

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญของปัญหา

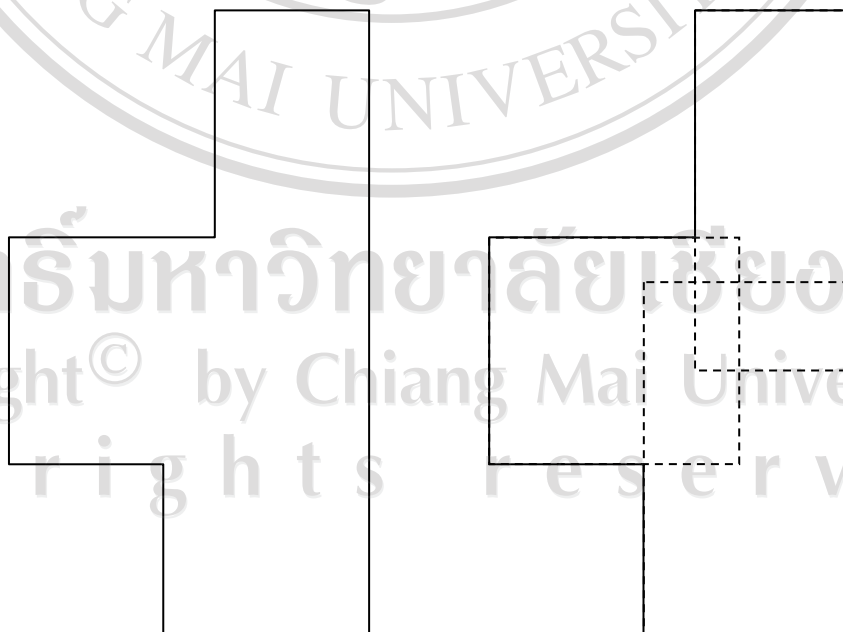
ปัญหาด้านวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์จำนวนมากที่เกิดขึ้นรอบๆ ตัวเราสามารถอธิบายได้ด้วยโมเดลที่มีรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งแสดงคุณสมบัติเฉพาะของปัญหาหรือปรากฏการณ์นั้นๆ ผลลัพธ์ที่ถูกต้องของปัญหานั้นๆ ส่วนใหญ่แล้วยากที่จะหาได้ด้วยวิธีการเชิงวิเคราะห์หรือในบางครั้งอาจจะหาผลลัพธ์ไม่ได้เลย เหตุผลดังกล่าวก่อให้เกิดวิธีการหาผลเฉลยโดยประมาณขึ้น วิธีการหาผลเฉลยโดยประมาณด้วยคอมพิวเตอร์ที่ได้รับความนิยมอย่างกว้างขวางวิธีหนึ่งคือ ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method) ซึ่งวิธีนี้สามารถนำไปใช้แก้ปัญหามโนโดเมนที่มีรูปร่างซับซ้อนแบบไหนก็ได้

ในการหาผลเฉลยโดยประมาณโดยการคำนวณด้วยคอมพิวเตอร์สิ่งหนึ่งที่ต้องคำนึงถึงคือความแม่นยำของผลเฉลยโดยประมาณ ความแม่นยำของผลเฉลยโดยประมาณจะเป็นเท่าไรนั้นขึ้นอยู่กับคุณสมบัติเฉพาะของวิธีการที่นำมาใช้ และขึ้นอยู่กับความต้องการของผู้ใช้ เช่น ปัญหาบางอย่างต้องการความแม่นยำแค่ทศนิยม 2 ตำแหน่ง แต่ปัญหบางอย่างอาจต้องการความแม่นยำของผลเฉลยโดยประมาณถึงทศนิยมหลักสูงๆ

