

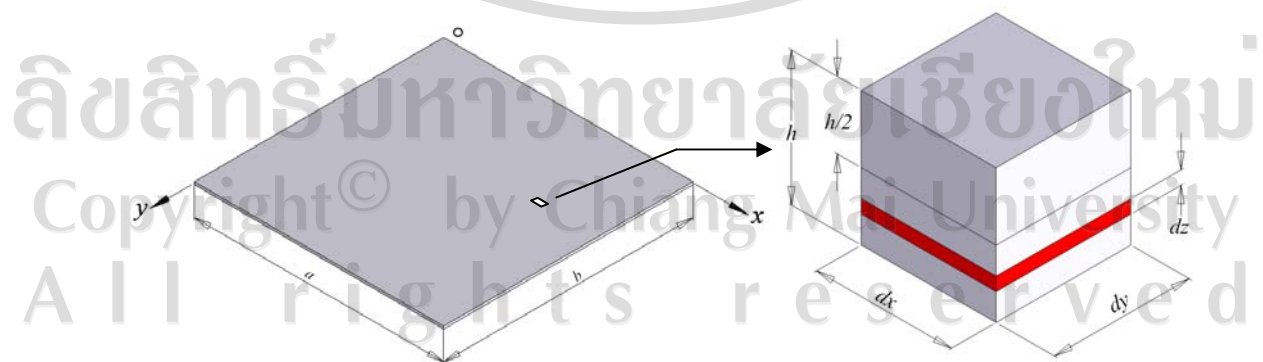
บทที่ 2

หลักการและทฤษฎี

การหาความถี่ธรรมชาติโดยใช้วิธีเรย์เล่-ริทซ์ (Rayleigh-Ritz method) เป็นวิธีที่เพิ่มเติมจากวิธีพลังงานของเรย์เล่ซึ่งอาศัยหลักการของพลังงานรวมของระบบที่เกิดขึ้นจะมีค่าต่ำสุด ในขณะที่วัตถุอยู่ในสภาวะสมดุล (Equilibrium state) หลังจากนั้นริทซ์ได้ประยุกต์การประมาณความถี่ธรรมชาติได้ถูกต้องมากยิ่งขึ้น โดยอาศัยพื้นฐานที่การจะได้ความถี่ธรรมชาติในโหมดที่สูงขึ้นและให้ถูกต้องขึ้น ต้องมีการประมาณค่ารูปร่างโหมดที่หลาย ๆ ความถี่ธรรมชาติมากขึ้น ดังนั้นวิธีการนี้จะมีการประมาณรูปร่างโหมดที่หลาย ๆ ความถี่ธรรมชาตินั่นเอง ถ้ารูปร่างโหมดที่เลือกใช้พิจารณามีลักษณะที่ถูกต้องหรือใกล้เคียงกับรูปร่างโหมดที่แท้จริงแล้ว จะได้ความถี่ธรรมชาติพื้นฐานและความถี่ธรรมชาติที่สูงขึ้น ตามจำนวนรูปร่างโหมดที่ประมาณได้ถูกต้องหรือใกล้เคียงกับค่าที่แท้จริงมากขึ้น

2.1 พลังงานศักย์ และพลังงานจลน์ของแผ่นบาง

เมื่อพิจารณารูป 2.1 ซึ่งกำหนดให้ระนาบ x - y เป็นระนาบกึ่งกลางแผ่น (Middle Plane) และสมมุติฐานว่า แผ่นหนาเท่ากับ h ซึ่งมีความหนาน้อยมากเมื่อเทียบกับขนาดด้านกว้าง และยาว ค่าการแอ่นตัวจากการสั่นในแนวแกน z มีขนาดน้อยมากเมื่อเทียบกับความหนา h แนวที่ตั้งฉากกับระนาบกึ่งกลางแผ่นยังคงแนวตั้งฉากหลังแผ่นเกิดการแอ่นตัว และแผ่นบางมีคุณสมบัติทางกลเหมือนกันในทุกทิศทาง



รูป 2.1 แกนพิกัดและหน่วยย่อยของแผ่น

จากเงื่อนไขที่ว่า การแอ่นมีค่าน้อยนั้น จะสามารถเขียนความสัมพันธ์ของระยะยึดของ
ระนาบที่ห่างจากระนาบกึ่งกลางแผ่นเท่ากับ z ในแนวแกน x และ y ได้ดังนี้

