

บทที่ 2

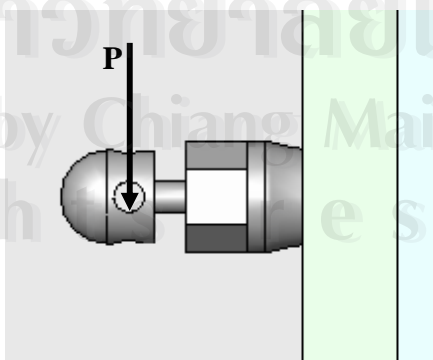
หลักการและทฤษฎี

2.1 ลักษณะของปัญหา

สกรูอิมแพลนท์ขนาดเล็กเป็นอุปกรณ์ที่ได้พัฒนามาจากรากเทียม ด้วยการทำให้มีขนาดเล็กลง และนำมาใช้ฝังลงบนกระดูกฟันกรามเพื่อทำหน้าที่เป็นหลักยึดในการจัดฟันแทนฟันกรามด้านใน โดยมีจุดประสงค์เพื่อขจัดปัญหาการเคลื่อนตัวของฟันกรามด้านในที่ทำหน้าที่เป็นหลักยึดในการจัดฟันแบบเดิม ดังที่ได้กล่าวมาแล้วในบทที่ 1 จากลักษณะการใช้งานดังกล่าว สกรูอิมแพลนท์ขนาดเล็กนี้จะมีลักษณะพฤติกรรมแบบคานยื่น (Cantilever) โดยภาระที่มากระทำจะเป็นแรงดึงขนาด 0.4905 นิวตัน (50กรัม) ซึ่งเป็นขนาดของแรงดึงที่ใช้ในการจัดฟันทั่วไป จากลักษณะของปัญหาดังกล่าวในการวิจัยนี้จะแบ่งขั้นตอนการวิเคราะห์ปัญหาออกเป็น 2 ขั้นตอนดังนี้ คือ

1. ทำการเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์กับสมการทางคณิตศาสตร์ โดยจะกำหนดให้กระดูกในแบบจำลองไฟไนต์อีลิเมนต์ที่สกรูอิมแพลนท์ขนาดเล็กฝังตัวอยู่นั้นเป็นวัสดุแข็งเกร็ง (Rigid Body) ซึ่งจะทำให้สกรูอิมแพลนท์ขนาดเล็กในแบบจำลองไฟไนต์อีลิเมนต์นั้นมีพฤติกรรมแบบคานยื่น (Cantilever) และสามารถนำมาเปรียบเทียบกับสมการทางคณิตศาสตร์ที่มีอยู่ได้

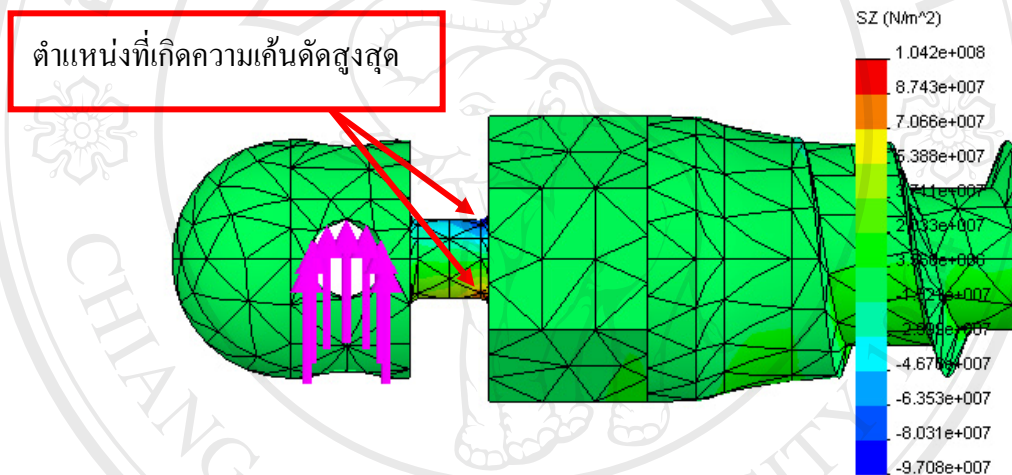
2. เมื่อได้ทำการยืนยัน ความถูกต้องของแบบจำลองในขั้นตอนที่ 1 แล้ว ขั้นตอนต่อไปคือการทำการปรับเปลี่ยนค่าคุณสมบัติของกระดูกให้เป็นไปตามคุณสมบัติของกระดูกจริงที่ได้มีการศึกษามาก่อนหน้านี้ ดังแสดงไว้ในตารางที่ 3.1 (Haldun Iplikcioglu and Kivanc Akca, 2001) ซึ่งในขั้นตอนนี้จะได้ทำการปรับเปลี่ยนค่าตัวแปรที่ต้องการจะทำการศึกษา เพื่อที่จะได้เข้าใจถึงผลกระทบของตัวแปรต่างๆที่มีผลกระทบต่อการกระจายความเค้นในสกรูอิมแพลนท์ขนาดเล็กและกระดูกบริเวณโดยรอบต่อไป



