

บทที่ 2

พลศาสตร์ของแขนกลยึดติดโครงสร้างยึดหยุ่น

2.1 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

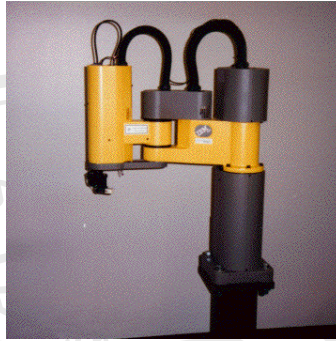
โดยทั่วไปแล้วแขนกลมักจะทำงานอยู่บนฐานที่มั่นคง โดยมีรูปแบบ และขนาดต่างกันไป ตามลักษณะการใช้งาน ยกตัวอย่างเช่น แขนกลชนิด PA-10 และชนิด PUMA ดังรูป 2.1 และ รูป 2.2 ตามลำดับ ซึ่งมีลักษณะการทำงานเป็นแบบพิกัดชนิดแนวตั้ง (Vertical multi joint) และแขนกลชนิด IBM7575 ดังรูป 2.3 ซึ่งมีลักษณะการทำงานเป็นแบบพิกัดชนิดแนวนอน (Horizontal multi joint)



รูป 2.1 แขนกลชนิด PA-10 (http://www.saga_u.ac.jp, 2 กค.2547)



รูป 2.2 แขนกลชนิด PUMA (<http://www.ee.ic.ac.uk>, 2 กค.2547)



รูป 2.3 แขนกลชนิด IBM7575 (<http://iel.ucdavis.edu>, 2 กค.2547)

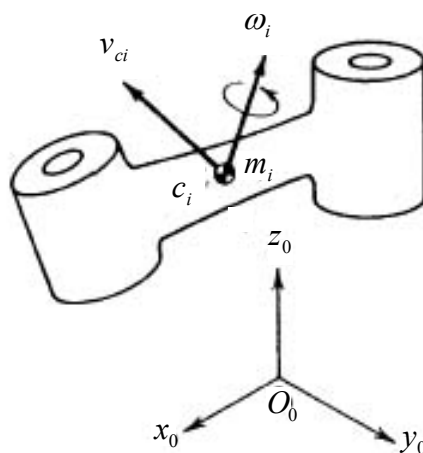
การออกแบบตัวควบคุมจำเป็นต้องทราบแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบ ในงานวิจัยนี้ การหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบสามารถทำได้โดยการวิเคราะห์สมการการเคลื่อนที่ของแขนกลโดยวิธีลากรางจ์ มีขั้นตอนดังนี้

2.1.1 พลังงานจลน์ (Kinetic Energy)

สมการพลังงานจลน์ของแขนกลที่ i คือ

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \vec{v}_{ci}^T \vec{v}_{ci} + \frac{1}{2} \vec{\omega}_i^T I_i \vec{\omega}_i \quad (2.1)$$

โดยที่ $\vec{v}_{ci}$ และ $\vec{\omega}_i$ เป็นเวกเตอร์ของความเร็วรอบจุด Centroid ซึ่งมีขนาด 3×1 และ เวกเตอร์ความเร็วเชิงมุมเทียบกับ Initial reference frame มีขนาด 3×1 ตามลำดับดังรูป 2.4 และ m_i เป็นมวลของข้อต่อแขนกล และ I_i คือ Inertia tensor ซึ่งมีขนาด 3×3



รูป 2.4 แสดงทิศทางความเร็วเชิงเส้นและเชิงมุมของข้อต่อแขนกล (Yamamoto)