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.1 \text{ ก})$$

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.1 \text{ ข})$$

เมื่อ w เป็นค่าการแอ่นตัวในแนวแกน z

u เป็นระยะยึดตามแกน x

v เป็นระยะยึดตามแกน y

ความเครียด (Strain) ที่เกิดขึ้นที่ระนาบกึ่งกลางแผ่นดังกล่าว สามารถเขียนอยู่ในรูปดังนี้

$$\epsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.2 \text{ ก})$$

$$\epsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.2 \text{ ข})$$

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.2 \text{ ค})$$

เมื่อ ϵ_x, ϵ_y เป็นความเครียดในแนวแกน x และ y

γ_{xy} เป็นความเครียดเฉือนที่เกิดขึ้นที่ระนาบ $x-y$

ความเค้น (Stress) ที่เกิดขึ้นบนระนาบกึ่งกลางแผ่นเมื่อเทียบกับความเครียดจะสามารถหาสมการได้
จากความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.3 \text{ ก})$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2.3 ข)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = -\frac{Ez}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.3 ค)$$

- เมื่อ σ_x คือ ความเค้นในแนวแกน x
 σ_y คือ ความเค้นในแนวแกน y
 τ_{xy} คือ ความเค้นเฉือนบนระนาบที่ตั้งฉากกับแกน x และมีทิศทางตามแกน y
 ν คือ ค่าสัดส่วนปัวซอง (Poisson's ratio)
 E คือ มอดุลัสยืดหยุ่น (modulus of elasticity)
 G คือ มอดุลัสเฉือน (modulus of shear)

เมื่อพิจารณาพลังงานศักย์ (Potential Energy) ที่สะสมภายในส่วนย่อยของชิ้นที่แรงภายในช่วงการเปลี่ยนรูป สามารถแสดงได้ดังสมการ (2.4) คือ

$$dU = \left(\frac{\varepsilon_x \sigma_x}{2} + \frac{\varepsilon_y \sigma_y}{2} + \frac{\gamma_{xy} \tau_{xy}}{2} \right) dx dy dz \quad (2.4)$$

แทนสมการที่ (2.2 ก)-(2.2 ค) และ (2.3 ก)-(2.3 ค) ลงในสมการที่ (2.4) จะได้

$$dU = \frac{Ez^2}{2(1-\nu^2)} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy dz \quad (2.5)$$

ทำการอินทิเกรตตลอดปริมาตรของแผ่นบางเพื่อหาพลังงานศักย์รวมของแผ่นบาง

$$U = \iiint dU \quad (ก)$$

ดังนั้นพลังงานศักย์ของแผ่นบางจะได้

$$U = \frac{D}{2} \iint_R \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (2.6)$$

เมื่อ $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ คือ ค่าความแกร่ง (Flexural rigidity) ของแผ่นบาง

R คือ ขอบเขตของการอินทิเกรต

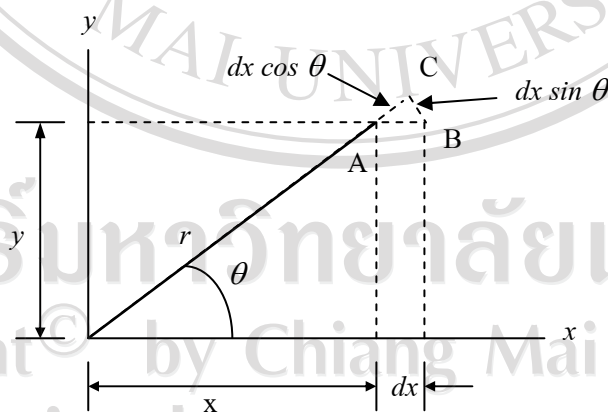
และสมการพลังงานจลน์ (Kinetic Energy) ของแผ่นบางจากหลักการอนุรักษ์พลังงาน (Principle of conservation of energy) จะได้

$$T = \frac{\rho h}{2} \iint \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy \quad (2.7)$$

เมื่อ ρh คือ มวลของวัตถุต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่

2.2 การสั่นอิสระของแผ่นบางรูปวงแหวน

ในการคำนวณการสั่นของแผ่นบางรูปวงแหวนสามารถทำได้โดยใช้การแปลงสมการพลังงานศักย์ และพลังงานจลน์ให้อยู่ในรูปพิกัดเชิงขั้ว(r, θ)



