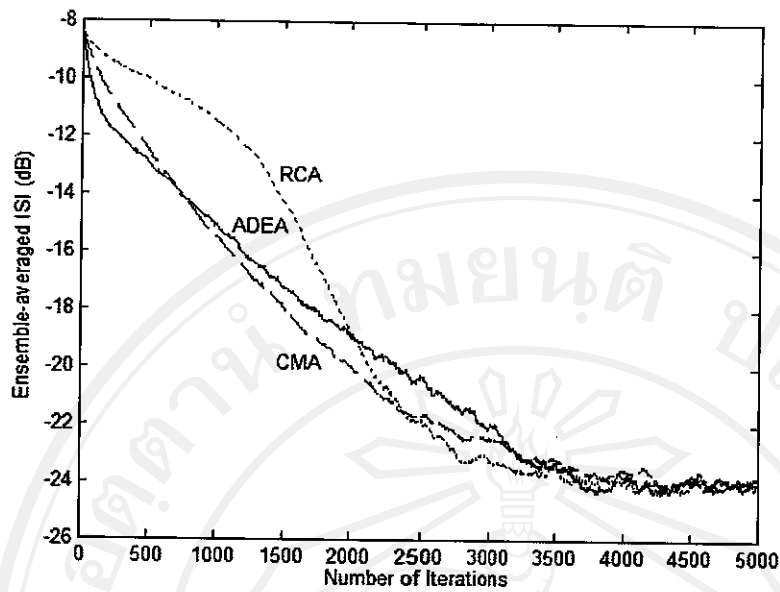
สำหรับอัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 3 เราให้ค่าการเรียนรู้ของอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทเท่ากับ 0.001 ในกรณีนี้อัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทที่อัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 3 มีประสิทธิภาพการทำงานที่ต่ำลงไปมาก เวลาในการเข้าหาระดับ -24 dB นั้น จะใช้เวลามากที่สุด และเฟสของผลลัพธ์ที่ได้ นั้น ที่จำนวนข้อมูลเท่ากับ 2500 จุด ผลลัพธ์ถูกปรับเฟสได้ไม่ดีพอ เราสามารถเปรียบเทียบประสิทธิภาพได้จาก รูปที่ 4.5 และ 4.6



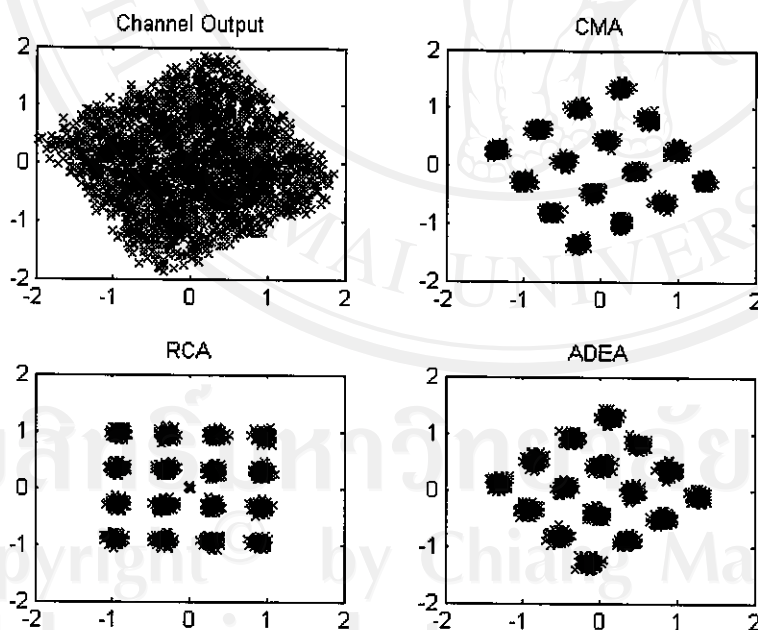
รูปที่ 4.3 แสดงระดับค่าเฉลี่ยของอินเตอร์ซิม โบลอินเตอร์เฟียร์เรนซ์สำหรับสัญญาณข้อมูลแบบ 16-QAM เมื่ออัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทมีอัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 2



รูปที่ 4.4 แสดงผลลัพธ์ของระบบหลังจากใช้ข้อมูลไป 2500 จุด เมื่ออัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทมีอัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 2



รูปที่ 4.5 แสดงระดับค่าเฉลี่ยของอินเตอร์ซิมโบลอินเตอร์เฟียร์เรนซ์สำหรับสัญญาณข้อมูลแบบ 16-QAM เมื่ออัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทมีอัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 3



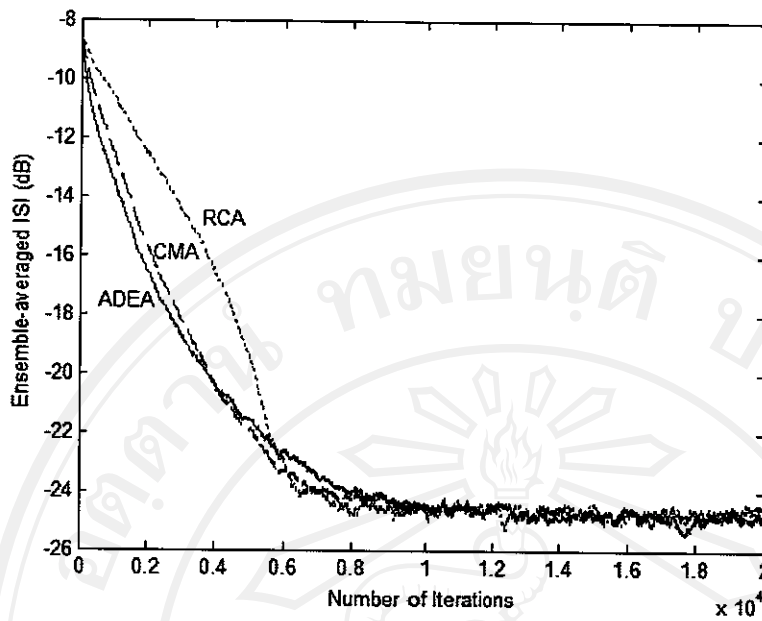
รูปที่ 4.6 แสดงผลลัพธ์ของระบบหลังจากใช้ข้อมูลไป 2500 จุด เมื่ออัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทมีอัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 3

4.3.3 ผลการทดลองที่ได้จากลักษณะสัญญาณข้อมูลแบบ 64-QAM

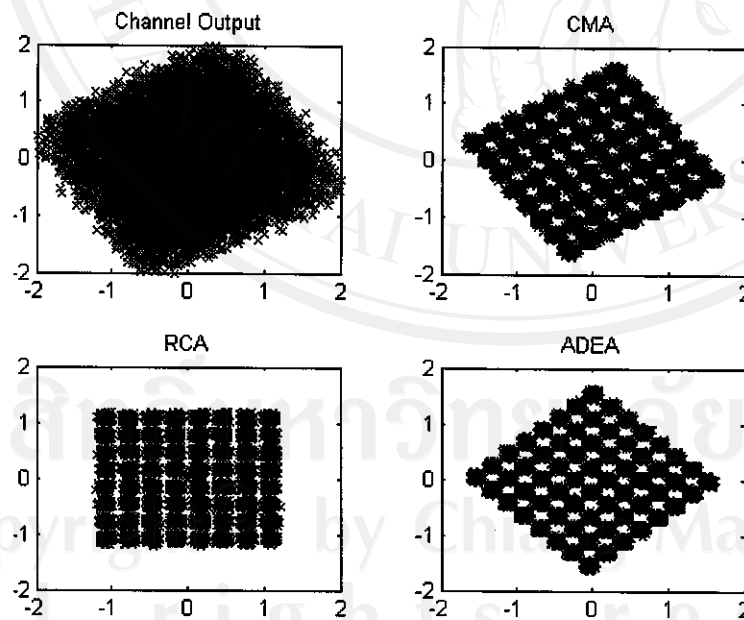
การทดสอบประสิทธิภาพของระบบ ในการกำจัดอินเตอร์ซิมโบลอินเตอร์เฟียร์เรนซ์ที่เกิดขึ้นกับสัญญาณข้อมูลแบบ 64-QAM นั้น เราจะกำหนดให้ค่าการเรียนรู้ของอัลกอริทึมคอนสแตนมอดคูลัสและอัลกอริทึมรีดิวคอนสเทลเลชันมีค่าเท่ากับ 0.0012 และ 0.0022 ตามลำดับ ในกรณีค่าการเรียนรู้ของอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูท ที่อัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 2 และ 3 เท่ากับ 0.00055 และ 0.00036 ตามลำดับ จากการทดสอบ เราพบว่าความสามารถของอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูท ที่อัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 2 บนสัญญาณคอนสเทลเลชันแบบ 64-QAM นั้นใกล้เคียงกับอัลกอริทึมคอนสแตนมอดคูลัสถึงแม้ว่าจะช้ากว่าเล็กน้อย และที่จำนวนข้อมูลเท่ากับ 12000 จุด ผลลัพธ์ถูกปรับเฟสได้อย่างสมบูรณ์ เราสามารถเปรียบเทียบประสิทธิภาพได้จากรูปที่ 4.7 และ 4.8 สำหรับความสามารถของอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทที่อัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 3 นั้น เปรียบเทียบประสิทธิภาพได้จากรูปที่ 4.9 และรูปที่ 4.10 ผลที่ได้รับคล้ายคลึงกับกรณีข้างต้น

4.3.4 ผลการทดลองที่ได้จากลักษณะสัญญาณข้อมูลแบบ 256-QAM

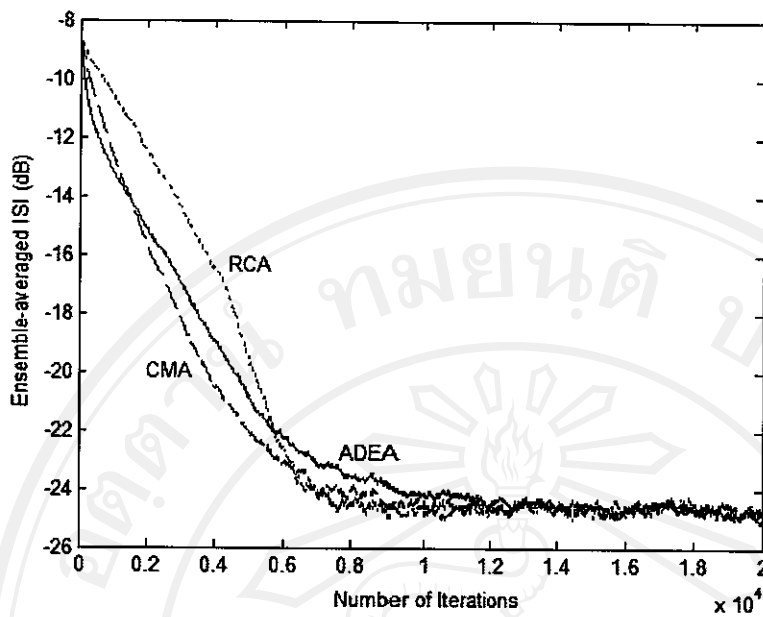
การทดสอบประสิทธิภาพของระบบ ในการกำจัดอินเตอร์ซิมโบลอินเตอร์เฟียร์เรนซ์ที่เกิดขึ้นกับสัญญาณข้อมูลแบบ 256-QAM นั้น เราจะกำหนดให้ค่าการเรียนรู้ของอัลกอริทึมคอนสแตนมอดคูลัสและอัลกอริทึมรีดิวคอนสเทลเลชันมีค่าเท่ากับ 0.0012 และ 0.0013 ตามลำดับ โดยที่การทดสอบบนสัญญาณข้อมูลแบบ 256-QAM เราจะแสดงเฉพาะระดับค่าเฉลี่ยของอินเตอร์ซิมโบลอินเตอร์เฟียร์เรนซ์ที่ได้จากอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูท ที่อัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองต่างๆ เนื่องจากกรณีของสัญญาณข้อมูลแบบ 256-QAM ภาพของคอนสเทลเลชันจะไม่ชัดเจน จึงไม่สามารถแสดงผลที่ได้จากอีควาไลเซอร์ได้ โดยอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทจะใช้ค่าการเรียนรู้เท่ากับ 0.00056 ทั้งสองกรณี ผลที่ได้คือ อัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์ที่อัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 2 นั้น มีประสิทธิภาพดีกว่าอัลกอริทึมคอนสแตนมอดคูลัสเล็กน้อยในช่วงแรกของการลู่อู่เข้าหาระดับ -24 dB แต่จะช้าลงก่อนถึง -24 dB ในขณะที่ประสิทธิภาพของอัลกอริทึมรีดิวคอนสเทลเลชันตกลงไปอย่างเห็นได้ชัด ส่วนอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์ที่อัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 3 จะมีประสิทธิภาพใกล้เคียงกับอัลกอริทึมคอนสแตนมอดคูลัสมาก ในช่วงแรก แต่จะเร็วขึ้นก่อนถึง -24 dB พิจารณาประสิทธิภาพจากรูปที่ 4.11 และรูปที่ 4.12 ในกรณีนี้อัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 3 จะถึงระดับ -24 dB ได้รวดเร็วกว่าอัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 2 เล็กน้อย



