บทที่ 2
ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1 ลักษณะทั่วไปของพายุหมุน (Cyclone)

พายุหมุนเกิดขึ้นจากการที่กระแสอากาศหมุนเวียนเข้าสู่ศูนย์กลางความกดอากาศต่ำอย่างรุนแรงในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาทางซีกโลกเหนือและตามเข็มนาฬิกาทางซีกโลกใต้ โดยประเภทของพายุหมุนจำแนกตามตำแหน่งที่เกิดและลักษณะการเกิด ออกได้เป็น 3 ชนิด คือ

2.1.1 พายุหมุนเขตร้อน (Tropical Cyclone)

เป็นพายุหมุนเขตร้อนที่มีลมกำลังรุนแรงพัดเวียนเข้าสู่ศูนย์กลางความกดอากาศต่ำในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาทางซีกโลกเหนือหรือในทิศทางตามเข็มนาฬิกาทางซีกโลกใต้ พายุหมุนเขตร้อนมีแหล่งกำเนิดเหนือพื้นน้ำในเขตร้อน ระหว่างเส้นรุ้ง 5 - 30 องศาเหนือและองศาใต้ พายุหมุนเขตร้อนประกอบด้วยลักษณะสำคัญดังนี้

2.1.1.1 ลักษณะเด่นของพายุหมุนเขตร้อน (Features of Tropical Cyclone)

โดยส่วนใหญ่แล้วพายุที่ก่อตัวขึ้นจนเจริญเติบโตเต็มที่จะมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางระหว่าง 400 - 800 กิโลเมตร สามารถเคลื่อนที่ได้เป็นระยะทาง 200 - 300 กิโลเมตร จนถึงระดับเป็นพันกิโลเมตร ระยะเวลาของการเกิดพายุประมาณ 2 - 7 วัน ความเร็วลมสูงสุดรอบศูนย์กลางพายุประมาณ 120 - 250 กิโลเมตรต่อชั่วโมง ส่วนบริเวณศูนย์กลางพายุที่เรียกว่า ตาพายุ (eye) มีเส้นผ่านศูนย์กลางประมาณ 19 - 30 กิโลเมตร ในบริเวณศูนย์กลางพายุนั้นลักษณะอากาศแจ่มใสมีเมฆเล็กน้อย และลมค่อนข้างสงบหรือลมอ่อนแปรปรวน อากาศบริเวณนี้จะค่อยๆ จมตัวลงอย่างช้าๆ และอัดตัวกลายเป็นส่วนที่ร้อนที่สุดของพายุ ความกดอากาศต่ำสุดที่ตาพายุในบางครั้งมีค่าน้อยกว่า 900 มิลลิบาร์ (mb) และแตกต่างจากความกดอากาศบริเวณรอบนอกพายุประมาณ 20 - 60 มิลลิบาร์ บริเวณรอบแกนพายุจะมีการพาความร้อนอย่างรุนแรง (convection) ด้วยการไหลขึ้นของอากาศเป็นรูปเกลียว เมฆก่อตัวมาก ท้องฟ้าทั่วไปมืดพร้อมกันกับมีฝนตกหนักต่อเนื่องเป็นบริเวณกว้าง

2.1.1.2 สาเหตุของการเกิดพายุหมุนเขตร้อน

(Causes of Tropical Cyclone Formation)

ปัจจัยที่เป็นสาเหตุสำคัญที่ทำให้บริเวณเหนือพื้นน้ำทะเลและมหาสมุทรเป็นแหล่งกำเนิดพายุหมุนเขตร้อนประกอบด้วยการก่อตัวของพายุจะเกิดขึ้นในช่วงปลายฤดูร้อน เมื่ออากาศเหนือพื้นน้ำมีอุณหภูมิสูงกว่า 27 องศาเซลเซียส และร้อนกว่าอากาศข้างเคียงโดยรอบจนเปลี่ยนเป็นหย่อมความกดอากาศต่ำ ลักษณะอากาศที่เกิดขึ้นเป็นแบบมีการทรงตัวไม่ถาวร ลมสงบเงียบเป็นเวลานานก่อนเกิดพายุ ทำให้ไม่มีการระบายถ่ายเทความร้อนและความชื้นของอากาศในบริเวณนั้นไปสู่บริเวณอื่น ไอน้ำในบรรยากาศมีการเก็บสะสมพลังงานจลน์จากพลังงานรังสีดวงอาทิตย์ไว้ได้มาก เมื่อเกิดเป็นศูนย์กลางพายุขึ้น ลมที่พัดเข้าสู่ศูนย์กลางจะถูกบังคับให้พัดเฉทิศไปด้วยแรงโคริโอลิส (coriolis force)

2.1.1.3 การจำแนกชนิดของพายุหมุนเขตร้อน (Classification of Tropical Cyclone)

ในซีกโลกเหนือนั้น ความเร็วสูงสุดที่บริเวณใกล้ศูนย์กลางของพายุจะนำมาใช้เป็นเกณฑ์ในการพิจารณาความรุนแรงของพายุ ซึ่งในย่านมหาสมุทรแปซิฟิกเหนือด้านตะวันตก และทะเลจีนใต้มีการแบ่งกำลังของพายุตามความเร็วลมใกล้ศูนย์กลางดังนี้

- พายุดีเปรสชัน (tropical depression) เป็นพายุหมุนที่มีกำลังต่ำ มีความเร็วลมสูงสุดใกล้ศูนย์กลางน้อยกว่า 17 เมตรต่อวินาที (63 กิโลเมตรต่อชั่วโมง) สัญญลักษณ์ที่ใช้แสดงในแผนที่ของอากาศคือ **D** เขียนด้วยหมึกสีแดงและมีวงกลมสีแดงล้อมรอบ
- พายุโซนร้อน (tropical storm) เป็นพายุที่มีกำลังปานกลาง มีความเร็วลมสูงสุดใกล้ศูนย์กลางมากกว่า 18 เมตรต่อวินาที และน้อยกว่า 33 เมตรต่อวินาที (63 - 118 กิโลเมตรต่อชั่วโมง) สัญญลักษณ์ที่ใช้แสดงในแผนที่ของอากาศคือ เขียนด้วยหมึกสีแดงและมีวงกลมสีแดงล้อมรอบ
- พายุไต้ฝุ่น (typhoon) เป็นพายุที่มีกำลังอำนาจในการทำลายรุนแรง มีความเร็วลมสูงสุดใกล้ศูนย์กลางมากกว่า 34 เมตรต่อวินาที (118 กิโลเมตรต่อชั่วโมง) ขึ้นไป สัญญลักษณ์ที่ใช้แสดงในแผนที่ของอากาศคือ เขียนด้วยหมึกสีแดงและมีวงกลมสีแดงล้อมรอบ

พายุที่เกิดขึ้นในแต่ละแห่งจะมีชื่อเรียกแตกต่างกัน เช่น

- บริเวณมหาสมุทรอินเดีย ทะเลอาหรับ และอ่าวเบงกอล เรียกว่า ไซโคลน (cyclone)
- บริเวณมหาสมุทรแปซิฟิกใต้แถบนอกฝั่งตะวันออกเฉียงเหนือของออสเตรเลีย และบริเวณมหาสมุทรอินเดียใต้แถบนอกฝั่งตะวันตกเฉียงเหนือของออสเตรเลีย

เรียกว่า วิลลี่-วิลลี่ (willy-willy)

