

บทที่ 2

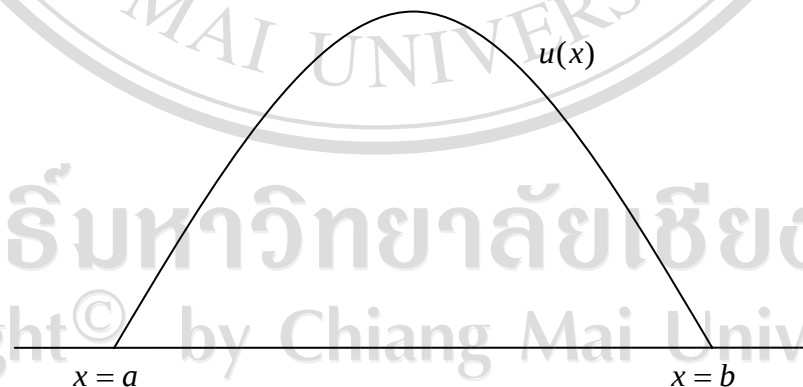
ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

วิธีการเชิงค่าเลอว์คินเป็นวิธีการแก้ปัญหาค่าขอบเขตที่มีพื้นฐานมาจากวิธีการกาเลอว์คิน (Galerkin method) ในบทนี้จะอธิบายพื้นฐานของวิธีการกาเลอว์คินและวิธีการนำฟังก์ชันพื้นฐาน (Basis function) มาใช้ในการสร้างระบบสมการเชิงเส้น นอกจากนี้จะอธิบายเกี่ยวกับวิธีการเชิงตัวเลขที่ใช้ในการหาค่าอินทิกรัล และแสดงผลการทดลองที่สนับสนุนประสิทธิภาพของวิธีการเหล่านั้น

2.1 วิธีการกาเลอว์คิน (Galerkin method)

วิธีการกาเลอว์คินเป็นวิธีที่ใช้ในการแก้ปัญหาค่าขอบเขตเชิงอนุพันธ์ ถูกนำไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาด้านวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ ยกตัวอย่างเช่น สมมติว่าต้องการแก้สมการปัวส์ซองซึ่งเป็นปัญหาค่าขอบเขต (Boundary value problem) โดยกำหนดให้สมการปัวส์ซองมีรูปแบบดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} -\nabla^2 u(x) &= f(x), \quad a < x < b \\ u(a) &= u(b) = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$



รูปที่ 2.1 ผลเฉลยแม่นยำ $u(x)$

จากที่กล่าวไปแล้วข้างต้น ผลเฉลยแม่นยำของปัญหาค่าขอบเขตส่วนใหญ่แล้วยากที่จะหาได้ด้วยวิธีการวิเคราะห์ สำหรับวิธีการกัลเลอร์กินจะสมมติว่าผลเฉลยแม่นยำของสมการปัวส์ซองสามารถแสดงอยู่ในรูป

$$u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \varphi_i(x) = c_0 \varphi_0(x) + c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \cdots \quad (2.2)$$

โดยที่ c_i คือค่าสัมประสิทธิ์ และ $\varphi_i(x)$ คือฟังก์ชันพื้นฐาน (Basis function) ซึ่งสมการ (2.2) นี้มีความหมายว่าผลเฉลยแม่นยำสามารถหาได้จากผลรวมของค่าสัมประสิทธิ์ c_i คูณกับฟังก์ชันพื้นฐาน ที่มีจำนวนอนันต์ แต่ในการคำนวณด้านคอมพิวเตอร์ เราไม่สามารถนำฟังก์ชันพื้นฐานเหล่านี้มาบวกกันจนถึงค่าอนันต์ได้ ดังนั้นจึงมีความจำเป็นต้องกำหนดจำนวนของฟังก์ชันพื้นฐานให้ชัดเจน จากเหตุผลนี้ถ้ากำหนดให้ $\hat{u}(x)$ เป็นผลเฉลยโดยประมาณของ $u(x)$ จะได้

$$\hat{u}(x) = \sum_{i=0}^{n+1} c_i \varphi_i = c_0 \varphi_0(x) + c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \cdots + c_n \varphi_n(x) + c_{n+1} \varphi_{n+1}(x) \quad (2.3)$$

