บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง เพื่อเป็นกรอบและแนวทางในการวิจัยในด้านต่างๆ ตามลำดับหัวข้อดังนี้

การจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์

อัมพร ม้าคนอง (2546: 8-10) ให้หลักการสอนคณิตศาสตร์ทั่วๆไปไว้ดังนี้

1. สอนให้ผู้เรียนเกิดมโนทัศน์หรือได้ความรู้ทางคณิตศาสตร์จากการคิดและมีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกับผู้อื่น ใช้ความคิดและคำถามที่นักเรียนสงสัยเป็นประเด็นในการอภิปรายเพื่อให้ได้แนวคิดที่หลากหลาย และเพื่อนำไปสู่ข้อสรุป

2. สอนให้ผู้เรียนเห็นโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ ความสัมพันธ์และความต่อเนื่องของเนื้อหาคณิตศาสตร์

3. สอนโดยคำนึงว่าจะให้นักเรียนเรียนอะไร และเรียนอย่างไร นั่นคือต้องคำนึงถึงทั้งเนื้อหาวิชาและกระบวนการเรียน

4. สอนโดยการใช้สิ่งที่เป็นรูปธรรมอธิบายนามธรรม หรือการทำให้สิ่งที่เป็นนามธรรมมากๆเป็นนามธรรมที่ง่ายขึ้นหรือพอที่จะจินตนาการได้มากขึ้น

5. จัดกิจกรรมการสอนโดยคำนึงถึงประสบการณ์ และความรู้พื้นฐานของนักเรียน

6. สอนโดยใช้การฝึกหัดให้ผู้เรียนเกิดประสบการณ์ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ทั้งการฝึกรายบุคคล ฝึกเป็นกลุ่ม การฝึกทักษะย่อยทางคณิตศาสตร์ และการฝึกทักษะรวมเพื่อแก้ปัญหาที่ซับซ้อนมากขึ้น

7. สอนเพื่อให้ผู้เรียนเกิดทักษะการคิดวิเคราะห์เพื่อแก้ปัญหา สามารถให้เหตุผล เชื่อมโยง สื่อสาร และคิดอย่างสร้างสรรค์ ตลอดจนเกิดความอยากรู้อยากเห็นและนำไปคิดต่อ

8. สอนให้นักเรียนเห็นความสัมพันธ์ระหว่างคณิตศาสตร์ในห้องเรียนกับคณิตศาสตร์ในชีวิตประจำวัน

9. ผู้สอนควรศึกษาธรรมชาติและศักยภาพของผู้เรียน เพื่อจะได้จัดกิจกรรมการสอนให้สอดคล้องกับผู้เรียน

10. สอนให้ผู้เรียนมีความสุขในการเรียนคณิตศาสตร์ รู้สึกว่าวิชาคณิตศาสตร์ไม่ยาก และมีความสนุกสนานในการทำกิจกรรม

11. สังเกต และประเมินการเรียนรู้ และความเข้าใจของผู้เรียนขณะเรียนในห้อง โดยใช้คำถามสั้นๆ หรือการพูดคุยปกติ

กลยุทธการสอนคณิตศาสตร์

กลยุทธในการสอน (Strategy) เป็นเทคนิควิธีที่จะอธิบาย (approach) เนื้อหาให้นักเรียนรับรู้ ซึ่งเมื่อได้ศึกษาเนื้อหาอย่างละเอียดถี่ถ้วนแล้วจะช่วยให้ครูกำหนดกลยุทธในการสอนได้ว่า จะเลือกใช้กลยุทธแบบใดกับเนื้อหานั้นๆ เช่น การสอนวิธีหารากที่สองของจำนวนจริง อาจจะใช้วิธีเฉลี่ย วิธีประมาณค่า หรือวิธีตั้งหาร เป็นต้น จากนั้นจึงจะไปเลือกวิธีสอน (Method) ซึ่งเป็นวิธีการที่จะจัดกิจกรรมขึ้นเพื่อถ่ายทอดเนื้อหาตามกลยุทธที่เลือกไว้แล้ว ในสถานการณ์การสอนจริงๆ วิธีสอนเป็นสิ่งที่เปลี่ยนแปลงได้แม้ว่าจะใช้กลยุทธเดียวกัน โดยปกติเราจะไม่ใช้วิธีสอนแบบใดแบบหนึ่งโดยเฉพาะในการสอนครั้งหนึ่งๆ อาจจะใช้หลายๆ วิธีปนกัน เช่น การบรรยาย การทดลอง การสาธิต การอภิปราย การสอนให้ค้นพบ ฯลฯ (สุนทร ชนะกอก, 2524: 38 – 41)

Johnson และ Rising (1967: 25 – 26) ได้ให้เกณฑ์ในการเลือกกลยุทธที่เหมาะสมสำหรับการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ดังนี้

1. กลยุทธที่เลือกต้องตั้งอยู่บนพื้นฐานความถูกต้องของนิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีบทของคณิตศาสตร์

2. กลยุทธที่เลือกเพื่อจะอธิบายมโนทัศน์ หรือขั้นตอนวิธีการต่างๆ ต้องคำนึงถึงความรู้เดิมที่นักเรียนมีอยู่ ไม่เลือกใช้กลยุทธที่ต้องอาศัยความรู้ที่อยู่นอกเหนือความรู้พื้นฐานเดิมที่นักเรียนเคยได้เรียนไป

3. กลยุทธควรทำให้เกิดการเรียนการสอน เริ่มการอธิบายหรือแสดงด้วยความเป็นรูปธรรมนำไปสู่นามธรรม และจึงจะจบด้วยการสรุปหลักเกณฑ์ทั่วไป (Generalization) ซึ่งอย่างน้อยต้องคำนึงถึงมโนทัศน์ที่จะสอนใหม่ (New Concept) ความเหมาะสมกับสภาพที่เป็นอยู่หรือเงื่อนไขที่ต้องการความเฉพาะเจาะจง (Specified Conditions) และกระบวนการใหม่ที่จะใช้ (New Procedure)

4. กลยุทธที่ใช้ต้องทำให้นักเรียนรู้สึกพอใจ และอยากที่จะใช้ความพยายาม กำลังความคิดเรียนรู้ในเรื่องหรือสิ่งใหม่ที่จะสอน

5. กลยุทธที่ดีที่สุดต้องสามารถทำให้สิ่งต่างๆ ที่นักเรียนได้เรียนรู้มาแล้วเชื่อมโยงไปสู่มโนทัศน์ใหม่ที่จะเรียนต่อไปได้ และครูควรจะตระหนักว่ากลยุทธหนึ่งอาจเหมาะสมกับเรื่องหนึ่ง แต่อาจจะไม่เหมาะสมกับอีกเรื่องหนึ่ง

การสอนมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

สาระที่สำคัญในบทเรียนความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนจริงในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 นี้ต้องการให้นักเรียนมีมโนทัศน์ของจำนวนตรรกยะ จำนวนอตรรกยะ จำนวนจริง รากที่สองและรากที่สามของจำนวนจริง (กรมวิชาการ, 2545: 3)