รูป 2.1 ลักษณะภาระที่มากระทำกับสกรูอิมแพลนท์ขนาดเล็ก

2.2 การหาค่าความเค้นดัดสูงสุดด้วยสมการทางคณิตศาสตร์

จากลักษณะของปัญหาดังที่ได้กล่าวมาแล้ว เมื่อทำการทดลองวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์-อีลิเมนต์ จะพบว่าค่าความเค้นดัดสูงสุดที่เกิดขึ้นในสกรูอิมแพลนท์ขนาดเล็ก จะเกิดขึ้นที่บริเวณส่วนคอของสกรูอิมแพลนท์ขนาดเล็กด้านใกล้กับผิวของกระดูก ดังแสดงในรูปที่ 2.2 ดังนั้นในการตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลองวิธีไฟไนท์อีลิเมนต์ โดยการเปรียบเทียบผลที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์อีลิเมนต์กับผลที่ได้จากการคำนวณด้วยสมการทางคณิตศาสตร์ จะสามารถทำได้โดยการใช้ทฤษฎีความยืดหยุ่นคำนวณหาความเค้นดัดสูงสุดที่เกิดขึ้นในคานยื่นหน้าตัดวงกลมและนำค่าที่ได้ไปคูณด้วยค่าความเข้มของหน่วยแรง (Stress Concentration Factor)



รูป 2.2 แสดงตำแหน่งที่เกิดความเค้นดัดสูงสุดที่เกิดขึ้นในสกรูอิมแพลนท์ขนาดเล็ก

2.2.1 ทฤษฎีความยืดหยุ่น (Timoshenko and Goodier, 1970)

จากลักษณะของปัญหาพบว่า การหาค่าความเค้นดัดสูงสุดที่เกิดขึ้นโดยอาศัยทฤษฎีความยืดหยุ่นนั้นสามารถพิจารณาในรูปแบบ 2 มิติได้ ดังแสดงในรูป 2.3 โดยการกำหนดฟังก์ชันความเค้น (Stress function) ที่สอดคล้องกับสมการควบคุม คือ

สมการสมดุล

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0$$

(2.1)

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y = 0$$

เมื่อ X และ Y คือ องค์ประกอบของภาระเนื่องจากน้ำหนักของตัววัตถุเองในแนวแกน x และ y ตามลำดับ

สมการความเข้ากันได้ของความเครียด

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (2.2)$$

จากเงื่อนไขที่จะต้องสอดคล้องกับสมการควบคุมข้างต้น ในกรณีที่ทำการศึกษาจะพบว่าฟังก์ชันความเค้นรูปแบบหนึ่งที่มีความสอดคล้องกับเงื่อนไขของสมการควบคุม จะเป็นสมการในรูปของสมการพหุนาม (Polynomial) คือ

$$\phi = a_1xy^3 + a_2xy \quad (2.3)$$

เมื่อ a_1 และ a_2 คือค่าคงที่ ดังนั้นจากฟังก์ชันความเค้นที่กำหนดจะได้องค์ประกอบความเค้น คือ

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 6a_1xy \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = -a_2 - 3a_1y^2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

ค่าคงที่ a_1 และ a_2 จะสามารถหาค่าได้จากสภาวะเงื่อนไขขอบ (Boundary condition) ซึ่งสำหรับกรณีศึกษาจะพบว่าเงื่อนไขขอบ คือ

ที่ $x = 0$ ค่าความเค้นตัดเท่ากับ 0

$$\int_A y \sigma_x dA = 0 \quad (2.5)$$

ที่ $x = L$ ค่าความเค้นตัดเท่ากับ PL

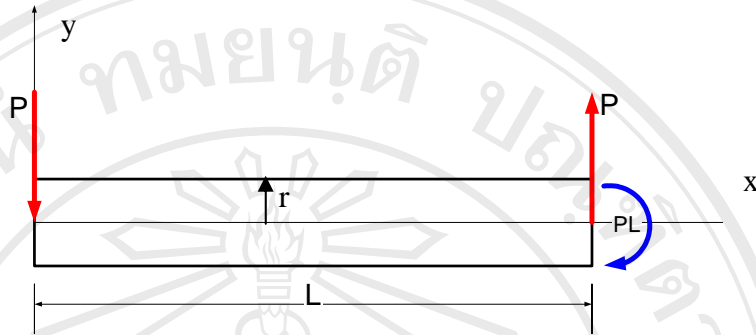
$$\int_A y \sigma_x dA = PL \quad (2.6)$$