จากสมการ (2.2) และ (2.3) จะเห็นว่าฟังก์ชัน $\hat{u}(x)$ เป็นเพียงผลเฉลยโดยประมาณของ $u(x)$ ดังนั้นถ้ากำหนดให้ $R(x)$ คือค่าเศษตกค้าง (Residual value) จะได้

$$R(x) = f(x) - (-\nabla^2 \hat{u}(x)) \quad (2.4)$$

จากสมการ (2.3) จะเห็นได้ว่าค่าเศษตกค้างจะไม่เท่ากับศูนย์ เนื่องจาก $\hat{u}(x)$ ไม่ใช่คำตอบที่ถูกต้องของปัญหาแต่เป็นเพียงผลเฉลยโดยประมาณเท่านั้น

วิธีการกัลเลอร์กินเป็นวิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (Weighted residual method) ประเภทหนึ่ง โดยเราจะเลือกฟังก์ชัน $v(x)$ ขึ้นมาโดยที่ $v(x)$ คือ ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก (Weight function) ที่ทำให้

$$\int_a^b R(x) v(x) dx = 0 \quad (2.5)$$

ถ้ากำหนดให้ $v(a) = v(b) = 0$ จะได้

$$\begin{aligned} \int_a^b (-\nabla^2 \hat{u}) v dx &= \int_a^b \left(-\frac{d^2 \hat{u}}{dx^2} \right) v dx \\ &= \left[\left(-\frac{d\hat{u}}{dx} \right) v \right]_a^b + \int_a^b \frac{d\hat{u}}{dx} \frac{dv}{dx} dx \\ &= \int_a^b \frac{d\hat{u}}{dx} \frac{dv}{dx} dx \end{aligned}$$

ดังนั้นจากสมการ (2.4) และ (2.5) จะได้

$$\int_a^b \frac{d\hat{u}}{dx} \frac{dv}{dx} dx = \int_a^b f(x)v dx \quad (2.6)$$

ในวิธีการกัลเลอร์กินจะกำหนดให้ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักเท่ากับฟังก์ชันพื้นฐานที่จะนำไปใช้สร้างผลเฉลยโดยประมาณ โดยที่

$$v(x) = \varphi_i(x)$$

ดังนั้นจากสมการ (2.3) ค่าทางด้านซ้ายมือของสมการ (2.6) สามารถแปลงอยู่ในรูป

$$\int_a^b \frac{d\hat{u}}{dx} \frac{dv}{dx} dx = \sum_{j=1}^n c_j \int_a^b \left(\frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_j}{dx} \right) dx, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.7)$$

ส่วนค่าทางด้านขวามือของสมการ (2.6) จะแสดงอยู่ในรูป

$$\int_a^b f(x)v dx = \int_a^b f(x)\varphi_i dx \quad (2.8)$$

ดังนั้นถ้ากำหนดให้

$$k_{ij} = \int_a^b \left(\frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_j}{dx} \right) dx, \quad g_i = \int_a^b f(x)\varphi_i dx \quad (2.9)$$

จากสมการ (2.6) จะได้ระบบสมการเชิงเส้น

$$\sum_{j=1}^n k_{ij} c_j = g_i \quad (2.10)$$

ซึ่งสามารถเขียนอยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

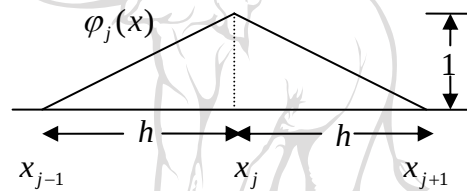
จากสมการ (2.11) ถ้าสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ $c_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ได้ก็หมายความว่าเราสามารถหาค่า $\hat{u}(x)$ ซึ่งเป็นผลเฉลยโดยประมาณของ $u(x)$ ได้นั่นเอง