- บริเวณหมู่เกาะของฟิลิปปินส์ เรียกว่า บาเกียว (baguio)
- บริเวณมหาสมุทรแอตแลนติกเหนือแถบทะเลแคริบเบียนและอ่าวเม็กซิโกล รวมทั้งมหาสมุทรแปซิฟิกเหนือแถบนอกฝั่งตะวันตกของเม็กซิโก เรียกว่า เฮอร์ริเคน (hurricane)

2.1.2 พายุหมุนนอกเขตร้อน (Extratropical Cyclone)

เป็นพายุหมุนในเขตอบอุ่นที่มีแหล่งกำเนิดระหว่างเส้นรุ้ง 30 - 60 องศาเหนือและองศาใต้ พายุหมุนที่เกิดขึ้นในบริเวณนี้ เป็นผลจากการปะทะของมวลอากาศเย็นขั้วโลกกับมวลอากาศร้อนเขตเส้นรุ้งต่ำ โดยมวลอากาศทั้งสองมีลมสวนทิศกัน มวลอากาศเย็นจากขั้วโลกจะเป็นลมฝ่ายตะวันออก ส่วนมวลอากาศร้อนเขตเส้นรุ้งต่ำจะเป็นลมฝ่ายตะวันตก บริเวณที่เกิดแนวปะทะนั้นจะมีคลื่นของแนวอากาศร้อนต่อเชื่อมกับคลื่นของแนวอากาศเย็น และมีบริเวณความกดอากาศต่ำก่อตัวขึ้นตรงบริเวณรอยต่อของคลื่นแนวอากาศทั้งสอง หลังจากนั้นมวลอากาศร้อนที่ลอยอยู่เหนือแนวอากาศทั้งสองจะพัฒนาขึ้นเป็นพายุหมุนและสลายตัวไปในที่สุด พลังงานที่ทำให้เกิดพายุหมุนในบริเวณความกดอากาศต่ำ ได้จากความร้อนแฝง (latent heat) ของการควบแน่นของไอน้ำและการเปลี่ยนพลังงานศักย์ให้เป็นพลังงานจลน์โดยการจมตัวลงของมวลอากาศเย็น และการยกตัวขึ้นของมวลอากาศร้อน ขนาดของพายุหมุนเขตร้อนมีเส้นผ่านศูนย์กลางระหว่าง 800 - 1,500 กิโลเมตร ความเร็วของการเคลื่อนที่โดยเฉลี่ยประมาณ 30 - 50 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

2.1.3 พายุทอร์นาโด (Tornado)

เป็นพายุหมุนที่มีอานุภาพการทำลายล้างรุนแรง พายุทอร์นาโดเกิดจากการหมุนเวียนของอากาศใต้ฐานเมฆคิวมูโลนิมบัส (Cumulonimbus:Cb) ขณะที่บรรยากาศมีการยกตัวขึ้นอย่างรุนแรง บริเวณใต้ฐานเมฆจะเห็นเมฆหนาทึบสีดำในท้องฟ้าที่มีลักษณะการหมุนเวียนคล้ายงวงช้างหรือกรวยยื่นต่ำลงมาจากฐานเมฆซึ่งเรียกว่า เมฆงวง (funnel cloud) กรวยเมฆนี้สามารถยื่นลงหรือหดขึ้นได้พร้อมทั้งแกว่งไปมาเหมือนงวงช้าง เมื่อกรวยเมฆยื่นลงมาจรดพื้นดินจะมีเสียงคล้ายกับหวูดรถจักรไอน้ำเกิดขึ้นพร้อมๆกัน ซึ่งอาจเรียกพายุที่มีเสียงดังชนิดนี้ว่า พายุทวิสเตอร์ (twister) บริเวณพื้นดินที่มีกรวยเมฆยื่นลงอากาศจะมืดมิดลงทันทีและจะทำลายทุกสิ่งทุกอย่างบริเวณนั้น ความเร็วลมใกล้ศูนย์กลางประมาณ 160 - 500 กิโลเมตรต่อชั่วโมง หรือมากกว่า พายุทอร์นาโดจะเกิดเป็นบริเวณแคบๆ ที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางประมาณ 200 - 300 เมตร และมีอายุ

ค่อนข้างสั้นประมาณ 10 - 20 นาที บางครั้งก็นานเป็นชั่วโมง ความเร็วในการเคลื่อนที่ระหว่าง 40 - 65 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

2.2 สมการพื้นฐานที่ใช้ในฟิสิกส์บรรยากาศ

2.2.1 สมการสถานะ (Equation of State)

สมการสถานะเป็นสมการที่ใช้อธิบายความสัมพันธ์ระหว่าง ความดัน ปริมาตร อุณหภูมิ ของก๊าซ โดยในการนำมาวิเคราะห์เราจะถือว่าเป็นก๊าซในอุดมคติ (ideal gas) ในบรรยากาศสามารถคิดว่าก๊าซจริง (real gas) เหมือนก๊าซในอุดมคติได้ เนื่องจากในบรรยากาศจะมีอันตรกริยาระหว่างโมเลกุลน้อยมาก จึงสามารถใช้สมการสถานะของก๊าซในอุดมคติมาประมาณหาสมการสถานะของก๊าซจริงได้ดังนี้

$$pV = NR\mathrm{T}$$

หรือ

$$p\alpha = RT \tag{2.1}$$

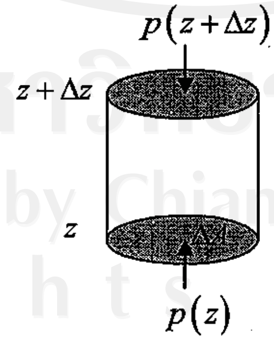
เมื่อ $\alpha = \dfrac{V}{N} = \dfrac{1}{\rho}$

คือ ปริมาตรต่อหนึ่งหน่วยมวล เรียกว่าปริมาตรจำเพาะ (specific volume)

โดยที่ N, V และ ρ คือ มวล ปริมาตร และความหนาแน่นของก๊าซตามลำดับ

2.2.2 สมการอุทกสถิตศาสตร์ (Hydrostatic Equation)

เป็นสมการที่อธิบายถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงความดันกับความสูงที่จุดใดจุดหนึ่งในบรรยากาศ ในบรรยากาศที่หยุดนิ่งแรงลัพธ์ที่กระทำต่อก้อนอากาศจะเป็นศูนย์ เมื่อพิจารณาจากลำอากาศรูปทรงกระบอก ดังแสดงในรูป 2.1



รูปที่ 2.1 แสดงแรงที่กระทำต่อลำอากาศในแนวดิ่ง

จะได้ว่า

$$g\rho\Delta A\Delta z = p(z)\Delta A - p(z+\Delta z)\Delta A$$

และใช้ Taylor expansion

$$p(z+\Delta z) \approx p(z) + \frac{dp}{dz}\Delta z$$

ดังนั้นจะได้สมการอุทกสถิตศาสตร์ว่า

$$\left(\frac{dp}{dz}\right) = -\rho g \tag{2.2}$$

เมื่อ $\frac{dp}{dz}$ คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงความดันต่อความสูง