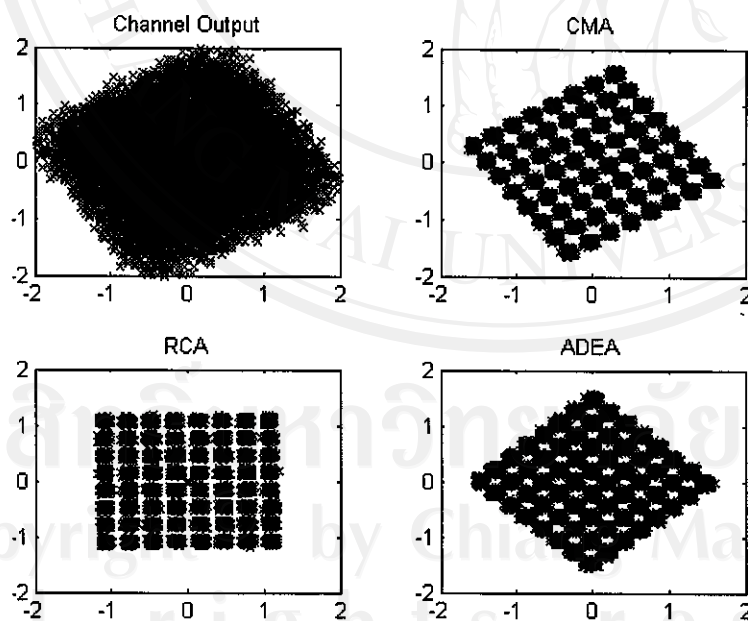
รูปที่ 4.7 แสดงระดับค่าเฉลี่ยของอินเตอร์ซิม โบลอินเตอร์เฟียร์เรนซ์สำหรับสัญญาณข้อมูลแบบ 64-QAM เมื่ออัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทมีอัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 2



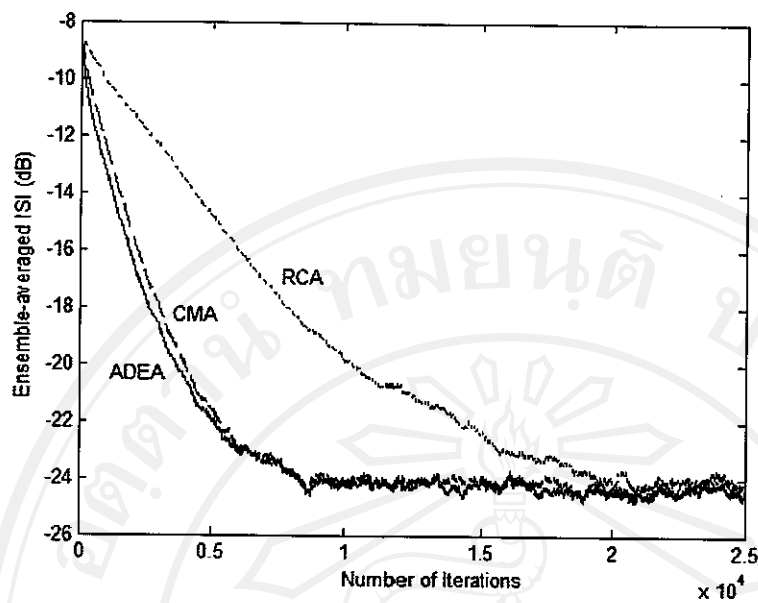
รูปที่ 4.8 แสดงผลลัพธ์ของระบบหลังจากใช้ข้อมูลไป 12000 จุด เมื่ออัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทมีอัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 2



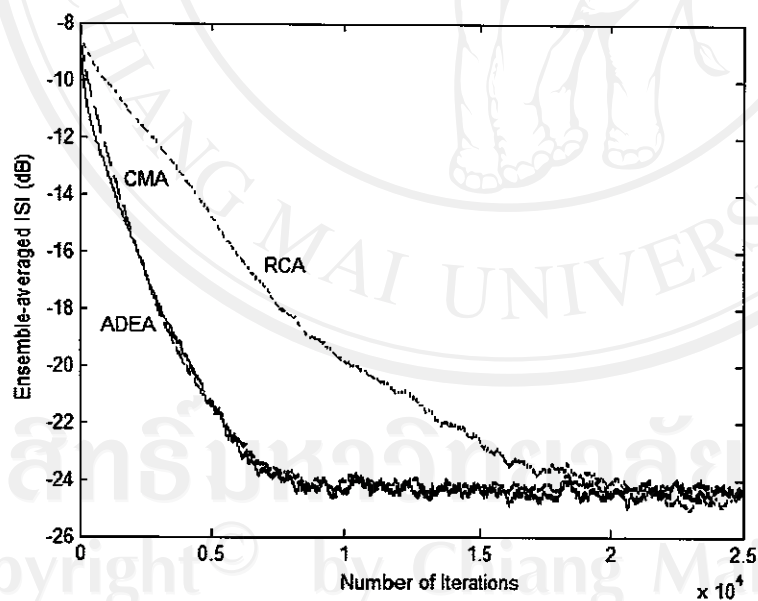
รูปที่ 4.9 แสดงระดับค่าเฉลี่ยของอินเตอร์ซิม โบลอินเตอร์เฟียเรนซ์สำหรับสัญญาณข้อมูลแบบ 64-QAM เมื่ออัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทมีอัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 3



รูปที่ 4.10 แสดงผลลัพธ์ของระบบหลังจากใช้ข้อมูลไป 12000 จุด เมื่ออัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทมีอัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 3



รูปที่ 4.11 แสดงระดับค่าเฉลี่ยของอินเตอร์ซิม โบลอินเตอร์เฟียเรนซ์สำหรับสัญญาณข้อมูลแบบ 256-QAM เมื่ออัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทมีอัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 2



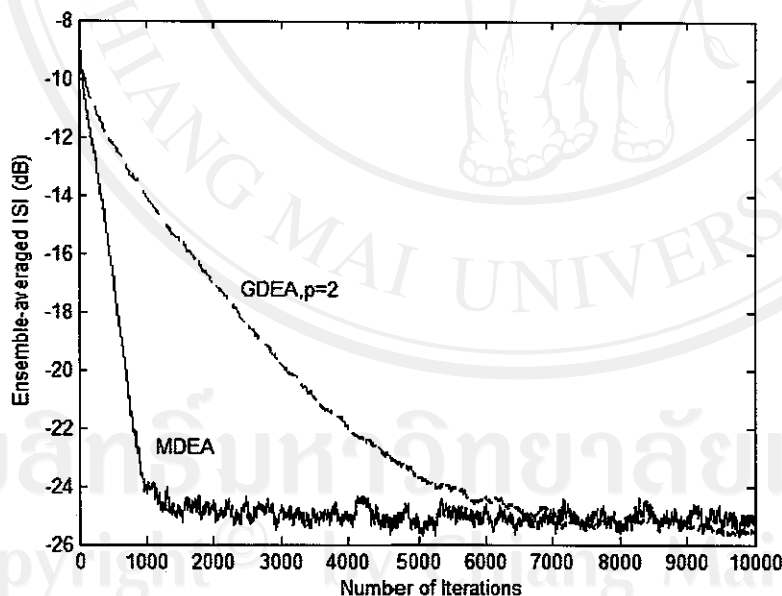
รูปที่ 4.12 แสดงระดับค่าเฉลี่ยของอินเตอร์ซิม โบลอินเตอร์เฟียเรนซ์สำหรับสัญญาณข้อมูลแบบ 256-QAM เมื่ออัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทมีอัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 3

4.3.5 การเปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทและอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์ที่ค่ายกกำลัง $p=2$

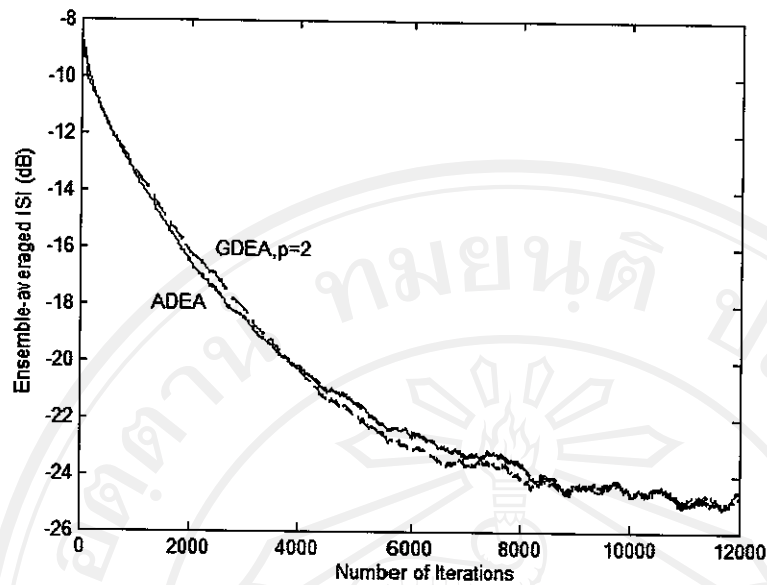
ในการทดสอบนี้ จะเป็นการแสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทที่ดีกว่าอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์ที่ค่ายกกำลัง $p = 2$ โดยเราจะทดสอบเฉพาะอัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองที่เท่ากับ 2 เท่านั้น ซึ่งค่าคงที่ที่ใช้สำหรับอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์ที่ค่ายกกำลัง $p = 2$ นั้น แบ่งออกเป็น 3 กรณี

1. กรณีสัญญาณข้อมูลแบบ 16-QAM เราให้ขนาดของ R_1 เท่ากับ 0.595 ขนาดของ R_2 มีค่าเท่ากับ 1.19 และขนาดค่าการเรียนรู้เท่ากับ 0.0009
2. กรณีสัญญาณข้อมูลแบบ 64-QAM เราให้ขนาดของ R_1 เท่ากับ 0.61 ขนาดของ R_2 มีค่าเท่ากับ 1.22 และขนาดค่าการเรียนรู้เท่ากับ 0.00055
3. กรณีสัญญาณข้อมูลแบบ 256-QAM เราให้ขนาดของ R_1 เท่ากับ 0.61 ขนาดของ R_2 มีค่าเท่ากับ 1.22 และขนาดค่าการเรียนรู้เท่ากับ 0.0004

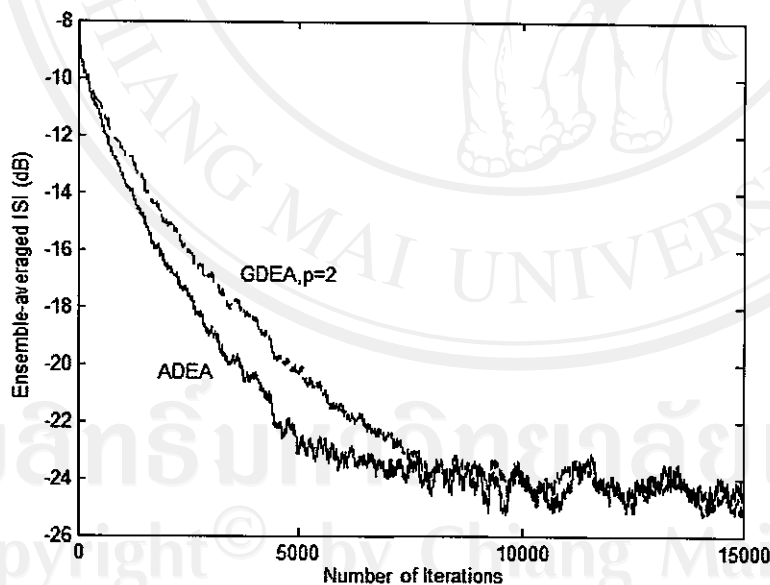
ผลการทดสอบค่าเฉลี่ยอินเตอร์ซิมโบลอินเตอร์เฟียร์เรนซ์สามารถพิจารณาได้จากรูปที่ 4.13 – 4.15 ตามลำดับ



รูปที่ 4.13 เปรียบเทียบประสิทธิภาพอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทและแบบค่ายกกำลัง $p = 2$ ที่อัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 2 สำหรับสัญญาณข้อมูลแบบ 16-QAM



รูปที่ 4.14 เปรียบเทียบประสิทธิภาพอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทและแบบค่ายกกำลัง $p=2$ ที่อัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 2 สำหรับสัญญาณข้อมูลแบบ 64-QAM



รูปที่ 4.15 เปรียบเทียบประสิทธิภาพอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทและแบบค่ายกกำลัง $p=2$ ที่อัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 2 สำหรับสัญญาณข้อมูลแบบ 256 QAM

4.3.6 สรุปผลการทดสอบความสามารถในการกำจัดอินเตอร์ซิมโบลอินเตอร์เฟียร์เรนซ์

จากการทดสอบบนคอนสเทลเลชันแบบ QAM และช่องสัญญาณที่ระบุไว้ เราแสดงให้เห็นถึงความสามารถในการลดระดับอินเตอร์ซิมโบลอินเตอร์เฟียร์เรนซ์ ของอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทที่ไม่ได้แตกต่างจากอัลกอริทึมคอนสแตนต์มอดคูลัสมากนัก ประสิทธิภาพของอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทจะดีกว่าอัลกอริทึมคอนสแตนต์มอดคูลัส เมื่อทำงานบนคอนสเทลเลชันแบบ 16-QAM ซึ่งอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทจะเหนือกว่าอัลกอริทึมคอนสแตนต์มอดคูลัสทุกกรณี ตรงที่อัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทสามารถปรับเฟสของผลลัพธ์ที่ได้จากอีควาไลเซอร์ได้ โดยผลที่ได้จะอยู่ในรูปของคอนสเทลเลชันที่ถูกหมุนไป $\frac{\pi}{4}$ เรเดียน แต่เมื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพโดยรวมกับอัลกอริทึมรีดิวคอนสเทลเลชันการทดสอบแสดงให้เห็นว่า อัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทดีกว่าอัลกอริทึมรีดิวคอนสเทลเลชันในกรณีที่ทำงานบนคอนสเทลเลชันแบบ 16-QAM และ 256-QAM