ที่ $x = L$ แรงเฉือนเท่ากับ P

$$\int_A \tau_{xy} dA = P \quad (2.7)$$

ที่ $y = \pm r$ ความเค้นในแนวแกน y และความเค้นเฉือนมีค่าเท่ากับ 0

$$\sigma_y = \tau_{xy} = 0 \quad (2.8)$$



รูป 2.3 รูปแผนผังอิสระของคานายื่น

จากสภาวะเงื่อนไขขอบที่ $y = \pm r$ จะได้ว่า

$$a_2 = -3a_1 r^2 \quad (2.9)$$

และจากสภาวะเงื่อนไขขอบที่ $x = L$ จะได้ว่า

$$\int_{-r}^r 2y\sigma_x \sqrt{r^2 - y^2} dy = PL$$

$$\frac{3}{2} \pi r^4 a_1 = P \quad (2.10)$$

ดังนั้นจากสมการที่ (2.9) และ (2.10) จะได้ว่า

$$a_1 = \frac{2P}{3\pi r^4} \quad (2.11)$$

$$a_2 = -\frac{2P}{\pi r^3} \quad (2.12)$$

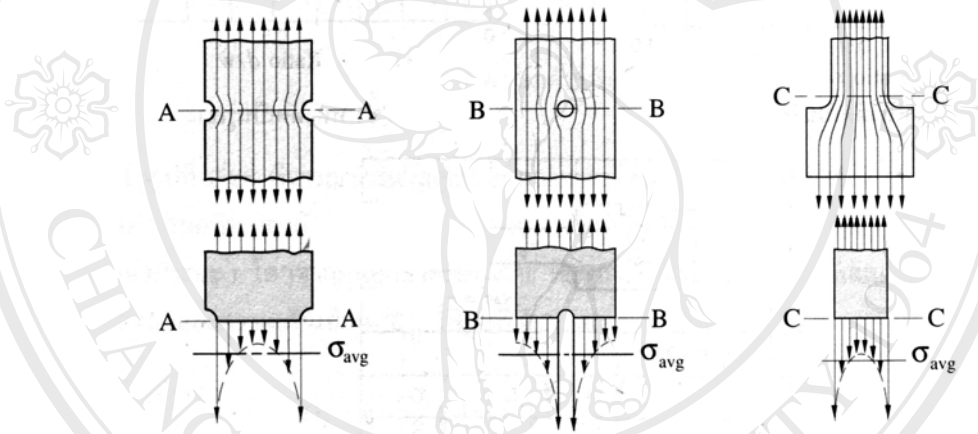
แทนค่า a_1 และ a_2 ที่ได้ลงในสมการองค์ประกอบความเค้น (2.4) จะได้

$$\sigma_x = \frac{4Pxy}{\pi r^4} \quad (2.13)$$

สมการที่ (2.13) จะนำไปหาค่าความเค้นดัดสูงสุดที่เกิดขึ้นโดยการแทนที่ค่า x และ y ที่ตำแหน่งที่เกิดค่าความเค้นดัดสูงสุด ดังแสดงในรูปที่ 2.2 และนำไปคูณกับค่าความเข้มของหน่วยแรงเพื่อนำไปเปรียบเทียบกับค่าความเค้นดัดสูงสุดที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์อีลิเมนต์

2.2.2 ความเค้นหนาแน่น (มนตรี พิรุณเกษตร, 2539)

ปกติแท่งวัสดุที่มีหน้าตัดคงที่ เมื่อรับภาระหรือแรงขนาดคงที่ เราจะสมมุติให้การกระจายความเค้นคงที่ตลอดทั้งหน้าตัดนั้น ถ้าขนาดของหน้าตัดมีการเปลี่ยนแปลง เช่น การทำเป็นร่อง การเจาะรู หรือการโค้งกลม (Fillet) การกระจายความเค้นบนหน้าตัดตรงตำแหน่งที่มีการเปลี่ยนแปลงจะมีการกระจายความเค้นที่ไม่สม่ำเสมอ ผลของความไม่ต่อเนื่องของหน้าตัดของวัสดุจะทำให้เกิดความเค้นหนาแน่นซึ่งแสดงให้เห็นเป็นการไหลของความเค้นได้ดังรูปที่ 2.4



รูป 2.4 ความเค้นหนาแน่นเกิดขึ้นเมื่อขนาดของหน้าตัดเกิดการเปลี่ยนแปลง
ที่มา : มนตรี พิรุณเกษตร, ภาควิชาวิศวกรรมวัสดุ (2539)

กำหนดให้ σ_{avg} คือ ค่าความเค้นเฉลี่ยซึ่งหาได้จากสมการ

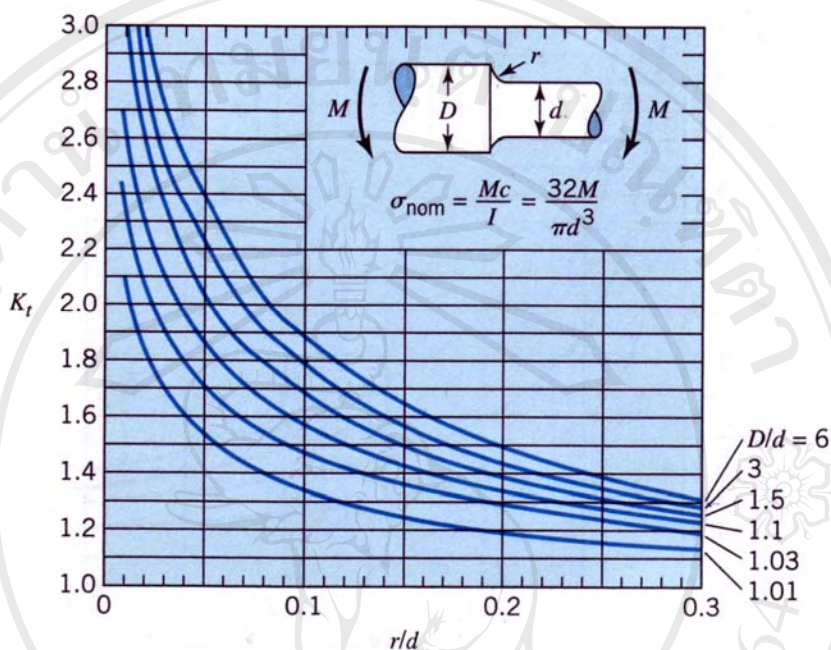
$$\sigma_{avg} = P/A \quad (2.14)$$

ค่าความเค้นที่ตำแหน่งที่เกิดความเค้นหนาแน่นเกิดขึ้นจะหาได้จากสมการ

$$\sigma = K_t \sigma_{avg} \quad (2.15)$$

เมื่อ K_t คือ ค่าความเข้มของความเค้น (Stress Concentration Factor) ซึ่งในการศึกษาผลกระทบของตัวแปรที่มีผลต่อการกระจายความเค้นในสกรูอิมเพลนต์และกระดูกโดยรอบนี้ ค่าความเข้มของหน่วย