วิธีการกัลเลอร์กินถูกนำไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหามากมาย ซึ่งระเบียบวิธีการต่างๆ ที่ถูกนำเสนอขึ้นจะมีพื้นฐานคล้ายกัน แต่จะแตกต่างกันอยู่ที่ฟังก์ชันพื้นฐานที่เลือก ยกตัวอย่างเช่น

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ [1] ซึ่งเป็นวิธีการที่ได้รับความนิยมมากในการแก้ปัญหาทางด้านวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ ฟังก์ชันพื้นฐาน $\varphi_j(x)$ ของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะแสดงอยู่ในรูป

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{j-1}}{h}, & x_{j-1} \leq x \leq x_j \\ \frac{x_{j+1} - x}{h}, & x_j \leq x \leq x_{j+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.12)$$

จากสมการ (2.12) จะเห็นว่าฟังก์ชันพื้นฐาน $\varphi_j(x)$ มีรูปร่างเหมือนรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีความสูงเท่ากับ 1 ดังรูปที่ 2.2 ในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมที่มี (x_{j-1}, x_{j+1}) เป็นฐานมีความสูงเท่ากับ 1 นี้เราเรียกว่าเอลิเมนต์



รูปที่ 2.2 กราฟฟังก์ชันพื้นฐาน φ_j

จากคุณสมบัติของ $\varphi_j(x)$ ถ้ากำหนดให้ $x = x_i$ จะได้

$$\varphi_j(x_i) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

ดังนั้นผลเฉลยโดยประมาณที่ตำแหน่ง x_i คือ

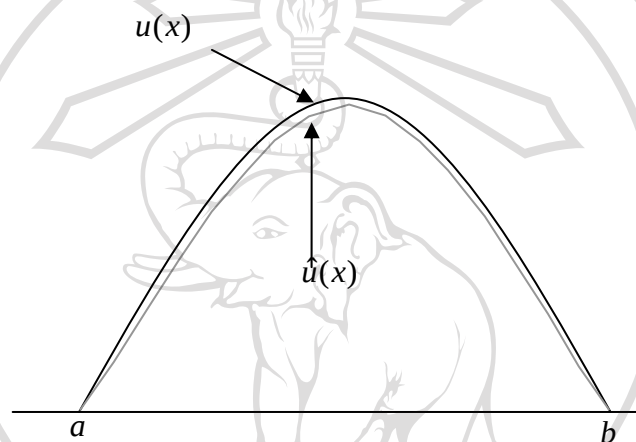
$$\begin{aligned} \hat{u}(x_i) &= \sum_{j=0}^{n+1} c_j \varphi_j(x_i) = c_0 \varphi_0(x_i) + c_1 \varphi_1(x_i) + c_2 \varphi_2(x_i) + \dots + c_i \varphi_i(x_i) + \dots + c_{n+1} \varphi_{n+1}(x_i) \\ &= c_i \varphi_i(x_i) \\ &= c_i \end{aligned}$$

สมการนี้มีความหมายว่า ถ้า $\hat{u}(x_i)$ คือผลเฉลยโดยประมาณของ $u(x)$ ที่จุด x_i ค่าสัมประสิทธิ์ c_i ก็คือผลเฉลยโดยประมาณของ $u(x)$ ที่จุด x_i นั่นเอง

ดังนั้นจากสมการ (2.9) และ (2.11) จะได้

$$\frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

สรุปคือถ้าเราสามารถแก้ระบบสมการเชิงเส้น (2.13) ได้ ค่า $c_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ที่คำนวณได้ก็คือผลเฉลยโดยประมาณของ $u(x)$ บนจุด x_i นั่นเอง ถ้านำผลเฉลยโดยประมาณไปเขียนเป็นกราฟจะได้กราฟดังรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3 ผลเฉลยโดยประมาณและผลเฉลยแม่นยำ