ในการทดสอบนี้ เรายังสังเกตได้ว่า ประสิทธิภาพการทำงานของระบบอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทที่ถูกกำหนดโดยอัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรอง เราจะพิจารณาตารางที่ 4.2, 4.3 และ 4.4 ซึ่งแสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนข้อมูลที่ต้องการเพื่อที่จะให้ผลลัพธ์ของอีควาไลเซอร์มีระดับของอินเตอร์ซิมโบลอินเตอร์เฟียร์เรนซ์เท่ากับ -24 dB กับอัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองของอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูท โดยข้อมูลค่าเฉลี่ยได้จากการทดสอบจำนวน 1000 ครั้ง จากการตารางที่ 4.2 และ 4.3 อัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 2 จะมีประสิทธิภาพที่ดีกว่าอัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 3 ในกรณีคอนสเทลเลชันแบบ 16-QAM และ 64-QAM แต่จะด้อยกว่าอัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 3 เล็กน้อยในกรณีคอนสเทลเลชันแบบ 256-QAM

ตารางที่ 4.2 ค่าเฉลี่ยและค่าเบี่ยงเบนของจำนวนข้อมูลที่ต้องการเพื่อที่จะเข้าถึงระดับ -24 dB บนข้อมูลสัญญาณข้อมูลแบบ 16-QAM สำหรับอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูท

Ratio	Mean (10^3)	Variance (10^5)
1.5	3.154	2.137
2	1.175	1.2159
2.5	2.975	1.844
3	3.2778	2.2408

ตารางที่ 4.3 ค่าเฉลี่ยและค่าเบี่ยงเบนของจำนวนข้อมูลที่ต้องการเพื่อที่จะเข้าถึงระดับ -24 dB บนข้อมูลสัญญาณข้อมูลแบบ 64-QAM สำหรับอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูท

Ratio	Mean (10^3)	Variance (10^6)
1.5	8.7749	1.1123
2	7.6179	1.1544
2.5	7.8531	1.7594
3	8.5601	1.3026

ตารางที่ 4.4 ค่าเฉลี่ยและค่าเบี่ยงเบนของจำนวนข้อมูลที่ต้องการเพื่อที่จะเข้าถึงระดับ -24 dB บนข้อมูลสัญญาณข้อมูลแบบ 256-QAM สำหรับอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูท

Ratio	Mean (10^3)	Variance (10^6)
1.5	7.5362	1.7468
2	7.2416	1.2548
2.5	7.2663	1.4833
3	7.1300	1.2605

4.4 การวิเคราะห์อัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทเมื่อเข้าสู่ระดับคงที่

Mai และ Sayed (2000) ได้นำเสนอวิธีการคำนวณหาระดับของค่าเฉลี่ยของกำลังสองของความผิดพลาด (Mean Square Error : MSE) ของอีควาไลเซอร์แบบบอดเมื่อเข้าสู่ระดับคงที่ (Steady-State) ในส่วนของบทนี้ เราจะศึกษาระดับของค่าเฉลี่ยของกำลังสองของความผิดพลาดที่หลงเหลืออยู่ในผลลัพธ์ที่ได้จากอีควาไลเซอร์ ตามแนวคิดอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบเจนเนอรัล ที่ p เท่ากับ 1 เข้าสู่ระดับคงที่ โดยจากสมการคอสท์ฟังก์ชันสำหรับอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์

$$J_{ADEA}(n) = E \left[\left| \frac{y_R(n)^2}{R_1} + \frac{y_I(n)^2}{R_2} - R_{CMA}^2 \right| \cdot \left| \frac{y_R(n)^2}{R_2} + \frac{y_I(n)^2}{R_1} - R_{CMA}^2 \right| \right] \quad (4.14)$$

เมื่อเราพิจารณารูปแบบของสมการการปรับค่าแบบสโตคาสติก (Stochastic) ทั่วไป

$$c(n+1) = c(n) + \mu \cdot e_o(n) \cdot x^*(n) \quad (4.15)$$

โดยที่ $e_o(n) = e_{or}(n) + j \cdot e_{oi}(n)$ แทนปริมาณความผิดพลาดของสัญญาณในขณะนั้น ปริมาณความผิดพลาดของสัญญาณในขณะนั้น เมื่อเราลบสมการที่ (4.15) ด้วยค่าสัมประสิทธิ์ของอีควาไลเซอร์แบบบังคับเข้าหาศูนย์ (Zero-Forcing (c_{ZF})) เราจะได้รับสมการที่ใช้อธิบายผลที่ผิดพลาดของการคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ของอีควาไลเซอร์ ซึ่งเป็นค่าที่ได้รับจากความผิดพลาด

ในเวลาก่อนหน้าด้วยสมการต่อไปนี้

$$\tilde{c}(n+1) = \tilde{c}(n) + \mu \cdot e_o(n) \cdot x^*(n) \quad (4.16)$$

โดยที่

$$\tilde{c}(n) = c_{ZF}(n) - c(n) \quad (4.17)$$

กำหนดให้ค่าผิดพลาดก่อน (A Priori Error) และค่าผิดพลาดหลัง (A Posteriori Error) ในการประมาณค่าของความผิดพลาดเท่ากับ

$$e_a(n) = x^T \cdot \tilde{c}(n) \quad (4.18)$$

$$e_p(n) = x^T \cdot \tilde{c}(n+1) \quad (4.19)$$

สมการที่ (4.16) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ $\{\tilde{c}(n+1), \tilde{c}(n), e_a(n), e_p(n)\}$ ด้วยการนำค่า $x(n)$ คูณสมการที่ (4.16) จากทางซ้ายมือ เราจะได้สมการใหม่ ดังนี้

$$e_p(n) = e_a(n) + \mu \cdot \|x(n)\|^2 \cdot e_o(n) \quad (4.20)$$

จัดรูปสมการที่ (4.20) ใหม่ เพื่อหาค่าของ $e_o(n)$ เราจะได้

$$e_o(n) = \frac{e_a(n) - e_p(n)}{\mu \cdot \|x(n)\|^2} \quad (4.21)$$

นำค่าของ $e_o(n)$ ที่ได้รับจากสมการที่ (4.21) แทนลงในสมการที่ (4.16)

$$\tilde{c}(n+1) = \tilde{c}(n) + \frac{[e_a(n) - e_p(n)] \cdot x^*(n)}{\|x(n)\|^2} \quad (4.22)$$

หลังจากจัดรูปสมการที่ (4.22) ใหม่เราจะได้

$$\tilde{c}(n+1) + \frac{e_a(n) \cdot x^*(n)}{\|x(n)\|^2} = \tilde{c}(n) + \frac{e_p(n) \cdot x^*(n)}{\|x(n)\|^2} \quad (4.23)$$

กำหนดให้

$$\bar{\mu}(n) \cong \frac{1}{\|x(n)\|^2} \quad (4.24)$$

เมื่อเรายกค่ายกกำลังสองสมการที่ (4.23) ผลลัพธ์ที่ได้คือความสัมพันธ์ระหว่างพลังงาน จาก Mai และ Sayed (2000)

$$\|\tilde{c}(n+1)\|^2 + \bar{\mu}(n) \cdot |e_a(n)|^2 = \|\tilde{c}(n)\|^2 + \bar{\mu}(n) \cdot |e_p(n)|^2 \quad (4.25)$$

โดยการให้ค่าฟังก์ชันการคาดหมายกับทั้งสองข้างของสมการ เราจะได้

$$E \left[\|\tilde{c}(n+1)\|^2 \right] + E \left[\bar{\mu}(n) \cdot |e_a(n)|^2 \right] = E \left[\|\tilde{c}(n)\|^2 \right] + E \left[\bar{\mu}(n) \cdot |e_p(n)|^2 \right] \quad (4.26)$$

สมมติให้การทำงานของระบบเข้าหาระดับคงที่

$$E \left[\|\tilde{c}(n+1)\|^2 \right] = E \left[\|\tilde{c}(n)\|^2 \right] \quad \text{เมื่อ } n \rightarrow \infty \quad (4.27)$$

กรณีนี้ ผลกระทบจากการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ที่ผิดพลาดจะถูกละทิ้งไปจากสมการที่ (4.26) สิ่งที่ได้คือความสัมพันธ์ ณ ระดับคงที่

$$E \left[\bar{\mu}(n) \cdot |e_a(n)|^2 \right] = E \left[\bar{\mu}(n) \cdot |e_p(n)|^2 \right] \quad (4.28)$$

$$= E \left[\bar{\mu}(n) \cdot \left| e_a(n) - \frac{\mu}{\bar{\mu}(n)} \cdot e_e(n) \right|^2 \right] \quad (4.29)$$

เพื่อความสะดวกต่อการแสดงผล เรากำหนดตัวแปรใหม่ เมื่อระบบเข้าหาระดับคงที่

$$e_a \cong e_a(n), \quad \bar{\mu} \cong \bar{\mu}(n), \quad y \cong y(n), \quad x \cong x(n), \quad \text{เมื่อ } n \rightarrow \infty \quad (4.30)$$

และ

$$y = y_r + j \cdot y_i, s = s_r + j \cdot s_i, e_a = e_{ar} + j \cdot e_{ai} \quad (4.31)$$

โดยที่

$$y = s + e_a \quad (4.32)$$

โดยที่อักษร i และ j ใช้แสดงถึงค่าที่เป็นจำนวนจริงและจำนวนจินตภาพ ตามลำดับ

สมมุติฐานที่ 1 : เมื่อระบบเข้าหาระดับคงที่ ($n \rightarrow \infty$) สัญญาณที่ถูกส่งไป $s(n-D)$ และค่าประมาณของความผิดพลาด $e_a(n)$ จะเป็นอิสระ (Independent) ต่อกัน นั่นคือ ค่าของ $E \left[s^*(n-D) \cdot e_a(n) \right] = 0$ เนื่องจากค่าเฉลี่ยของ $s(n-D)$ ถูกสมมุติให้เท่ากับ 0

สมมุติฐานนี้ถือเป็นที่ยอมรับกัน เนื่องจากมีความจำเป็นอย่างมากที่ต้องการให้ค่าประมาณของความผิดพลาด $e_a(n)$ จากอีควาไลเซอร์นั้น ไม่ได้รับผลกระทบจากสัญญาณของข้อมูลที่ใช้ในการส่ง $\{s(n)\}$ ณ ระดับคงที่

สมมุติฐานที่ 2 : ค่าของพลังงานที่ถูกปรับขนาด (Scale) $\mu^2 \cdot \|x(n)\|^2$ เป็นอิสระต่อค่าของผลลัพธ์ที่ได้จากอีควาไลเซอร์ $\{y(n)\}$ ณ ระดับคงที่

สมมุติฐานนี้กำหนดให้ค่าพลังงานที่ถูกปรับของเวกเตอร์ข้อมูลที่ได้รับ (ไม่ใช่ตัวข้อมูลที่ได้รับ) นั้น เป็นอิสระต่อผลลัพธ์ที่ได้จากอีควาไลเซอร์สมมุติฐานนี้จะเป็นจริงมากขึ้น เมื่อความยาวของวงจรกรองมีขนาดยาวมากขึ้น และปริมาณค่าการเรียนรู้มีขนาดที่เล็กมากพอ เพื่อที่จะทำให้สมมุติฐานนี้เป็นจริง เรากำหนดให้ค่าของข้อมูลที่ได้รับ $\{s(n)\}$ นั้นมีลักษณะเป็นอิสระและไม่เกี่ยวข้องต่อกันและกันและขนาดค่าเบี่ยงเบนของ $\|x(n)\|^2$ อยู่ในรูปของ N (ความยาวของอีควาไลเซอร์) ด้วยเหตุนี้ ถ้าค่าการเรียนรู้ μ อยู่ในรูปของ $1/N$ จะทำให้ค่าเบี่ยงเบนของ $\|x(n)\|^2$ จะอยู่ในรูปของ $1/N$ ซึ่งปริมาณจะลดลงเมื่อความยาวของวงจรกรองเพิ่มมากขึ้น หมายความว่า ค่า

$\mu^2 \cdot \|x(n)\|^2$ จะรู้เข้าหาค่าคงที่ ซึ่งสามารถสมมุติได้ว่าเป็นอิสระต่อผลลัพธ์ที่ได้จากอีควาไลเซอร์ $y(n)$ และจากสมการที่ (4.29) เราจะได้

$$E \left[\bar{\mu} \cdot |e_a|^2 \right] = E \left[\bar{\mu} \cdot \left| e_a - \frac{\mu}{\bar{\mu}} \cdot e_o \right|^2 \right] \quad (4.33)$$

จากสมการที่ (4.33)

$$\begin{aligned} E \left[\bar{\mu} \cdot |e_a|^2 \right] &= E \left[\bar{\mu} \cdot |e_a|^2 \right] - \mu \cdot E \left[e_a \cdot e_o^* + e_a^* \cdot e_o \right] \\ &\quad + \mu^2 \cdot E \left[\|x\|^2 \cdot |e_o|^2 \right] \end{aligned} \quad (4.34)$$

เราจะได้ความสัมพันธ์

$$\mu^2 \cdot E \left[\|x\|^2 \cdot |e_o|^2 \right] = \mu \cdot E \left[e_a \cdot e_o^* + e_a^* \cdot e_o \right] \quad (4.35)$$