ทฤษฎีการเรียนรู้ของไวกอทสกี (Vygotsky, 1962 อ้างใน Byrnes, 2001: 13) กล่าวว่ามโนทัศน์ (Concept) เป็นการแบ่งประเภทของสิ่งที่มีชื่อเรียก หรือสัญลักษณ์ (Label) เช่น สี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งสามารถให้นิยาม หรือคำอธิบายด้วยกลุ่มของเกณฑ์ หรือบรรทัดฐาน (Criteria) เช่น มีด้านสี่ด้าน มีด้านที่เท่ากัน เป็นต้น เด็กจะเข้าใจและแสดงมโนทัศน์ได้อย่างเต็มที่เมื่อ

(1) เด็กรู้จักเกณฑ์ หรือบรรทัดฐานทั้งหมด ที่ใช้ในการนิยาม หรืออธิบายมโนทัศน์

(2) เด็กเข้าใจว่าคำที่ใช้กับมโนทัศน์ เช่น สี่เหลี่ยมจัตุรัสนั้น จะไม่มีกฎเกณฑ์และรูปแบบ หรือการอ้างจากตำรา

สำหรับเพียเจต์นั้น (Byrnes, 2001: 14) มโนทัศน์เกิดจากการวิเคราะห์ความแตกต่างระหว่างวัตถุ (Objects) และเหตุการณ์ (Situations) กระบวนการวิเคราะห์ที่เกิดขึ้นจะต้องใช้เวลา และต้องมีประสบการณ์เกี่ยวกับวัตถุต่างๆในหลายๆสถานการณ์ที่ต่างกัน

Bernkopf (1975: 5-7) กล่าวว่า ทุกสิ่งทุกอย่างในคณิตศาสตร์มีแต่สิ่งที่เป็นนามธรรม ไม่มีของจริงอยู่ในธรรมชาติ มนุษย์เราสร้างมโนทัศน์ของสิ่งเหล่านั้นในความคิดจินตนาการเท่านั้น ตัวอย่างเช่น วงกลม ไม่มีวงกลมที่แท้จริงในธรรมชาติ เราสร้างวงกลมได้ในจินตนาการเท่านั้น ชาวกรีกสมัยโบราณสร้างมโนทัศน์ของวงกลมที่เห็นจากหน้าตัดของลำต้นของต้นไม้ที่ถูกโค่น คลื่นที่เกิดการจากโยนหินลงไปบนน้ำนิ่ง จำนวนก็มีอยู่แต่ในความคิด เรามักจะใช้จำนวนสอง แสดงส่วนประกอบสิ่งของที่มีสองสิ่ง ซึ่งก็ไม่ได้หมายความว่านั่นคือจำนวนสอง หรือในเรขาคณิตก็ไม่มีใครเคยเห็น จุด เราเพียงแต่คาดเดาว่ามีสิ่งที่จะใช้แทนจุดที่เป็นนามธรรมได้

การจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ จึงต้องทำให้นักเรียนเกิดมโนทัศน์ของสิ่งต่างๆที่เป็นนามธรรมในคณิตศาสตร์ Johnson และ Rising (1967: 48 – 56) ได้กล่าวถึงมโนทัศน์กับการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ไว้ในประเด็นต่างๆ ดังต่อไปนี้

1. เงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับการเรียนรู้มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

1.1 นักเรียนต้องมีข้อมูล (Information) ทักษะ (Skills) และประสบการณ์ (Experience) ที่จำเป็นเพียงพอที่จะเรียนรู้มโนทัศน์ใหม่ได้

1.2 กิจกรรมการเรียนรู้ต้องอยู่ในขอบเขตสามารถผลักดันให้นักเรียนเต็มใจที่จะเข้าร่วมกิจกรรมการเรียนรู้ได้

1.3 นักเรียนต้องมีความสามารถพอที่จะเข้าร่วมปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ต่างๆ ได้

1.4 ต้องให้แนวทางกับนักเรียนเพื่อเป็นแรงจูงใจในการเรียนรู้

1.5 ต้องมีการจัดหาสื่อ อุปกรณ์ต่างๆ เช่น หนังสือ แบบจำลอง ภาพยนตร์ เทป ที่เหมาะสมกับการเรียนรู้ให้กับนักเรียน

1.6 ต้องให้เวลากับนักเรียนในการร่วมปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ต่างๆ อย่างพอเพียง

2. ขั้นตอนการเรียนรู้มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

2.1 การจัดประเภทวัตถุ (Object) เหตุการณ์ (Event) หรือ ความคิด (Idea) ต่างๆ

2.2 พิจารณาความสัมพันธ์ของสิ่งต่างๆ ที่อยู่ในแต่ละประเภท

2.3 หาแบบรูป (Pattern) ที่แสดงให้เห็นความสัมพันธ์หรือโครงสร้างนั้น

2.4 สร้างข้อสรุปที่จะอธิบายแบบรูปของเหตุการณ์ หรือความคิดที่เกิดขึ้น

2.5 สร้างเป็นข้อสรุปทั่วไป และพิสูจน์ให้เห็นโดยใช้การพิสูจน์แบบนิรนัย

3. หลักการเบื้องต้นสำหรับการสอนมโนทัศน์

3.1 การสอนที่ดีต้องทำให้นักเรียนสามารถสร้างมโนทัศน์ได้ด้วยตนเอง เนื่องจากครูไม่สามารถให้มโนทัศน์กับนักเรียนได้โดยตรง

3.2 ครูต้องแสดงให้นักเรียนเห็นความสัมพันธ์กันของมโนทัศน์ที่สอนซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของเรื่องที่เป็นโครงสร้างคณิตศาสตร์ (Mathematics Structure) จะช่วยให้นักเรียนเห็นการเรียนมโนทัศน์นั้นมีความหมาย และมีความสำคัญมากขึ้น

3.3 การที่นักเรียนจะพัฒนามโนทัศน์ได้ดีที่สุดควรจัดผ่านกิจกรรมต่างๆ ที่หลากหลายเช่น กิจกรรมการแก้ปัญหา (Problem solving) กิจกรรมที่ช่วยให้นักเรียนค้นพบมโนทัศน์ (Discovery Activities)

3.4 การสอนมโนทัศน์ของนักเรียนต้องคำนึงถึงความพร้อม แรงจูงใจ ความสามารถของนักเรียนว่าควรให้มโนทัศน์ในระดับใด

3.5 การเน้นย้ำมโนทัศน์ควรให้นักเรียนทำกิจกรรมที่นักเรียนทำ และการทบทวนด้วยความคิดของตนเอง

3.6 ควรให้นักเรียนได้เรียนรู้ด้วยการทดลอง สัมผัส และมองเห็นสิ่งต่างๆ จากนั้นจึงเรียนรู้ด้วยภาษาที่เป็นคำพูด และภาษาเขียนเป็นขั้นสุดท้าย

ทิศนา แขมมณี (2547: 130-131) กล่าวถึงการจัดการเรียนการสอนแบบเน้นมโนทัศน์ไว้ว่า เป็นการวางแผนการจัดการเรียนการสอนโดยการระบุมโนทัศน์ที่ต้องการให้ผู้เรียนได้รับ และดำเนินการเรียนการสอนโดยใช้วิธีการและกระบวนการต่างๆ ที่จะช่วยให้ผู้เรียนเกิดความเข้าใจในมโนทัศน์นั้น และสามารถนำมโนทัศน์นั้นไปใช้ในสถานการณ์ใหม่ๆได้ รวมทั้งมีการประเมินผลโดยมุ่งไปที่ความเข้าใจของผู้เรียนในมโนทัศน์นั้นๆ โดยสามารถพิจารณาได้จากตัวบ่งชี้ต่อไปนี้