ρ คือ ความหนาแน่นของอากาศ

g คือ อัตราเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก

ความหนาแน่นของอากาศ และอัตราเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงโลกเป็นบวกและมีค่าคงที่ ดังนั้นเมื่อความสูงเพิ่มขึ้น ความดันของอากาศจะลดลง นั่นคือขณะที่มวลอากาศเกิดการยกตัวขึ้นจะมีผลทำให้ความดันหรือความกดอากาศลดลง ซึ่งเป็นไปตามหลักการด้านอุทกสถิตศาสตร์ (hydrostatic principle) ที่กล่าวว่า เกรเดียนท์ของความดันเทียบกับความสูงลดลงตามความหนาแน่นของอากาศและความเร่งเนื่องจากความโน้มถ่วงของโลก

เนื่องจากแต่ละตำแหน่งของความสูงบนโลก ค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกไม่เท่ากัน ดังนั้นถ้าเขียนสมการ (2.2) ใหม่ในรูป $dp = -\rho g dz$ แล้วกำหนดตัวแปรใหม่โดยมีนิยามดังนี้

$$d\Phi = g dz \tag{2.3}$$

ถ้าอินทิเกรตสมการ (2.3) จากตำแหน่ง $z = 0$ ไปตำแหน่ง z ใดๆ โดยที่ $\Phi(z=0) = 0$ พบว่า

$$\Phi(z) = \int_0^z g dz = gz \tag{2.4}$$

เรียก Φ ว่า geopotential height มีหน่วยเป็น m^2/s^2 อาจตีความได้ว่า Φ ก็คือ พลังงานศักย์ที่ใช้ในการนำมวลหนึ่งหน่วยจากระดับน้ำทะเลไปยังความสูงต่างๆ

จากสมการ (2.3) ถ้าแทน $dz = -\frac{1}{\rho g} dp = \frac{-\alpha dp}{g}$ จะได้

$$d\Phi = -\alpha dp \quad (2.5)$$

เมื่อ α คือ specific volume และถ้าอินทิเกรตสมการ (2.5) จากตำแหน่ง $p = p_0$ ไปตำแหน่ง p ใดๆ พบว่า

$$\Phi_1 - \Phi_0 = \int_{p_1}^{p_0} \alpha dp = \alpha p_0 - \alpha p_1 \quad (2.6)$$

ก็คือความแตกต่างระหว่าง geopotential height สองระดับ ซึ่งขึ้นอยู่กับความกดอากาศ

2.2.3 กฎอุณหพลศาสตร์ข้อที่หนึ่ง (First law of Thermodynamics)

กฎอุณหพลศาสตร์ข้อที่หนึ่งแสดงถึงการอนุรักษ์พลังงานหรือการคงตัวของพลังงาน โดยที่พลังงานของระบบ คือ ความสามารถของระบบที่จะทำงานได้ พลังงานไม่สามารถสร้างขึ้นมาหรือทำลายได้ เพียงแต่เปลี่ยนแปลงรูปแบบของพลังงานไป พิจารณาระบบที่มีการเปลี่ยนสถานะหนึ่งไปเป็นอีกสถานะหนึ่ง โดยมีการถ่ายเทความร้อนและงานให้กับระบบ ดังความสัมพันธ์

$$dq = du + dw \quad (2.7)$$

เมื่อ dq คือ ปริมาณความร้อนที่เกี่ยวข้องกับระบบต่อหนึ่งหน่วยมวลทั้งการรับ (+) และการคาย(-)

du คือ พลังงานภายในหรือพลังงานจลน์รวมของก๊าซต่อหนึ่งหน่วยมวล ในระบบที่เปลี่ยนแปลงไป ทั้งที่มีพลังงานเพิ่มขึ้น (+) และลดลง(-)

dw คือ งานที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงปริมาตรของระบบต่อหนึ่งหน่วยมวล ซึ่งมีทั้งงานที่ระบบกระทำต่อสิ่งแวดล้อม (+) และงานที่สิ่งแวดล้อมกระทำต่อระบบ(-)

ดังนั้นเขียนสมการ (2.7) ใหม่ได้ว่า

$$dq = du + pd\alpha \quad (2.8)$$

จากนิยามความจุความร้อนจำเพาะ $c = dq/dT$ ถ้าให้ความร้อนแก่ระบบโดยที่ปริมาตรคงที่ หรือให้ความร้อนแก่ระบบโดยที่ความดันคงที่ เราสามารถหาความจุความร้อนจำเพาะของอากาศได้โดยอาศัยนิยามดังนี้

$$c_v = \left(\frac{dq}{dT}\right)_v \text{ และ } c_p = \left(\frac{dq}{dT}\right)_p \quad (2.9)$$

เมื่อ c_v คือ ความจุความร้อนจำเพาะของอากาศโดยที่ปริมาตรคงที่

c_p คือ ความจุความร้อนจำเพาะของอากาศโดยที่ความดันคงที่

ในกรณีที่ก้อนอากาศแห้งมีการเคลื่อนที่ขึ้น โดยไม่มีการถ่ายเทความร้อนระหว่างระบบกับสิ่งแวดล้อม (adiabatic, $dq = 0$) ความดันของก้อนอากาศจะลดลงทำให้ก้อนอากาศมีการขยายตัว พลังงานจลน์ภายในของก้อนอากาศจะลดลงด้วย เนื่องจากพลังงานบางส่วนเปลี่ยนไปเป็นงาน เพื่อไปทำให้อากาศขยายตัว เมื่อพลังงานจลน์ลดลง อุณหภูมิของอากาศจะลดลงด้วย จากสมการ (2.8) จะได้ว่า

$$du = -pd\alpha \tag{2.10}$$

พลังงานภายในหรือพลังงานจลน์ของอากาศสามารถแสดงได้เป็น

$$du = c_v dT \tag{2.11}$$

และจากสมการสถานะของก๊าซ เมื่อทำการหาอนุพันธ์สมการ (2.1) และจัดรูปใหม่จะได้ว่า

$$pd\alpha = RdT - \alpha dp \tag{2.12}$$

แทนค่าสมการ (2.11) และ สมการ (2.12) ลงในสมการ (2.9)

$$\begin{aligned} c_v dT &= -RdT + \alpha dp \\ (c_v + R)dT &= \alpha dp \\ c_p dT &= \alpha dp \end{aligned} \tag{2.13}$$

เมื่อ $c_p = c_v + R$ คือ ความจุความร้อนจำเพาะของอากาศโดยที่ความดันคงที่

โดยปกติความดันของอากาศจะลดลงตามความสูงที่เพิ่มขึ้น ซึ่งเป็นไปตามหลักการด้านอุทกสถิตศาสตร์ (hydrostatic principle)

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \text{ หรือ } dp = -\rho g dz \tag{2.14}$$

แทนสมการ (2.10) ลงในสมการ (2.9)

$$c_p dT = -\alpha \rho g dz$$

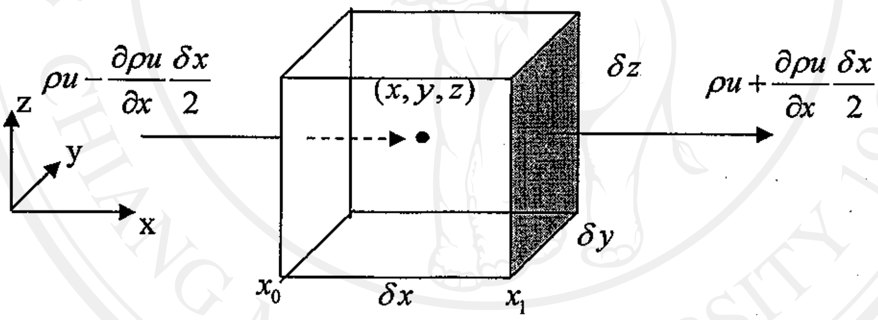
$$\frac{dT}{dz} = -\frac{g}{c_p}$$

$$\Gamma_d = -\frac{dT}{dz} = \frac{g}{c_p} \tag{2.15}$$

เมื่ออากาศแห้ง (dry air) ถูกผลักให้ลอยขึ้นหรือว่าจมลง เรียกอัตราการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิตามความสูงของอากาศแห้งตามกระบวนการ adiabatic นี้ว่า dry adiabatic lapse rate ซึ่งแทนด้วย Γ_d โดยมีค่าคงที่เท่ากับ 9.8 องศาเซลเซียสต่อ 1 กิโลเมตร หรือประมาณ 10 องศาเซลเซียสต่อ 1 กิโลเมตร คืออุณหภูมิจะลดลง 1 เซลเซียสต่อ 1 กิโลเมตรที่อากาศเคลื่อนตัวไป