สิ่งที่เราต้องการคือ $E \left[|e_a|^2 \right]$ มีวิธีการคำนวณหาค่าประมาณของ $E \left[|e_a|^2 \right]$ ดังนี้

จากสมการที่ (4.35)

$$\begin{aligned} \mu \cdot E \left[e_a \cdot e_o^* + e_a^* \cdot e_o \right] &= \mu \cdot E \left[(e_{ar} - j \cdot e_{ai}) \cdot (e_{or} + j \cdot e_{oi}) \right. \\ &\quad \left. + (e_{ar} + j \cdot e_{ai}) \cdot (e_{or} - j \cdot e_{oi}) \right] \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$= \mu \cdot E \left[e_{ar} \cdot e_{or} - j \cdot e_{ai} \cdot e_{or} + j \cdot e_{ar} \cdot e_{oi} + e_{ai} \cdot e_{oi} \right. \quad (4.37)$$

$$\left. + e_{ar} \cdot e_{or} + j \cdot e_{ai} \cdot e_{or} - j \cdot e_{ar} \cdot e_{oi} + e_{ai} \cdot e_{oi} \right]$$

$$= \mu \cdot E \left[2 \cdot e_{ar} \cdot e_{or} + 2 \cdot e_{ai} \cdot e_{oi} \right] \quad (4.38)$$

$$= 2 \cdot \mu \cdot E \left[e_{ar} \cdot e_{or} + e_{ai} \cdot e_{oi} \right] \quad (4.39)$$

จากอัลกอริทึมดับเบิ้ลลิฟต์แบบแอฟโซลูท ค่า e_{or} และค่า e_{oi} มีลักษณะตามสมการต่อไปนี้

$$A = \frac{y_r(n)^2}{R_1} + \frac{y_i(n)^2}{R_2} - R_{CMA}^2 \quad (4.40)$$

$$B = \frac{y_r(n)^2}{R_2} + \frac{y_i(n)^2}{R_1} - R_{CMA}^2 \quad (4.41)$$

เราจะได้

$$e_{or,ADEA} = \left(|A| \cdot \text{sign}(B) \cdot \frac{1}{R_2} + |B| \cdot \text{sign}(A) \cdot \frac{1}{R_1} \right) \cdot y_r(n) \quad (4.42)$$

$$e_{oi,ADEA} = \left(|A| \cdot \text{sign}(B) \cdot \frac{1}{R_1} + |B| \cdot \text{sign}(A) \cdot \frac{1}{R_2} \right) \cdot y_i(n) \quad (4.43)$$

จาก

$$|u| = u \cdot \text{sign}(u) \quad (4.44)$$

ทำให้ค่า $e_{or}(n)$ และค่า $e_{oi}(n)$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปใหม่ได้ดังนี้

$$e_{or,ADEA} = \left(A \cdot \frac{1}{R_2} + B \cdot \frac{1}{R_1} \right) \cdot \text{sign}(A) \cdot \text{sign}(B) \cdot y_r(n) \quad (4.45)$$

$$e_{oi,ADEA} = \left(A \cdot \frac{1}{R_1} + B \cdot \frac{1}{R_2} \right) \cdot \text{sign}(A) \cdot \text{sign}(B) \cdot y_i(n) \quad (4.46)$$

แทนค่าของสมการที่ลงในสมการที่ เราจะได้

$$\begin{aligned} \mu \cdot E \left[e_a \cdot e_o^* + e_a^* \cdot e_o \right] &= 2 \cdot \mu \cdot E \left[e_{ar} \cdot \left(A \cdot \frac{1}{R_2} + B \cdot \frac{1}{R_1} \right) \cdot \text{sign}(A) \cdot \text{sign}(B) \cdot y_r(n) \right. \\ &\quad \left. + e_{ar} \cdot \left(A \cdot \frac{1}{R_2} + B \cdot \frac{1}{R_1} \right) \cdot \text{sign}(A) \cdot \text{sign}(B) \cdot y_r(n) \right] \quad (4.47) \end{aligned}$$

จากสมมติฐานที่ 1 และ 2 สมมติฐานที่กำหนดให้ของการเรียนรู้มีขนาดน้อยเพียงพอ และสมมติฐานที่กำหนดให้ ณ ระดับคงที่ ค่าของความผิดพลาด e_{ar}^2 และ e_{ai}^2 มีค่าน้อยมากเป็นผลให้ส่วนที่มีค่ายกกำลังสูงกว่านั้นสามารถละทิ้งได้ และเราสมมติให้ค่า e_a ไม่มีผลต่อค่าของ $\text{sign}(A) \cdot \text{sign}(B)$ ทำให้เราสามารถดึงค่านี้ออกจากฟังก์ชันการคาดหมาย (Expectation Function) และกำหนดให้มีค่าคงที่คือ

$$C = E[\text{sign}(A) \cdot \text{sign}(B)] \quad (4.48)$$

จากสมการที่ (4.47) เราจะได้สมการใหม่ดังนี้

$$\begin{aligned} \mu \cdot E \left[e_a \cdot e_o^* + e_a^* \cdot e_o \right] &= 2 \cdot \mu \cdot E \left[e_{ar} \cdot \left(A \cdot \frac{1}{R_2} + B \cdot \frac{1}{R_1} \right) \cdot y_r(n) \right. \\ &\quad \left. + e_{ai} \cdot \left(A \cdot \frac{1}{R_1} + B \cdot \frac{1}{R_2} \right) \cdot y_i(n) \right] \cdot C \end{aligned} \quad (4.49)$$

กำหนดให้

$$a = \frac{1}{R_1 \cdot R_2}, \quad b = \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} \quad \text{และ} \quad c = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (4.50)$$

เราสามารถลดรูปของสมการ $\left(A \cdot \frac{1}{R_2} + B \cdot \frac{1}{R_1} \right) \cdot y_r(n)$ และ $\left(A \cdot \frac{1}{R_1} + B \cdot \frac{1}{R_2} \right) \cdot y_i(n)$ ได้ดังนี้

$$\left(A \cdot \frac{1}{R_2} + B \cdot \frac{1}{R_1} \right) \cdot y_r(n) = \left\{ 2 \cdot a \cdot y_r^2 + b \cdot y_i^2 - c \cdot R_{CMA}^2 \right\} \cdot y_r \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} &= 2 \cdot a \cdot (s_r^3 + 2 \cdot s_r^2 \cdot e_{ar} + s_r \cdot e_{ar}^2) \\ &\quad + b \cdot (s_r \cdot s_i^2 + 2 \cdot s_r \cdot s_i \cdot e_{ai} + s_r \cdot e_{ai}^2) - c \cdot s_r \cdot R_{CMA}^2 \\ &\quad + 2 \cdot a \cdot (s_r^2 \cdot e_{ar} + 2 \cdot s_r \cdot e_{ar}^2 + e_{ar}^3) \\ &\quad + b \cdot (s_i^2 \cdot e_{ar} + 2 \cdot s_i \cdot e_{ar} \cdot e_{ai} + e_{ar} \cdot e_{ai}^2) - c \cdot e_{ar} \cdot R_{CMA}^2 \end{aligned} \quad (4.52)$$

และ

$$\left(A \cdot \frac{1}{R_1} + B \cdot \frac{1}{R_2} \right) \cdot y_i(n) = \{ 2 \cdot a \cdot y_i^2 + b \cdot y_r^2 - c \cdot R_{CMA}^2 \} \cdot y_i \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} &= 2 \cdot a \cdot (s_i^3 + 2 \cdot s_i^2 \cdot e_{ai} + s_i \cdot e_{ai}^2) \\ &\quad + b \cdot (s_i \cdot s_r^2 + 2 \cdot s_r \cdot s_i \cdot e_{ar} + s_i \cdot e_{ar}^2) - c \cdot s_i \cdot R_{CMA}^2 \\ &\quad + 2 \cdot a \cdot (s_i^2 \cdot e_{ai} + 2 \cdot s_i \cdot e_{ai}^2 + e_{ai}^3) \\ &\quad + b \cdot (s_r^2 \cdot e_{ai} + 2 \cdot s_r \cdot e_{ar} \cdot e_{ai} + e_{ai} \cdot e_{ar}^2) - c \cdot e_{ai} \cdot R_{CMA}^2 \end{aligned} \quad (4.54)$$

แทนค่าของสมการที่ (4.52) และ (4.54) ลงในสมการ (4.49) ประมาณค่าโดยตัดส่วนที่มีค่ายกกำลังของ e_{ar} และ e_{ai} มากกว่า 2 ออก และจากความเป็นอิสระของกันและกันระหว่างส่วนจำนวนจริงและส่วนจินตภาพ เราจะได้

$$\mu \cdot E \left[e_a^* \cdot e_o + e_a \cdot e_o^* \right] \approx 2 \cdot \mu \cdot C \cdot E \left[e_{ar}^2 \right] \cdot E \left[(6 \cdot a + b) \cdot (s_r^2 + s_i^2) - 2 \cdot c \cdot R_{CMA}^2 \right] \quad (4.55)$$

ในส่วนที่สอง $\mu^2 \cdot \left[\|x\|^2 \cdot |e_o|^2 \right]$ สามารถพิจารณาได้ดังนี้

$$\mu^2 \cdot E \left[\|x\|^2 \cdot |\tilde{e}|^2 \right] = \mu^2 \cdot E \left[\|x\|^2 \right] \cdot E \left[e_{or}^2 + e_{oi}^2 \right] \quad (4.56)$$

แทนค่าของ e_{or} และค่า e_{oi} ลงในสมการข้างต้น เราจะได้

$$\begin{aligned} E \left[e_{or}^2 + e_{oi}^2 \right] &= E \left[\left(\left(A \cdot \frac{1}{R_2} + B \cdot \frac{1}{R_1} \right) \cdot \text{sign}(A) \cdot \text{sign}(B) \cdot y_R(n) \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\left(A \cdot \frac{1}{R_1} + B \cdot \frac{1}{R_2} \right) \cdot \text{sign}(A) \cdot \text{sign}(B) \cdot y_I(n) \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (4.57)$$

จาก $(\text{sign}(u))^2 = 1$ ทำให้สมการที่ (4.57) มีค่าเท่ากับ

$$E \left[e_{or}^2 + e_{oi}^2 \right] = E \left[\left(\left(A \cdot \frac{1}{R_2} + B \cdot \frac{1}{R_1} \right) \cdot y_R(n) \right)^2 + \left(\left(A \cdot \frac{1}{R_1} + B \cdot \frac{1}{R_2} \right) \cdot y_I(n) \right)^2 \right] \quad (4.58)$$

โดยที่

$$E \left[\left(\left(A \cdot \frac{1}{R_2} + B \cdot \frac{1}{R_1} \right) \cdot y_R(n) \right)^2 \right] = E \left[\left\{ (2 \cdot a \cdot y_r^2 + b \cdot y_i^2 - c \cdot R_{CMA}^2) \cdot y_r \right\}^2 \right] \quad (4.59)$$

$$= E \left[(2 \cdot a \cdot y_r^3 + b \cdot y_r \cdot y_i^2 - c \cdot R_{CMA}^2 \cdot y_r)^2 \right] \quad (4.60)$$

$$= E \left[4 \cdot a^2 \cdot y_r^6 + 2 \cdot a \cdot b \cdot y_r^4 \cdot y_i^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot R_{CMA}^2 \cdot y_r^4 + 2 \cdot a \cdot b \cdot y_r^4 \cdot y_i^2 + b^2 \cdot y_r^2 \cdot y_i^4 - b \cdot c \cdot R_{CMA}^2 \cdot y_r^2 \cdot y_i^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot R_{CMA}^2 \cdot y_r^4 - b \cdot c \cdot R_{CMA}^2 \cdot y_r^2 \cdot y_i^2 + c^2 \cdot (R_{CMA}^2)^2 \cdot y_r^2 \right] \quad (4.61)$$

$$= E \left[4 \cdot a^2 \cdot y_r^6 + b^2 \cdot y_r^2 \cdot y_i^4 + c^2 \cdot (R_{CMA}^2)^2 \cdot y_r^2 + 4 \cdot a \cdot b \cdot y_r^4 \cdot y_i^2 - 4 \cdot a \cdot c \cdot R_{CMA}^2 \cdot y_r^4 - 2 \cdot b \cdot c \cdot R_{CMA}^2 \cdot y_r^2 \cdot y_i^2 \right] \quad (4.62)$$

จากสมการไบนอมิอัล (Binomial) และด้วยสมมุติฐานที่ 1 และ 2 เราสามารถกระจายหาค่าประมาณในแต่ละเทอมย่อยของสมการทางฝั่งขวามือของสมการที่ (4.62) ได้ดังนี้

$$E \left[4 \cdot a^2 \cdot y_r^6 \right] \approx 4 \cdot a^2 \cdot E \left[s_r^6 + 15 \cdot s_r^4 \cdot e_{ar}^2 \right] \quad (4.63)$$

$$E \left[b^2 \cdot y_r^2 \cdot y_i^4 \right] \approx b^2 \cdot E \left[s_r^2 \cdot s_i^4 + 6 \cdot s_r^2 \cdot s_i^2 \cdot e_{ai}^2 + s_i^4 \cdot e_{ar}^2 + 6 \cdot s_i^2 \cdot e_{ar}^2 \cdot e_{ai}^2 \right] \quad (4.64)$$

$$E \left[c^2 \cdot (R_{CMA}^2)^2 \cdot y_r^2 \right] \approx c^2 \cdot (R_{CMA}^2)^2 \cdot E \left[s_r^2 + e_{ar}^2 \right] \quad (4.65)$$

$$E \left[4 \cdot a \cdot b \cdot y_r^4 \cdot y_i^2 \right] \approx 4 \cdot a \cdot b \cdot E \left[s_r^4 \cdot s_i^2 + 6 \cdot s_r^2 \cdot s_i^2 \cdot e_{ar}^2 + s_r^4 \cdot e_{ai}^2 + 6 \cdot s_r^2 \cdot e_{ar}^2 \cdot e_{ai} \right] \quad (4.66)$$

$$E \left[4 \cdot a \cdot c \cdot R_{CMA}^2 \cdot y_r^4 \right] \approx 4 \cdot a \cdot c \cdot R_{CMA}^2 \cdot E \left[s_r^4 + 6 \cdot s_r^2 \cdot e_{ar}^2 \right] \quad (4.67)$$