รูป 2.2 พิกัดเชิงขั้ว

จากรูป 2.2 จะเห็นได้ว่า สามเหลี่ยม ABC มีขนาดเพิ่มขึ้น dx ในแกน x ดังนั้น จะได้ว่า

$$dr = dx \cos \theta, \quad d\theta = -\frac{dx \sin \theta}{r} \quad (๗)$$

และเมื่อพิจารณาการแอ่น w ในพจน์ของ r และ θ จะได้

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \quad (๘)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r} \quad (๙)$$

และเมื่อนำสมการ (๘), (๙) มาหาอนุพันธ์อีกครั้งจะได้

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \right) \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \sin^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial r} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \frac{\cos^2 \theta}{r} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} \\ &\quad + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \end{aligned} \quad (๑๐)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \frac{\cos 2\theta}{r} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \frac{\cos 2\theta}{r^2} \\ &\quad - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} \end{aligned} \quad (๑๑)$$

ดังนั้นเมื่อจัดรูปสมการจากพิกัดฉาก (x, y) ให้อยู่ในพิกัดเชิงขั้ว (r, θ) จะได้สมการ

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right\}^2 \quad (2.10)$$

แทนค่าสมการ (2.9), (2.10) ลงในสมการ (2.6) เพื่อเปลี่ยนรูปของ U , T เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนได้

$$U = \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right\}^2 \right] r dr d\theta \quad (2.11)$$

และสมการของพลังงานจลน์

$$T = \frac{\rho h}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 r dr d\theta \quad (2.12)$$

จากการประมาณค่าฟังก์ชันเพื่อแทนรูปร่างโหมดของแผ่นบางรูปวงกลม สมมติให้เกิดการสั่นแบบฮาร์โมนิก (Harmonic vibrations) อยู่ในรูป

$$w(r, \theta, t) = W(r, \theta) \sin \omega t \quad (\text{ข})$$

นำไปแทนในสมการ (2.11) และ (2.12) จะได้

$$U = \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) + 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) \right\}^2 \right] r d\theta dr \cdot \sin^2 \omega t \quad (2.13)$$

$$T = \frac{\rho h \omega^2}{2} \cos^2 \omega t \int_0^{2\pi} \int_0^a W^2 r dr d\theta \quad (2.14)$$

จากหลักของเรย์เล่ ค่าพลังงานศักย์สูงสุดมีค่าเท่ากับค่าพลังงานจลน์สูงสุดเมื่อระบบคงที่ ดังนั้นค่าพลังงานศักย์จะสูงสุดเมื่อ $\sin \omega t = 1$ และค่าพลังงานจลน์จะสูงสุดเมื่อ $\cos \omega t = 1$ ดังนั้นจะได้พลังงานศักย์สูงสุดของแผ่นบางรูปวงกลม

$$U_{\max} = \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) + 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) \right\}^2 \right] r d\theta dr \quad (2.15)$$

และพลังงานจลน์สูงสุดของแผ่นบางรูปวงกลม คือ

$$T_{\max} = \frac{\rho h \omega^2}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a W^2 r dr d\theta \quad (2.16)$$

เมื่อประยุกต์ใช้ในกรณีของแผ่นบางรูปวงแหวนขอบในยึดแน่นและขอบนอกปล่อยอิสระจากหลักของเรย์เล่-ริทซ์สามารถสมมุติให้รูปร่างโหมด $W(r, \theta)$ ให้อยู่ในรูปอนุกรมดังนี้

$$W(r, \theta) = \sum_{i=1}^n c_i W_i(r, \theta) \quad (2.17)$$

โดยที่ c_i เป็นค่าคงที่และ $W_i(r, \theta)$ เป็นฟังก์ชันที่อิสระต่อกันซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขที่ขอบ เมื่อพิจารณาจากรูป 2.3 ขอบ $r = b$ การแอ่นและความชันมีค่าเป็นศูนย์ คือ

$$W = 0 \quad (2.18 ก)$$

$$\frac{\partial W}{\partial r} = 0 \quad (2.18 ข)$$

ที่ขอบ $r = a$ แรงเฉือนและโมเมนต์ดัดมีค่าเป็นศูนย์ คือ

$$\left[\frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 W) + (1-\nu) \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} W_{,r\theta\theta} - \frac{1}{r^2} W_{,\theta\theta} \right) \right] = 0 \quad (2.19 ก)$$

$$\left[W_{,rr} + \nu \left(\frac{1}{r} W_{,r} + \frac{1}{r^2} W_{,\theta\theta} \right) \right] = 0 \quad (2.19 ข)$$