แรงที่จะนำมาใช้ในการคำนวณจะเป็นกรณีที่ใช้ในการหาค่าความเค้นดัด เมื่อเพลากลมรับภาระโมเมนต์ดัดและจะหาได้จากกราฟในรูปที่ 2.5

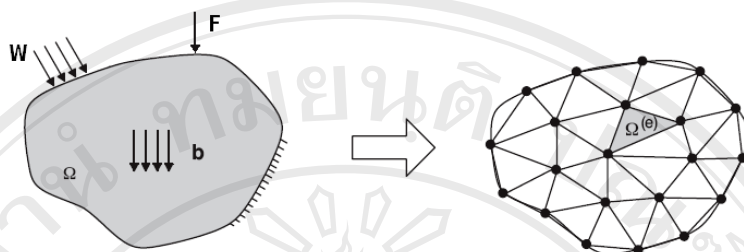


รูป 2.5 ค่าความเข้มของหน่วยแรงกรณีเพลากลมเปลี่ยนขนาดหน้าตัดและรับภาระโมเมนต์ดัด
ที่มา : Robert C. Juvinall and Kurt M. Marshek, *Fundamentals of Machine Component Design* (2000)

2.3 ทฤษฎีระเบียบวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ (อนุชา พรหมวังขวา, 2544)

ทฤษฎีระเบียบวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์เป็นระเบียบวิธีเชิงตัวเลข มีแนวความคิดที่ว่าวัตถุที่มีรูปร่างซับซ้อนใดๆ จะสามารถแบ่งออกเป็นชิ้นเล็กๆ ได้ โดยแต่ละชิ้นเล็กๆ เหล่านั้นสามารถพิจารณาแยกกันอย่างอิสระและสามารถประกอบเข้ากันเป็นวัตถุรูปเดิมได้ ระเบียบวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์นั้นเหมาะสำหรับปัญหาที่ยากซับซ้อนซึ่งไม่สามารถหาผลเฉลยแม่นยำตรงได้จากสมการเชิงอนุพันธ์ โดยจะแก้ปัญหาให้อยู่ในรูปฟังก์ชันพีชคณิตแล้วใช้คอมพิวเตอร์คำนวณหาผลลัพธ์ มีหลักการสำคัญคือ แบ่งแบบจำลองออกเป็นอีลิเมนต์เล็กๆ ให้มีความเหมาะสมกับรูปแบบของแบบจำลอง แต่ละอีลิเมนต์ต่อเชื่อมกันที่จุดต่อ (Node) ซึ่งเป็นตำแหน่งที่จะคำนวณตัวแปรไม่ทราบค่าโดยการสร้างฟังก์ชันการประมาณภายในอีลิเมนต์ให้มีความสอดคล้องกับสมการควบคุม ทำให้ได้สมการไฟไนต์อีลิเมนต์สำหรับอีลิเมนต์นั้นๆ เมื่อนำสมการไฟไนต์อีลิเมนต์มาประกอบเข้าด้วยกันจะได้สมการรวม (Global Equation) จากนั้น

แก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเพื่อหาตัวแปรไม่ทราบค่าที่จุดต่อ ภายใต้สภาวะสมดุลของภาระภายนอกและเงื่อนไขขอบของแบบจำลอง



รูป 2.6 การแบ่งแบบจำลองออกเป็นอีลิเมนต์เล็กๆ โดยระเบียบวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์

พิจารณารูป 2.4 เป็นวัตถุที่มีเนื้อต่อเนื่องใน 3 มิติ มีปริมาตรเท่ากับ V และมีพื้นผิวปิด S ล้อมรอบปริมาตร รับภาระกระทำแบบต่างๆคือ ภาระกระทำเป็นจุด (F) ภาระแบบกระจายกระทำที่ผิว (w) และแรงเนื่องจากน้ำหนักของวัตถุ (b) โดยมีเงื่อนไขขอบซึ่งขึ้นอยู่กับวิธีการจับยึดวัตถุคือการจับยึดแบบเป็นจุด การจับยึดแบบกระจายที่พื้นผิว เมื่อแบบจำลองถูกแบ่งออกเป็นอีลิเมนต์เล็กๆ ภาระแบบเป็นจุด ภาระแบบกระจาย แรงเนื่องจากน้ำหนักของวัตถุ การขจัดและเงื่อนไขขอบ จะถูกแปลงเป็นค่าลงในแต่ละจุดต่อ ในการสร้างสมการไฟไนต์อีลิเมนต์สำหรับปัญหา 3 มิติจะใช้หลักการของงานเสมือนเหมือนกับสมการไฟไนต์อีลิเมนต์สำหรับปัญหา 2 มิติ ต่างกันที่ใน 3 มิติจะมี 3 แกนคือ x, y, z ดังนั้นสนามการขจัดจะประกอบไปด้วย u, v, w โดยแต่ละจุดต่อจะมีการขจัด 3 ค่า