และ

$$E \left[2 \cdot b \cdot c \cdot R_{CMA}^2 \cdot y_r^2 \cdot y_i^2 \right] \approx 2 \cdot b \cdot c \cdot R_{CMA}^2 \cdot E \left[s_r^2 \cdot s_i^2 + s_i^2 \cdot e_{ar}^2 + s_r^2 \cdot e_{ai}^2 \right] \quad (4.68)$$

เรานำสมการที่ (4.63) ถึงสมการที่ (4.68) แทนลงในสมการที่ (4.62) เราจะได้สมการสำหรับการ

หาค่าประมาณของ $E \left[e_{or}^2 \right]$ และด้วยวิธีเดียวกัน เราสามารถหาสมการค่าประมาณของ

$E \left[e_{oi}^2 \right]$ ได้ดังนี้

นำผลลัพธ์ที่ได้ แทนค่าทั้งหมดลงในสมการที่ (4.58) เราจะได้

$$\begin{aligned}
 E \left[e_{or}^2 + e_{oi}^2 \right] \approx & E \left[4 \cdot a^2 \cdot (s_r^6 + 15 \cdot s_r^4 \cdot e_{ar}^2) + c^2 \cdot (R_{CMA}^2)^2 \cdot (s_r^2 + e_{ar}^2) \right. \\
 & + b^2 \cdot (s_r^2 \cdot s_i^4 + 6 \cdot s_r^2 \cdot s_i^2 \cdot e_{ai}^2 + s_i^4 \cdot e_{ar}^2 + 6 \cdot s_i^2 \cdot e_{ar}^2 \cdot e_{ai}^2) \\
 & + 4 \cdot a \cdot b \cdot (s_r^4 \cdot s_i^2 + 6 \cdot s_r^2 \cdot s_i^2 \cdot e_{ar}^2 + s_r^4 \cdot e_{ai}^2 + 6 \cdot s_r^2 \cdot e_{ar}^2 \cdot e_{ai}^2) \\
 & - 4 \cdot a \cdot c \cdot R_{CMA}^2 \cdot (s_r^4 + 6 \cdot s_r^2 \cdot e_{ar}^2) - 4 \cdot a \cdot c \cdot R_{CMA}^2 \cdot (s_i^4 + 6 \cdot s_i^2 \cdot e_{ai}^2) \\
 & - 2 \cdot b \cdot c \cdot R_{CMA}^2 \cdot (s_r^2 \cdot s_i^2 + s_i^2 \cdot e_{ar}^2 + s_r^2 \cdot e_{ai}^2) \\
 & + 4 \cdot a^2 \cdot (s_i^6 + 15 \cdot s_i^4 \cdot e_{ai}^2) + c^2 \cdot (R_{CMA}^2)^2 \cdot (s_i^2 + e_{ai}^2) \\
 & + b^2 \cdot (s_r^4 \cdot s_i^2 + 6 \cdot s_r^2 \cdot s_i^2 \cdot e_{ar}^2 + s_r^4 \cdot e_{ai}^2 + 6 \cdot s_r^2 \cdot e_{ar}^2 \cdot e_{ai}^2) \\
 & + 4 \cdot a \cdot b \cdot (s_r^2 \cdot s_i^4 + 6 \cdot s_r^2 \cdot s_i^2 \cdot e_{ai}^2 + s_i^4 \cdot e_{ar}^2 + 6 \cdot s_i^2 \cdot e_{ar}^2 \cdot e_{ai}^2) \\
 & \left. - 2 \cdot b \cdot c \cdot R_{CMA}^2 \cdot (s_r^2 \cdot s_i^2 + s_i^2 \cdot e_{ar}^2 + s_r^2 \cdot e_{ai}^2) \right] \quad (4.69)
 \end{aligned}$$

จัดรูปสมการที่ (4.69) ใหม่ เพื่อให้ง่ายต่อการพิจารณา

$$\begin{aligned}
 E \left[e_{or}^2 + e_{oi}^2 \right] \approx & E \left[4 \cdot a^2 \cdot (s_r^6 + s_i^6) + (b^2 + 4 \cdot a \cdot b) \cdot (s_r^2 \cdot s_i^4 + s_r^4 \cdot s_i^2) \right. \\
 & + c^2 \cdot (R_{CMA}^2)^2 \cdot (s_r^2 + s_i^2) - 4 \cdot a \cdot c \cdot R_{CMA}^2 \cdot (s_r^4 + s_i^4) \\
 & \left. - 4 \cdot b \cdot c \cdot R_{CMA}^2 \cdot (s_r^2 \cdot s_i^2) \right] \quad (4.70) \\
 & + E \left[(60 \cdot a^2 + 4 \cdot a \cdot b + b^2) \cdot (s_r^4 + s_i^4) \right. \\
 & + (12 \cdot b^2 + 48 \cdot a \cdot b) \cdot (s_r^2 \cdot s_i^2) + 2 \cdot c^2 \cdot (R_{CMA}^2)^2 \\
 & \left. - (24 \cdot a \cdot c \cdot R_{CMA}^2 + 4 \cdot b \cdot c \cdot R_{CMA}^2) \cdot (s_r^2 + s_i^2) \right] \cdot E \left[e_{ar}^2 \right]
 \end{aligned}$$

จากสมการที่ (4.55) และสมการที่ (4.70) เราสามารถหาค่า $E[|e_a|^2]$ ได้ดังนี้

$$E[e_{ar}^2] \approx \frac{E_1}{E_2} \quad (4.71)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} E_1 = & \mu^2 \cdot E[\|x\|^2] \cdot E \left[4 \cdot a^2 \cdot (s_r^6 + s_i^6) \right. \\ & + (b^2 + 4 \cdot a \cdot b) \cdot (s_r^2 \cdot s_i^4 + s_r^4 \cdot s_i^2) \\ & + c^2 \cdot R_{CMA}^4 \cdot (s_r^2 + s_i^2) - 4 \cdot a \cdot c \cdot R_{CMA}^2 \cdot (s_r^4 + s_i^4) \\ & \left. - 4 \cdot b \cdot c \cdot R_{CMA}^2 \cdot (s_r^2 \cdot s_i^2) \right] \end{aligned} \quad (4.72)$$

$$\begin{aligned} E_2 = & 2 \cdot \mu \cdot C \cdot E \left[(6 \cdot a + b) \cdot (s_r^2 + s_i^2) - 2 \cdot c \cdot R_{CMA}^2 \right] \\ & - \mu^2 \cdot E[\|x\|^2] \cdot E \left[(60 \cdot a^2 + 4 \cdot a \cdot b + b^2) \cdot (s_r^4 + s_i^4) \right. \\ & + (12 \cdot b^2 + 48 \cdot a \cdot b) \cdot (s_r^2 \cdot s_i^2) + 2 \cdot c^2 \cdot R_{CMA}^4 \\ & \left. - (24 \cdot a \cdot c \cdot R_{CMA}^2 + 4 \cdot b \cdot c \cdot R_{CMA}^2) \cdot (s_r^2 + s_i^2) \right] \end{aligned} \quad (4.73)$$

และ

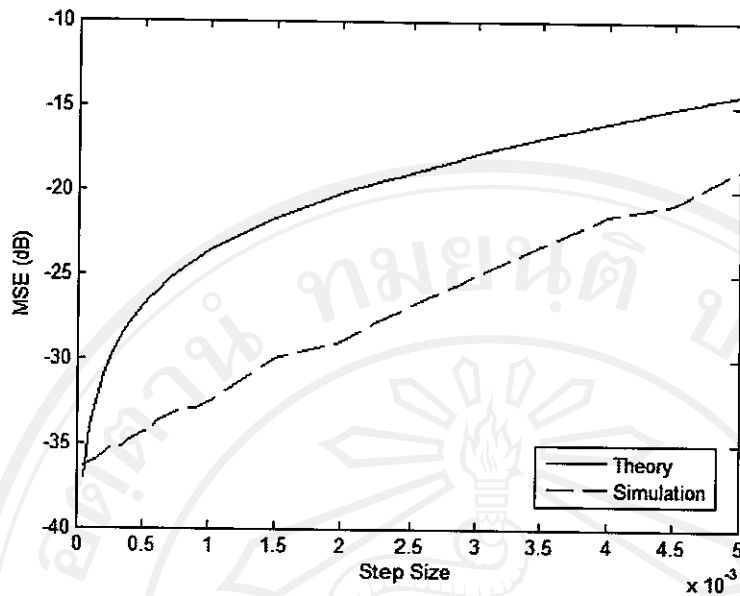
$$E[|e_a|^2] \approx 2 \cdot E[e_{ar}^2] \quad (4.74)$$

4.4.1 การทดสอบประสิทธิภาพค่าเฉลี่ยของกำลังสองของความผิดพลาด ณ ระดับคงที่

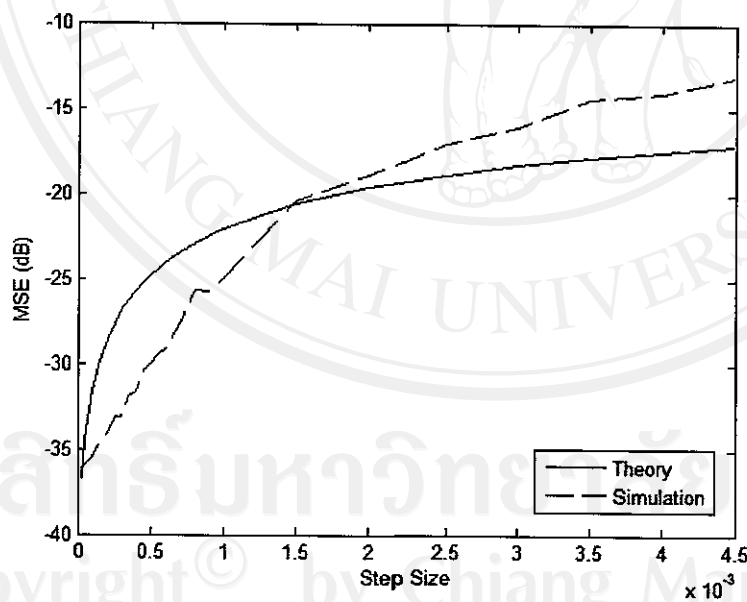
ในการทดสอบ $\|x\|^2$ คือค่า Norm ของสัญญาณที่ได้รับจากช่องสัญญาณ โดยค่าของ $E[\|x\|^2]$ จะประมาณจากข้อมูลทั้งหมด 200000 ข้อมูล เพื่อให้เหมาะสมกับช่วงของการ

เรียนรู้ ซึ่งสัญญาณข้อมูลแบบ 16-QAM นั้น ค่าของ $E[|s(n)|^2]$ เท่ากับ 1 ค่าของ $E[|s(n)|^4]$ เท่ากับ 1.32 และค่าของ $E[|s(n)|^6]$ เท่ากับ 1.96 สำหรับค่าคงที่ของอัลกอริทึมดับเบิลลิฟต์แบบแอฟโซลูทนั้นนำมาจากตารางที่ 4.1 เราทำการทดสอบกับอัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 2 และ 3 โดยให้เส้นประแทนข้อมูลของระดับค่าเฉลี่ยของกำลังสองของความผิดพลาดที่ได้จากการทดลอง และเส้นทึบแทนข้อมูลของระดับค่าเฉลี่ยของกำลังสองของความผิดพลาดที่ได้จากการคำนวณด้วยสมการที่ (4.71) และสมการที่ (4.74) พิจารณาผลได้จากรูปที่ 4.16 และรูปที่ 4.17 ในขณะที่การทดสอบของบนสัญญาณข้อมูลแบบ 64-QAM นั้น ให้ค่าของ $E[|s(n)|^2]$ เท่ากับ 1 ค่าของ $E[|s(n)|^4]$ เท่ากับ 1.381 และค่าของ $E[|s(n)|^6]$ เท่ากับ 2.2258 พิจารณาผลได้จากรูปที่ 4.18 และรูปที่ 4.19 และสุดท้ายการทดสอบของบนสัญญาณข้อมูลแบบ 256-QAM ให้ค่าของ $E[|s(n)|^2]$ เท่ากับ 1 ค่าของ $E[|s(n)|^4]$ เท่ากับ 1.3953 และค่าของ $E[|s(n)|^6]$ เท่ากับ 2.2922 พิจารณาผลได้จากรูปที่ 4.20 และรูปที่ 4.21