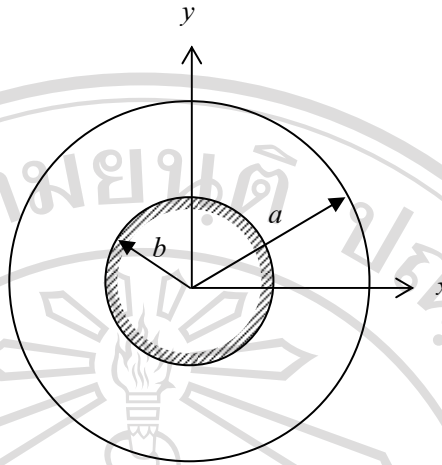
เมื่อ ∇^2 คือ $\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$

$W_{,r}$ คือ $\frac{\partial W}{\partial r}$

$W_{,rr}$ คือ $\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}$

$W_{,\theta\theta}$ คือ $\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2}$

$W_{,r\theta\theta}$ คือ $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)$



รูป 2.3 แผ่นบางรูปวงแหวนขอบด้านในยึดแน่น และขอบด้านนอกปล่อยอิสระ

ดังนั้นเมื่อพิจารณาพลังงานศักย์สูงสุดของแผ่นบางรูปวงแหวนซึ่งเงื่อนไขขอบที่ $r=b$ จากขอบใน ($r=b$) ถึงขอบนอก ($r=a$) และ θ จาก $0 - 2\pi$ แล้วสามารถจัดรูปสมการ (2.15), (2.16) ใหม่ได้ดังนี้

$$U_{\max} = \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} \int_b^a \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) + 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) \right\}^2 \right] r d\theta dr \quad (2.20)$$

และพลังงานจลน์สูงสุดของแผ่นบางรูปวงแหวน คือ

$$T_{\max} = \frac{\rho h \omega^2}{2} \int_0^{2\pi} \int_b^a W^2 r dr d\theta \quad (2.21)$$

ถ้าการกระจัดของแผ่นบางรูปวงแหวนสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเชิงเรขาคณิต และแผ่นบางอยู่ในสภาพสมดุลแล้วพลังงานรวมที่เกิดขึ้นมีค่าต่ำสุด และเมื่อเทียบอนุพันธ์ย่อยของผลต่างของพลังงานศักย์ และพลังงานจลน์กับค่าคงที่ c_j จะเป็นไปตามสมการ (2.22)

$$\frac{\partial (U_{\max} - T_{\max})}{\partial c_j} = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.22)$$

จากสมการ (2.22) จะแยก ω ออกจากสมการเพื่อความสะดวกในการคำนวณ จึงได้จัดให้สมการอยู่ในรูปของ U^* และ T^* ดังนี้

$$\frac{\partial(U_{\max} - T_{\max})}{\partial c_j} = \frac{\partial U^*}{\partial c_j} - \omega^2 \frac{\partial T^*}{\partial c_j} \quad (2.23)$$

เมื่อ

$$U^* = \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} \int_b^a \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) + 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) \right\}^2 \right] r d\theta dr \quad (2.24)$$

$$T^* = \frac{\rho h}{2} \int_0^{2\pi} \int_b^a W^2 r dr d\theta \quad (2.25)$$

เมื่อแทนสมการ (2.17) ลงใน (2.24), (2.25) สามารถจัดรูปใหม่ของ U^*, T^* ได้ดังนี้

$$U^* = \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} \int_b^a \left[\left(\frac{\partial^2 \left(\sum_{i=1}^n c_i W_i \right)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^n c_i W_i \right)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \left(\sum_{i=1}^n c_i W_i \right)}{\partial \theta^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \frac{\partial^2 \left(\sum_{i=1}^n c_i W_i \right)}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^n c_i W_i \right)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \left(\sum_{i=1}^n c_i W_i \right)}{\partial \theta^2} \right) + 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^n c_i W_i \right)}{\partial \theta} \right) \right\}^2 \right] r d\theta dr \quad (ข)$$

$$T^* = \frac{\rho h}{2} \int_0^{2\pi} \int_b^a \left(\sum_{i=1}^n c_i W_i \right)^2 r dr d\theta \quad (ฅ)$$