1. ผู้สอนมีการวิเคราะห์เนื้อหาสาระ และระบุมโนทัศน์ที่ต้องการสอนอย่างละเอียดและอย่างชัดเจน

2. ผู้สอนมีการคิดและเขียนรายการคำถามที่สำคัญๆ ที่จะช่วยนำผู้เรียนไปสู่ความคิดเชิงนามธรรม หรือมโนทัศน์นั้นๆ

3. ผู้สอนมีการระบุกระบวนการและทักษะต่างๆ ที่ผู้เรียนจำเป็นต้องใช้ในการเรียนรู้มโนทัศน์นั้น

4. ผู้เรียนมีการสร้างความรู้ความเข้าใจในมโนทัศน์ด้วยตนเอง โดยใช้กระบวนการ เทคนิค และทักษะต่างๆ ที่หลากหลาย

5. ผู้เรียนมีการสรุปมโนทัศน์ที่เรียนรู้ด้วยตนเอง

6. ผู้เรียนมีการนำมโนทัศน์ที่ได้เรียนรู้ไปประยุกต์ใช้ในสถานการณ์ใหม่ๆ

7. ผู้สอนมีการประเมินผลการเรียนรู้มโนทัศน์ที่ผู้เรียนได้เรียนรู้ รวมทั้งการเรียนรู้ด้านกระบวนการและทักษะที่ใช้ในการเรียนรู้

จากการศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า การสอนคณิตศาสตร์นั้นต้องมีรูปแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่สามารถทำให้นักเรียนสร้างมโนทัศน์ของสิ่งเหล่านั้นได้ด้วยตนเองอย่างถูกต้องตามหลักการคณิตศาสตร์ โดยคำนึงถึงตัวผู้เรียนว่ามีศักยภาพ ความรู้ ประสบการณ์ต่างๆ แล้วออกแบบกลยุทธการสอนและใช้วิธีการสอนที่เหมาะสม มีกิจกรรมการเรียนรู้ที่ช่วยเน้นย้ำมโนทัศน์เหล่านั้น มีการคิดทบทวนจนสามารถนำมโนทัศน์นั้นๆ ไปใช้ได้อย่างถูกต้อง เนื่องจากเนื้อหาในวิชาคณิตศาสตร์นั้นเป็นนามธรรม การที่จะทำให้นักเรียนมีความเข้าใจเนื้อหาต่างๆ ได้นั้นนักเรียนต้องสามารถคิดและใช้จินตนาการของตนเองโดยอาศัยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ต่างๆ ที่ครูจัดให้

การฝึกทักษะ

Butter และ Wren (1960: 144 – 148) กล่าวถึงหน้าที่ของการฝึกทักษะว่าเป็นการจัดเรียงทำความเข้าใจอีกครั้ง เพื่อเน้นย้ำมโนทัศน์ และทำให้การเรียนในเรื่องนั้นมีความหมายยิ่งขึ้น โดยยึดหลักการฝึกทักษะดังนี้

1. ต้องให้นักเรียนเกิดแรงจูงใจที่อยากฝึกทักษะ จะช่วยให้นักเรียนมีความกระตือรือร้นและสนใจที่จะฝึก อาจทำได้โดยใช้การแข่งขัน แผนภูมิ เกม สิ่งประดิษฐ์ สื่อการสอน เป็นต้น

2. นักเรียนแต่ละคนควรถูกฝึกทักษะในแต่ละระดับความยากง่ายที่แตกต่างกันไป ขึ้นอยู่กับความรู้ ความสามารถ ความเหมาะสมกับเวลา

3. ช่วงเวลาที่ใช้ในการฝึกทักษะควรเป็นช่วงสั้นๆ ประมาณ 20 นาที เนื่องจากระยะเวลาความสนใจของเด็กจะไม่ดีนัก การถูกฝึกทักษะเป็นช่วงเวลานานๆ จะเกิดความเบื่อหน่ายได้ แต่ถ้าทักษะใดต้องใช้เวลาก็ให้มีการเว้นระยะในการฝึก

4. การฝึกทักษะควรฝึกอย่างเฉพาะเจาะจง (Specific) ซึ่งอาจฝึกเป็นทักษะย่อยก่อนหลังจากนั้นจึงแสดงให้นักเรียนเห็นภาพรวมทั้งหมดของทักษะย่อยทั้งหมด

5. การทำแบบฝึกทักษะให้คำนึงความถูกต้องมากกว่าความเร็วในการคิดคำนวณ เพราะจะเป็นการยากที่จะแก้ไขหลังจากนักเรียนฝึกทักษะไปอย่างผิดๆ จนติดเป็นนิสัยแล้ว

6. ให้นักเรียนได้ตรวจสอบคำตอบและหาข้อผิดพลาดจากการทำแบบฝึกทักษะด้วยตนเอง จะเป็นการสร้างความสนใจ และทำให้นักเรียนเกิดความคงทนในการเรียนรู้

7. การให้นักเรียนทราบผลการฝึกทักษะในทันที ถ้าหากว่านักเรียนทำถูกต้องนักเรียนก็จะรู้สึกว่าจะต้องทำให้ถูกต้องอย่างนี้ต่อไป แต่ถ้าทำผิดก็จะทำให้นักเรียนเกิดความท้าทายพยายามหาข้อผิดพลาดเพื่อจะสามารถทำให้ถูกต้องได้ต่อไป

8. ควรจะมีการให้คะแนนในการทำแบบฝึกทักษะ เพื่อที่นักเรียนจะได้เห็นคะแนนซึ่งเป็นผลของการฝึกทักษะของตนเอง การนำคะแนนที่ได้ไปเปรียบเทียบกับคะแนนเพื่อนในชั้นเรียนจะเป็นการสร้างมาตรฐานเพื่อจะทำให้ดีขึ้นในครั้งต่อไป

9. ต้องทำให้นักเรียนตระหนักว่าการฝึกทักษะมิใช่เป็นส่วนหนึ่งของการฝึกหัดเท่านั้น แต่จะเป็นการช่วยให้นักเรียนเกิดความเข้าใจ สามารถนำไปใช้ และสรุปเป็นหลักการต่างๆทางคณิตศาสตร์ได้ นักเรียนที่ขาดการฝึกทักษะจะไม่สามารถตีความและวิเคราะห์ทฤษฎีบทหรือปัญหาคณิตศาสตร์ได้ดีเท่าที่ควร

ในการฝึกทักษะทางคณิตศาสตร์ ส่วนใหญ่เป็นการทำแบบฝึกหัดในแต่ละเรื่องแต่ละตอนซึ่งควรยึดหลักดังนี้

1. ก่อนที่จะให้ฝึกทักษะเรื่องใด ตอนใดก็ตาม ควรจะต้องแน่ใจก่อนว่านักเรียนเข้าใจมโนทัศน์ของเรื่องที่สอนดีพอสมควรแล้ว มิฉะนั้น การฝึกก็จะไม่เกิดประโยชน์อันใด นอกจากฝึกให้นักเรียนจำวิธีการทำโจทย์แบบฝึกหัดเป็นข้อๆไปเท่านั้น