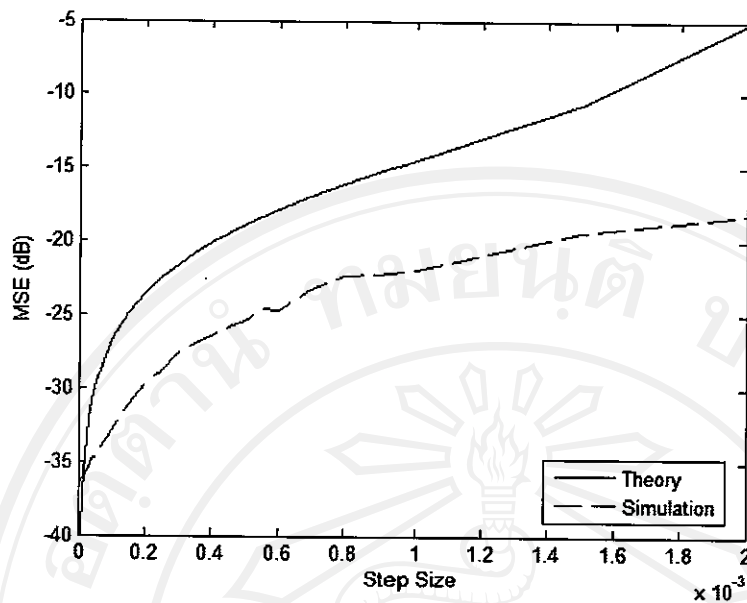
เราสามารถวิเคราะห์ผลการทดลองได้ดังนี้ กรณีสัญญาณข้อมูลแบบ 16-QAM พิจารณาจากรูปที่ 4.16 เราพบว่า สมการที่ได้มานั้น เป็นการประมาณค่าของค่าเฉลี่ยของกำลังสองของความผิดพลาด ณ ระดับคงที่แบบหยาบ แต่สามารถระบุทิศทางได้คร่าวๆ ในขณะที่รูปที่ 4.17 แสดงถึงการตัดกันของเส้นของค่าเฉลี่ยของกำลังสองของความผิดพลาดที่เป็นค่าประมาณจากสมการ และเส้นของค่าเฉลี่ยของกำลังสองของความผิดพลาดที่ได้จากการทดลอง เนื่องจากค่าของที่ได้จากการคำนวณนั้นมีลักษณะเป็นเลขแบบคอมเพลกซ์ เราจึงประมาณค่าที่ได้รับจากการคำนวณ ซึ่งสามารถใช้ทำนายทิศทางการเพิ่มค่าเฉลี่ยของกำลังสองของความผิดพลาดของได้ สำหรับกรณีสัญญาณข้อมูลแบบ 64-QAM พิจารณาจากรูปที่ 4.18 และรูปที่ 4.19 เราพบว่า ในกรณีนี้ สมการที่เราใช้ในการประมาณค่าเฉลี่ยของกำลังสองของความผิดพลาดนั้น จะเป็นขอบเขตบน (Upper Bound) ซึ่งมีทิศทางที่ขนานไปกับค่าเฉลี่ยของกำลังสองของความผิดพลาดที่ได้จากการทดลอง โดยที่ความแตกต่างจะเพิ่มมากขึ้น เมื่อค่าการเรียนรู้เพิ่มมากขึ้น กรณีสัญญาณข้อมูลแบบ 256-QAM นั้น พิจารณาจากรูปที่ 4.20 และรูปที่ 4.21 เช่นเดียวกันกับผลที่ได้รับจากรูปที่ 4.18 และรูปที่ 4.19 สมการที่เราหาได้นั้น สามารถทำนายทิศทางของการเพิ่มตัวของค่าเฉลี่ยของกำลังสองของความผิดพลาด ณ ระดับคงที่ได้ แต่ก็ยังเป็นการประมาณค่าแบบหยาบ



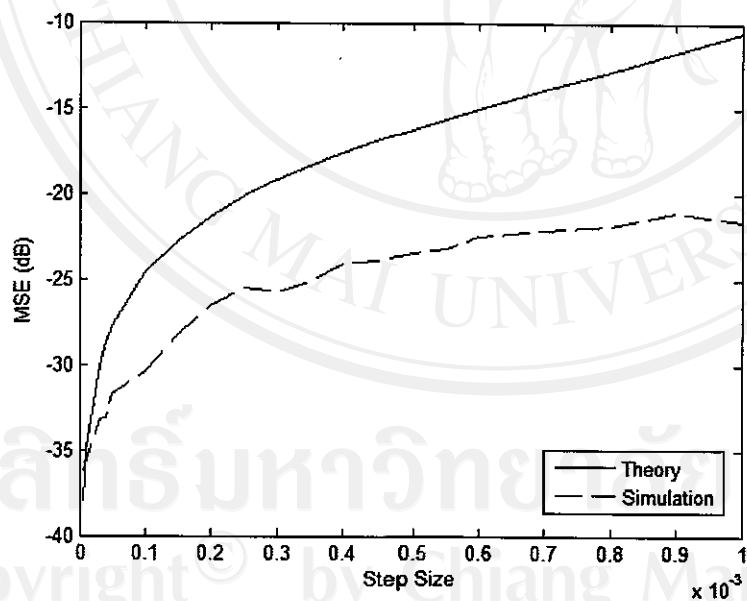
รูปที่ 4.16 ข้อมูลระดับค่าเฉลี่ยของกำลังสองของความผิดพลาด ณ ระดับกึ่งที่ สำหรับผลที่ได้จากการทดลองและผลที่ได้จากการคำนวณ เมื่ออัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 2 บนสัญญาณข้อมูลแบบ 16-QAM



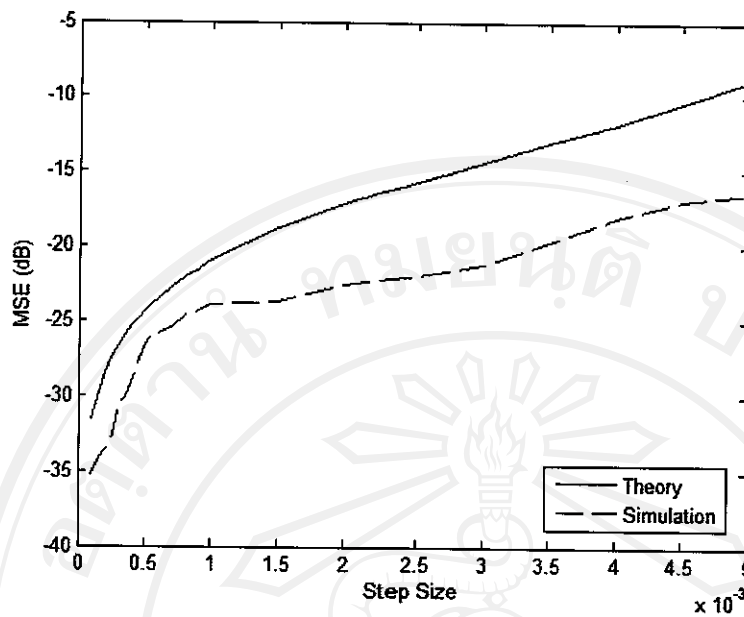
รูปที่ 4.17 ข้อมูลระดับค่าเฉลี่ยของกำลังสองของความผิดพลาด ณ ระดับกึ่งที่ สำหรับผลที่ได้จากการทดลองและผลที่ได้จากการคำนวณ เมื่ออัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 3 บนสัญญาณข้อมูลแบบ 16-QAM



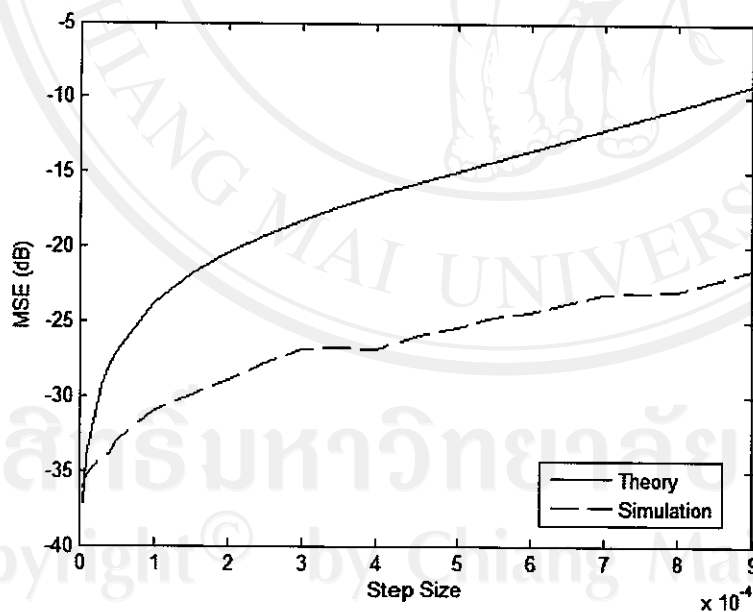
รูปที่ 4.18 ข้อมูลระดับค่าเฉลี่ยของกำลังสองของความผิดพลาด ณ ระดับคงที่ สำหรับผลที่ได้จากการทดลองและผลที่ได้จากการคำนวณ เมื่ออัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 2 บนสัญญาณข้อมูลแบบ 64-QAM



รูปที่ 4.19 ข้อมูลระดับค่าเฉลี่ยของกำลังสองของความผิดพลาด ณ ระดับคงที่ สำหรับผลที่ได้จากการทดลองและผลที่ได้จากการคำนวณ เมื่ออัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 3 บนสัญญาณข้อมูลแบบ 64-QAM



รูปที่ 4.20 ข้อมูลระดับค่าเฉลี่ยของกำลังสองของความผิดพลาด ณ ระดับคงที่ สำหรับผลที่ได้จากการทดลองและผลที่ได้จากการคำนวณ เมื่ออัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 2 บนสัญญาณข้อมูลแบบ 256-QAM



รูปที่ 4.21 ข้อมูลระดับค่าเฉลี่ยของกำลังสองของความผิดพลาด ณ ระดับคงที่ สำหรับผลที่ได้จากการทดลองและผลที่ได้จากการคำนวณ เมื่ออัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 3 บนสัญญาณข้อมูลแบบ 256-QAM

4.4.2 สรุปการทดสอบค่าเฉลี่ยของกำลังสองของความผิดพลาด ณ ระดับคงที่

เราพบว่า สมการที่เราหาได้นั้น ยังไม่ใช่สมการที่ใช้คำนวณค่าของค่าเฉลี่ยของกำลังสองของความผิดพลาด ณ ระดับคงที่ที่แม่นยำ โดยเฉพาะกรณีของสัญญาณข้อมูลแบบ 16-QAM เนื่องจากการประมาณค่าของฟังก์ชัน $\text{sign}(A) \cdot \text{sign}(B)$ ซึ่งเป็นค่า $\text{sign}(\cdot)$ ของผลลัพธ์ที่ได้จากอีควาไลเซอร์ด้วยค่าของฟังก์ชัน $\text{sign}(\cdot)$ ของสัญญาณที่ถูกต้อง นั้นไม่ถูกต้องมาก เนื่องจากกรณีของสัญญาณข้อมูลแบบ 16-QAM ตำแหน่งของสัญญาณที่ทำให้คอสต์ฟังก์ชันมีเฉลี่ยค่าต่ำสุดจะอยู่บริเวณเส้นวงรี ผลของการประมาณด้วยวิธีนี้จึงมีความแตกต่างจากความเป็นจริงมาก สำหรับสัญญาณข้อมูลแบบ 64-QAM และ 256-QAM นั้นค่าประมาณสามารถทำได้ใกล้เคียงกว่าที่เกิดขึ้นบนสัญญาณข้อมูลแบบ 16-QAM เนื่องจากตำแหน่งของสัญญาณข้อมูลแบบ 64-QAM และ 256-QAM ที่ได้รับจากอีควาไลเซอร์และสัญญาณที่ถูกต้องนั้น ให้ค่าของฟังก์ชัน $\text{sign}(\cdot)$ ใกล้เคียงกันมาก แต่สมการที่ได้มานั้น สามารถใช้ทำนายทิศทางการเพิ่มของค่าเฉลี่ยของกำลังสองของความผิดพลาด และสามารถทำหน้าที่เป็นขอบเขตบนของค่าเฉลี่ยของกำลังสองของความผิดพลาดได้ ความผิดพลาดในการประมาณค่าเฉลี่ยของกำลังสองของความผิดพลาด ณ ระดับคงที่นั้นเกิดจากสมมติฐานที่ใช้ในการประมาณสมการและมีการตัดส่วนส่วนที่เราคาดว่าจะมีปริมาณน้อย ทำให้ผลที่ได้มาคลาดเคลื่อนไป

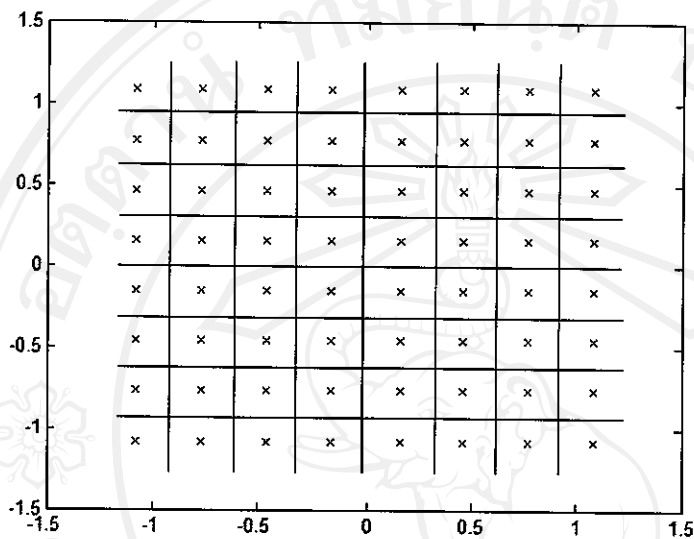
4.5 การทดสอบประสิทธิภาพค่าเฉลี่ยของกำลังสองของความผิดพลาดของเฟส สำหรับอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูท

ในการทดสอบค่าเฉลี่ยของกำลังสองของความผิดพลาดของเฟส (Mean Square Phase Error : MSPE) นั้น มีจุดประสงค์เพื่อศึกษาค่าเฉลี่ยของจำนวนข้อมูลที่ต้องการในการลดปริมาณค่าเฉลี่ยของกำลังสองของความผิดพลาดของเฟส ซึ่งใช้พิจารณาความเร็วในการปรับเพสของอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูท สำหรับการทดลองในส่วนนี้ จะทำบนสัญญาณข้อมูลแบบ 16-QAM และ 64-QAM ค่าเฉลี่ยของกำลังสองของความผิดพลาดของเฟสหาจากสมการ

$$MSPE = E \left[(\text{angle}(y) - \text{angle}(s))^2 \right] \quad (4.75)$$

โดยที่ $\text{angle}(y)$ แทนค่า มุมของผลลัพธ์ที่ได้จากอีควาไลเซอร์และ $\text{angle}(s)$ แทนค่ามุมของสัญญาณที่ถูกต้อง เราจะหาค่าเฉลี่ยของกำลังสองของความผิดพลาดของเฟสที่ระดับอินเตอร์ซิมบอไลน์เตอร์เฟียเรนซ์เท่ากับ -24 dB ในการเปรียบเทียบ

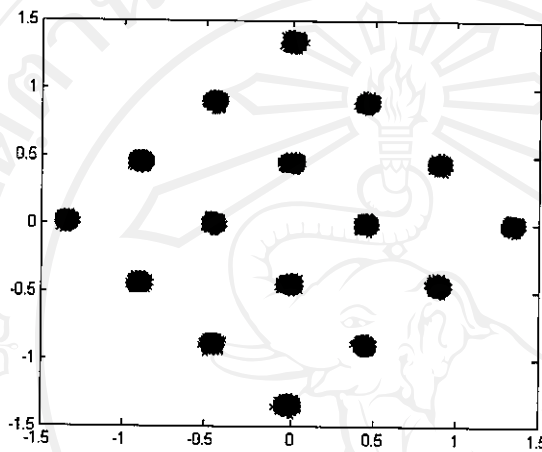
ก่อนที่จะทำการทดสอบ ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับความสำคัญของเฟสนั้นจะถูกกล่าวถึงพอสังเขป เนื่องจากในการแปรสัญญาณลักษณะของสัญญาณที่ได้รับจะตีความโดยใช้เทรชโฮลด์ (Threshold) ในกรณีที่ความผิดพลาดของเฟสไม่มากเกินไป ระบบสามารถตีความหมายได้ถูกต้องอยู่ ซึ่งเพื่อให้เข้าใจได้ง่าย ให้พิจารณารูปที่ 4.22



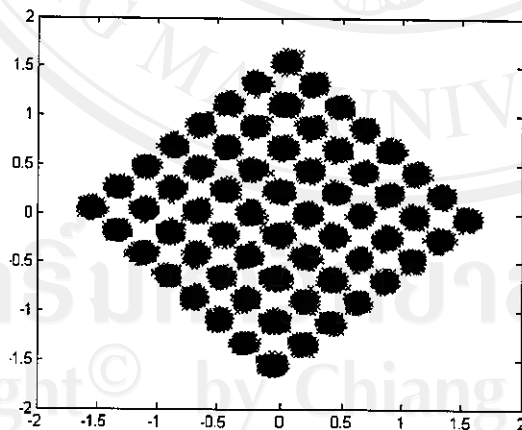
รูปที่ 4.22 วิธีการตีความสัญญาณลักษณะด้วยระบบเทรชโฮลด์

ในกรณีที่จุดของสัญญาณไม่มีการออกจากขอบสี่เหลี่ยม ระบบสามารถตีความได้ถูกต้อง และจากการทดสอบนั้น มุมที่ผิดพลาดไปแต่ยังทำให้ระบบตีความหมายสัญญาณลักษณะของสัญญาณได้ถูกต้องนั้น ในกรณีสัญญาณข้อมูลแบบ 16-QAM เท่ากับ ± 0.28 เรเดียน และ ± 0.11 เรเดียน สำหรับสัญญาณข้อมูลแบบ 64-QAM แต่ในการทดลองเพื่อทดสอบประสิทธิภาพการลดระดับความผิดพลาดเฉลี่ยของเฟสบนช่องสัญญาณที่กำหนดนั้น กรณีสัญญาณแบบ 64-QAM เราไม่สามารถลดระดับความผิดพลาดเฉลี่ยของเฟสได้มาก เหตุผลคือ เรากำหนดให้ระดับของอินเตอร์ซิมโบลอินเตอร์เฟียร์เรนซ์เท่ากับ -24 dB ในการที่จะลดระดับความผิดพลาดของเฟสให้ได้ระดับที่ต่ำมากๆ จำเป็นต้องลดระดับอินเตอร์ซิมโบลอินเตอร์เฟียร์เรนซ์เสียก่อน วิธีการคือ ลดขนาดของค่าการเรียนรู้ แต่ต้องเพิ่มจำนวนของข้อมูล (ในการทดสอบกับอัลกอริทึมรีดิวคอนสเทลเลชัน เพื่อที่จะได้รับของอินเตอร์ซิมโบลอินเตอร์เฟียร์เรนซ์เท่ากับ -35 dB ต้องการข้อมูลถึง 1,000,000 จุด ที่ค่าการเรียนรู้เท่ากับ 0.00002 บนสัญญาณข้อมูลแบบ 64-QAM) ด้วยเหตุนี้ระดับที่เราใช้ทดสอบค่าเฉลี่ยของกำลังสองของความผิดพลาดของเฟสจะอยู่ที่ -2.5 ในหน่วยล็อก (Log Scale) หรือ

ประมาณ 0.06 เเรเดียน สำหรับสัญญาณข้อมูลแบบ 16-QAM และ -2.4 หรือประมาณ 0.0631 เเรเดียน สำหรับสัญญาณข้อมูลแบบ 64-QAM ซึ่งเป็นระดับของค่าเฉลี่ยของกำลังสองของความผิดพลาดที่สามารถทำได้ เมื่อระดับของอินเตอร์ซิมโบลอินเตอร์เฟียร์เรนซ์เท่ากับ -24 dB เราสามารถพิจารณาตัวอย่างลักษณะคอนสเทลเลชันของผลลัพธ์ เมื่อระดับความผิดพลาดของเฟสเท่ากับที่กำหนดไว้ ได้จากรูปที่ 4.23 และรูปที่ 4.24 ตามลำดับ



รูปที่ 4.23 ลักษณะคอนสเทลเลชันของสัญญาณข้อมูลแบบ 16-QAM สำหรับผลลัพธ์ที่ได้จาก อีควาไลเซอร์เมื่อระดับค่าเฉลี่ยของกำลังสองของความผิดพลาดของเฟส เท่ากับ -2.5



รูปที่ 4.24 ลักษณะคอนสเทลเลชันของสัญญาณข้อมูลแบบ 64-QAM สำหรับผลลัพธ์ที่ได้จาก อีควาไลเซอร์เมื่อระดับค่าเฉลี่ยของกำลังสองของความผิดพลาดของเฟส เท่ากับ -2.4

ซึ่งค่าเฉลี่ยของจำนวนข้อมูลที่ต้องการ เพื่อที่จะลดค่าเฉลี่ยของกำลังสองของความผิดพลาดของเฟส ให้เท่ากับที่กำหนดไว้สำหรับสัญญาณข้อมูลแบบ 16-QAM และ 64-QAM นั้น แสดงไว้ในตารางต่อไปนี้

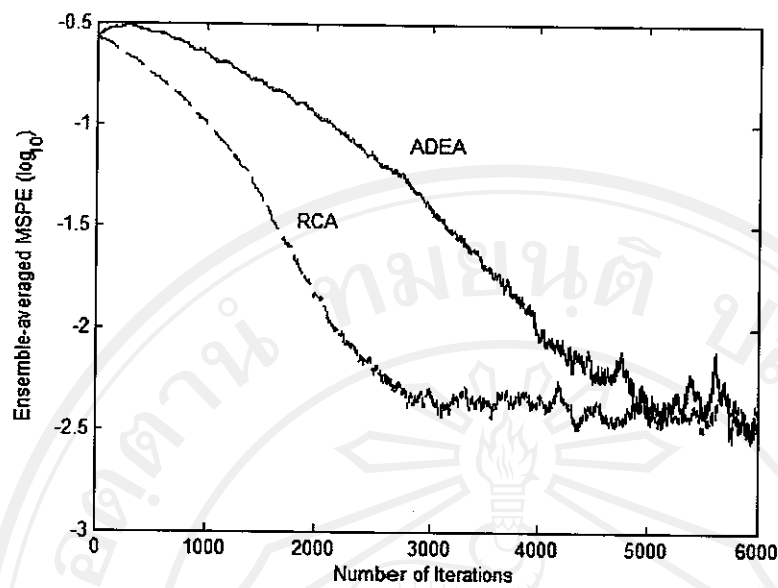
ตารางที่ 4.5 ค่าเฉลี่ยและค่าเบี่ยงเบนของจำนวนข้อมูลที่ต้องการเพื่อที่จะเข้าถึงระดับค่าเฉลี่ยของกำลังสองของความผิดพลาดของเฟส เท่ากับ -2.5 ที่ระดับอินเตอร์ซิมโบลินเตอร์เฟียเรนซ์เท่ากับ -24 dB สำหรับอัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองต่างๆ บนข้อมูลสัญญาณข้อมูลแบบ 16-QAM สำหรับอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟไซลูท

Ratio	Mean (10^3)	Variance (10^7)
1.5	15.3874	4.7562
2	2.9953	1.376
2.5	4.5911	2.454
3	6.9837	1.5916

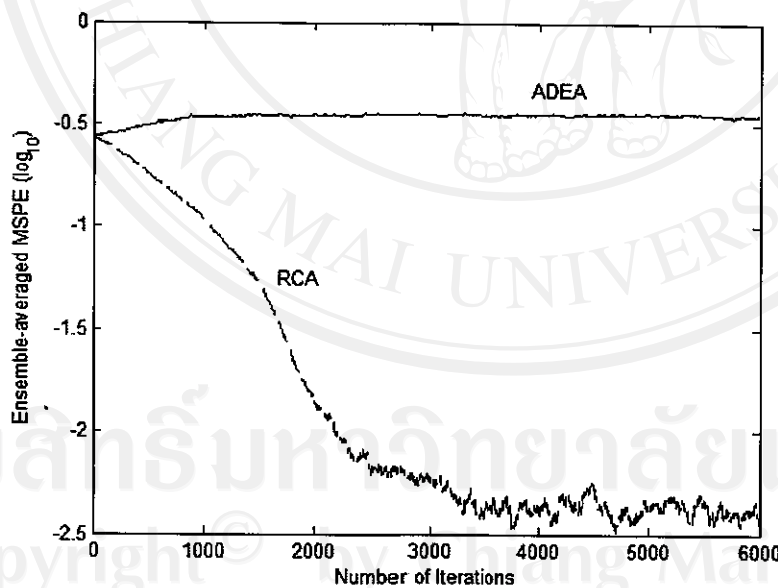
ตารางที่ 4.6 ค่าเฉลี่ยและค่าเบี่ยงเบนของจำนวนข้อมูลที่ต้องการเพื่อที่จะเข้าถึงระดับค่าเฉลี่ยของกำลังสองของความผิดพลาดของเฟส เท่ากับ -2.4 ที่ระดับอินเตอร์ซิมโบลินเตอร์เฟียเรนซ์เท่ากับ -24 dB สำหรับอัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองต่างๆ บนข้อมูลสัญญาณข้อมูลแบบ 64-QAM สำหรับอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟไซลูท

Ratio	Mean (10^4)	Variance (10^7)
1.5	2.7133	6.1741
2	1.1251	3.5622
2.5	1.3232	4.1536
3	1.3315	4.2409

เพื่อที่จะทำการเปรียบเทียบ เฉพาะความสามารถในการลดระดับค่าเฉลี่ยของกำลังสองของความผิดพลาดของเฟส สำหรับอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟไซลูทที่อัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 2 และ 3 กับความสามารถในการลดระดับค่าเฉลี่ยของกำลังสองของความผิดพลาดของเฟสของอัลกอริทึมรีดิวคอนสเทลเลชัน เราจะหมุนข้อมูลที่ใช้ในการทดลองสำหรับอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟไซลูทไป $\frac{\pi}{4}$ เรเดียน เพื่อให้ค่าเฉลี่ยของกำลังสองของความผิดพลาดของเฟสเริ่มต้นมีค่าที่เท่ากัน โดยที่สัญญาณข้อมูลที่มีลักษณะเป็นคอนสเทลเลชันแบบ 16-QAM สามารถพิจารณาผลลัพธ์ได้จากรูปที่ 4.25 และรูปที่ 4.26 ตามลำดับ และคอนสเทลเลชันแบบ 64-QAM สามารถพิจารณาผลลัพธ์ได้จากรูปที่ 4.28 และรูปที่ 4.29