2.2.4 สมการความต่อเนื่อง (Equation of Continuity)

สมการความต่อเนื่องแสดงถึงกฎการอนุรักษ์มวล ซึ่งสมการความต่อเนื่องอธิบายได้ว่า สำหรับของไหลนั้น มวลของของไหลที่ผ่านเข้าไปในปริมาตรหนึ่งจะเท่ากับมวลของของไหลที่เคลื่อนที่ออกมา เมื่อความหนาแน่นในปริมาตรนั้นไม่เปลี่ยนแปลง ดังแสดงในรูป 2.2



รูปที่ 2.2 แสดงมวลอากาศที่พัดผ่านปริมาตรของกล่องที่มีขนาด $\delta x, \delta y$ และ δz

สมการความต่อเนื่องแสดงถึงกฎการอนุรักษ์มวล (mass conservation) โดยจะพิจารณามวลเริ่มต้นของอากาศในกล่องคือ $\delta M = \rho \delta V = \rho \delta x \delta y \delta z$ และเมื่อเคลื่อนที่เข้า-ออก ตามแนวแกน x เข้าออกจากพื้นที่ $\delta y \delta z$ ด้วยความเร็ว u

ดังนั้น มวลที่สะสมในกล่อง = มวลที่ไหลเข้าที่ x_0 - มวลที่ไหลออกที่ x_1

$$\text{มวลที่สะสมในกล่อง} = \delta y \delta z\left[\left(\rho u - \frac{\partial \rho u}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\right) - \left(\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\right)\right]$$

$$= -\frac{\partial \rho u}{\partial x}\delta x \delta y \delta z$$

เมื่อพิจารณาทั้ง 3 แกน มวลสุทธิที่ผ่านกล่องช่วงเวลา dt จะทำให้มวลเพิ่มขึ้น เนื่องจากปริมาตรคงที่

$$-\left(\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{\partial \rho v}{\partial y}+\frac{\partial \rho w}{\partial z}\right)\delta V dt=\frac{\partial \rho}{\partial t}\delta V dt$$

ทำให้
$$\frac{\partial \rho}{\partial t}=-\left(\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{\partial \rho v}{\partial y}+\frac{\partial \rho w}{\partial z}\right)$$

และ
$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial y}+w\frac{\partial \rho}{\partial z}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}+\rho\frac{\partial v}{\partial y}+\rho\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

โดยให้
$$\frac{D\rho}{Dt}=\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial y}+w\frac{\partial \rho}{\partial z} \tag{2.16}$$

เมื่อ $\frac{D\rho}{Dt}$ คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงความหนาแน่นของอากาศเมื่อเราติดตามอนุภาคอากาศ

ดังนั้น
$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{dt} \tag{2.17}$$

โดยที่ u คือความเร็วลมในแนวทิศตะวันตก-ตะวันออก
v คือความเร็วลมในแนวทิศเหนือ-ใต้
w คือความเร็วลมในแนวดิ่ง

และ $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial w}{\partial z}$ แสดงถึงการกระจายตัวของมวลอากาศ (mass divergence)

จากรูปที่ 2.2 ถ้าอัตราเร็ว u ที่ตำแหน่ง x_1 มีค่ามากกว่า เมื่อเทียบกับที่ตำแหน่ง x_0 จะได้ว่า $\frac{\partial u}{\partial x}>0$ นั่นคือ อนุภาคอากาศจะพัดกระจายห่างออกไป (divergence) ในทำนองเดียวกันถ้าอัตราเร็ว u ลดค่าลงในช่วง x_0 และ x_1 แล้ว $\frac{\partial u}{\partial x}<0$ นั้นคือ อนุภาคอากาศจะถูกอัดตัวให้อนุภาคใกล้ชิดมากขึ้น (convergence) ซึ่งผลบวกของ อนุพันธ์ย่อยทั้งสามจะบ่งบอกถึงค่า total mass divergence ในกล่องอนุภาคอากาศ ในกรณี divergence เทอมเหล่านี้จะเป็นค่าบวก

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} \qquad (2.18)$$

ในทางคณิตศาสตร์นั้น เรานิยามค่าของ divergence หรือการกระจายค่าตามระยะทางของค่าพารามิเตอร์ว่าเป็นผลคูณแบบสเกลลาของตัวกระทำเดลต้า ($\vec{\nabla}$) และเวคเตอร์ของค่าพารามิเตอร์นั้นๆ โดยถือว่าถ้าค่านี้มีค่าเป็นบวกจะเป็น divergence และถ้าเป็นลบจะเรียกว่าค่า convergence เพราะฉะนั้น wind divergence จึงมีค่าเป็น $(\vec{\nabla}\cdot\vec{V})$ และเมื่อนำไปแทนในสมการ (2.13) จะได้ว่า

$$\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}+(\vec{\nabla}\cdot\vec{V})=0 \qquad (2.19)$$

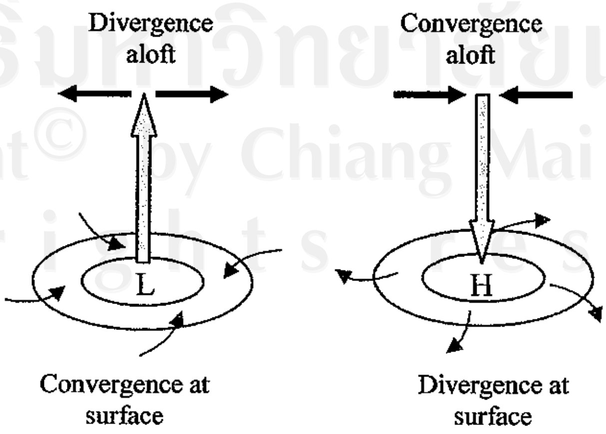
พิจารณาอากาศในบรรยากาศ อากาศเป็นของไหลแบบบีบอัดไม่ได้ (incompressible fluid) เพราะฉะนั้น การเปลี่ยนแปลงความหนาแน่นไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา จัดสมการใหม่จะได้ว่า

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \qquad (2.20)$$

แยกเป็นตามแนวราบและแนวดิ่งดังนี้

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial w}{\partial z} \qquad (2.21)$$

จากสมการ (2.21) ถ้าทั้งสองด้านมีค่าเป็นบวก เรียกเทอมทางซ้ายมือว่า horizontal divergence และจะมีขนาดเท่ากับเทอมทางขวามือที่เรียกว่า vertical convergence ซึ่ง horizontal divergence จะต้องชดเชยด้วย vertical convergence หรือ vertical shrinking และ horizontal convergence ต้องชดเชยด้วย vertical divergence หรือ vertical stretching ดังแสดงในรูป 2.3