2. การฝึกควรจะมีจุดหมายที่แน่ชัด และเป็นการฝึกเฉพาะเรื่อง แม้ว่าแบบฝึกหัดที่มีอยู่จะปะปนกันหลายๆแบบก็ไม่จำเป็นต้องให้เรียนเนื้อหาทั้งหมดแล้วถึงจะให้ทำแบบฝึกหัด เพราะจะทำให้นักเรียนสับสนมากเกินไป การฝึกในระยะแรกๆ ควรเน้นความถูกต้องก่อน ต่อไปอาจจะเน้นความรวดเร็ว และความแม่นยำได้

3. การคำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคล โดยที่นักเรียนทั้งห้องไม่จำเป็นต้องทำแบบฝึกหัดเท่าๆกัน อาจจะเว้นบางข้อสำหรับนักเรียนที่เรียนช้า หรืออาจจะหาแบบฝึกหัดพิเศษมาเพิ่มเติมให้สำหรับนักเรียนที่เรียนได้รวดเร็ว เพื่อจะให้นักเรียนทุกคนได้มีโอกาสประสบผลสำเร็จ จะได้มีกำลังใจที่จะเรียนต่อไป (สุนทร ชนะกอก , 2524: 29-30)

จากการศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้องกับการฝึกทักษะสรุปได้ว่า การฝึกทักษะเป็นกิจกรรมที่เน้นการทำความเข้าใจมโนทัศน์ที่ได้เรียนมาเพื่อให้นักเรียนมีความเข้าใจที่ชัดเจนและคงทนมากยิ่งขึ้น ดังนั้นก่อนจะทำการฝึกทักษะครูต้องแน่ใจว่านักเรียนเข้าใจมโนทัศน์ในเรื่องนั้นดีแล้ว จึงค่อยเริ่มฝึกทักษะย่อยทีละทักษะ คำนึงถึงความถูกต้องมากกว่าความรวดเร็วในการคิดคำนวณ ให้ระดับความยากง่ายตามความรู้ ความสามารถของนักเรียน และความเหมาะสมกับเวลา

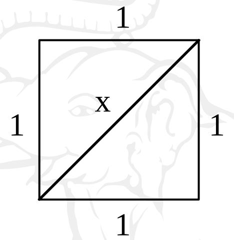
การนำเสนอมโนทัศน์เรื่องจำนวนจริง

โดยทั่วไปการให้มโนทัศน์ของจำนวนตรรกยะเป็นจำนวนที่สามารถเขียนแทนได้ในรูปเศษส่วนที่ตัวเศษและตัวส่วนเป็นจำนวนเต็ม แต่ตัวส่วนต้องไม่เท่ากับศูนย์ จึงสามารถสรุปได้ว่า เศษส่วนที่นักเรียนรู้จักเช่น $\frac{2}{3},-\frac{3}{5},\frac{11}{7},-\frac{31}{12}$ เป็นจำนวนตรรกยะ และจำนวนเต็ม เช่น $-4,-2\ ,\ 0\ ,\ 3\ ,\ 5$ สามารถเขียนเป็นเศษส่วนได้เป็น $-\frac{8}{2},-\frac{2}{1},\frac{0}{6},\frac{9}{3},\frac{25}{5}$ ตามลำดับและเศษส่วนเหล่านั้นยังเป็นจำนวนตรรกยะเช่นกัน การใช้วิธีการนี้เนื่องจากเห็นว่านักเรียนรู้จักการเขียนแทนจำนวนในรูปของเศษส่วนมาก่อนแล้ว

จำนวนตรรกยะเป็นจำนวนที่ขยายมาจากจำนวนเต็ม เพื่อให้มีจำนวนที่เป็นคำตอบของการหารกันของจำนวนเต็มเสมอเช่น $4\div 5$ หรือ $(-12)\div 9$ สอดคล้องกับแนวทาง

การอธิบายมโนทัศน์จำนวนตรรกยะของ Willoughby (1967: 239-242) และ Schaaf (1969: 196-197) โดยใช้การหาร นั่นคือจำนวนตรรกยะคือผลหารของจำนวนเต็มสองจำนวนที่ตัวหารต้องไม่เป็นศูนย์ และเขียนแสดงได้ในรูปเศษส่วน เช่น $\frac{6}{5}$ เป็นจำนวนตรรกยะที่เกิดจาก $6 \div 5$ หรือ $-\frac{3}{7}$ เป็นจำนวนตรรกยะที่เกิดจาก $(-3) \div 7$ หรือ $\frac{10}{5}$ เป็นจำนวนตรรกยะที่เกิดจาก $(-10) \div (-5)$ เป็นต้น

จำนวนอตรรกยะเป็นจำนวนที่เกิดจากการพยายามหาคำตอบของสมการ $x^2 = 2$ ซึ่งเป็นสมการที่เกิดจากการคำนวณหาความยาวของเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งมีความยาวของด้านแต่ละด้านเป็น 1 หน่วย ดังรูป



รูป 1 รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีความยาวด้าน 1 หน่วย

จากรูปได้จำนวนที่เป็นคำตอบของสมการเขียนแสดงได้ในรูปทศนิยมไม่ซ้ำคือ 1.414213562… โดยใช้สัญลักษณ์ $\sqrt{2}$ แทนจำนวนดังกล่าว ซึ่งเป็นจำนวนที่ไม่สามารถเขียนแทนได้ด้วยเศษส่วนที่ตัวเศษและตัวส่วนเป็นจำนวนเต็ม และตัวส่วนไม่เท่ากับศูนย์ เรียกว่าจำนวนอตรรกยะ แต่ Willoughby (1967: 244-246) กลับนำเสนอแนวทางการอธิบายมโนทัศน์ของจำนวนอตรรกยะและจำนวนจริงเชื่อมโยงจากจำนวนตรรกยะโดยอาศัย ทศนิยมเป็นหลักตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. แสดงให้นักเรียนเห็นว่าจำนวนตรรกยะสามารถเขียนแสดงได้ในรูปทศนิยมซ้ำทั้งหมด ก่อนอื่นยกตัวอย่างให้นักเรียนรู้จักทศนิยมซ้ำ เช่น 0.23463812121212… จากนั้นให้นักเรียนเปลี่ยนจำนวนตรรกยะที่อยู่ในรูปเศษส่วนให้อยู่ในรูปทศนิยมซ้ำโดยใช้การตั้งหารเช่น $\frac{1}{7}$ เปลี่ยนให้อยู่ในรูปทศนิยมซ้ำได้เป็น 0.142857142857… ในที่สุดนักเรียนจะได้ข้อสรุปว่าจำนวนตรรกยะเป็นจำนวนที่สามารถเขียนแสดงได้ในรูปทศนิยมซ้ำ

2. ยกตัวอย่างทศนิยมไม่ซ้ำสองจำนวนคือ 0.10100100010000100000… และ 0.123456789101112131415… แน่นอนว่าทั้งสองจำนวนไม่เป็นจำนวนตรรกยะ เพราะไม่ใช่ทศนิยมซ้ำ ให้เรียกจำนวนที่เขียนแสดงได้ในรูปทศนิยมไม่ซ้ำนี้ว่า จำนวนอตรรกยะ

3. แนะนำให้นักเรียนรู้จักจำนวนที่สามารถเขียนแสดงได้ในรูปทศนิยมทั้งที่เป็นทศนิยมซ้ำและไม่ซ้ำว่าเป็น จำนวนจริง ดังที่ Musser และ Burger (1997: 369) แสดงแผนภาพความสัมพันธ์ของจำนวนจริงดังนี้