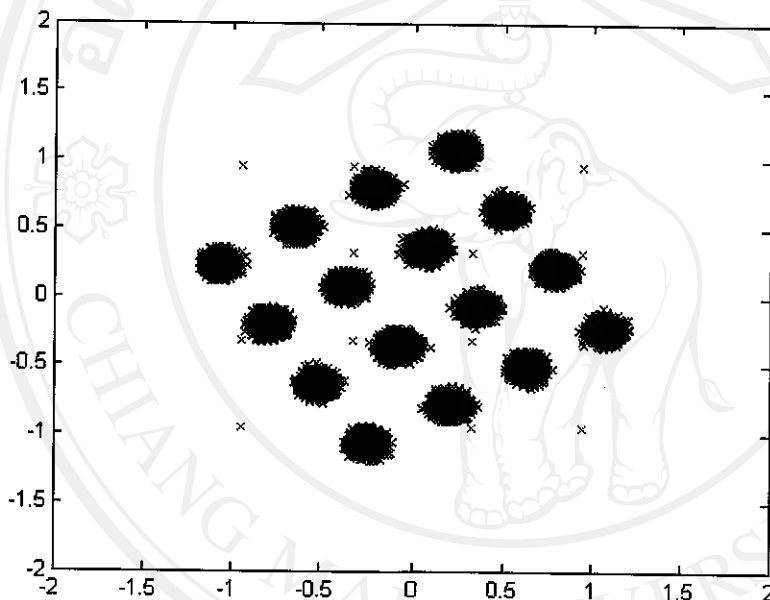
รูปที่ 4.25 แสดงระดับค่าเฉลี่ยของระดับค่าเฉลี่ยของกำลังสองของความผิดพลาดของเฟส สำหรับสัญญาณข้อมูลแบบ 16-QAM เมื่ออัลกอริทึมดับเบิลอีลิฟส์แบบแอฟโซลูทมีอัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 2



รูปที่ 4.26 แสดงระดับค่าเฉลี่ยของระดับค่าเฉลี่ยของกำลังสองของความผิดพลาดของเฟส สำหรับสัญญาณข้อมูลแบบ 16-QAM เมื่ออัลกอริทึมดับเบิลอีลิฟส์แบบแอฟโซลูทมีอัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 3

ในกรณีสัญญาณข้อมูลแบบ 16-QAM อัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทจะทำงานช้ากว่าอัลกอริทึมรีดิวิคอนสเทลเลชัน โดยเฉพาะอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทที่อัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 3 นั้น ไม่สามารถปรับเฟสได้ถูกต้อง ทำให้อัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทที่อัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 3 เป็นระบบที่ไม่เสถียรเมื่อทำงานบนข้อมูลแบบนี้

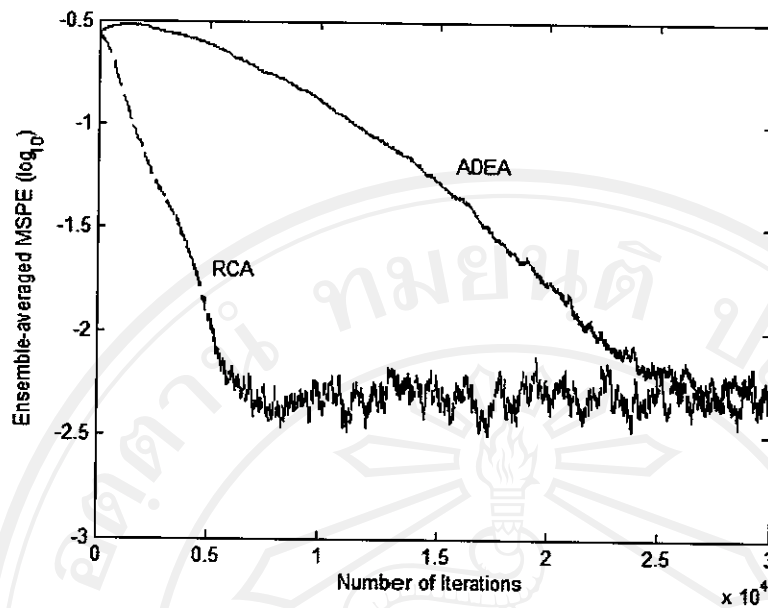
ซึ่งผลที่ได้รับจากอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูท ที่อัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 3 เมื่อได้รับสัญญาณในการทดสอบ มีลักษณะดังรูปที่ 4.27



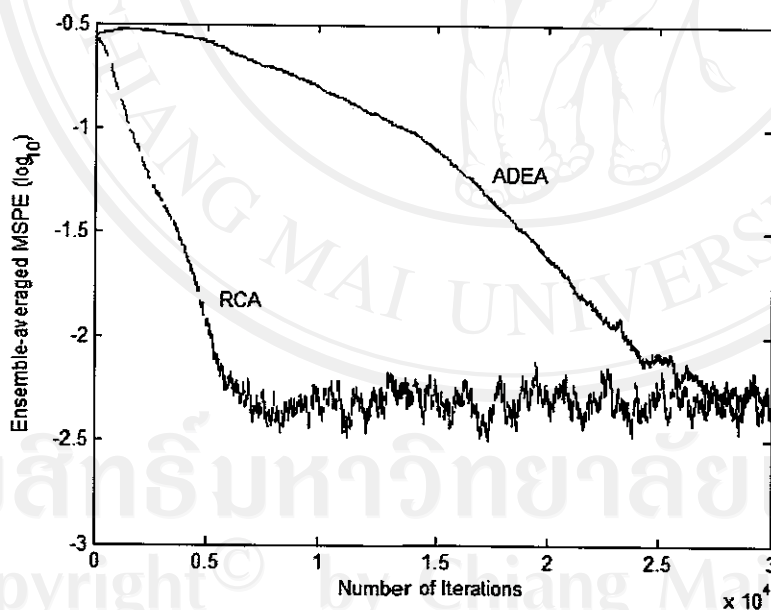
รูปที่ 4.27 ผลลัพธ์ที่ได้จากอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทที่อัตราส่วนระหว่างแกนหลัก

และแกนรองเท่ากับ 3 เมื่อทำงานบนข้อมูลทดสอบแบบที่ถูกหมุนไป $\frac{\pi}{4}$ เรเดียน

โดยที่ตำแหน่งที่ถูกต้องคือ สัญลักษณ์กากบาท



รูปที่ 4.28 แสดงระดับค่าเฉลี่ยของระดับค่าเฉลี่ยของกำลังสองของความผิดพลาดของเฟส สำหรับสัญญาณข้อมูลแบบ 64-QAM เมื่ออัลกอริทึมดับเบิ้ลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทมีอัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 2



รูปที่ 4.29 แสดงระดับค่าเฉลี่ยของระดับค่าเฉลี่ยของกำลังสองของความผิดพลาดของเฟส สำหรับสัญญาณข้อมูลแบบ 64-QAM เมื่ออัลกอริทึมดับเบิ้ลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทมีอัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองเท่ากับ 3

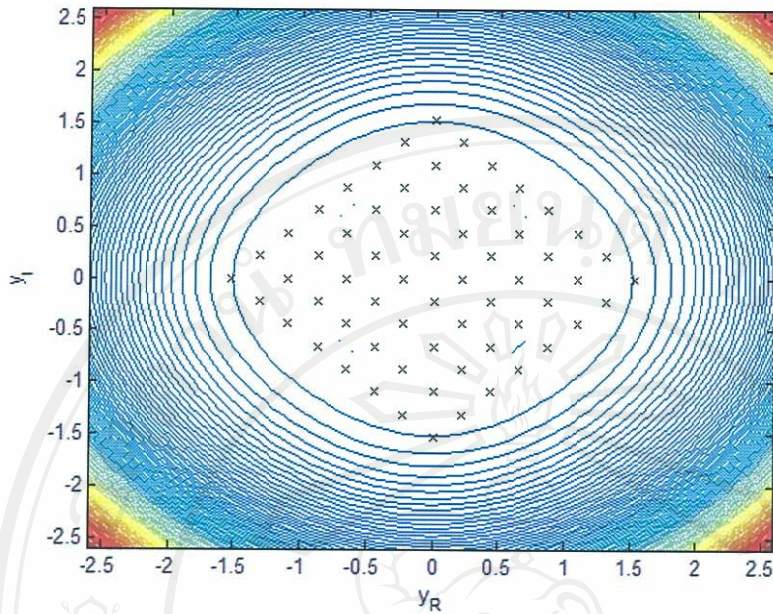
สำหรับสัญญาณแบบ 64-QAM อัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทสามารถทำงานได้ แต่อัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทจะทำงานช้ากว่าอัลกอริทึมรีดิวคอนสเทลเลชันอย่างเห็นได้ชัด

4.5.1 สรุปการทดสอบค่าเฉลี่ยของกำลังสองของความผิดพลาดของเฟส

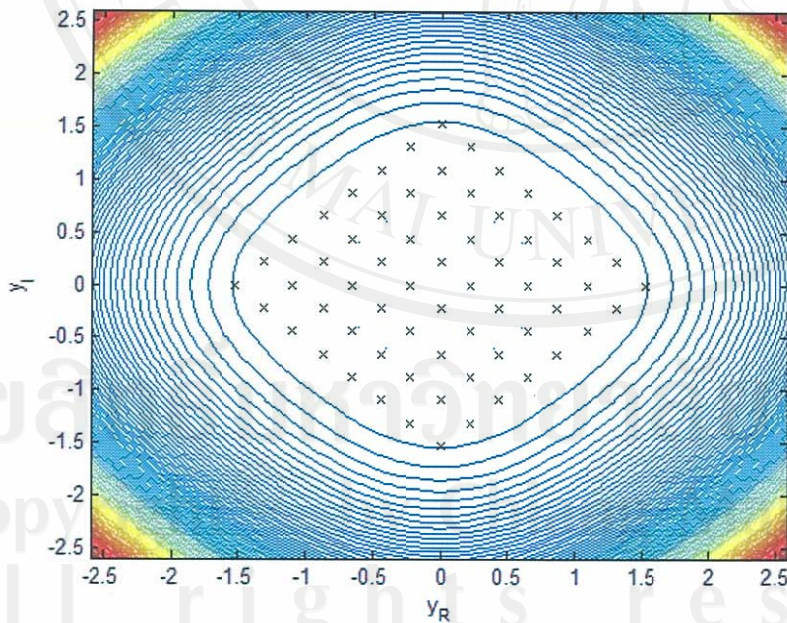
เราพบว่า อัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทนั้นทำงานได้ช้ากว่าอัลกอริทึมรีดิวคอนสเทลเลชัน ถึงแม้ในการทดสอบกับสภาพสัญญาณที่ใช้ในการทดสอบอินเตอร์ซึมโบลินเตอร์เฟียเรนซ์อัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทจะทำงานได้ดี เหตุผลมาจากในกรณีสภาพสัญญาณข้อมูลที่ได้รับไม่ถูกหมุนไป $\frac{\pi}{4}$ เรเดียน ข้อมูลจะมีคอนสเทลเลชันที่ใกล้เคียงกับคอนสเทลเลชันที่อัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทต้องการ เป็นผลให้ทำงานเร็วกว่าอัลกอริทึมรีดิวคอนสเทลเลชัน ในขณะที่การทดสอบแบบเปรียบเทียบความเร็ว นั้น อัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูททำงานได้ช้ากว่าอัลกอริทึมรีดิวคอนสเทลเลชันมาก

4.6 สรุปผลประสิทธิภาพของอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูท

จากการทดสอบในหัวข้อต่างๆที่ได้กล่าวมา เราสามารถสรุปได้ว่าการทำงานของอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทนั้น ทำงานได้ไม่ดีเท่ากับอัลกอริทึมคอนสแตนมอดดูลัสและอัลกอริทึมรีดิวคอนสเทลเลชัน เนื่องจากอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทนั้น จะมีช่วงของอัตราส่วนระหว่างแกนหลักและแกนรองที่ทำงานได้นั้นน้อย คืออยู่ระหว่าง 1.5 - 3 ซึ่งเมื่อเราพิจารณาภาพมุมมองจากด้านบนของพื้นผิวคอสท์ฟังก์ชันในรูปที่ 4.30 และรูปที่ 4.31 เราสรุปได้ว่า ถึงแม้ว่าค่ายกกำลังจะเท่ากับ 1 แต่ความชันบริเวณที่ใช้งานนั้นมีค่าน้อยมากและมีโครงสร้างคล้ายกลมวงเดียว ผลของโครงร่างความชันนี้ทำให้อัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทมีการทำงานที่คล้ายคลึง กับการทำงานของอัลกอริทึมคอนสแตนมอดดูลัสในการลดระดับของอินเตอร์ซึมโบลินเตอร์เฟียเรนซ์ และด้วยลักษณะที่คล้ายวงรีวงเดียวนี้การหมุนให้เฟสของผลลัพธ์เข้าหาตำแหน่งที่ถูกต้องจึงทำได้ช้า ทำให้อัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบแอฟโซลูทปรับเฟสได้ช้ากว่าอัลกอริทึมรีดิวคอนสเทลเลชันมาก



รูปที่ 4.30 ภาพมุมมองทางด้านบนของพื้นผิวคอสม์ฟังก์ชันสำหรับอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบ
แอฟโซลูทและลักษณะคอนสเทลเลชันของสัญญาณข้อมูลแบบ 64-QAM เมื่ออัตราส่วนเท่ากับ 2



รูปที่ 4.31 ภาพมุมมองทางด้านบนของพื้นผิวคอสม์ฟังก์ชันสำหรับอัลกอริทึมดับเบิลอีลิปส์แบบ
แอฟโซลูทและลักษณะคอนสเทลเลชันของสัญญาณข้อมูลแบบ 64-QAM เมื่ออัตราส่วนเท่ากับ 3