จากที่ได้กล่าวไปนี้เป็นตัวอย่างการสร้างระบบสมการเชิงเส้นที่ได้จากการประมาณค่า ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งเป็นหนึ่งในวิธีการกาลอ์กิน ถ้าเลือกฟังก์ชันพื้นฐาน $\varphi_i(x)$ แตกต่างจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ อัตราความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยโดยประมาณก็จะแตกต่างกันไปแล้วแต่คุณสมบัติของฟังก์ชันพื้นฐานที่ใช้ [4, 13, 14]

2.2 การอินทิกรัลด้วยวิธีการเชิงตัวเลข

จากสมการ (2.9) จะเห็นว่าการคำนวณหาผลเฉลยโดยประมาณมีความจำเป็นต้องหาค่าอินทิกรัล เพื่อสร้างระบบสมการเชิงเส้น การอินทิกรัลฟังก์ชันใดๆ โดยวิธีวิเคราะห์นั้นทำได้ยากหรือในบางครั้งอาจจะหาค่าไม่ได้เลย ดังนั้นในการหาผลเฉลยโดยประมาณของปัญหาส่วนมากจำเป็นต้องใช้วิธีการเชิงตัวเลขในการหาค่าอินทิกรัล

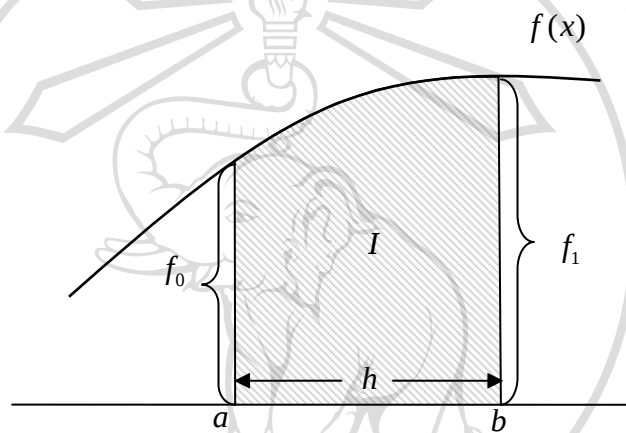
การหาค่าอินทิกรัลเชิงตัวเลขนั้น จะใช้ความหมายทางเรขาคณิตของอินทิกรัลจำกัดเขต คือการนำพื้นที่ใต้กราฟของฟังก์ชันที่เราต้องการอินทิกรัลมาประยุกต์ใช้ โดยแบ่งส่วนของพื้นที่ใต้กราฟออกเป็นส่วนย่อยๆ และทำการประมาณค่าหาพื้นที่แต่ละส่วนย่อย จากนั้นนำค่าที่ได้มา

รวมกัน ก็จะได้ค่าโดยประมาณของอินทิกรัลจำกัดเขตที่ต้องการ คำตอบที่ได้โดยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขนี้เป็นคำตอบโดยประมาณ ไม่ใช่คำตอบที่แท้จริงดังนั้นเราจึงจำเป็นที่จะต้องทราบขอบเขตค่าคลาดเคลื่อนของแต่ละวิธีได้ด้วย

ถ้ากำหนดให้ค่าอินทิกรัลแบบจำกัดเขตของฟังก์ชัน $f(x)$ ในช่วง a ถึง b คือ

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (2.14)$$

โดยที่ค่า $f(a)$ และ $f(b)$ สามารถคำนวณหาได้ดังรูป 2.4



รูปที่ 2.4 รูปสี่เหลี่ยมคางหมูใต้กราฟ I

กำหนดให้

$$P_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f_1$$

คือสมการเส้นตรงที่ลากผ่านจุด (x_0, f_0) และ (x_1, f_1) ดังรูปที่ 2.5 และถ้ากำหนดให้ $x_0 = a$ และ $x_1 = b$ จะได้