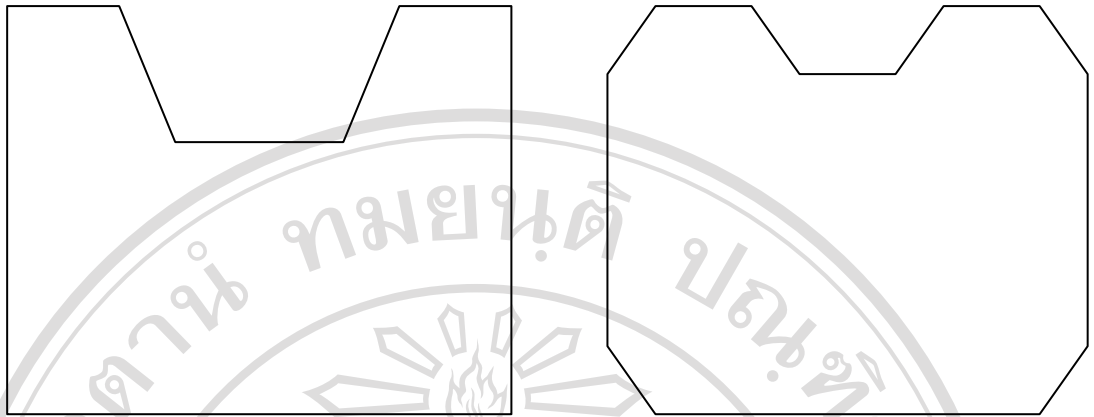
สำหรับความแม่นยำของผลเฉลยโดยประมาณที่ได้จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะขึ้นอยู่กับขนาดและจำนวนของเอลิเมนต์ที่ใช้ นั่นก็คือถ้าแบ่งโดเมนของปัญหาหาความแม่นยำก็จะลดลง ตรงกันข้ามถ้าแบ่งโดเมนด้วยเอลิเมนต์ขนาดเล็กจำนวนมากผลเฉลยโดยประมาณที่ได้ก็จะมีความใกล้เคียงกับผลลัพธ์ที่ถูกต้องมากยิ่งขึ้น ในทางทฤษฎีปัญหาของโดเมนที่มีจุดเอกฐาน (Singular Point) เช่น โดเมนที่มีรูปร่างเป็นรูปหลายเหลี่ยมใดๆ ในการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มีความจำเป็นต้องแบ่งพื้นที่บริเวณรอบจุดยอดด้วยเอลิเมนต์จำนวนมากกว่าบริเวณอื่น [3] การใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กจำนวนมากบริเวณรอบจุดเอกฐานเป็นวิธีการหนึ่งที่สามารถเพิ่มความแม่นยำของผลเฉลยโดยประมาณได้ แต่ทว่าในกรณีนี้ยังเอลิเมนต์มีจำนวนมากขึ้นเท่าไรการคำนวณก็จะเสียเวลามากตามไปด้วย ในบางครั้งเพื่อให้ได้มาซึ่งคำตอบของปัญหาการคำนวณโดยใช้เครื่องคอมพิวเตอร์เพียงเครื่องเดียวอาจจะใช้เวลานานมากจน

ไม่สามารถตอบสนองความต้องการของผู้ใช้ได้ ในหลายกรณีอาจจะต้องใช้เทคโนโลยีอื่นเข้ามาช่วยในการคำนวณ เช่น การคำนวณแบบขนาน แต่อย่างไรก็ตามเทคโนโลยีนี้ก็ยังเป็นเพียงแค่ตัวช่วยที่เสริมเข้าไปเพื่อช่วยเพิ่มศักยภาพของการคำนวณเท่านั้น แต่หัวใจหลักของการคำนวณยังยึดติดกับทฤษฎีของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