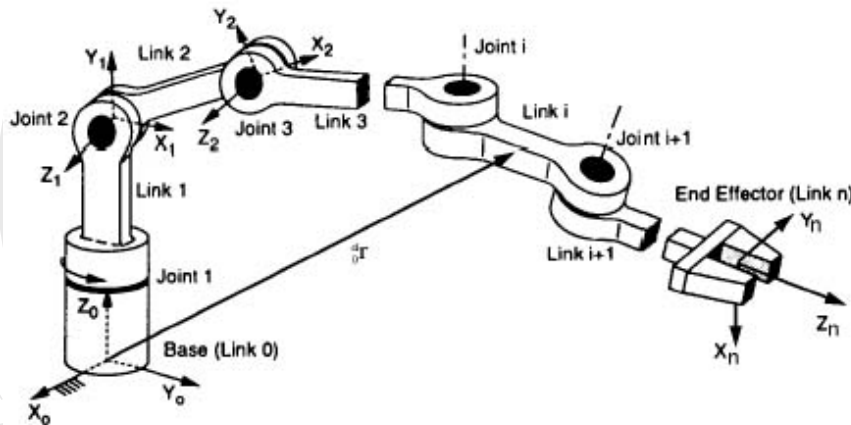
พลังงานจลน์ทั้งหมดของข้อต่อแขนกล สามารถหาได้จากการรวมพลังงานจลน์ของแต่ละ

$$\text{ชิ้นส่วน } (T = \sum_{i=1}^n T_i)$$

2.1.2 พลังงานศักย์ (Potential Energy)

กำหนดให้ g เป็นเวกเตอร์บอกจุด Centroid ของแขนกล i มีขนาด 3×1 ซึ่งแสดงความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก โดยพิจารณาบนแกนหยุดนิ่ง (Base coordinate frame) ดังรูป 2.5 ดังนั้นพลังงานศักย์ของระบบคือ

$$U = \sum_{i=1}^n m_i \vec{g}^T {}^{ci}_0 \vec{r} \quad (2.2)$$



รูป 2.5 แสดงโครงสร้างของแขนกลและจุดต่อ (Yamamoto)

ซึ่ง ${}^{ci}_0 \vec{r}$ คือ เวกเตอร์บอกตำแหน่งที่จุด Centroid ของแขน i ซึ่งจะขึ้นอยู่กับรูปแบบของแขนกล ดังนั้น พลังงานศักย์จะอยู่ในรูปของฟังก์ชัน $q_1, \dots, q_n$

2.1.3 สมการการเคลื่อนที่ของแขนกล (Dynamic of Manipulator)

พิจารณาหลักการของลากรางจ์ จากสมการ(1.4) และ Jacobian Matrix ของ n DOF

$$\text{คือ } J = \begin{bmatrix} J_{L1} & J_{L2} & \dots & J_{Ln} \\ J_{A1} & J_{A2} & \dots & J_{An} \end{bmatrix}$$

โดยที่ J_{Ln} คือ Column vector ที่สัมพันธ์กันกับ ความเร็วเชิงเส้น คือ $v_e = J_{L1} \dot{q}_1 + \dots + J_{Ln} \dot{q}_n$

J_{An} คือ Column vector ที่สัมพันธ์กันกับ ความเร็วเชิงมุม คือ $\omega_e = J_{A1} \dot{q}_1 + \dots + J_{An} \dot{q}_n$

สำหรับข้อต่อที่ i สมการความเร็ว คือ

$$v_{ci} = J_{L1}^{(i)} \dot{q}_1 + \dots + J_{Li}^{(i)} \dot{q}_i = J_L^{(i)} \dot{q} \quad (2.3)$$

$$\omega_i = J_{A1}^{(i)} \dot{q}_1 + \dots + J_{Ai}^{(i)} \dot{q}_i = J_A^{(i)} \dot{q} \quad (2.4)$$

โดยที่การเคลื่อนที่ของแขนกลจะขึ้นอยู่กับข้อต่อ 1 ถึง i ดังนั้น $J_L^{(i)} = [J_{L1}^{(i)} \dots J_{Li}^{(i)} 0 \dots 0]$

$$J_A^{(i)} = [J_{A1}^{(i)} \dots J_{Ai}^{(i)} 0 \dots 0]$$

จากนั้นแทน (2.3) และ (2.4) ลงใน (2.1) จะได้ว่า

$$T_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (m_i \dot{q}^T J_L^{(i)T} J_L^{(i)} \dot{q} + \dot{q}^T J_A^{(i)T} I_i J_A^{(i)} \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T H \dot{q} \quad (2.5)$$