2.3.1 การสร้างสมการไฟไนต์อีลิเมนต์สำหรับการวิเคราะห์ของแข็ง 3 มิติ

การสร้างสมการไฟไนต์อีลิเมนต์สำหรับการวิเคราะห์ของแข็ง 3 มิติจะใช้หลักการของงานเสมือน อีลิเมนต์ที่พิจารณาจะเป็นอีลิเมนต์ที่มีสนามภายในเป็นสนามของการขจัด (Displacement Based Element) โดยมีความสัมพันธ์ของความเค้นและความเครียด คือ

$$\{\varepsilon\} = [D]\{u\} \quad (2.16)$$

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\} \quad (2.17)$$

เมื่อ $\{u\}$ คือ เวกเตอร์ของสนามการขจัดภายในอีลิเมนต์ประกอบด้วย u, v, w

$[D]$ คือ Derivative Operator Matrix

$[E]$ คือ เมตริกซ์แสดงความสัมพันธ์ของความเค้นและความเครียดในสภาวะยืดหยุ่น

$\{\varepsilon\}$ คือ เวกเตอร์ของสนามความเครียดภายในอีลิเมนต์

$\{\sigma\}$ คือ เวกเตอร์ของความเค้นภายในอีลิเมนต์

ดังนั้นจากสมการ (2.16) และ (2.17) เมื่อทราบสนามการขจัดภายในอีลิเมนต์จะทำให้สามารถหาเวกเตอร์ของสนามความเครียดภายในอีลิเมนต์ได้ คือ

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

และเวกเตอร์ของความเค้นภายในอีลิเมนต์ คือ

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

โดยมีเมทริกซ์แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดในกรณีที่ว่าวัสดุมีคุณสมบัติเหมือนกันในทุกทิศทาง คือ

$$[E] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

สนามการขจัดภายในโดยวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์เป็นค่าสนามภายในอีลิเมนต์และเป็นค่าฟังก์ชันของการขจัดที่จุดต่อ คือ

$$\{u\} = [N]\{d\} \quad (2.21)$$

เมื่อ $[N]$ คือ ฟังก์ชันรูปร่าง (Shape Function) ซึ่งจะขึ้นอยู่กับรูปร่างของอีลิเมนต์
 $\{d\}$ คือ ค่าการขจัดที่จุดต่อของอีลิเมนต์เป็นค่าแวกเตอร์ที่แยกมาจากแวกเตอร์ของการขจัดรวม $\{D\}$ ซึ่งเป็นผลลัพธ์ของการแก้สมการ

$$[K]\{D\} = \{F\} \quad (2.22)$$

$$\{D\} = [K]^{-1} \{F\} \quad (2.23)$$

เมื่อ $[K]$ คือ Global Stiffness Matrix เป็นเมตริกซ์รวมที่ประกอบจาก Stiffness Matrix, $[k]$ ของทุกอีลิเมนต์

$\{F\}$ คือ Global Force Vector เป็นแวกเตอร์รวมที่ประกอบจาก Element Force Vector, $\{f\}$ การสร้างสมการไฟไนต์อีลิเมนต์ก็คือการหาค่า $[k]$ และ $\{f\}$ ของอีลิเมนต์ที่มีรูปร่างใดๆ โดยที่สมการสมดุลในอีลิเมนต์คือ

$$[k]\{d\} = \{f\} \quad (2.24)$$

การสร้างสมการไฟไนต์อีลิเมนต์สำหรับการวิเคราะห์ของแข็ง 3 มิติจะใช้หลักการของงานเสมือน มีหลักการที่สำคัญคือ เมื่อโครงสร้างโดยทั่วไปถูกแรงกระทำจากภายนอกและโครงสร้างอยู่ในสภาพสมดุล แล้วสมมุติว่ามีการขจัดเสมือน (Virtual Displacements) เกิดขึ้น จะมีงานเสมือน (Virtual Work) เนื่องจากแรงภายนอกซึ่งจะมีค่าเท่ากับพลังงานความเครียดเสมือน (Virtual Strain Energy) เนื่องจากความเค้นในเนื้อวัสดุ จากหลักการนี้จะได้ความสัมพันธ์ คือ

$$\begin{aligned} \text{พลังงานความเครียดเสมือน} &= \text{งานเสมือนเนื่องจากแรงภายนอก} \\ \delta U_E &= \delta W_E \end{aligned} \quad (2.25)$$

เมื่อ U_E คือ พลังงานความเครียด

W_E คือ งานเนื่องจากแรงภายนอก

การหา δU_E จะเริ่มจากการแทนค่า $\{u\}$ จากสมการ (2.21) ลงในสมการ (2.16) จะได้ความเครียดภายในอีลิเมนต์เท่ากับ

$$\{\varepsilon\} = [D][N]\{d\} \quad (2.26)$$

$$\{\varepsilon\} = [B]\{d\} \quad (2.27)$$

เมื่อ $[B]$ คือ อนุพันธ์ของ $[N]$ สมการ (2.26) แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างการขจัดและความเครียด ถ้าสมมติว่ามีการขจัดเสมือน $\{\delta d\}$ จะให้ความเครียดเสมือนเท่ากับ $\{\delta \varepsilon\}$ จากพลังงานความเครียดซึ่งมีค่าเท่ากับพื้นที่ใต้กราฟของความเค้นและความเครียด ดังนั้นถ้ามีความเครียดเสมือน $\{\delta \varepsilon\}$ ภายใต้สภาวะความเค้น $\{\sigma\}$ จะได้พลังงานความเครียดเสมือนในอีลิเมนต์ที่มีปริมาตร V คือ

$$\delta U_E = \int_V \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV \quad (2.28)$$