ทศนิยม (จำนวนจริง)

ทศนิยมซ้ำ (จำนวนตรรกยะ) ทศนิยมไม่ซ้ำ (จำนวนอตรรกยะ)

ทศนิยมซ้ำศูนย์ ทศนิยมไม่ซ้ำศูนย์

จากแผนภาพจะเห็นว่าทศนิยมซ้ำที่เขียนแสดงแทนจำนวนตรรกยะมีอยู่ 2 ประเภท คือ ทศนิยมไม่ซ้ำศูนย์ เช่น 0.3333…, 0.129129…, 0.454545…, 2.8603603… กับทศนิยมซ้ำศูนย์ เช่น 0.5000… หรือ 0.5, 0.72000… หรือ 0.72 , 0.0387000… หรือ 0.0387

ส่วนการเปลี่ยนจำนวนตรรกยะที่อยู่ในรูปทศนิยมซ้ำให้อยู่ในรูปเศษส่วน โดยทั่วไปใช้อยู่ 2 วิธี คือ

วิธีที่ 1 สำหรับทศนิยมซ้ำศูนย์ อาศัยความรู้พื้นฐานเดิมของนักเรียนเปลี่ยนทศนิยมให้เป็นเศษส่วนเช่น $0.5 = \frac{5}{10}$, $0.72 = \frac{72}{100}$, $0.0387 = \frac{387}{10000}$

วิธีที่ 2 สำหรับทศนิยมไม่ซ้ำศูนย์ ซึ่งเป็นวิธีการใหม่สำหรับนักเรียน เช่น เปลี่ยน 0.3333… ให้อยู่ในรูปเศษส่วนได้โดย

ให้
$$
\begin{aligned}
N &= 0.3333\ldots \\
10N &= 3.3333\ldots \\
10N - N &= 3 \\
9N &= 3 \\
N &= \frac{3}{9}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $0.3333\ldots = \frac{3}{9}$

หรือเปลี่ยน 0.21515… ให้อยู่ในรูปเศษส่วนได้โดย

ให้

$$
\begin{aligned}
N &= 0.21515\ldots \\
10N &= 2.1515\ldots \\
1000N &= 215.1515\ldots \\
1000N - 10N &= 215 - 2 \\
990N &= 215 - 2 \\
N &= \frac{215-2}{990} \\
N &= \frac{213}{990}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $0.21515\ldots = \dfrac{213}{990}$

ซึ่งได้ข้อสังเกตการเปลี่ยน 0.21515… ให้อยู่ในรูปเศษส่วนโดยวิธีลัดได้ว่า ตัวเศษเกิดจากการนำตัวเลขที่อยู่หลังทศนิยมทั้งหมดคือ 215 ลบด้วยตัวเลขหลังทศนิยมที่ไม่ซ้ำคือ 2 และตัวส่วนประกอบด้วยเลข 9 มีจำนวนเท่ากับจำนวนตำแหน่งของทศนิยมที่ซ้ำ ในที่นี้มี 2 ตำแหน่ง และเลข 0 มีจำนวนเท่ากับจำนวนตำแหน่งของทศนิยมที่ไม่ซ้ำ ในที่นี้มี 1 ตำแหน่ง

เนื่องจากวิธีการดังกล่าวเป็นวิธีการใหม่ สุนทร ชนะกอก (2528: 49 – 50) ได้แสดงการใช้วิธีการดังกล่าวเปลี่ยนทศนิยมซ้ำศูนย์เช่น 0.2 ให้อยู่ในรูปเศษส่วนได้ดังนี้

ให้

$$
\begin{aligned}
N &= 0.20000\ldots \\
10N &= 2.00000\ldots \\
100N &= 20.00000\ldots \\
100N - 10N &= 20 - 2 \\
90N &= 20 - 2 \\
N &= \frac{20-2}{90} \\
N &= \frac{18}{90} = \frac{2}{10}
\end{aligned}
$$

เป็นการแสดงให้นักเรียนเห็นความเชื่อมโยงวิธีการใหม่กับความรู้เดิมที่นักเรียนมี เพราะนักเรียนทราบมาก่อนแล้วว่า $0.2 = \dfrac{2}{10}$

กิตติ พัฒนตระกูลสุข (2546: 26-29) ได้เสนอให้นักเรียนค้นหาแบบรูปของการเปลี่ยนของทศนิยมไม่ซ้ำศูนย์ให้อยู่ในรูปเศษส่วนเช่น แบบรูปของทศนิยมซ้ำหนึ่งตำแหน่ง

$$0.111\ldots = 0.\dot{1} = \frac{1}{9}$$

$$0.222\ldots = 0.\dot{2} = \frac{2}{9}$$

$$0.333\ldots = 0.\dot{3} = \frac{3}{9}$$

$$0.444\ldots = 0.\dot{4} = \frac{4}{9}$$

นั่นคือ $\quad 0.aaa\ldots = 0.\dot{a} = \dfrac{a}{9}$ $\quad$ เมื่อ a เป็นจำนวนเต็มบวก

และจะได้แบบรูปของทศนิยมซ้ำ 2, 3, 4, … อื่นๆเป็น $0.abab\ldots = \dfrac{ab}{99}$,

$0.abcabc\ldots = 0.\dot{a}b\dot{c} = \dfrac{abc}{999}$, $0.abcdabcd\ldots = 0.\dot{a}bc\dot{d} = \dfrac{abcd}{9999}$, … เมื่อ a, b, c, d เป็นจำนวนเต็มบวก ส่วนทศนิยมซ้ำอีกรูปแบบเช่น $0.2\dot{5}$ ใช้วิธีการต่อไปนี้

$$0.2\dot{5} = 0.2 + 0.0555\ldots$$

แต่ $\quad 0.\dot{5} = \dfrac{5}{9}$

และ $\quad 0.0\dot{5} = \dfrac{1}{10} \times \dfrac{5}{9} = \dfrac{5}{90}$

ดังนั้น $\quad 0.2\dot{5} = \dfrac{2}{10} + \dfrac{5}{90} = \dfrac{23}{90}$

โดยให้ครูชี้แนะให้นักเรียนสังเกตตัวเศษ 23 เกิดจาก $(25-2)$ คือ นำ 25 ลบด้วยตัวเลขหลังทศนิยมที่ไม่ซ้ำในที่นี้คือ 2 และตัวส่วนเกิดจาก $\dfrac{1}{10} \times \dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{90}$ ซึ่ง $\dfrac{1}{10}$ เกิดจากจำนวนตำแหน่งของทศนิยมที่ไม่ซ้ำซึ่งมี 1 ตำแหน่ง และ $\dfrac{1}{9}$ เกิดจากจำนวนตำแหน่งของทศนิยมที่ซ้ำซึ่งมี 1 ตำแหน่ง ข้อสังเกตดังกล่าวจะช่วยทำให้นักเรียนเปลี่ยนทศนิยมซ้ำดังกล่าวให้เป็นเศษส่วนได้รวดเร็วยิ่งขึ้น ดังตัวอย่างต่อไปนี้

$$0.2\dot{3}\dot{5} = (235-2) \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{99} = \frac{233}{990}$$

$$0.27\dot{8} = (278-27) \times \frac{1}{100} \times \frac{1}{9} = \frac{251}{900}$$

$$0.35\dot{1}3\dot{4} = (35134-35) \times \frac{1}{100} \times \frac{1}{999} = \frac{35099}{99900}$$