วิธีการซิงค์กาเลอร์กิน (Sinc-Galerkin Method) [5, 6] เป็นวิธีการหนึ่งที่ใช้ในแก้ปัญหาที่มีจุดเอกฐาน และได้รับการพิสูจน์ทางทฤษฎีว่าเป็นกระบวนการแก้ปัญหาที่มีจุดเอกฐานได้อย่างแม่นยำและรวดเร็วมาก [7, 8] แต่วิธีการซิงค์กาเลอร์กินยังไม่ค่อยเป็นที่นิยมมากนัก เมื่อเปรียบเทียบกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เนื่องจากรูปร่างของโดเมนถูกจำกัดอยู่แค่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเท่านั้น ในงานวิจัย [9] ได้นำเสนอหลักการการนำวิธีการซิงค์กาเลอร์กินไปใช้ร่วมกับวิธีการแบ่งโดเมนแบบซ้อนทับ (Overlapping Domain Decomposition Method) เพื่อให้วิธีการซิงค์กาเลอร์กิน สามารถนำไปใช้ได้กับโดเมนรูปหลายเหลี่ยมได้ เทคนิคที่นำเสนอคือ จะทำการแบ่งปัญหาออกเป็นปัญหาย่อยหลายๆ ปัญหา แล้วแก้ปัญหาย่อยทีละปัญหาลำดับขึ้นไปเรื่อยๆ จนกว่าผลเฉลยโดยประมาณจะไม่มีเปลี่ยนแปลง แต่ถึงกระนั้นเนื่องจากโดเมนของปัญหาย่อยที่แบ่งจะถูกจำกัดอยู่แค่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเท่านั้น จึงทำให้เทคนิคนี้ใช้ได้กับปัญหาที่มีมุมภายในเป็นมุมฉากเท่านั้น เช่น ปัญหาในรูปที่ 1.1 สามารถใช้วิธีการซิงค์กาเลอร์กินได้ แต่ปัญหาในรูปที่ 1.2 ไม่สามารถใช้วิธีการซิงค์กาเลอร์กินได้ เป็นต้น



รูปที่ 1.1 การแบ่งโดเมนของรูปหลายเหลี่ยมที่มีมุมภายในเป็นมุมฉาก



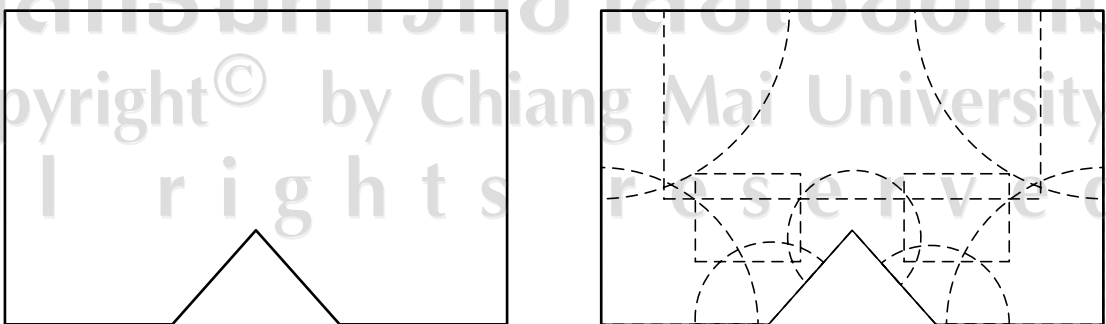
รูปที่ 1.2 รูปหลายเหลี่ยมที่มีมุมภายในมากกว่าหรือน้อยกว่า 90 องศา

1.2 แนวทางในการแก้ปัญหา

จากปัญหาที่ได้กล่าวไปนี้ จึงทำให้เกิดแนวคิดที่จะหารูปแบบของโดเมนที่ทำให้การแบ่งโดเมนมีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับโดเมนที่มีรูปร่างซับซ้อน พร้อมกันนั้นยังสามารถนำวิธีการซิงค์กาเลอรีคินไปใช้ในการคำนวณได้

จากคุณสมบัติของรูปหลายเหลี่ยมใดๆ ซึ่งเกิดจากเส้นตรงหลายๆ เส้นมาต่อกัน จุดต่อของเส้นตรงทำให้เกิดเป็นมุมจำนวนมากที่มีขนาดไม่เท่ากัน แต่ไม่ว่ามุมภายในรูปหลายเหลี่ยมจะมีค่าเท่าไรก็สามารถแบ่งโดเมนบริเวณจุดยอดทุกจุดได้ด้วยรูปตัด ส่วนที่รูปตัดคลุมไม่ได้ก็สามารถนำรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามาใช้เพื่อปิดพื้นที่ที่เหลือทั้งหมดได้ นั่นก็คือเราสามารถแบ่งโดเมนรูปหลายเหลี่ยมใดๆ ได้ด้วยรูปตัดและรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ดังเช่นตัวอย่างในรูปที่ 1.3