แทนค่า $\{\delta \varepsilon\}^T$ ด้วย $\{\delta d\}^T [B]^T$ และแทนสมการ (2.27) ลงในสมการ (2.17) ได้ $\{\sigma\}$ เท่ากับ $[E][B]\{d\}$ ดังนั้นสมการ (2.13) จะได้ว่า

$$\delta U_E = \int_V \{\delta d\}^T [B]^T [E][B]\{d\} dV \quad (2.29)$$

สำหรับ δW_E จะเท่ากับการขจัดเสมือนคูณด้วยเวกเตอร์ของแรงจากภายนอกที่กระทำที่จุดต่อของอีลิเมนต์

$$\delta W_E = \{\delta d\}^T \{f\} \quad (2.30)$$

แทนสมการ (2.29) และ (2.30) ลงในสมการสมดุลพลังงาน จะได้

$$\int_V \{\delta d\}^T [B]^T [E][B]\{d\} dV = \{\delta d\}^T \{f\} \quad (2.31)$$

เทอม $\{\delta d\}$ เป็นการขจัดเสมือนที่จุดต่อ และ $\{d\}$ เป็นค่าการขจัดที่จุดต่อ ค่าทั้งสองไม่ขึ้นกับปริมาตรของอีลิเมนต์ ดังนั้น

$$[k]\{d\} = \{f\} \quad (2.32)$$

$$\text{เมื่อ} \quad [k] = \int_V [B]^T [E][B] dV \quad (2.33)$$

สมการ (2.33) คือ Stiffness Matrix ของอีลิเมนต์ มีขนาด 30×30 ซึ่งจะขึ้นอยู่กับอนุพันธ์ของ $[N]$ โดยที่ $[E]$ คือเมตริกซ์คุณสมบัติของวัสดุจะแสดงความสัมพันธ์ของความเค้นและความเครียดมีขนาด 6×6 ดังแสดงในสมการ (2.20) สำหรับเมตริกซ์ $[B]$ จะมีขนาด 6×30 หากจากอนุพันธ์ของฟังก์ชันรูปร่าง N_i ซึ่งเมื่อเลือกอีลิเมนต์ชนิด Ten Nodes Tetrahedral จะทำให้มีฟังก์ชันรูปร่าง 10 ค่าด้วยกัน การหา N_i จะเริ่มจากการสมมติสมการการจัดด้วยสมการโพลีโนเมียล แต่จะมีความยุ่งยากในการใช้สมการโพลีโนเมียลที่มีตัวแปรบนพิกัดฉาก (x, y, z) ดังนั้นเพื่อความสะดวกจึงใช้พิกัดธรรมชาติ (ξ, η, ζ) มาช่วยในการหาสมการของอีลิเมนต์ สำหรับอีลิเมนต์ Ten Nodes Tetrahedral จะมีสมการการจัด คือ

$$u = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\zeta + a_5\xi^2 + a_6\xi\eta + a_7\eta^2 + a_8\eta\zeta + a_9\zeta^2 + a_{10}\xi\zeta \quad (2.34)$$

$$v = a_{11} + a_{12}\xi + a_{13}\eta + a_{14}\zeta + a_{15}\xi^2 + a_{16}\xi\eta + a_{17}\eta^2 + a_{18}\eta\zeta + a_{19}\zeta^2 + a_{20}\xi\zeta \quad (2.35)$$

$$w = a_{21} + a_{22}\xi + a_{23}\eta + a_{24}\zeta + a_{25}\xi^2 + a_{26}\xi\eta + a_{27}\eta^2 + a_{28}\eta\zeta + a_{29}\zeta^2 + a_{30}\xi\zeta \quad (2.36)$$

สมการการจัดภายในอีลิเมนต์ คือ

$$u = \sum_{i=1}^{10} N_i u_i \quad (2.37)$$

$$v = \sum_{i=1}^{10} N_i v_i \quad (2.38)$$

$$w = \sum_{i=1}^{10} N_i w_i \quad (2.39)$$

สมการความสัมพันธ์ของตำแหน่งภายในอีลิเมนต์ คือ

$$x = \sum_{i=1}^{10} N_i x_i \quad (2.40)$$

$$y = \sum_{i=1}^{10} N_i y_i \quad (2.41)$$

$$z = \sum_{i=1}^{10} N_i z_i \quad (2.42)$$

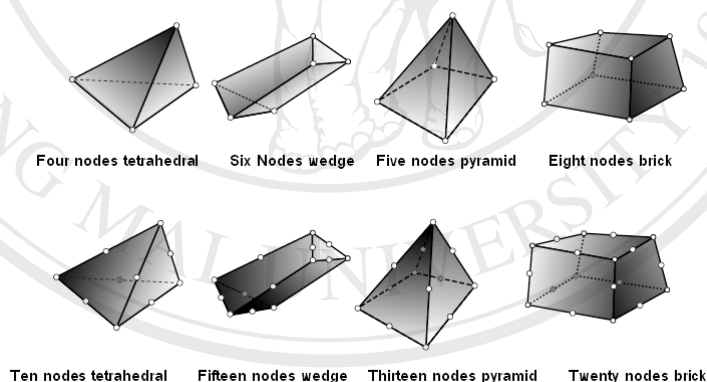
ดังนั้นสมการ (2.33) ในพิกัดฉาก (x, y, z) สามารถเปลี่ยนเป็นสมการในพิกัดธรรมชาติ (ξ, η, ζ) และใช้การอินทิเกรตโดยวิธี Gauss Quadrature จะได้ Element Stiffness Matrix คือ

$$[k] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [E] [B] (\det[J]) d\xi d\eta d\zeta \quad (2.43)$$