และเมื่อทำการหาอนุพันธ์ของสมการ (ซ), (ฅ) เทียบกับ c_j จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^*}{\partial c_j} = & D \sum_{i=1}^n c_i \int_0^{2\pi} \int_b^a \left(\frac{\partial^2 W_i}{\partial r^2} \frac{\partial^2 W_j}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 W_j}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W_i}{\partial r} \right) \right) + \left(\frac{\partial^2 W_i}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W_j}{\partial r} \right) \right) \\ & + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W_i}{\partial r^2} \frac{\partial^2 W_j}{\partial \theta^2} \right) + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W_j}{\partial r^2} \frac{\partial^2 W_i}{\partial \theta^2} \right) + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial W_j}{\partial r} \frac{\partial W_i}{\partial r} \right) \\ & + \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial W_i}{\partial r} \frac{\partial^2 W_j}{\partial \theta^2} \right) + \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial W_j}{\partial r} \frac{\partial^2 W_i}{\partial \theta^2} \right) + \left(\frac{1}{r^4} \frac{\partial^2 W_j}{\partial \theta^2} \frac{\partial^2 W_i}{\partial \theta^2} \right) \\ & - (1-\nu) \left(\left(\frac{\partial^2 W_j}{\partial r^2} \frac{\partial W_i}{\partial r} \right) + \left(\frac{\partial^2 W_i}{\partial r^2} \frac{\partial W_j}{\partial r} \right) + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W_i}{\partial r^2} \frac{\partial^2 W_j}{\partial \theta^2} \right) \right. \\ & + \left. \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W_j}{\partial r^2} \frac{\partial^2 W_i}{\partial \theta^2} \right) \right) + 2(1-\nu) \left(\frac{1}{r^4} \frac{\partial W_j}{\partial \theta} \frac{\partial W_i}{\partial \theta} \right) - \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial W_i}{\partial \theta} \frac{\partial^2 W_j}{\partial r \partial \theta} \right) \\ & - \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial W_j}{\partial \theta} \frac{\partial^2 W_i}{\partial r \partial \theta} \right) + \left. \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W_j}{\partial r \partial \theta} \frac{\partial^2 W_i}{\partial r \partial \theta} \right) \right) \Bigg) r dr d\theta \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial c_j} = \rho h \sum_{i=1}^n c_i \int_0^{2\pi} \int_b^a (W_i W_j) r dr d\theta \quad (2.27)$$

ให้ k_{ij} และ m_{ij} เป็นค่าการอินทิเกรตของสมการ (2.26) , (2.27) ดังนี้

$$\begin{aligned} k_{ij} = & \int_0^{2\pi} \int_b^a \left(\frac{\partial^2 W_i}{\partial r^2} \frac{\partial^2 W_j}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 W_j}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W_i}{\partial r} \right) \right) + \left(\frac{\partial^2 W_i}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W_j}{\partial r} \right) \right) \\ & + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W_i}{\partial r^2} \frac{\partial^2 W_j}{\partial \theta^2} \right) + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W_j}{\partial r^2} \frac{\partial^2 W_i}{\partial \theta^2} \right) + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial W_j}{\partial r} \frac{\partial W_i}{\partial r} \right) \\ & + \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial W_i}{\partial r} \frac{\partial^2 W_j}{\partial \theta^2} \right) + \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial W_j}{\partial r} \frac{\partial^2 W_i}{\partial \theta^2} \right) + \left(\frac{1}{r^4} \frac{\partial^2 W_j}{\partial \theta^2} \frac{\partial^2 W_i}{\partial \theta^2} \right) \\ & - (1-\nu) \left(\left(\frac{\partial^2 W_j}{\partial r^2} \frac{\partial W_i}{\partial r} \right) + \left(\frac{\partial^2 W_i}{\partial r^2} \frac{\partial W_j}{\partial r} \right) + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W_i}{\partial r^2} \frac{\partial^2 W_j}{\partial \theta^2} \right) \right. \\ & + \left. \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W_j}{\partial r^2} \frac{\partial^2 W_i}{\partial \theta^2} \right) \right) \\ & + 2(1-\nu) \left(\frac{1}{r^4} \frac{\partial W_j}{\partial \theta} \frac{\partial W_i}{\partial \theta} \right) - \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial W_i}{\partial \theta} \frac{\partial^2 W_j}{\partial r \partial \theta} \right) \\ & - \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial W_j}{\partial \theta} \frac{\partial^2 W_i}{\partial r \partial \theta} \right) + \left. \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W_j}{\partial r \partial \theta} \frac{\partial^2 W_i}{\partial r \partial \theta} \right) \right) \Bigg) r dr d\theta \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$m_{ij} = \int_0^{2\pi} \int_b^a (W_i W_j) r dr d\theta \quad (2.29)$$