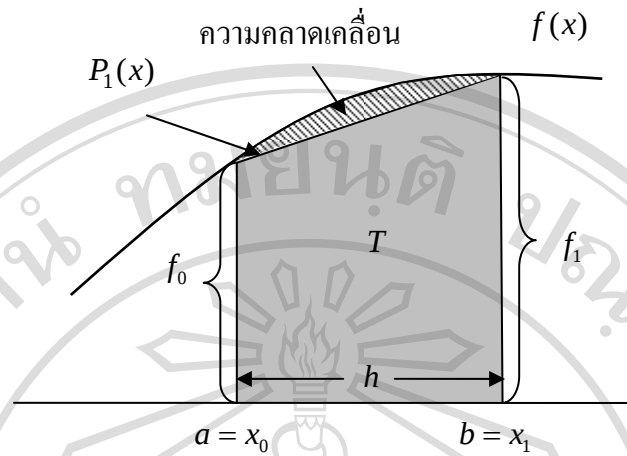
$$T = \int_{x_0}^{x_1} P(x) dx$$

$$= \frac{f_0}{x_0 - x_1} \times \frac{1}{2} [(x - x_1)^2]_{x_0}^{x_1} + \frac{f_1}{x_1 - x_0} \times \frac{1}{2} [(x - x_0)^2]_{x_0}^{x_1}$$

$$= \frac{1}{2} (x_1 - x_0) (f_0 + f_1)$$

$$= \frac{h}{2} (f_0 + f_1)$$

โดยที่ T คือพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมูดังรูปที่ 2.5 ซึ่งเป็นค่าโดยประมาณของ I