2.3.2 อีลิเมนต์ 3 มิติ

ในการแบ่งโครงสร้างออกเป็นอีลิเมนต์เล็ก ๆ นั้น ต้องเลือกชนิดของอีลิเมนต์ที่จะนำไปวิเคราะห์ให้เหมาะสม การเลือกชนิดของอีลิเมนต์จะคำนึงถึงคุณสมบัติของวัตถุหรือโครงสร้าง และจำนวนแกน (x, y, z) ที่ใช้บอกตำแหน่งของอีลิเมนต์ โดยอีลิเมนต์ 3 มิติที่ใช้ทั่วไปจะมีหลายชนิดดังแสดงในรูป 2.2

เนื่องจากสกรูอิมเพลนต์ขนาดเล็กนั้นมีรูปร่างที่ซับซ้อนและมีส่วนโค้งมาก ดังนั้นอีลิเมนต์ 3 มิติที่นำมาใช้ในการวิเคราะห์ในการศึกษานี้คือ Ten Nodes Tetrahedral ซึ่งจะให้คำตอบที่ถูกต้องมากกว่าอีลิเมนต์ชนิด Four Nodes Tetrahedral ที่มีขอบข้างตรงแต่จะใช้เวลาในการคำนวณมากกว่า



รูป 2.7 รูปร่างของอีลิเมนต์ 3 มิติแบบต่างๆ

ที่มา : Dary L. Logan. (2001)

2.4 ทฤษฎีความเสียหายของวัสดุ (อภิวัฒน์ พลชัย, 2531)

ทฤษฎีความเสียหายเป็นทฤษฎีที่บ่งบอกถึงสถานะเงื่อนไขที่วัสดุแต่ละประเภทจะเกิดการเสียรูปหรือเกิดการเสียหาย เนื่องจากเมื่อวัสดุนี้รับความเค้นหลายแนวจะเป็นการยากที่จะเดาได้ว่าเมื่อใดจึงจะเกิดการเสียรูปหรือเกิดการเสียหาย ดังนั้นจึงได้มีการศึกษาหาข้อมูลโดยการทดลองว่าถ้าวัสดุรับ

ความเค้นเป็นองค์ประกอบหลายตัวในสภาพและขนาดของความเค้นต่างๆกัน จะสัมพันธ์กับการเสียหายอย่างไร จากการศึกษาพบว่าวัสดุในแต่ละประเภทจะมีลักษณะการเสียหายที่แตกต่างกันไป สำหรับในการศึกษาผลกระทบของตัวแปรที่มีผลต่อการกระจายความเค้นที่เกิดขึ้นนี้ จะมีวัสดุที่ทำการวิเคราะห์ 2 ประเภท วัสดุแรกคือกระดูกที่บซึ่งจัดเป็นวัสดุที่มีความแข็งและเปราะซึ่งจากการศึกษาพบว่า เป็นวัสดุที่มีความสามารถรับความเค้นดึงและกดได้แตกต่างกัน ดังนั้นทฤษฎีที่จะนำมาพิจารณาความเสียหายคือ เกณฑ์การแตกหักของ Coulomb Mohr วัสดุประเภทที่สองคือ โทเทเนียมซึ่งเป็นวัสดุที่ใช้ทำสกรูอิมแพลนท์ขนาดเล็ก วัสดุประเภทนี้จัดเป็นวัสดุที่มีความเหนียวซึ่งจะเกิดการเสียหายเนื่องจากความเค้นเฉือน ดังนั้นทฤษฎีที่จะนำมาพิจารณาความเสียหายคือ ทฤษฎีพลังงานเสีรูปสูงสุด

2.4.1 เกณฑ์การแตกหักของ Coulomb Mohr

สำหรับเกณฑ์การแตกหักของ Coulomb-Mohr การแตกหักจะเกิดบนระนาบของวัสดุที่ผลรวมของความเค้นฉากและความเค้นเฉือนมีค่าวิกฤติ โดยที่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$|\tau| + \mu\sigma = \tau_i \quad (\text{at fracture}) \quad (2.44)$$

โดยที่ τ และ σ เป็นความเค้นที่กระทำอยู่บนระนาบที่เกิดการแตกหัก และค่า μ และ τ_i เป็นค่าคงที่ของวัสดุ จากหลักการดังกล่าวเกณฑ์การแตกหักของ Coulomb-Mohr เมื่อวัสดุรับความเค้นซึ่งคิดเป็นความเค้นหลัก σ_1 , σ_2 และ σ_3 จะเกิดการเสียหายเมื่อค่าความเค้นยังผล (Effective Stress) มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับความเค้นประลัย

$$\sigma_{Me} \geq \sigma_{ut} \quad (2.45)$$

โดยที่

$$\sigma_{Me} = \text{MAX} (C_1, C_2, C_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

$$C_1 = \frac{\sigma_{ut}}{\sigma_{uc} (m-1)} [|\sigma_1 - \sigma_2| + m(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