จากกรณี $k_{ij}=k_{ji}$, $m_{ij}=m_{ji}$ เมื่อนำสมการ (2.28),(2.29) แทนลงใน (2.26) , (2.27) จากนั้นนำสมการที่ได้ แทนลงในสมการ (2.23) จะได้

$$\sum_{i=1}^n c_i (D k_{ij} - \omega^2 \rho h m_{ij}) = 0 \quad (2.30)$$

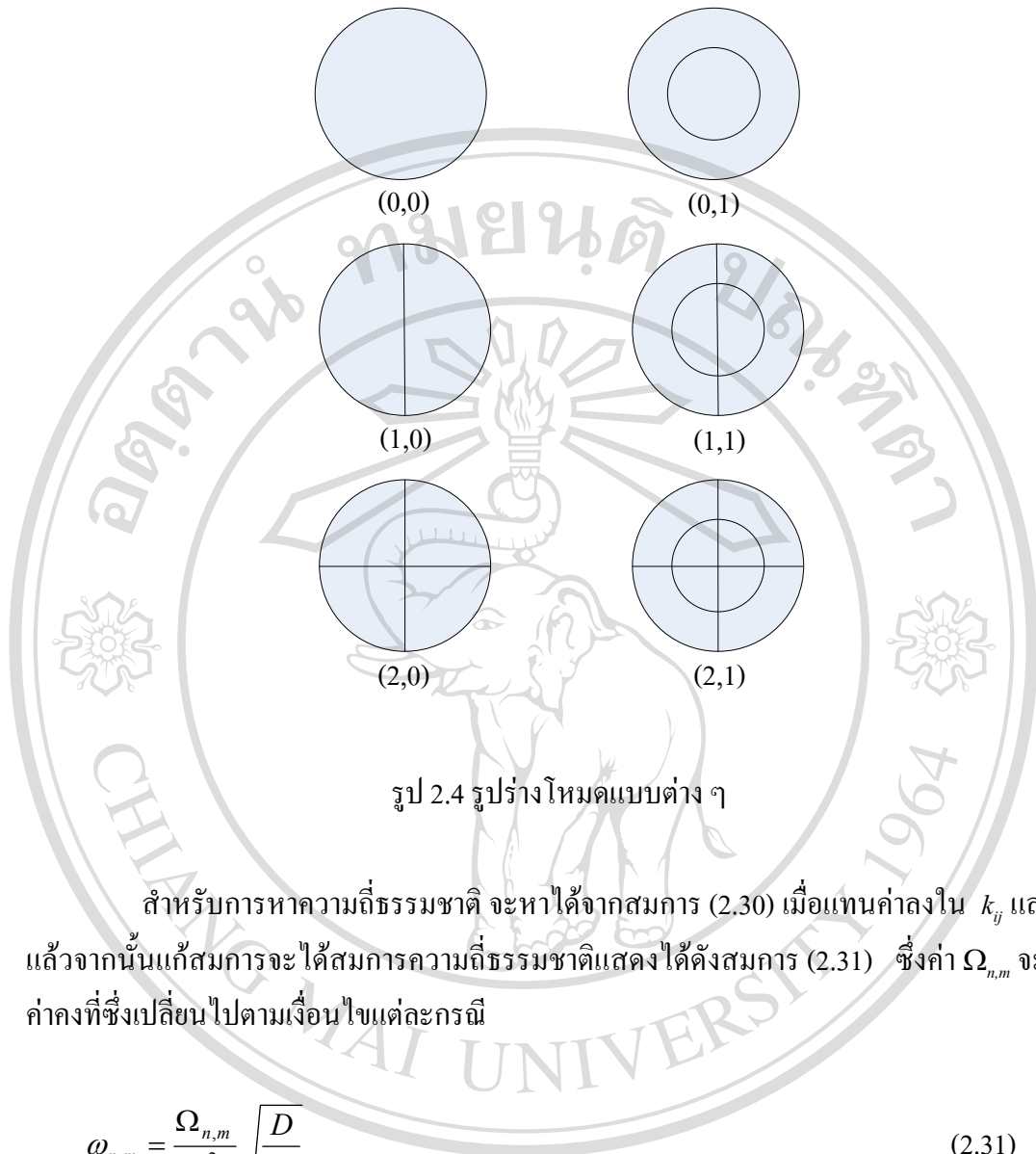
$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } i &= 1, 2, \dots, n \\ j &= 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