โดยที่ Manipulator inertia tensor $H = \sum_{i=1}^n (m_i J_L^{(i)T} J_L^{(i)} + J_A^{(i)T} I_i J_A^{(i)})$ (2.6)

พิจารณาพจน์แรกของสมการการเคลื่อนที่ของ Lagrange จาก $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n H_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$ จะได้ว่า

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \sum_{j=1}^n H_{ij} \dot{q}_j \quad (2.7)$$

$$\therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^n H_{ij} \dot{q}_j \right) = \sum_{j=1}^n H_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{dH_{ij}}{dt} \dot{q}_j \quad (2.8)$$

โดยที่ H_{ij} เป็นฟังก์ชันของ $q_1, \dots, q_n$ ดังนั้น $\frac{dH_{ij}}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial H_{ij}}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial H_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k$

เมื่อพิจารณาพจน์ที่สองพบว่า

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n H_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \right) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial H_{jk}}{\partial q_i} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (2.9)$$

เมื่อพิจารณาพจน์ของ Gravity G_i จะได้ว่า

$$G_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^n m_j g^T \frac{\partial {}^0 r_j}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^n m_j g^T J_{Li}^{(j)} \quad (2.10)$$

โดย $\frac{\partial {}^0 r_j}{\partial q_i}$ ถูกแทนด้วย Jacobian matrix $J_{Li}^{(j)}$

แทนสมการ (2.8), (2.9) และ (2.10) ลงในสมการ (1.2) และทำการจัดรูปใหม่จะได้ว่า

$$\sum_{j=1}^n H_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n h_{ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k + G_i = Q_i \quad i = 1, \dots, n \quad (2.11)$$

โดยที่ $G_i = \sum_{j=1}^n m_j g^T J_{Li}^{(j)}$ และ $h_{ijk} = \frac{\partial H_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial H_{jk}}{\partial q_i}$

$\sum_{j=1}^n H_{ij} \ddot{q}_j$ เรียกว่า Inertia torques รวมกับ Interaction torques

$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n h_{ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k$ เรียกว่า Coriolis และ Centrifugal torques

G_i เรียกว่า Gravity induced torque ของแขนกล i

ดังนั้นเราสามารถเขียนสมการการเคลื่อนที่ของแขนกลที่อยู่บนฐานยึดแน่นได้เป็น

$$H(q)\ddot{q} + c(q, \dot{q}) + g(q) = \tau \quad (2.12)$$

โดยที่ $H(q)$ คือ Inertia matrix

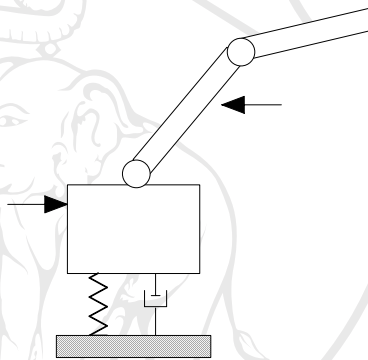
$c(q, \dot{q})$ คือ Coriolis และ Centrifugal effects

$g(q)$ คือ Gravity torque

τ คือ แรงบิดที่จุดต่อของแขนกล (Joint torque)

2.1.4 สมการการเคลื่อนที่ของ FSMM

เมื่อพิจารณาระบบแขนกลที่ยึดอยู่บนโครงสร้างยืดหยุ่น โดยที่จุดปลายของแขนกลไม่มีแรงภายนอกมากระทำ แสดงดังรูป 2.6



รูป 2.6 แสดงแบบจำลองของระบบแขนกลที่ยึดบนโครงสร้างยืดหยุ่น

จากการวิเคราะห์สมการการเคลื่อนที่ของแขนกลโดยวิธีลากรางจ์ จะได้ว่าสมการการเคลื่อนที่ของแขนกลเมื่อยึดติดกับฐานที่มีโครงสร้างยืดหยุ่นนั้น มีรูปแบบดังนี้

$$\begin{bmatrix} H_b & H_{bm} \\ H_{bm}^T & H_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_b \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_b & 0 \\ 0 & D_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_b \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_b x_b \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_b \\ c_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_b \\ g_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{act} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