ด้วยเหตุผลดังที่ได้กล่าวมาแล้วนั้น โจทย์ที่ตามมาก็คือ ทำอย่างไรจึงจะสามารถนำวิธีการซิงค์กาเลอรีคินไปแก้ปัญหามนโดเมนรูปตัดได้ ซึ่งเป็นวัตถุประสงค์หลักของงานวิจัยในครั้งนี้



รูปที่ 1.3 การแบ่งโดเมนเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าและรูปตัด

1.2.1 โมเดลของปัญหา

โมเดลของปัญหาในงานวิจัยนี้กำหนดให้เป็นสมการปัวซอง (Poisson equation) บนโดเมนรูปพัด ซึ่งสมการนี้เป็นสมการพื้นฐานของสมการเชิงอนุพันธ์ เข้าใจง่าย หาผลลัพธ์ที่ถูกต้องได้ไม่ยากนักซึ่งเหมาะในการทดลองเชิงตัวเลขเพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพของอัลกอริทึม

สมการปัวซองบนโดเมน Ω ซึ่งเป็นรูปพัดมีรัศมี r_0 มุมภายใน α สามารถแสดงได้ดังนี้

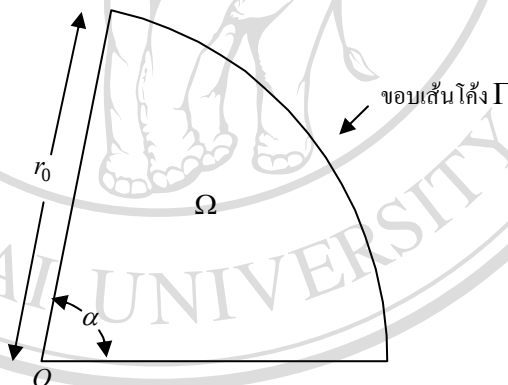
$$\begin{cases} -\nabla_{r\theta}^2 u(r, \theta) = f(r, \theta), & (r, \theta) \in \Omega, \\ u(r_0, \theta) = B(\theta), & 0 < \theta < \alpha, \\ u(r, 0) = u(r, \alpha) = 0, & 0 < r < r_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

โดยที่

$$\nabla_{r\theta}^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} : \text{ตัวดำเนินการบนพิกัดเชิงมุม}$$

$u(r, \theta)$: ผลลัพธ์ของสมการที่พิกัด (r, θ)

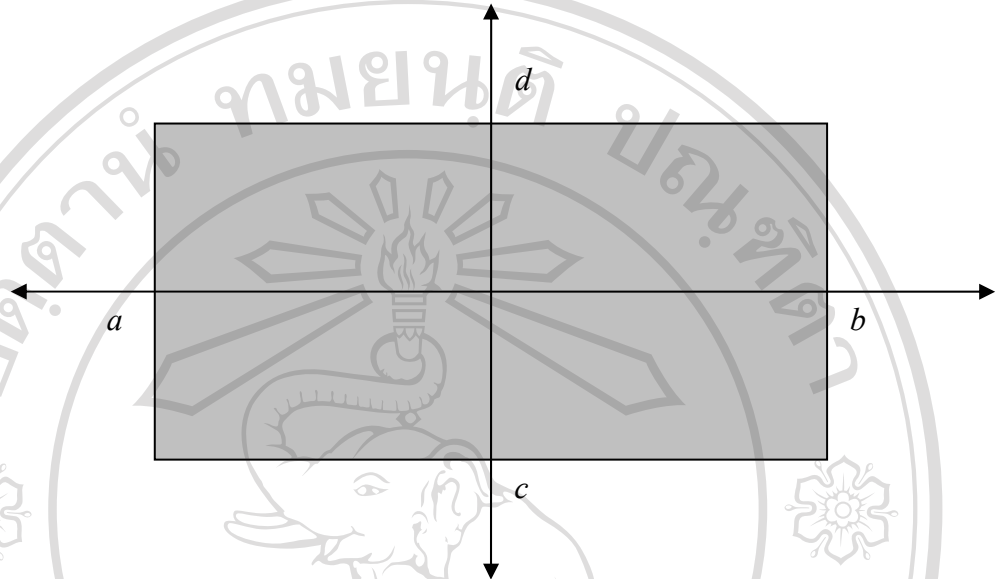
$B(\theta)$: ฟังก์ชันบนขอบเส้นโค้งที่โจทย์กำหนด