ซึ่งจะอยู่ในรูปของเมทริกซ์จำนวน n สมการ ผลเฉลยจากการหาค่าเฉพาะจะทำให้ได้ความถี่ธรรมชาติ (ω) จำนวน n ค่า

2.3 รูปร่างโหมด และความถี่ธรรมชาติ

รูปร่างโหมดของแผ่นบางรูปวงกลมสามารถแยกให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันระหว่าง r และ θ ได้ซึ่งสามารถอธิบายรูปร่างโหมดในรูปแบบของจำนวนเส้นผ่านศูนย์กลาง และจำนวนวงแหวน สำหรับดัชนีของตัวเลขโหมดเส้นผ่านศูนย์กลาง (nodal diameters) และตัวเลขโหมดวงแหวน (nodal circles) ของรูปร่างโหมด ลำดับของดัชนีจะแตกต่างกันไปแล้วแต่สำนักพิมพ์ สำหรับในงานวิจัยนี้รูปร่างโหมดมี m โหนดวงแหวน , n โหนดเส้นผ่านศูนย์กลาง และแสดงโดย (n,m) เป็นลำดับในการแสดงรูปร่างโหมด ดังรูป 2.4

ตัวอย่างเช่น ในกรณีโหมด (2,1) คือ รูปร่างโหมดมี 1 โหนดวงแหวน, 2 โหนดเส้นผ่านศูนย์กลาง สามารถอธิบายได้ว่าแผ่นบางรูปวงกลมได้เกิดการสั่นสะเทือนจากความถี่ธรรมชาติเป็นรูปร่างซึ่งจะแบ่งแผ่นบางเป็น 4 ส่วนด้วยเส้นผ่านศูนย์กลาง 2 เส้นทำมุมฉากกัน และแบ่งแผ่นวงกลมออกเป็น 2 ส่วนตามแนวรัศมี



รูป 2.4 รูปร่างโหมดแบบต่างๆ

สำหรับการหาความถี่ธรรมชาติ จะหาได้จากสมการ (2.30) เมื่อแทนค่าลงใน k_{ij} และ m_{ij} แล้วจากนั้นแก้สมการจะได้สมการความถี่ธรรมชาติแสดงได้ดังสมการ (2.31) ซึ่งค่า $\Omega_{n,m}$ จะเป็นค่าคงที่ซึ่งเปลี่ยนไปตามเงื่อนไขแต่ละกรณี

$$\omega_{n,m} = \frac{\Omega_{n,m}}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (2.31)$$