จำนวนตรรกยะบางจำนวนสามารถเขียนแสดงแทนได้ทั้งรูปทศนิยมซ้ำศูนย์และไม่ซ้ำศูนย์เช่น $0.5 = 0.5000\ldots = 0.4999\ldots$, $0.72 = 0.72000\ldots = 0.71999\ldots$, $0.0387 = 0.0387000\ldots = 0.0386999\ldots$ วิธีการพิสูจน์อาจจะใช้หลักการดังกล่าวข้างต้นแสดงการพิสูจน์ได้ตัวอย่างเช่น

$$\begin{aligned} N &= 0.4999\ldots \\ 10N &= 4.9999\ldots \\ 100N &= 49.9999\ldots \\ 90N &= 49-4 \\ N &= \frac{45}{90} \\ &= \frac{5}{10} = 0.5 \end{aligned}$$

Kim Beswick (2004: 7-9) เห็นว่าวิธีการดังกล่าวนักเรียนหลายคนไม่อาจยอมรับหรือเข้าใจ จึงให้แนวทางการพิสูจน์ที่ต่างไป โดยยกตัวอย่างเพื่อจะแสดงว่า $0.999\ldots = 1$ ดังนี้

วิธีที่ 1 ใช้เศษส่วน

จาก $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$

และ $\frac{1}{3}=0.333\ldots$

และ $0.333\ldots+0.333\ldots+0.333\ldots=0.999\ldots$

ดังนั้น $0.999\ldots=1$

วิธีที่ 2 ใช้การหารตามนิยามของจำนวนตรรกยะ

เนื่องจาก $\frac{4}{4}=1$

$$4\overline{)4.0^40^40^40^40^40^40^40\ldots}\quad 0.9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\ \ldots$$

จะได้ว่า $\frac{4}{4}=0.999\ldots$

ดังนั้น $1=0.999\ldots$

วิธีที่ 3 ใช้แบบรูปแสดง

$\frac{1}{9}=0.111\ldots$

$\frac{2}{9}=0.222\ldots$

$\frac{3}{9}=0.333\ldots$

$\ldots$

$$\frac{7}{9} = 0.777\ldots$$
$$\frac{8}{9} = 0.888\ldots$$
$$\frac{9}{9} = 0.999\ldots$$

เนื่องจาก $\frac{9}{9} = 1$ ดังนั้น $0.999\ldots = 1$

นอกจากนั้น Wheeler (1970: 284-287) เสนอให้ใช้ทศนิยมไม่ซ้ำต่างๆ เพื่อสร้างความเข้าใจเกี่ยวกับจำนวนอตรรกยะดังนี้

1. ใช้ทศนิยมไม่ซ้ำ เช่น $0.131131113111131111113\ldots$

2. ใช้จำนวนอตรรกยะ π ที่นักเรียนคุ้นเคย ให้นักเรียนเข้าใจถูกต้องว่าจำนวนดังกล่าวเขียนแสดงได้ในรูปทศนิยมไม่ซ้ำ $\frac{22}{7}$ หรือ 3.1416 ไม่ใช่ค่าจริงของ π

3. ใช้จำนวนที่เป็นคำตอบของสมการ $x^2 - 2 = 0$, $x^2 - 5 = 0$ ซึ่งทั้งสองสมการมีคำตอบเป็นจำนวนอตรรกยะ ที่สามารถเขียนแสดงได้ในรูปกรณฑ์ $\pm\sqrt{2}$ และ $\pm\sqrt{5}$ ตามลำดับ แล้วใช้การคิดคำนวณเขียนแสดงแทนจำนวนดังกล่าวในรูปทศนิยมไม่ซ้ำ เช่น การคำนวณเพื่อเขียนแสดง $\sqrt{2}$ ในรูปทศนิยม

$1^2 = 1 < 2 < 4 = 2^2$ ดังนั้น $1 < \sqrt{2} < 2$

$(1.4)^2 = 1.96 < 2 < 2.25 = (1.5)^2$ ดังนั้น $1.4 < \sqrt{2} < 1.5$

$(1.41)^2 = 1.9881 < 2 < 2.0164 = (1.42)^2$ ดังนั้น $1.41 < \sqrt{2} < 1.42$

$(1.414)^2 = 1.999396 < 2 < 2.002228 = (1.415)^2$ ดังนั้น $1.414 < \sqrt{2} < 1.415$

$(1.4142)^2 = 1.99996164 < 2 < 2.00024449 = (1.4143)^2$ ดังนั้น $1.4142 < \sqrt{2} < 1.4143$

เมื่อคำนวณตามวิธีการนี้ต่อไป ก็จะสามารถได้ค่าที่ใกล้เคียงมากขึ้น และสามารถเขียนแสดงได้ว่า $\sqrt{2} = 1.414213\ldots$ ดังนั้น $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

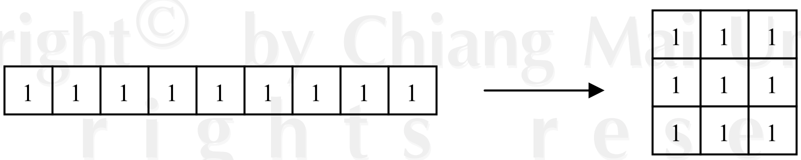
การให้นักเรียนใช้เครื่องคิดเลขช่วยประมาณค่าของจำนวนอตรรกยะ เพื่อช่วยให้นักเรียนเข้าใจตัวเลข หรือสัญลักษณ์ที่แสดงแทนจำนวนอตรรกยะ โดยเฉพาะนิพจน์ของจำนวนอตรรกยะ เช่น $\sqrt{20}$, $\frac{18}{\sqrt{3}-5}$ หรือ $\sqrt{\frac{2}{3}}$ เป็นต้น (Burrill , 1992 : 20 – 21)

การอธิบายมโนทัศน์ของรากที่สองและรากที่สาม

การให้มโนทัศน์ของรากที่สองและรากที่สามของจำนวนจริงอาจจะเริ่มจากการยกกำลัง เนื่องจากนักเรียนรู้จักเลขยกกำลังมาก่อนและการหารากของจำนวนจริงเป็นการกระทำที่ตรงข้ามกับการยกกำลัง ดังเช่นแนวทางอธิบายของ Schaaf. (1969: 205-206) ว่าการยกกำลังเป็นการหาผลคูณของจำนวนจริง $r \cdot r \cdot r \cdot \ldots$ ทั้งหมด n ตัว ได้เท่ากับ a เขียนแทนด้วย $r^n = a$ หรือกล่าวว่า “กำลังที่ n ของ r เท่ากับ a” แต่ถ้าเป็นการกระทำที่ตรงข้ามจะเป็นการหาจำนวนจริง r ที่ยกกำลัง n แล้วได้ a เขียนแทนด้วย $r = \sqrt[n]{a}$ และกล่าวว่า “r เป็นรากที่ n ของ a” แต่การอธิบายอาจจะเริ่มจากการใช้ประโยคภาษาก่อนที่จะใช้ประโยคสัญลักษณ์ดังกล่าว ดังเช่นการอธิบายรากที่สองของ Stein (1975 : 149) ถ้ากำหนดให้ y เป็นจำนวนที่ยกกำลังสองแล้วได้ x แล้ว y จะเป็นรากที่สองของ x เช่น 3 เป็นรากที่สองของ 9 และ 7 เป็นรากที่สองของ 49 จากนั้นให้หารากที่สองของจำนวนอื่นๆ เช่น 25 หรือ 144 แล้วจึงชี้ให้นักเรียนเห็นว่า จาก 3 เป็นรากที่สองของ 9 ยังมี -3 อีกจำนวนหนึ่งที่เป็นรากที่สองของ 9 จะได้ว่ารากที่สองของจำนวนจริงใดๆ จะมีสองจำนวนคือรากที่เป็นบวกและรากที่เป็นลบ สามารถใช้เครื่องหมาย $\sqrt{\ }$ แสดงแทนจำนวนที่เป็นรากที่สองได้ เช่น $\sqrt{25} = 5$ เป็นรากที่สองของ 25 หรือ $\sqrt{64} = 8$ เป็นรากที่สองของ 64 เป็นต้น