รูปที่ 2.3 แสดง horizontal convergence และ divergence

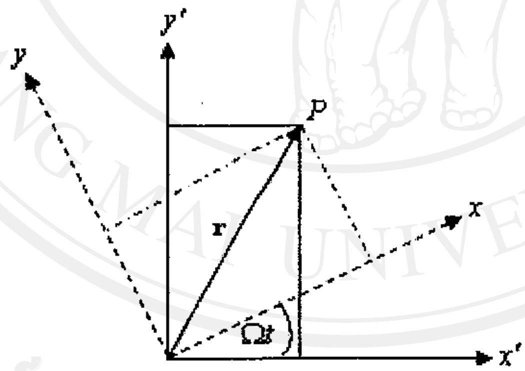
2.3 แรงที่มีผลต่อการเคลื่อนที่ของวัตถุบนโลก

จากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตัน สามารถนำมาใช้หาสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุที่มีการเคลื่อนที่ลักษณะต่าง ๆ ได้ แต่มีข้อจำกัด คือ ใช้ได้เฉพาะในกรอบอ้างอิงของผู้สังเกตหยุดนิ่งหรือเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่หรือเรียกว่า กรอบอ้างอิงเฉื่อย (inertial frame of reference) แต่เมื่อกรอบอ้างอิงของผู้สังเกตเคลื่อนที่ด้วยความเร่ง (non-inertial frame of reference) กฎของนิวตันไม่สามารถใช้ได้

เมื่อพิจารณาระบบพิกัดส่วนใหญ่ที่ใช้บนโลก อาทิ เส้นรุ้ง เส้นแวงและความสูงเหนือระดับน้ำทะเล พบว่าระบบพิกัดดังกล่าวก็จะหมุนรอบแกนหมุนของโลกไปพร้อมกับโลก ดังนั้นระบบนี้จึงเคลื่อนที่ด้วยความเร่ง (non-inertial system) แม้ว่ากฎของนิวตันไม่สามารถใช้กับระบบนี้ได้โดยตรงแต่เราสามารถนำมาประยุกต์ให้ใช้กับระบบนี้ได้

สมการการเคลื่อนที่ในระบบที่กำลังหมุน

กำหนดให้ระบบพิกัดฉาก x', y', z' เป็นระบบที่หยุดนิ่งและให้ระบบพิกัดฉาก x, y, z เป็นระบบที่กำลังหมุนด้วยความเร็วเชิงมุม $\Omega = \Omega z$ และเมื่อเทียบกับระบบ x', y', z' โดยที่ระบบทั้งสองมีจุดกำเนิดร่วมกันและมีแกน z' และแกน z เป็นแกนเดียวกัน ดังรูปที่ 2.4



รูปที่ 2.4 แสดงพิกัดฉากที่หยุดนิ่งและพิกัดฉากที่กำลังหมุน

เวคเตอร์บอกตำแหน่ง (point vector) ของจุด P ในระบบทั้งสอง คือ

$$\mathbf{r}_f = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

ในระบบที่กำลังหมุน unit vector จะไม่คงที่ เมื่อหา time derivative พบว่า

$$\frac{d\mathbf{r}_f}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt}$$

โดยที่ $\frac{d\mathbf{i}}{dt}$ เป็นความเร็วของ $\mathbf{i}$ เนื่องจากการหมุน ดังนั้น $\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \Omega \times \mathbf{i}$

$$\frac{d\mathbf{r}_f}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_r}{dt} + \Omega \times \mathbf{r}_f$$

$$D_f \mathbf{r} = D_r \mathbf{r} + \Omega \times \mathbf{r} \tag{2.22}$$

เมื่อ $\mathbf{r}_f = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}'$ คือ position vector ในกรอบอ้างอิงที่หยุดนิ่ง (fixed frame)

$\mathbf{r}_r = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ คือ position vector ในกรอบอ้างอิงที่กำลังหมุน (rotating frame)

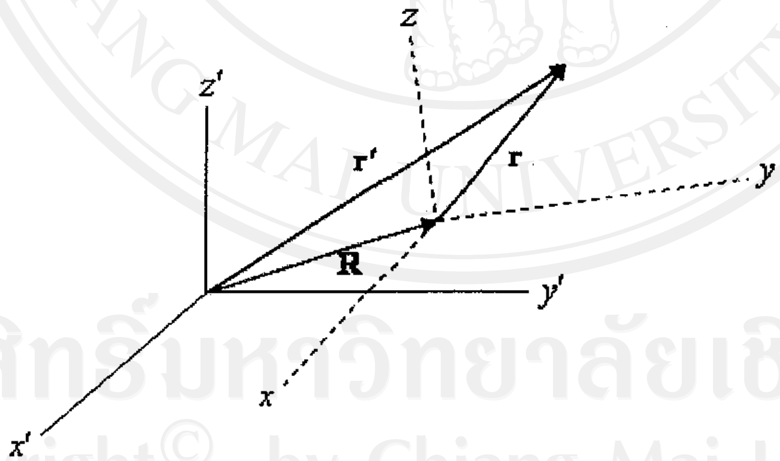
$D_f = \left.\frac{d}{dt}\right|_f$ คือ time derivative operator ในกรอบอ้างอิงที่หยุดนิ่ง

$D_r = \left.\frac{d}{dt}\right|_r$ คือ time derivative operator ในกรอบอ้างอิงที่กำลังหมุน

รูปแบบทั่วไปของสมการ (2.16) คือ

$$D_f = D_r + \Omega \times \tag{2.23}$$

เมื่อพิจารณาการเคลื่อนที่จริงๆ บนโลกที่มีการเคลื่อนที่แบบเปลี่ยนตำแหน่ง (translation) และแบบหมุน (rotation) ไปพร้อมกัน ดังแสดงในรูป 2.5



รูปที่ 2.5 แสดงการเคลื่อนที่ของวัตถุที่มีทั้งแบบเปลี่ยนตำแหน่งและแบบหมุน

จากรูปที่ 2.5 $\mathbf{r}'$ และ $\mathbf{r}$ คือ เวคเตอร์บอกตำแหน่งของจุด P ในกรอบอ้างอิงที่หยุดนิ่ง $(x'y'z')$ และกรอบอ้างอิงที่กำลังหมุน (xyz) ตามลำดับ $\mathbf{R}$ คือเวคเตอร์บอกตำแหน่งของจุดกำเนิดของกรอบอ้างอิงที่กำลังหมุนเทียบกับกรอบอ้างอิงที่หยุดนิ่ง จะเห็นว่า $\mathbf{r}' = \mathbf{R} + \mathbf{r}$ โดยใช้สมการ (2.23) จะเขียนได้ว่า

$$
\begin{aligned}
D_f\mathbf{r}' &= D_f\mathbf{R} + D_f\mathbf{r} \\
&= D_f\mathbf{R} + \left(D_r\mathbf{r} + \Omega\times\mathbf{r}\right) \\
&= \dot{\mathbf{R}}_f + D_r\mathbf{r} + \Omega\times\mathbf{r} \\
\therefore \mathbf{v}_f &= \mathbf{V} + \mathbf{v}_r + \Omega\times\mathbf{r}
\end{aligned} \tag{2.24}
$$