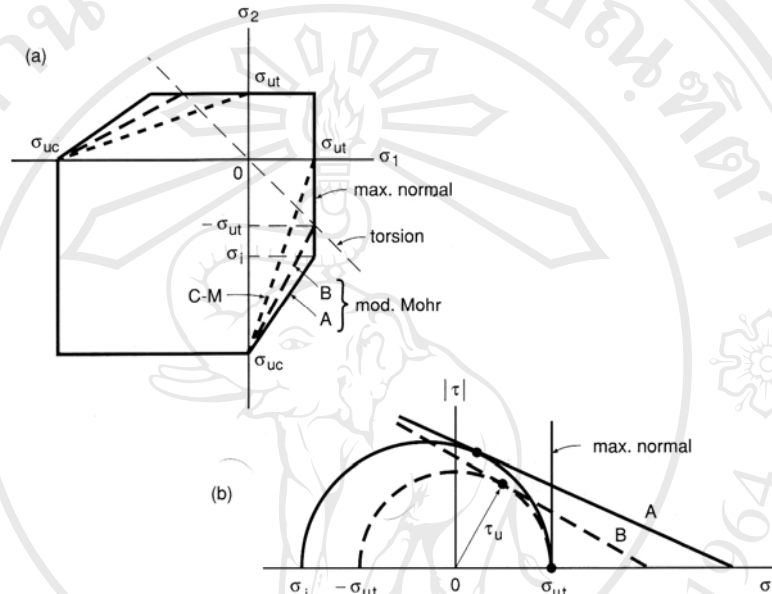
$$C_2 = \frac{\sigma_{ut}}{\sigma_{uc} (m-1)} [|\sigma_2 - \sigma_3| + m(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

$$C_3 = \frac{\sigma_{ut}}{\sigma_{uc} (m-1)} [|\sigma_3 - \sigma_1| + m(\sigma_3 + \sigma_1)]$$

σ_{ut} = Ultimate Tensile Stress

σ_{uc} = Ultimate Compressive Stress

$$m = 1 + \frac{2\sigma_{ut}}{\sigma_{uc}}$$



รูป 2.8 เกณฑ์การเสียหาย Modified Mohr

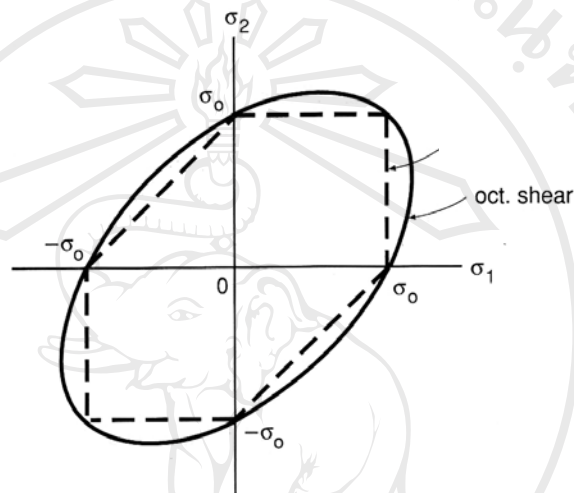
ที่มา : Norman E. Dowling, *Mechanical Behavior of Materials* (1999)

2.4.2 ทฤษฎีพลังงานเสีรูปสูงสุด

แนวคิดสำหรับทฤษฎีนี้คือในขณะที่เนื้อวัสดุรับความเค้นซึ่งคิดเป็นความเค้นหลัก σ_1 , σ_2 และ σ_3 นั้นเราสามารถคิดว่าประกอบขึ้นมาจากสภาวะความเค้นสองลักษณะรวมกันคือสภาวะความเค้นที่กระทำขนาดเท่ากันหมดในทุกทิศทางซึ่งเป็นที่ยอมรับกันว่าเป็นความเค้นที่ทำให้ปริมาตรของวัสดุนั้นเกิดการเปลี่ยนแปลงแต่ไม่เกิดการบิดเบี้ยวแต่อย่างใด ส่วนความเค้นอีกสภาวะหนึ่งคือความเค้นที่เกิดจากการนำเอาความเค้นในสภาวะแรกไปลบออกจากความเค้นจริงที่เกิดขึ้น สภาวะความเค้นอย่างหลังนี้ถือว่าเป็นเหตุให้เกิดการบิดเบี้ยวหรือเสีรูปของเนื้อวัสดุและพลังงานความเครียดที่คำนวณได้จากความเค้นในสภาวะหลังนี้เรียกว่าพลังงานเครียดเสีรูป (Strain Energy of Distortion : u_d) ในการทำนายการเสียหายของวัสดุใดๆตามทฤษฎีพลังงานเสีรูปกล่าวไว้ว่าเนื้อวัสดุตรงจุดที่พิจารณาจะเกิดการคลากถ้า u_d ที่จุดใดๆบนเนื้อวัสดุเกินความค่าพลังงานความเครียดสูงสุด u_{limit} ที่วัสดุนั้นรับได้

$$u_d \geq u_{limit} \quad (2.46)$$

$$\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] \geq 2\sigma_y^2 \quad (2.47)$$



รูป 2.9 ขอบเขตการเสียหายในทฤษฎีพลังงานเสียรูปสูงสุด

ที่มา : Norman E. Dowling, *Mechanical Behavior of Materials* (1999)

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
 Copyright © by Chiang Mai University
 All rights reserved