สำหรับรากที่เป็นจำนวนอตรรกยะเช่น $\sqrt[3]{25}$ Musser และ Burger (1997: 373) เสนอว่าควรจะให้นักเรียนได้รู้จักประมาณค่าจำนวนดังกล่าว นักเรียนจะต้องสามารถให้เหตุผลได้ว่า จาก $3^3 = 27$ ดังนั้น $\sqrt[3]{25}$ ต้องมีค่าน้อยกว่า 3 และให้นักเรียนลองใช้เครื่องคิดเลขตรวจสอบดูก็จะพบว่า $\sqrt[3]{25} = 2.94017738\ldots$

นอกจากนั้น John Gough (2007: 53-57) เสนอให้ใช้พื้นที่นำเข้าสู่การสอนมโนทัศน์ของรากที่สองโดยกำหนดให้ $\boxed{1}$ แทนพื้นที่ 1 ตารางหน่วย เมื่อจะหารากที่สองของ 9 ก็นำพื้นที่ทั้งหมดคือ 9 ตารางหน่วย นำไปจัดเรียงเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ดังภาพ



รูป 2 การจัดเรียงพื้นที่ 9 ตารางหน่วย เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

จากภาพจะได้รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ด้านยาว 3 หน่วย และจากพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีค่าเท่ากับกำลังสองของความยาวด้าน ดังนั้นสามารถแสดงได้ว่า 3 เป็นรากที่สองของ 9 เมื่อต้องการแสดงการหารากที่สองของ 10 ด้วยการนำพื้นที่ทั้งหมด 10 ตารางหน่วย จัดเรียงเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

1	1	1		
1	1	1		1
1	1	1		

รูป 3 การจัดเรียงพื้นที่ 10 ตารางหน่วย เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

จากภาพจะเหลือพื้นที่อีก 1 ตารางหน่วยที่จะต้องตัดแบ่งออกเป็น 6 ส่วน เพื่อนำมาประกอบให้ได้เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส จะได้ความยาวด้านของสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีค่ามากกว่า 3 หน่วย ดังนั้นรากที่สามของ 10 จะมีค่ามากกว่า 3 ครูสามารถกำหนดให้นักเรียนประมาณค่าของรากที่สามที่เป็นบวกของ 10 ว่ามีค่าประมาณเท่าไร

จากการศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้องกับการนำเสนอมโนทัศน์เรื่องจำนวนจริง สรุปได้ว่า การนำเสนอมโนทัศน์ของจำนวนจริงสามารถใช้ตัวเลขในรูปทศนิยมเพื่อให้นักเรียนสามารถแยกแยะความแตกต่างระหว่างจำนวนตรรกยะและจำนวนอตรรกยะ โดยใช้ทศนิยมซ้ำอธิบายมโนทัศน์ของจำนวนตรรกยะที่เกิดจากการหารกันของจำนวนเต็ม ใช้ทศนิยมไม่ซ้ำอธิบายมโนทัศน์ของจำนวนอตรรกยะที่เกิดจากการหาคำตอบของสมการกำลังสองบางสมการเช่น $x^2 = 2$ หรือการคิดคำนวณหาความยาวของเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบางรูป เช่น ความยาวเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีความยาวด้าน ด้านละ 1 หน่วย แล้วใช้ตัวเลขในรูปทศนิยมที่เกิดจากการรวมกันของจำนวนตรรกยะและจำนวนอตรรกยะอธิบายมโนทัศน์ของจำนวนจริง การอธิบายการเปลี่ยนทศนิยมซ้ำให้อยู่ในรูปเศษส่วนนั้นสามารถทำได้ 2 แนวทาง คือ ใช้การแก้สมการเปลี่ยนทศนิยมซ้ำให้อยู่ในรูปเศษส่วน ส่วนอีกแนวทางหนึ่งนั้นใช้แบบรูปแสดงให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่างทศนิยมซ้ำกับเศษส่วน การนำเสนอมโนทัศน์ของรากที่สองและรากที่สามของจำนวนจริงนั้นสามารถทำได้ 2 แนวทางเช่นกันคือ แนวทางแรกใช้การยกกำลังซึ่งเป็นการกระทำที่ตรงข้ามกับการหาราก ส่วนอีกแนวทางหนึ่งนั้นนำเสนอตัวอย่างที่เป็นรูปธรรมเช่น การสร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีพื้นที่ 9 ตารางหน่วย จะได้รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีความยาวด้าน ด้านละ 3 หน่วย ซึ่ง 3 จะเป็นรากที่สองที่เป็นบวกของ 9 เป็นต้น

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ผลการวิจัยหลายเรื่องที่สามารถปรับปรุง และพัฒนาหารูปแบบการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ให้เหมาะสมกับความรู้ความสามารถของนักเรียนในชั้นเรียนปกติได้ โดยใช้รูปแบบการวิจัยเชิงปฏิบัติการของ Kemmis and McTaggart ดังเช่น

น้ำผึ้ง อินทะเนตร (2546) พบรูปแบบการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่อง พหุนาม ที่ทำให้นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3/2 โรงเรียนสา จังหวัดน่าน ส่วนใหญ่มีความรู้ความเข้าใจอย่างถูกต้องในมโนทัศน์ของพหุนาม มีทักษะการคิดคำนวณอยู่ในระดับดี และมีความพึงพอใจต่อกิจกรรมการเรียนการสอนที่จัดขึ้น โดยจัดลำดับเนื้อหาใหม่ให้มีลักษณะจากง่ายไปสู่ยากและมีความต่อเนื่องกัน เริ่มจากการสอนเอกนามและพหุนามตัวแปรเดียวก่อนแล้วจึงเพิ่มจำนวนของตัวแปรในภายหลัง ส่งเสริมให้นักเรียนสรุปสาระสำคัญในมโนทัศน์ของเนื้อหาด้วยตนเองโดยใช้กระบวนการสร้างมโนทัศน์ การสอนแบบอุปนัย การใช้คำถามนำ และใช้การฝึกทักษะย่อยเป็นส่วนหนึ่งของกิจกรรมการเรียนการสอน