รูปที่ 1.4 โดเมนรูปพัด Ω

การแก้ปัญหามิติสองมิติด้วยวิธีการเชิงตัวเลขในทางทฤษฎีก็คือการแก้ปัญหาค่าขอบเขตระหว่างจุด 2 จุด (Two-Point Boundary Value Problem) ในแนวแกน x และแนวแกน y ซึ่งวิธีการเชิงตัวเลขสามารถแก้ปัญหาค่าขอบเขตระหว่างจุด 2 จุดที่กำหนดอยู่ในช่วง $[a, b]$ ช่วง $[0, \infty)$ และช่วง $(-\infty, \infty)$ ได้ [5] นั่นก็คือ ถ้านำคุณสมบัตินี้ไปประยุกต์ใช้กับการแก้ปัญหามิติสองมิติจะสามารถแก้ปัญหามิติสองมิติที่มีรูปร่างเหล่านี้ได้

- โดเมนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า (Rectangular domain) $[a, b] \times [c, d]$



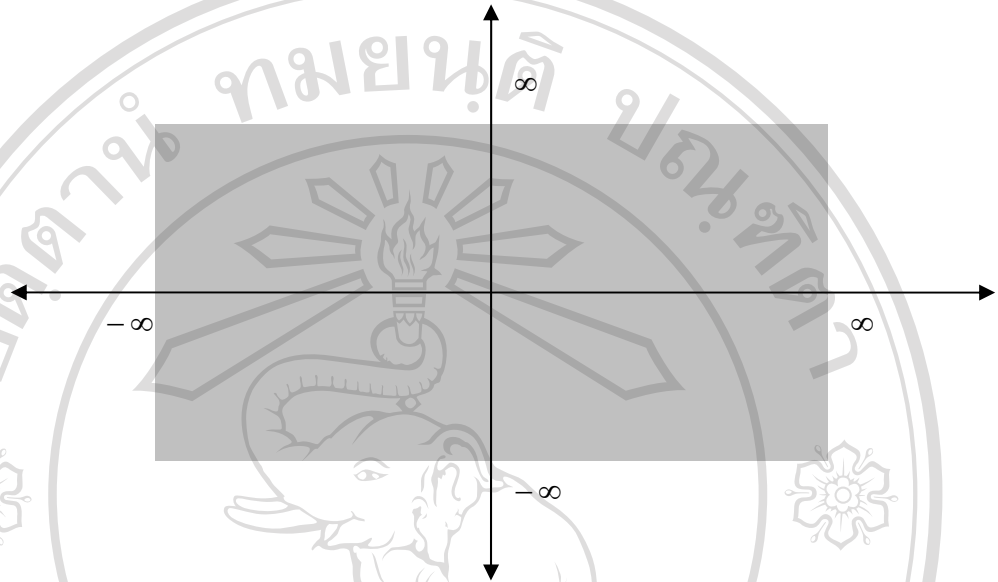
รูปที่ 1.5 โดเมนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า (Rectangular domain) $[a, b] \times [c, d]$

- โดเมนรูปกึ่งอนันต์ (Semi-infinite domain) $[0, \infty) \times [c, d]$



รูปที่ 1.6 โดเมนรูปกึ่งอนันต์ (Semi-infinite domain) $[0, \infty) \times [c, d]$

- โดเมนรูปอนันต์ (Infinite domain) $(-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty)$