โดยที่ x_b คือ ตำแหน่งและทิศทางที่เปลี่ยนแปลงของฐานรองรับ(State)

θ คือ เป็นฟังก์ชันบอกตำแหน่งของจุดต่อของแขน

$H_b(x_b, \theta)$ คือ base inertia

D_b คือ Damping ที่ฐานรองรับ

D_m คือ Damping ที่จุดต่อแขน

K_b คือ สัมประสิทธิ์ความยืดหยุ่นที่ฐานรองรับ

$H_m(x_b, \theta)$ คือ Inertia matrix ของแขนกล

$H_{bm}(x_b, \theta)$ คือ Inertia coupling matrix

$c_b(x_b, \dot{x}_b, \theta, \dot{\theta})$ คือ พจน์ความไม่เป็นเชิงเส้นของความเร็วที่ฐานรองรับ

$c_m(x_b, \dot{x}_b, \theta, \dot{\theta})$ คือ พจน์ความไม่เป็นเชิงเส้นของความเร็วของแขนกล

g_b คือ Gravity torque ของฐานรองรับ

g_m คือ Gravity torque ของแขนกล

τ_{act} คือ แรงบิดที่จุดต่อแขน (Joint torque)

โดยที่ $x_b \in \mathcal{R}^n$ จะขึ้นอยู่กับทิศทางและตำแหน่งการเปลี่ยนแปลงของฐานเทียบกับแกนหยุดนิ่ง

(Inertial frame)

$\theta \in \mathcal{R}^i$ ขึ้นอยู่กับพิกัดบอกตำแหน่งของจุดต่อของแขน

$H_b(x_b, \theta)$, D_b และ $K_b \in \mathcal{R}^{n \times n}$

$H_m(x_b, \theta) \in \mathcal{R}^{ixi}$ และ $H_{bm}(x_b, \theta) \in \mathcal{R}^{nxi}$

$\tau_{act} \in \mathcal{R}^i$ กำหนดให้ i เป็นจำนวนจุดต่อของแขนกล และ n คือ จำนวนพิกัดที่ฐานรองรับ

2.2 พฤติกรรมทางพลศาสตร์ของแขนกลยึดติดโครงสร้างยืดหยุ่น

แขนกลอุตสาหกรรมมักถูกควบคุมด้วยตัวควบคุมที่มีองค์ประกอบ P (Proportional), I (Integral) และ D (Derivative) สำหรับงานวิจัยนี้การศึกษาการเคลื่อนที่ของแขนกลนั้น จะพิจารณาตัวควบคุมที่มีองค์ประกอบ P และ D โดยใช้การควบคุมแบบ PD-Computed torque ซึ่งสามารถทำได้ดังนี้ พิจารณาสมการการเคลื่อนที่ของแขนกลที่อยู่บนฐานยึดแน่น โดยเคลื่อนที่อยู่ในระนาบแนวนอน

$$H(q)\ddot{q} + c(q, \dot{q}) = \tau \quad (2.14)$$

กำหนดให้เส้นทางการเคลื่อนที่ที่ต้องการ คือ $q_d(t)$ ในที่นี้กำหนดให้เป็นมุมการบิดของแขนกลในแต่ละแขน ดังนั้น tracking error, $e(t)$ สามารถแสดงได้ดังสมการ (2.15)

$$e(t) = q_d(t) - q(t) \quad (2.15)$$

ซึ่งเขียนในรูปอนุพันธ์อันดับ 1 และ 2 ได้เป็น

$$\dot{e} = \dot{q}_d - \dot{q} \quad (2.16)$$

$$\ddot{e} = \ddot{q}_d - \ddot{q} \quad (2.17)$$

จัดรูปสมการ (2.17) เป็น $\ddot{q} = \ddot{q}_d - \ddot{e}$ จากนั้นแทนค่าลงในสมการ (2.14) ได้เป็น