จุติพร สุขะจีระเดช (2547) พบรูปแบบการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องเมตริกซ์ที่ทำให้นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4/5 โรงเรียนมงฟอร์ตวิทยาลัย จังหวัดเชียงใหม่ ส่วนใหญ่มีความรู้ความเข้าใจในมโนทัศน์ของเมตริกซ์ มีทักษะในการคิดคำนวณ และนำความรู้ไปใช้ในการแก้ระบบสมการเชิงเส้นได้ โดยการจัดลำดับเนื้อหาการสอนใหม่จากง่ายไปสู่ยาก เริ่มจากการเรียนรู้เมตริกซ์และดีเทอร์มินันท์มิติ 2×2 ทั้งหมดก่อน แล้วจึงให้เรียนรู้เมตริกซ์และดีเทอร์มินันท์มิติ 3×3 และมิติอื่นๆ ส่งเสริมให้นักเรียนสรุปสาระที่สำคัญของแต่ละเนื้อหาด้วยตนเอง รวมทั้งการใช้การฝึกทักษะย่อยในแต่ละมโนทัศน์ก่อนทำแบบฝึกหัด

ทัศนีย์ กาตะโล (2547) พบรูปแบบการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องภาคตัดกรวยที่ทำให้นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4/1 โรงเรียนสะเมิงพิทยาคม จังหวัดเชียงใหม่ ส่วนใหญ่มีมโนทัศน์ของภาคตัดกรวยที่ถูกต้องและชัดเจน มีทักษะในการเปลี่ยนรูประหว่างรูปกราฟกับสมการ โดยจัดเรียงเนื้อหาใหม่ให้มีลักษณะที่สัมพันธ์กัน เริ่มจากเรียนรู้มโนทัศน์ของภาคตัดกรวยด้วยการสร้างรูปตามกติกาที่กำหนด แล้วนำมโนทัศน์จากการสร้างรูปดังกล่าวนำเข้าสู่การเขียนกราฟลงในระบบพิกัดฉากและเขียนสมการวงกลม วงรี ไฮเพอร์โบลา และพาราโบลาที่มีจุดศูนย์กลางหรือจุดยอดอยู่ที่จุด (0,0) ตามลำดับโดยใช้คำถามนำและให้นักเรียนสรุปสมการด้วยตนเอง จากนั้นใช้การเลื่อนรูปทางขนานอธิบายมโนทัศน์ของภาคตัดกรวยที่มีจุดศูนย์กลางหรือจุดยอดอยู่ที่จุด (h,k) ใดๆ มุ่งเน้นการฝึกทักษะการเปลี่ยนรูประหว่างรูปกราฟกับสมการภาคตัดกรวย

บำรุง อมรอาจหาญ (2548) พบรูปแบบการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องสมการที่ทำให้นักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนชุมชนบ้านเมืองปอน จังหวัดแม่ฮ่องสอน มีความรู้ความเข้าใจในมโนทัศน์ของสมการ สามารถหาคำตอบของสมการและนำสมการไปใช้ในการแก้ปัญหาได้โดยการจัดลำดับเนื้อหาใหม่ให้มีการเชื่อมโยงระหว่างความรู้เดิมกับความรู้ใหม่ เริ่มจากความหมายของสมการ คำตอบของสมการ การหาคำตอบของสมการ สมบัติของการเท่ากัน และโจทย์ปัญหาของสมการ ตามลำดับ จัดกิจกรรมการเรียนการสอนโดยให้นักเรียนสรุปมโนทัศน์ของเนื้อหาต่างๆ ด้วยตนเอง ใช้การฝึกทักษะย่อยเฉพาะเรื่องเป็นกิจกรรมหลัก และอาศัยหลักการประเมินตามสภาพจริงควบคู่ไปกับการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน

ณรงค์ อุ้ยฟูใจ (2548) พบรูปแบบการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ ที่ทำให้นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4/1 โรงเรียนแม่แจ่ม จังหวัดเชียงใหม่ มีความรู้ความเข้าใจในมโนทัศน์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ สามารถคิดคำนวณและนำความรู้ไปใช้ในการแก้ปัญหาได้ โดยการเปลี่ยนแปลงลำดับเนื้อหาใหม่ให้มีการเชื่อมโยงระหว่างความรู้เดิมกับเนื้อหาใหม่ เรียงลำดับเนื้อหาจากง่ายไปหายาก เริ่มจากฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในตำแหน่งมาตรฐานให้เชื่อมต่อกับความรู้เดิมเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมในสามเหลี่ยมมุมฉากก่อนที่จะให้เรียนฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง สร้างตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติขึ้นใหม่ จัดกิจกรรมการเรียนการสอนมุ่งให้นักเรียนสรุปสาระสำคัญในมโนทัศน์ต่างๆ ด้วยตนเอง โดยใช้กระบวนการสร้างมโนทัศน์ กระบวนการกลุ่มสัมพันธ์ วิธีสอนแบบอุปนัย และการใช้คำถามนำ ใช้การฝึกทักษะย่อยเป็นส่วนหนึ่งของการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนในชั้นเรียน ใช้การประเมินตามสภาพจริงควบคู่ไปกับการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน

ศิริรัตน์ กลัดเทศ (2549) พบรูปแบบการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องเซตที่ทำให้นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4/1 โรงเรียนนาน้อย จังหวัดน่าน ส่วนใหญ่สามารถสร้างมโนทัศน์ในเรื่องเซตได้อย่างถูกต้อง สามารถนำความรู้ไปประยุกต์ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาได้เป็นอย่างดีโดยใช้หลักการสอนจากรูปธรรมไปสู่นามธรรมควบคู่กับการใช้กระบวนการสร้างมโนทัศน์และวิธีการสอนแบบอุปนัย ใช้การฝึกทักษะเป็นส่วนหนึ่งของการจัดการเรียนการสอนในชั้นเรียน จัดทำเอกสารประกอบการเรียนที่เปิดโอกาสให้นักเรียนได้สรุปสาระสำคัญในมโนทัศน์ของเรื่องต่างๆ ด้วยตนเอง

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องพบว่า รูปแบบการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่ทำให้นักเรียนส่วนใหญ่เกิดมโนทัศน์ และทักษะการคิดคำนวณ สามารถนำความรู้ไปใช้ในการแก้ปัญหาได้มีลักษณะดังนี้

1. การจัดการเรียนการสอนต้องให้นักเรียนสรุปสาระสำคัญของมโนทัศน์ต่างๆ ด้วยตนเองซึ่งอาจใช้การสอนแบบอุปนัย ประกอบกับการใช้คำถามนำ เป็นต้น

2. ใช้การฝึกทักษะย่อยเป็นส่วนหนึ่งของการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเพื่อให้นักเรียนเกิดความเข้าใจมโนทัศน์ และมีทักษะการคิดคำนวณ ก่อนการให้ทำแบบฝึกหัดนอกเวลาเรียน

3. เปลี่ยนแปลงลำดับเนื้อหาในการเรียนการสอนใหม่ให้มีความสัมพันธ์เชื่อมโยงกับความรู้พื้นฐานเดิมของนักเรียน ใช้สิ่งที่เป็นรูปธรรมอธิบายสิ่งที่เป็นนามธรรม หรืออาจให้มโนทัศน์ที่มีความสัมพันธ์กันไปพร้อมๆกันแต่จะนำเสนอจากสิ่งที่ง่ายมีความซับซ้อนน้อยไปสู่สิ่งที่มีความซับซ้อนมากขึ้นเป็นลำดับ