เมื่อ n คือ โหนดเส้นผ่านศูนย์กลาง

m คือ โหนดวงแหวน

Ω คือ สัมประสิทธิ์ความถี่ธรรมชาติ

ω คือ ความถี่ธรรมชาติ

a คือ รัศมีขอบนอกของแผ่นวงแหวน

2.4 วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขที่เหมาะสมกับการแก้ปัญหาทางวิศวกรรมที่มีความยุ่งยากซับซ้อนในการหาคำตอบ โดยแก้ปัญหาให้อยู่ในรูปพีชคณิตแล้วใช้คอมพิวเตอร์คำนวณหาผลลัพธ์ มีหลักการสำคัญ คือ การแบ่งแบบจำลองออกเป็นส่วนย่อย ๆ ที่เรียกว่าเอลิเมนต์ (Element) ให้มีความเหมาะสมกับแบบจำลอง ซึ่งในแต่ละเอลิเมนต์จะต่อเชื่อมกันที่จุดต่อ (Node) ซึ่งเป็นตำแหน่งตัวแปรที่ไม่ทราบค่า โดยการสร้างฟังก์ชันประมาณค่าภายในเอลิเมนต์ให้สอดคล้องกับสมการควบคุมทำให้ได้สมการเฉพาะ (Local equation) สำหรับเอลิเมนต์นั้น ๆ เมื่อนำสมการไฟไนต์เอลิเมนต์มาประกอบเข้าด้วยกันจะได้สมการรวม (Global equation) จากนั้นแก้สมการที่ได้ด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข เพื่อหาตัวแปรไม่ทราบค่าที่จุดต่อ ภายใต้สถานะสมดุลของแรงภายนอก และเงื่อนไขที่ขอบของแบบจำลอง สำหรับการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นั้น เป็นการวิเคราะห์ภายใต้สถานะสถิต ซึ่งจะถือว่าแรงกระทำจากภายนอกต่อวัตถุมีค่าคงที่ หรือมีการเปลี่ยนแปลงตามเวลาแต่มีความถี่ต่ำมาก (น้อยกว่า $1/3$ ของความถี่ธรรมชาติต่ำสุดของโครงสร้าง) สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ทั่วไป ของการวิเคราะห์การสั่น คือ

$$[m]\{\ddot{D}\} + [c]\{\dot{D}\} + [k]\{D\} = \{F\} \quad (2.32)$$

เมื่อ $[m]$ คือ เมทริกซ์มวลของโครงสร้าง

$[c]$ คือ เมทริกซ์ของความหน่วงหนืด

$[k]$ คือ เมทริกซ์ของค่านิจวัสดุ

$\{D\}$ คือ เวกเตอร์ของกระจัด

$\{F\}$ คือ เวกเตอร์ของแรงกระทำเปลี่ยนแปลงตามเวลา

ในการวิเคราะห์เพื่อหาค่าเจาะจง ในกรณีไม่คิดผลจากค่าแรงหน่วงหนืด และเป็นการสั่นอิสระ จะทำให้เทอม $[c]\{\dot{D}\}$ และ $\{F\}$ มีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นจากสมการ (2.32) ลดรูปสมการได้

$$[m]\{\ddot{D}\} + [k]\{D\} = 0 \quad (2.33)$$

เริ่มต้นสมมติการสั่นของทุกโหนดเป็นดังสมการ

$$\{D\} = \{A\} \sin(\omega t) \quad (2.34)$$

เมื่อ $\{A\}$ เป็นเวกเตอร์ของแอมพลิจูด

ω เป็นความถี่ของการสั่น

แทนสมการ (2.34) ลงในสมการ (2.33) จะได้

$$([k] - \lambda[m])\{A\} = \{0\} \quad (2.35)$$

เมื่อ λ คือ ค่าเจาะจงซึ่งเท่ากับ ω^2

และเมื่อค่าแอมพลิจูด $\{A\}$ มีค่าไม่เป็นศูนย์แล้ว ดังนั้น

$$([k] - \lambda[m]) = \{0\} \quad (2.36)$$

ทำการแก้สมการ (2.36) จะได้ในเทอมของ λ โดยที่จำนวนของ λ จะเท่ากับจำนวนตัวแปรที่พิจารณาในแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์ และเมื่อนำทุก ๆ เทอมของ λ แทนกลับไปทีสมการ (2.35) แล้วแก้สมการก็จะได้เทอมของ $\{A\}$ ซึ่งเป็นค่าแอมพลิจูดของทุก ๆ โหนด ที่เป็นรูปร่างการสั่นของความถี่นั้น โดยปกติแล้วความถี่ธรรมชาติที่ต่ำสุดจะเป็นการสั่นที่เกิดขึ้นก่อน และแอมพลิจูดของการสั่นสะท้อนนี้จะทำให้วัสดุเกิดการเสียหายได้ สำหรับโหมดการสั่นที่สูงขึ้นไปจะเกิดขึ้นได้เมื่อความถี่สูงขึ้น