รูปที่ 1.7 ที่โดเมนรูปอนันต์ (Infinite domain) $(-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty)$

ดังนั้นถ้าสามารถหาสมการที่แปลงพิกัดโดเมนที่กำหนดให้ไปอยู่ในพิกัดของโดเมนที่มีรูปร่างดังที่กล่าวไปแล้วนั้นได้ ก็หมายความว่าเราสามารถนำวิธีการเชิงคาลเลอร์คินไปใช้ในการแก้ปัญหาได้นั่นเอง

ด้วยเหตุผลดังกล่าวในงานวิจัยนี้จึงเสนอการใช้สมการ

$$r = \varphi(\eta) = e^{-(\eta - \log r_0)} \quad (1.2)$$

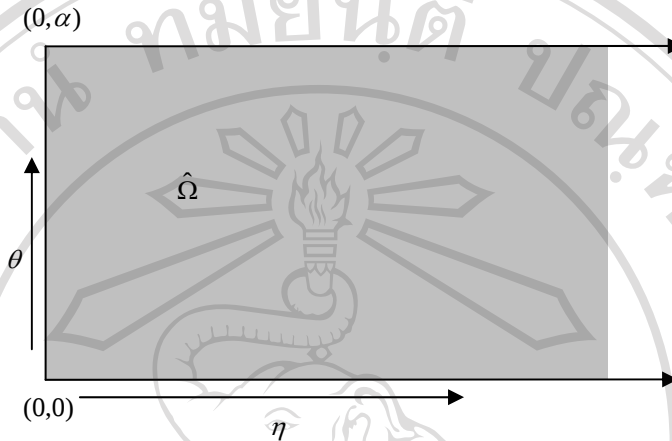
ซึ่งสมการนี้สามารถย้ายระบบพิกัด (r, θ) ของรูปพัดไปยังระบบพิกัด (η, θ) ซึ่งเป็นพิกัดของโดเมนรูปกึ่งอนันต์ได้ การแปลงระบบพิกัดด้วยสมการ (1.2) นี้จะแปลงโจทย์ในสมการ (1.1) ไปเป็นการหาคำตอบของสมการ

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nabla_{\eta\theta}^2 \hat{u}(\eta, \theta) = \hat{f}(\eta, \theta), \quad (\eta, \theta) \in \hat{\Omega}, \\ \hat{u}(0, \theta) = B(\theta), \quad 0 < \theta < \alpha, \\ \hat{u}(\infty, \theta) = 0, \quad 0 < \theta < \alpha, \\ \hat{u}(\eta, 0) = \hat{u}(\eta, \alpha) = 0, \quad 0 < \eta < \infty \end{array} \right. \quad (1.3)$$

โดยที่

$$\hat{u}(\eta, \theta) = u(\varphi(\eta), \theta), \quad \hat{f}(\eta, \theta) = \varphi(\eta)^2 f(\varphi(\eta), \theta)$$

และ $\nabla_{\eta\theta}^2 = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ คือตัวดำเนินการบนพิกัด (η, θ) ซึ่งมีรูปแบบเหมือนกับตัวดำเนินการบนระบบพิกัด (x, y) นอกจากนั้น โดเมนรูปพัด จะถูกแปลงไปเป็นโดเมนรูปกึ่งอนันต์ $\hat{\Omega} = [0, \infty) \times [0, \alpha]$ ดังรูปที่ 1.8



รูปที่ 1.8 โดเมนรูปกึ่งอนันต์ $\hat{\Omega}$

การแปลงปัญหาจากปัญหามบนโดเมนรูปพัดไปเป็นปัญหามบนโดเมนรูปกึ่งอนันต์นี้ทำให้เราสามารถนำวิธีการซิงค์กาเลอรีคินไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาคได้