$$H(q)(\ddot{q}_d - \ddot{e}) + c(q, \dot{q}) = \tau \quad (2.18)$$

กำหนดให้ Control input function เป็น

$$u = \ddot{q}_d + H(q)^{-1}(c(q, \dot{q}) - \tau) \quad (2.19)$$

ทางเลือกของการออกแบบ PD feedback คือ กำหนดให้

$$u = -k_v \dot{e} - k_p e \quad (2.20)$$

โดยที่ k_p คือ Proportional gain

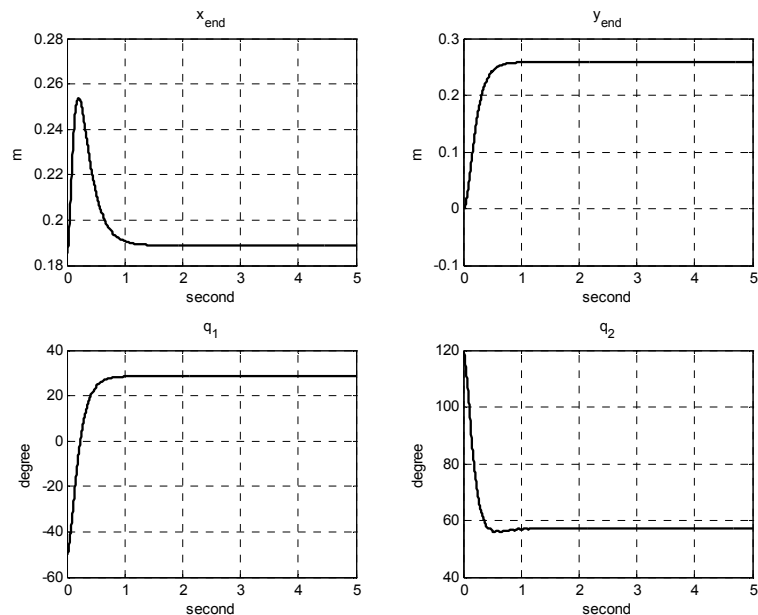
k_v คือ Derivative gain

แทนค่าสมการ (2.20) ลงในสมการ (2.19) ทำการจัดรูป จะได้สมการการควบคุมเป็น

$$\tau = H(q)(\ddot{q}_d + k_v \dot{e} + k_p e) + c(q, \dot{q}) \quad (2.21)$$

การทำ Simulation ของระบบของแขนกล 2 DOF ยึดติดโครงสร้างยึดหุ่นนั้นการกำหนดค่าคงที่ต่าง ๆ ของระบบแสดงในภาคผนวก ข ดังตาราง ข-3 โดยกำหนดให้ค่า $k_p = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}$

และ $k_v = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$ ทำการกำหนดเส้นทางการเคลื่อนที่โดยกำหนดให้มุมการบิดของแขน 1 มีค่าเป็น $0.5 - 0.5e^{-5t}$ rad และแขน 2 มีค่าเป็น $1.0 - 1.0e^{-5t}$ rad กำหนดค่าเริ่มต้นโดยให้แขน 1 อยู่ที่ตำแหน่งมุม q_1 เท่ากับ -50 องศา สำหรับแขน 2 กำหนดให้อยู่ที่ตำแหน่งมุม q_2 เท่ากับ 120 องศา ผลการทำ Simulation ได้ผลดังนี้



รูป 2.7 กราฟแสดงการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของแขน 1 และ 2 จากจุดเริ่มต้นไปจนถึงจุดสุดท้าย

จากรูป 2.7 สังเกตได้ว่าเมื่อเวลาผ่านไปแขนกลจะพยายามเคลื่อนที่เข้าสู่ตำแหน่งที่ได้ทำการออกแบบไว้ โดยสุดท้ายแล้วแขน 1 จะหยุดอยู่ที่ตำแหน่งประมาณ 28.65 องศา (0.5 rad) และแขน 2 จะหยุดอยู่ที่ตำแหน่งประมาณ 57.30 องศา (1.0 rad) โดยตำแหน่งที่จุดปลายของแขนกลจะอยู่ที่พิกัดประมาณ (0.1888, 0.2589) ในขณะที่แขนกลพยายามเคลื่อนที่ไปตามเส้นทางที่กำหนดนั้นค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นจะลดลงจนมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ดังแสดงในรูป 2.8 และการเคลื่อนที่ของแขนกลนั้นยังส่งผลให้เกิดการสั่นสะเทือนที่ฐานโครงสร้างยึดหุ่นอีกด้วย กล่าวคือ ขณะที่แขนกลมีการเคลื่อนที่อยู่นั้นจะเกิดแรงปฏิกิริยาของแขนกลที่กระทำต่อฐานโครงสร้างยึดหุ่น หากทำการพิจารณาถึงโมเมนตัมของแขนกลที่กระทำต่อฐาน (P_m) พบว่า