เมื่อ $\mathbf{v}_f$ คือ ความเร็วสัมพัทธ์กับกรอบอ้างอิงที่หยุดนิ่ง (inertial velocity)

$\mathbf{v}_r$ คือ ความเร็วสัมพัทธ์กับกรอบอ้างอิงที่กำลังหมุน (local velocity)

$\mathbf{V}$ คือ ความเร็วของจุดกำเนิดที่กำลังเคลื่อนที่

$\Omega\times\mathbf{r}$ คือ ความเร็วที่เกิดจากการหมุนของกรอบอ้างอิงที่กำลังเคลื่อนที่

จากสมการ (2.24) จะเห็นว่า

$$
\begin{aligned}
D_f\mathbf{v}_f &= D_f\mathbf{V} + D_f\left(\mathbf{v}_r + \Omega\times\mathbf{r}\right) \\
&= D_f\mathbf{V} + \left(D_r + \Omega\times\right)\left(\mathbf{v}_r + \Omega\times\mathbf{r}\right) \\
&= D_f\mathbf{V} + D_r\mathbf{v}_r + \left(D_r\Omega\right)\times\mathbf{r} + \Omega\times\left(D_r\mathbf{r}\right) + \Omega\times\mathbf{v}_r + \Omega\times\left(\Omega\times\mathbf{r}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \mathbf{a}_f = \ddot{\mathbf{R}}_f + \mathbf{a}_r + \dot{\Omega}\times\mathbf{r} + 2\Omega\times\mathbf{v}_r + \Omega\times\left(\Omega\times\mathbf{r}\right) \tag{2.25}
$$

เมื่อ $\mathbf{a}_f = \left(\frac{d\mathbf{v}_f}{dt}\right)_f$ คือ ความเร่งในกรอบอ้างอิงที่หยุดนิ่ง (inertial acceration)

$\mathbf{a}_r = \left(\frac{d\mathbf{v}_r}{dt}\right)_r$ คือ ความเร่งในกรอบอ้างอิงกำลังหมุน (local acceration)

$\ddot{\mathbf{R}}_f = \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_f$ คือ ความเร่งของจุดกำเนิดของกรอบอ้างอิงที่กำลังหมุนเทียบกับกรอบอ้างอิงที่หยุดนิ่ง

ดังนั้นสมการการเคลื่อนที่ของนิวตันในกรอบอ้างอิงที่หยุดนิ่งคือ

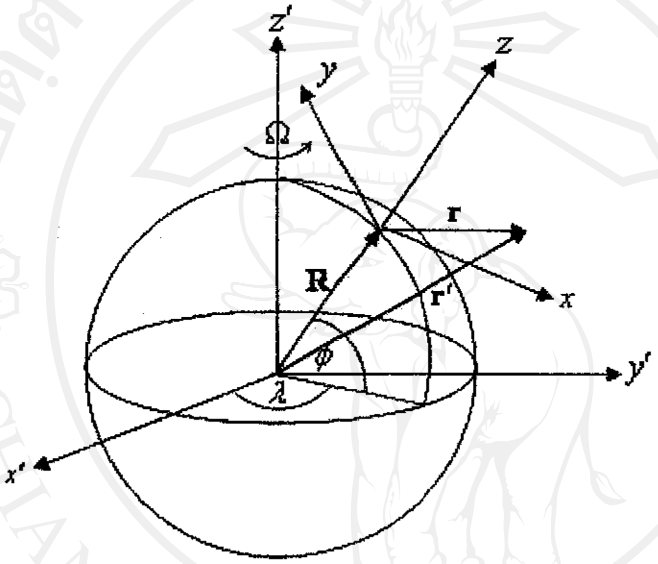
$$
\mathbf{F} = m\mathbf{a}_f = m\ddot{\mathbf{R}}_f + m\mathbf{a}_r + m\dot{\Omega}\times\mathbf{r} + 2m\Omega\times\mathbf{v}_r + m\Omega\times\left(\Omega\times\mathbf{r}\right) \tag{2.26}
$$

ผู้สังเกตในกรอบอ้างอิงที่กำลังหมุนจะหา effective force ได้ว่า

$$
\mathbf{F}_{eff} = m\mathbf{a}_r = \mathbf{F} - m\ddot{\mathbf{R}}_f - m\mathbf{a}_f - m\dot{\Omega}\times\mathbf{r} - 2m\Omega\times\mathbf{v}_r - m\Omega\times\left(\Omega\times\mathbf{r}\right) \tag{2.27}
$$

เมื่อ $\mathbf{F}$ คือแรงทั้งหมดที่กระทำต่อวัตถุในกรอบอ้างอิงที่หยุดนิ่ง

จากผลที่ได้สามารถนำมาใช้กับวัตถุที่กำลังเคลื่อนที่บนโลก โดยให้ระบบ $x'y'z'$ เป็นระบบที่หยุดนิ่งมีจุดกำเนิดอยู่ใจกลางโลก แกน z' เป็นแกนหมุนของโลก Ω คือความเร็วเชิงมุมของโลก ϕ เป็นละติจูดใด ๆ บนโลก ระบบที่กำลังเคลื่อนที่มีระนาบ xy สัมผัสกับผิวโลกที่ละติจูด ϕ โดยที่ x เป็นระยะทางไปทิศตะวันออก y เป็นระยะทางไปทางทิศเหนือ z เป็นระยะที่ตั้งฉากกับระนาบ xy มีทิศพุ่งขึ้นไป ดังแสดงในรูป 2.6



รูปที่ 2.6 แสดงการเคลื่อนที่ของวัตถุบนผิวโลก

จากรูปที่ 2.6 จะเห็นว่า R >> r และ $\ddot{\mathbf{R}}_f = \Omega\times(\Omega\times\mathbf{r})$ เมื่อ R คือรัศมีของโลก เนื่องจากโลกหมุนด้วยอัตราเร็วเชิงมุมคงที่นั่นคือ $\dot{\Omega}=0$ สมการ (2.22) เขียนใหม่ได้ว่า

$$\mathbf{a}_r = \frac{1}{m}\left(\mathbf{F}+\mathbf{F}_c+\mathbf{F}_{cen}\right) \tag{2.28}$$

เมื่อ $\mathbf{F}_c = -2m\Omega\times\mathbf{v}_r$ คือ แรงโคริโอลิส (coriolis force)

$\mathbf{F}_{cen} = -m\Omega\times(\Omega\times\mathbf{r})$ คือ แรงหนีศูนย์กลาง (centrifugal force)

ถ้าวัตถุอยู่ที่ละติจูด ϕ เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\mathbf{v}_r = u\mathbf{i}+v\mathbf{j}+w\mathbf{k}$ จากรูปที่ 2.6 พบว่า

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega\cos\phi\mathbf{j}+\Omega\sin\phi\mathbf{k} \text{ และ } \mathbf{R} = R\mathbf{k}$$

ดังนั้น

$$\frac{\mathbf{F}_c}{m} = -2\Omega\times\mathbf{v}_r = -2\Omega\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 0 & \cos\phi & \sin\phi\\ u & v & w\end{vmatrix}$$
$$= 2\Omega\left(v\sin\phi - w\cos\phi\right)\mathbf{i} - 2\Omega u\sin\phi\mathbf{j} + 2\Omega u\cos\phi\mathbf{k}$$

เนื่องจาก $\Omega\times\mathbf{R} = \left(\Omega\cos\phi\mathbf{j}+\Omega\sin\phi\mathbf{k}\right)\times R\mathbf{k} = \Omega R\cos\phi\mathbf{i}$ ดังนั้นความเร่งหนีศูนย์กลางคือ