1.3 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1.3.1 เพื่อศึกษาเทคนิคและอัลกอริทึมที่ทำให้วิธีการซิงค์กาเลอรีคินสามารถนำไปใช้กับโดเมนรูปพัดได้

1.3.2 เพื่อนำเสนอทางเลือกใหม่ที่มีประสิทธิภาพสำหรับผู้ที่ต้องการแก้สมการอนุพันธ์แบบเวลาจริง (Real Time)

1.4 ขอบเขตของการวิจัย

1.4.1 รูปร่างโดเมนของปัญหาคำหนดให้เป็นรูปพัด

1.4.2 ทำการประเมินประสิทธิภาพของอัลกอริทึมโดยการแก้สมการปัวส์ซองในโดเมน 2 มิติ

1.5 ประโยชน์ที่จะได้รับการวิจัย

สามารถนำอัลกอริทึมที่ได้ไปประยุกต์ใช้ร่วมกับวิธีการแบ่งโดเมน (Domain Decomposition Method) เพื่อแก้ปัญหามบนโดเมนที่มีรูปร่างซับซ้อนได้ และยังสามารถนำไป

ประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหานั้นๆ ทางวิศวกรรม เช่น สมการการถ่ายเทความร้อน สมการของไหล ประเภทต่างๆ เป็นต้น

1.6 สรุปสาระสำคัญจากเอกสารที่เกี่ยวข้อง

ปราโมทย์ เเดชะอำไพ [1] ได้อธิบายถึงการแก้ปัญหามสมการเชิงอนุพันธ์ทางวิศวกรรมศาสตร์ โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ในการสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับปัญหาต่างๆ สามารถทำได้ไม่ยุ่งยาก แต่การหาผลลัพธ์ที่ถูกต้อง (Exact Solution) นั้นค่อนข้างยากด้วยวิธีการเชิงวิเคราะห์ (Analytical Method) ด้วยเหตุนี้จึงทำให้เกิดวิธีการหาผลเฉลยโดยประมาณ (Approximate Solution) ขึ้น ซึ่งวิธีการหาผลเฉลยโดยประมาณนั้นมีหลายวิธี แต่วิธีที่ได้รับความนิยมกันอย่างกว้างขวางวิธีหนึ่ง คือ ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method)

I. Babuska [3] เสนอวิธีการแก้ปัญหาคด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับขอบเขตแบบโค้งบนขอบของพื้นที่ กล่าวว่ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้ในการคำนวณหาผลเฉลยโดยประมาณของปัญหา ที่แบ่งโดเมนของปัญหา ให้เป็นส่วนย่อยเล็กๆ จำนวนมากที่เรียกว่าเอลิเมนต์ แล้วทำการสร้างสมการของแต่ละเอลิเมนต์ ให้สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหานั้น ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นี้ สามารถนำไปใช้แก้ปัญหามบนโดเมนที่มีรูปร่างซับซ้อนแบบไหนก็ได้ แต่ในทางทฤษฎีความแม่นยำของผลเฉลยโดยประมาณที่ได้ นั้น จะขึ้นอยู่กับขนาดและจำนวนของเอลิเมนต์ที่ใช้ นั่นคือถ้าต้องการผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำสูง ต้องแบ่งโดเมนของปัญหาคด้วยเอลิเมนต์จำนวนมาก ส่งผลให้การคำนวณต้องใช้เวลาตามไปด้วย

F. Stenger [5] อธิบายวิธีการซิงค์ (Sinc methods) ในการแก้ปัญหาคเชิงตัวเลขแบบต่างๆ

F. Stenger [6] นำเสนอวิธีการซิงค์กัลเลอร์กิน ในการประมาณค่าเชิงเส้นและไม่เป็นเชิงเส้นของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง โดยไม่ต้องทำการใช้การอินทิกรัลเชิงตัวเลข ค่าความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยโดยประมาณเท่ากับ $O(e^{-cN^{1/2d}})$