$$P_m = H_{bm} \dot{\theta} \quad (2.22)$$

เราจะเรียก โมเมนตัมของแขนกลที่กระทำต่อฐานนี้ว่า Coupling momentum

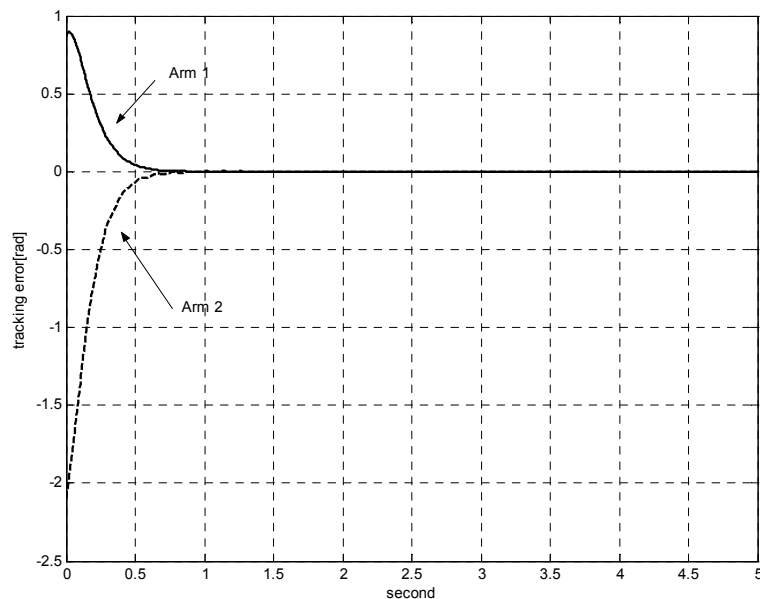
ทำการ Differentiate สมการ (2.22)

$$F_m = \frac{d(P_m)}{dt} = \frac{d(H_{bm} \dot{\theta})}{dt} \quad (2.23)$$

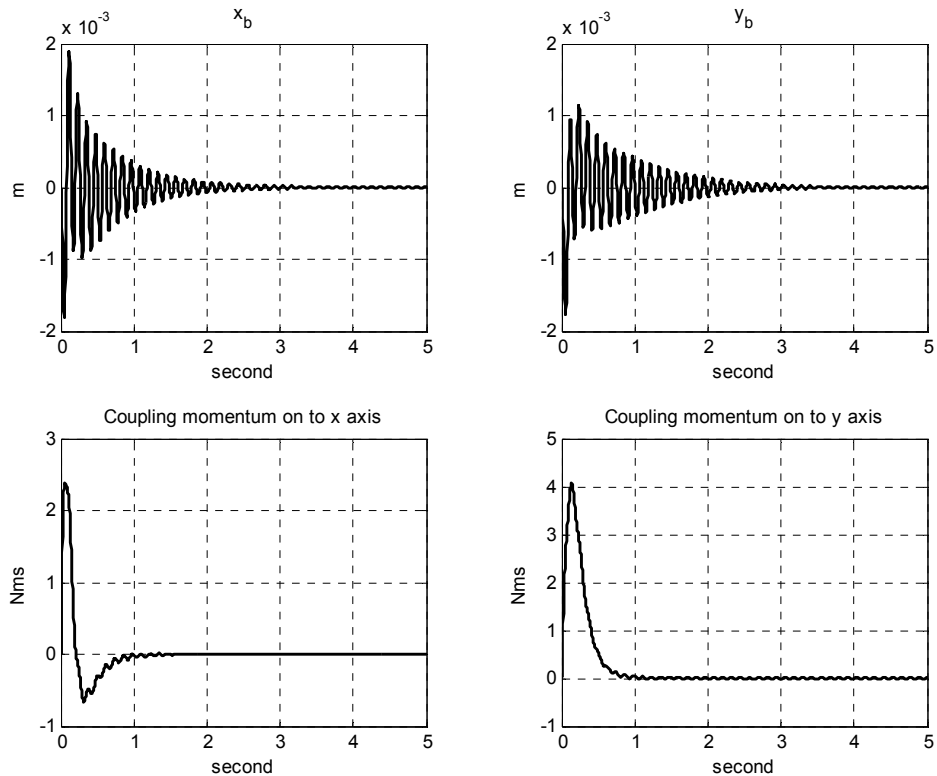
กำหนดให้ F_m คือ แรงปฏิกิริยาจากแขนกลที่กระทำต่อฐาน ดังนั้น