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{F}_{cen}}{m} &= -\Omega\times\left(\Omega\times\mathbf{R}\right)\\ &= -\left(\Omega\cos\phi\mathbf{j}+\sin\phi\mathbf{k}\right)\times\Omega R\cos\phi\mathbf{i}\\ &= -\Omega^2 R\sin\phi\cos\phi\mathbf{j}+\Omega^2\cos^2\phi\mathbf{k}\end{aligned}$$

แทน $\mathbf{F}_c/m$ และ $\mathbf{F}_{cen}/m$ ลงในสมการ (2.23) จะได้สมการการเคลื่อนที่ของวัตถุบนโลกที่กำลังหมุนในแต่ละแนวแกนดังนี้

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{F_x}{m} + 2\Omega\left(v\sin\phi - w\cos\phi\right)\\ \ddot{y} &= \frac{F_y}{m} - 2\Omega u\sin\phi - \Omega^2 R\cos\phi\sin\phi\\ \ddot{z} &= \frac{F_z}{m} + 2\Omega u\cos\phi + \Omega^2 R\cos^2\phi\end{aligned} \tag{2.29}$$

2.4 การพยากรณ์อากาศ (Weather Prediction)

การพยากรณ์อากาศ หมายถึง การคาดหมายสภาพลมฟ้าอากาศในอนาคต การที่จะพยากรณ์อากาศได้ต้องมีองค์ประกอบ 3 ประการ ประการแรกคือความรู้ความเข้าใจในปรากฏการณ์และกระบวนการต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นในบรรยากาศ ประการที่สอง คือ สภาวะอากาศปัจจุบัน และประการสุดท้ายคือความสามารถที่จะผสมผสานองค์ประกอบทั้งสองข้างต้น เข้าด้วยกันเพื่อคาดหมายการเปลี่ยนแปลงของบรรยากาศที่อาจจะเกิดขึ้นได้ในอนาคต ความรู้ความเข้าใจในปรากฏการณ์ และกระบวนการต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นในบรรยากาศ ได้มาจากเฝ้าสังเกตและบันทึกไว้ มนุษย์ได้มีการสังเกตลมฟ้าอากาศมานานแล้ว เพราะมนุษย์อยู่ภายใต้อิทธิพลของลมฟ้าอากาศโดยไม่อาจหลีกเลี่ยงได้ จึงมีความจำเป็นที่ต้องทราบลักษณะลมฟ้าอากาศที่เป็นประโยชน์ และลักษณะอากาศที่เป็นภัย การสังเกตทำให้สามารถอธิบายถึงสาเหตุของการเกิดลักษณะอากาศแบบต่าง ๆ ได้

2.4.1 การพยากรณ์อากาศเชิงตัวเลข (Numerical Weather Prediction)

เนื่องจากลมฟ้าอากาศอยู่ภายใต้กฎเกณฑ์ทางฟิสิกส์ การเปลี่ยนแปลงของบรรยากาศจึงสามารถแสดงได้ในรูปของระบบสมการทางคณิตศาสตร์ สมการเหล่านี้ได้คำนึงถึงว่าองค์ประกอบของบรรยากาศ เช่น อุณหภูมิ ความเร็วและทิศทางลม ความชื้น ฯลฯ จะมีการเปลี่ยนแปลงไปจากสภาวะปัจจุบันอย่างไร หากสามารถแก้สมการเหล่านี้ได้ ย่อมสามารถที่จะแปรความหมายสภาวะของบรรยากาศในลักษณะของ ลมฟ้าอากาศได้ เป็นต้นว่า ฝน อุณหภูมิ แสงแดด ลม ซึ่งระบบสมการนี้ประกอบด้วยสมการต่าง ๆ คือ สมการของการเคลื่อนที่ (equation of motion) สมการอุทกสถิต (hydrostatic equation) สมการอุณหพลศาสตร์ (thermodynamic equation) สมการความต่อเนื่อง (continuity equation) และสมการของสถานะ (equation of state)

อย่างไรก็ตาม ระบบสมการดังกล่าวข้างต้นมีความซับซ้อนมาก (ในทางคณิตศาสตร์เรากล่าวว่าสมการเหล่านี้เป็น non-linear partial differential equation) และไม่สามารถแก้สมการเหล่านี้เพื่อหาคำตอบที่แท้จริง (exact solution) ที่จะบอกให้เราทราบถึงสภาวะในอนาคตของบรรยากาศได้ จึงจำเป็นต้องใช้วิธีการจำลองแบบเชิงตัวเลข (numerical model) เพื่อที่จะหาคำตอบโดยประมาณ (approximate solution) จากแบบจำลองเชิงตัวเลขเหล่านี้ องค์ประกอบต่างๆ ของบรรยากาศจะถูกแทนที่ด้วยชุดของตัวเลขจำนวนหนึ่ง

2.4.2 การประมาณคำตอบโดยวิธี finite difference

finite difference เป็นวิธีการเชิงตัวเลขวิธีหนึ่งได้ที่นำมาใช้ในการประมาณคำตอบของสมการอนุพันธ์ เมื่อไม่สามารถหาคำตอบโดยวิธีปกติได้ หลักการเบื้องต้น คือ การพยายามแทนสมการอนุพันธ์ที่มีตัวแปรเป็นค่าต่อเนื่องด้วยสมการของผลต่างที่ตัวแปรมีค่าไม่ต่อเนื่อง โดยใช้อนุกรมของเทย์เลอร์ (Taylor series) ประมาณค่า $f(x)$ ใดๆ ที่ $x+\Delta x$ ดังนี้

$$f(x+\Delta x)=f(x)+\frac{df}{dx}\Delta x+\frac{1}{2!}\frac{d^2f}{dx^2}(\Delta x)^2+\frac{1}{3!}\frac{d^3f}{dx^3}(\Delta x)^3+..... \qquad (2.30)$$

เมื่อ $\Delta x > 0$ เรียกค่านี้ว่า spatial increment หรือ grid interval
ดังนั้น df/dx จะหาได้จาก

สมการ
$$\frac{df}{dx}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-R$$

เมื่อ $R=\Delta x\left[\frac{1}{2!}\frac{d^2f}{dx^2}(\Delta x)+\frac{1}{3!}\frac{d^3f}{dx^3}(\Delta x)^2+.....\right]$

เรียกว่า remainder term หรือ truncation error

ถ้า R มีค่าน้อยกว่าเทอมแรกมากๆแล้ว จะได้ว่า

$$\frac{df}{dx} \cong \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \tag{2.31}$$

เรียกสมการ (2.31) นี้ว่า สมการของผลต่าง (difference equation) ซึ่งเป็นการประมาณแบบ forward difference ในทำนองเดียวกัน การประมาณแบบ backward difference จะหาได้จาก Taylor series ดังนี้

$$f(x-\Delta x) = f(x) - \frac{df}{dx}\Delta x + \frac{1}{2!}\frac{d^2 f}{dx^2}(\Delta x)^2 - \frac{1}{3!}\frac{d^3 f}{dx^3}(\Delta x)^3 + \ldots.. \tag{2.32}$$

จัดรูปใหม่จะได้

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} - \Delta x\left[\frac{1}{2!}\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{3!}\frac{d^3 f}{dx^3}\Delta x + \ldots..\right]$$