A. Nurmhamad, M. Muhammad, M. Mori and M. Sugihara [7] พิสูจน์ว่าการนำสมการแปลงแบบดับเบิลเอกโปเนนเชียลไปใช้ในการหาค่าอินทิกรัลของฟังก์ชันซิงค์ สามารถทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนลดลงอย่างรวดเร็วในอัตรา $O(e^{(-cN/\log N)})$

K. Tanaka, M. Sugihara and K. Marota [8] พิสูจน์ว่าการนำสมการแปลงแบบดับเบิลเอกโปเนนเชียลไปประยุกต์ใช้กับวิธีการซิงค์กัลเลอร์กิน สามารถแก้ปัญหาคเอกภาพ (Singular

problem) ได้อย่างมีประสิทธิภาพ โดยค่าความผิดพลาดในการประมาณค่าเท่ากับ $O(e^{(-cN/\log N)})$

N. J. Lybeck and K. L. Bowers [9] นำวิธีการซิงค์มาใช้ร่วมกับวิธีการแบ่งโดเมน (Domain Decomposition Method) เพื่อใช้แก้ปัญหาเอกภาพ (Singular problem) ที่มีรูปทรงซับซ้อนโดยการแบ่งโดเมนของปัญหาเป็นโดเมนย่อยรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า และทำการเปรียบเทียบวิธีการซิงค์กาลีเคอริน (Sinc-Galerkin) กับ วิธีการซิงค์คอลโลเคชัน (Sinc-collocation method) โดยนำมาใช้กับวิธีการแบ่งโดเมนแบบซ้อนทับและวิธีการแบ่งโดเมนแบบไม่ซ้อนทับ (Patching domain decomposition method)

M. El-gmael [11] ใช้วิธีการซิงค์กาลีเคอรินในการแก้ปัญหาค่าการแพร่กระจายไม่เป็นระเบียบ (Singularly-perturbed reaction-diffusion problem) โดยทดลองแก้ปัญหา 4 ตัวอย่าง เปรียบเทียบกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ และวิธีการลดอันดับ (the method of reduction of order) ซึ่งวิธีการซิงค์กาลีเคอรินให้คำตอบแม่นยำมากที่สุด

K. Sanoe, K. L. Bowers [12] เสนอวิธีการซิงค์กาลีเคอรินแบบเต็มกับสมการเชิงอนุพันธ์ที่ซับซ้อน กับปัญหาค่าขอบเขตเวลา โดยจัดระบบซิงค์กาลีเคอรินแบบไม่ต่อเนื่องด้วยวิธีการคูณแบบโครเนคเกอร์ (Kronecker product) ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณเชิงตัวเลขแสดงให้เห็นว่าวิธีการซิงค์กาลีเคอรินมีประสิทธิภาพสูงมาก

Tiangtae N. และ Sugiura H. [13] อธิบายเรื่องการหาผลเฉลยของสมการปัวส์ซองบนโดเมนรูปพัด โดยใช้การประมาณของลีเจนดรี-กาลีเคอริน (Legendre-Galerkin) หลักการสำคัญในการแก้ปัญหาคือการที่แปลงโดเมนรูปพัดให้อยู่ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยใช้กระบวนการดัดแปลงเอกโปเนนเชียล จากการทดลองเชิงตัวเลขพบว่าค่าความผิดพลาดจะลู่เข้าอย่างรวดเร็วในรูปแบบของฟังก์ชันเอกโปเนนเชียล

Tiangtae N. และ Sugiura H. [14] เสนอวิธีการ โคไซน์-เชปรีส-กาลีเคอริน (Cosine-Chebyshev-Galerkin) เพื่อแก้ปัญหาค่าสมการปัวส์ซองบนโดเมนรูปพัด ผลการทดลองเชิงตัวเลขพบว่าผลเฉลยโดยประมาณมีความแม่นยำสูงพอๆ กับวิธีการลีเจนดรี-กาลีเคอริน (Legendre-Galerkin) และระยะเวลาที่ใช้ในการคำนวณสั้นมากเนื่องจากสามารถนำฟาสต์ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์ม (Fast Fourier Transform) มาใช้ในการประมวลผลได้