$$F_m = H_{bm} \ddot{\theta} + \dot{H}_{bm} \dot{\theta} \quad (2.24)$$

การเปรียบเทียบโมเมนตัมที่เกิดขึ้น ขณะที่แขนกลเคลื่อนที่ไปนั้นกับการสั่นสะเทือนที่ฐานโครงสร้างยึดหุ่นแสดงไว้ในรูป 2.9

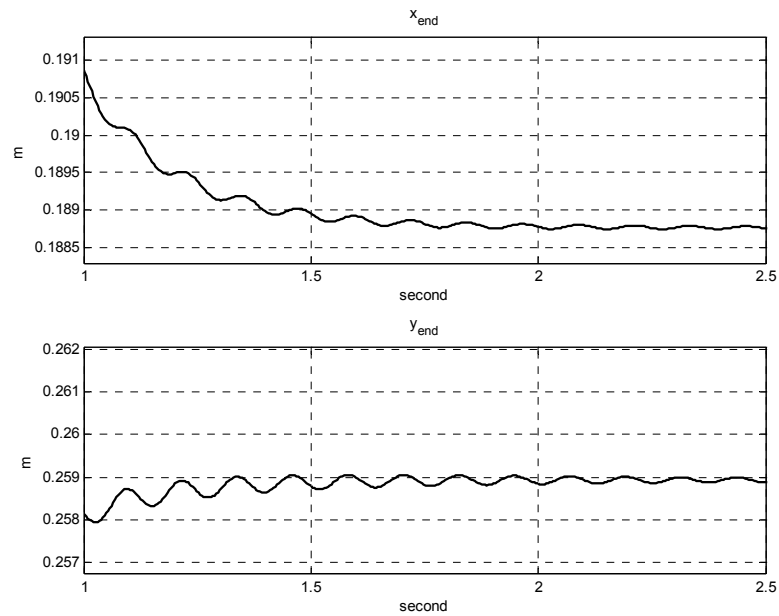


รูป 2.8 Tracking error ที่เกิดขึ้นขณะที่แขนกลมีการเคลื่อนที่ไปตามเส้นทางที่กำหนด



รูป 2.9 แสดงการสั่นสะเทือนที่ฐาน และโมเมนตัมที่เกิดขึ้นในทิศทาง x และ y

จากรูป 2.9 สังเกตได้ว่าโมเมนตัมจะมีค่ามากที่สุดเมื่อแขนกลเริ่มเคลื่อนที่ซึ่งส่งผลให้แรงปฏิกิริยาที่แขนกลกระทำต่อฐานมีค่ามากที่สุดด้วย ดังนั้นการสั่นที่เกิดขึ้นเริ่มต้นจึงมีการกระจัดมากที่สุด และจะมีการปรับตัวลดลงเรื่อย ๆ จนกระทั่งคงที่หรือหยุดนิ่ง และผลเนื่องจากการสั่นที่ฐานนี้เองทำให้ตำแหน่งที่จุดปลายของแขนกลเกิดการสั่น แสดงดังรูป 2.10



รูป 2.10 แสดงตำแหน่งที่จุดปลายของแขนกลเมื่อมีการสั่นสะเทือน