ถ้า remainder term มีค่าน้อยกว่าเทอมแรกแล้ว จะได้ backward difference อยู่ในรูป

$$\frac{df}{dx} \cong \frac{f(x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x} \tag{2.33}$$

จากสมการ (2.30) และ (2.33) จะได้ว่า

$$f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x) = 2\frac{df}{dx}\Delta x + \frac{1}{3!}\frac{d^3 f}{dx^3}(\Delta x)^3 + \ldots..$$

จัดรูปใหม่จะได้

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x)}{2\Delta x} - R$$

โดยที่ $R = \Delta x^2\left[\frac{1}{3!}\frac{d^3 f}{dx^3} + \frac{1}{5!}\frac{d^5 f}{dx^5}(\Delta x) + \ldots..\right]$ เมื่อ R มีค่าน้อยๆ จะได้ว่า

$$\frac{df}{dx} \cong \frac{f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x)}{2\Delta x} \tag{2.34}$$

สมการ (2.34) นี้เป็นการประมาณแบบ centered difference การประมาณทั้ง 3 แบบข้างต้นล้วนเป็นการประมาณสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่ง แต่ในบางครั้งก็มีความจำเป็นที่จะต้อง

ประมาณสมการอนุพันธ์อันดับที่สอง ซึ่งสามารถหาได้โดยรวมสมการ (2.30) กับสมการ (2.32) แล้วจัดรูปใหม่โดยตัด remainder term ทิ้งไป จะได้

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \cong \frac{f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x)}{(\Delta x)^2} \tag{2.35}$$

สำหรับแบบจำลอง WRF ได้เลือกใช้วิธีการแก้สมการด้วยวิธีการ Runge-Kutta จากสมการ (2.30) และ สมการ (2.32) การคำนวณอาศัยการแทนตัวแปรต่อเนื่องด้วยตัวแปรที่มีค่าไม่ต่อเนื่องโดยให้

$$dt \to \Delta t = t_{i+1} - t_{t=h} \text{ และ } dx \to \Delta x = x_{i+1} - x_i \text{ และ } \frac{dx}{dt} = f(x,t)$$

การประมาณค่าในอันดับต่างๆของอนุพันธ์ มีสูตรในการคำนวณดังนี้

1st order Runge-Kutta หรือ Euler formula (ประมาณค่าโดยใช้ 1 จุด)

$$x_{i+1} = x_i + hf(x_i, t_i)$$

2nd order Runge-Kutta หรือ Trapezoidal formula (ประมาณค่าโดยใช้ 2 จุด)

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{2!}\left[f(x_i, t_i) + f(x_{i+1}, t_{i+1})\right]$$

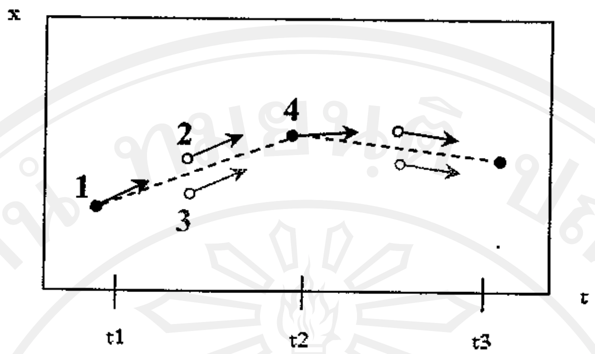
3rd order Runge-Kutta (ประมาณค่าโดยใช้ 3 จุด)

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{3!}(k_1 + 4k_2 + k_3)$$
$$k_1 = hf(x_i, t_i)$$
$$k_2 = hf(x_i + \frac{k_1}{2}, t_i + \frac{h_1}{2})$$
$$k_1 = hf(x_i - hk_1 + hk_2, t_i + h)$$

4th order Runge-Kutta (ประมาณค่าโดยใช้ 4 จุด)

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{3!}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$k_1 = hf(x_i, t_i)$$
$$k_2 = hf(x_i + \frac{k_1}{2}, t_i + \frac{h}{2})$$
$$k_3 = hf(x_i + \frac{k_2}{2}, t_i + \frac{h}{2})$$
$$k_3 = hf(x_i + k_3, t_i + h)$$

โดยมีรูปแบบการคำนวณดังแสดงในรูป 2.7 สำหรับแบบจำลอง WRF ได้ใช้ 3rd order Runge-Kutta ในการคำนวณหาค่าอนุพันธ์เทียบกับเวลาเพื่อหาคำตอบของชุดสมการต่างๆ

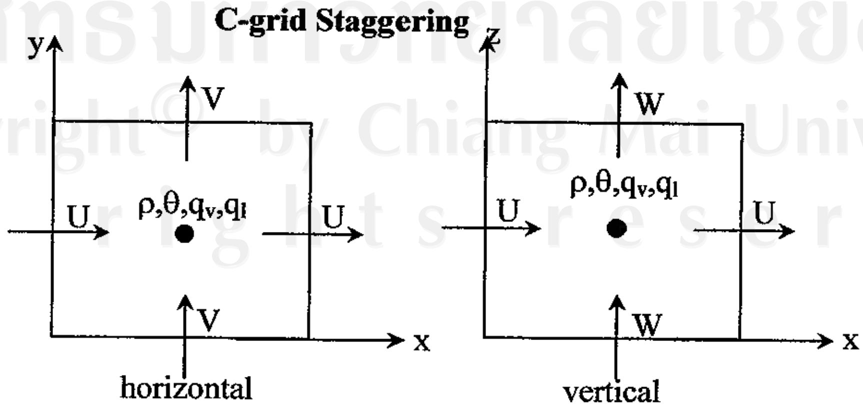


Euler : 1
Trapezoidal : 1,4
3rd order Runge-Kutta : 1,2,4
4th order Runge-Kutta : 1,2,3,4

รูปที่ 2.7 แผนภาพรูปแบบการคำนวณโดยวิธี Runge-Kutta อันดับที่ 1 ถึง 4

2.4.3 การวางตำแหน่งข้อมูลในแบบจำลอง (Grid Point Staggering)

ในการวิเคราะห์สภาพอากาศด้วยแบบจำลองนั้น การจัดวางตำแหน่งข้อมูลที่ใช้สำหรับการคำนวณนั้นเป็นสิ่งสำคัญ เพื่อที่จะให้ค่าที่ได้จากการคำนวณออกมามีความถูกต้องจึงมีวิธีการจัดวางตำแหน่งของข้อมูลหลากหลายรูปแบบ ในแบบจำลอง WRF ได้เลือกใช้การจัดวางข้อมูลแบบ Arakawa's C-grid staggering ซึ่งถือว่าเป็นการจัดวางที่ให้ความถูกต้องสูง โดยมีรูปแบบการจัดวางดังรูปที่ 2.8 โดยพิจารณากล่องสี่เหลี่ยมที่มีด้าน 6 ด้าน วางข้อมูลแบบสเกลลาไว้บริเวณตรงกลางของกล่อง ส่วนตรงกลางระนาบของด้านทั้ง 6 ด้านนั้นจัดวางข้อมูลเชิงเวคเตอร์ โดยที่ระนาบ xy จะวางข้อมูลเวคเตอร์แกน z สำหรับระนาบ yz จะวางข้อมูลเวคเตอร์แกน x และระนาบ xz จะวางข้อมูลเวคเตอร์แกน y



รูปที่ 2.8 การจัดวางตำแหน่งข้อมูลแบบ Arakawa's C-grid staggering