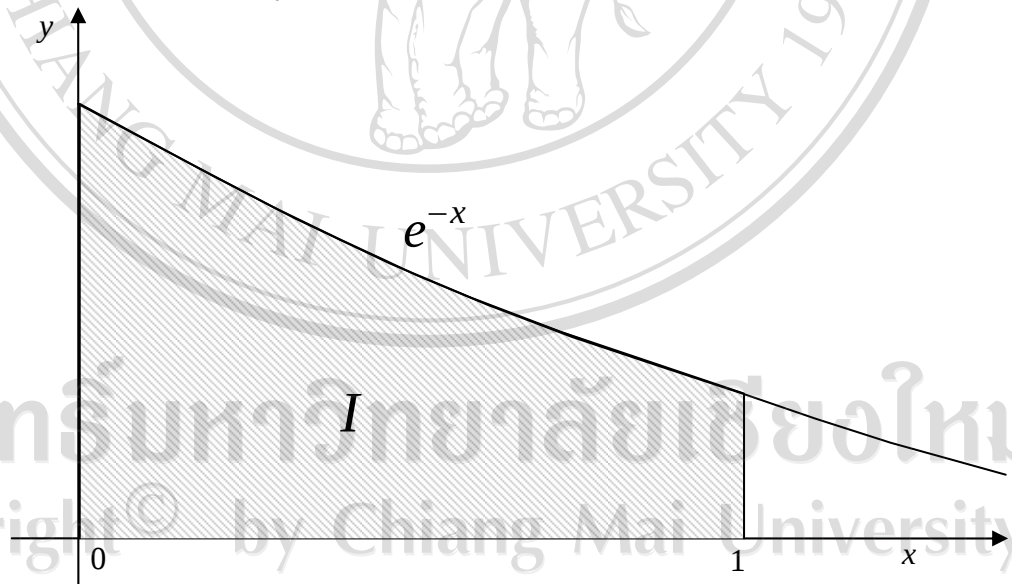


รูปที่ 2.5 รูปสี่เหลี่ยมคางหมูใต้กราฟ T

ตัวอย่างที่ 1

ค่าอินทิกรัลของฟังก์ชัน e^{-x} ในช่วง $[0,1]$ กำหนดหาให้ดังนี้

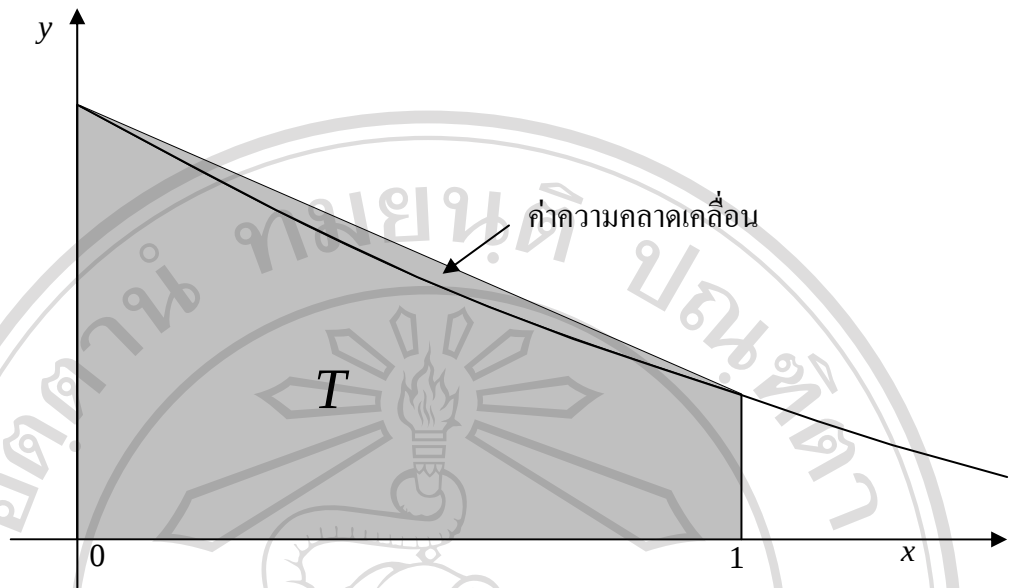
$$I = \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - e^{-1} = 0.6321205588$$



รูปที่ 2.6 พื้นที่ใต้กราฟฟังก์ชัน e^{-x}

ถ้านำกฎสี่เหลี่ยมคางหมูมาใช้ในการคำนวณค่าโดยประมาณของ I จะได้

$$\begin{aligned} T &= \frac{(e^0 + e^{-1})}{2} = \frac{(1 + 0.36788)}{2} \\ &= 0.68394 \end{aligned}$$

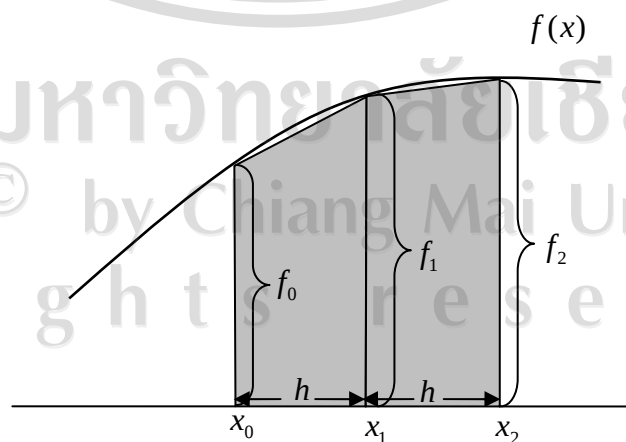


รูปที่ 2.7 ค่าอินทิกรัล T

ในตัวอย่างนี้จะเห็นว่าค่าโดยประมาณที่ได้ยังมีความคลาดเคลื่อนสูง ในกรณีนี้เราสามารถเพิ่มความแม่นยำของค่าอินทิกรัลได้โดยแบ่งช่วงของอินทิกรัลจำกัดเขต $[a, b]$ ออกเป็นช่วงย่อยๆ สมมติว่าแบ่งช่วง $[a, b]$ ออกเป็น 2 ส่วนดังรูปที่ 2.8 จะได้

$$\begin{aligned} I \approx T &= \frac{h}{2}(f_0 + f_1) + \frac{h}{2}(f_1 + f_2) \\ &= \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + f_2) \end{aligned} \quad (2.15)$$

โดยที่ $x_0 = a$, $x_1 = \frac{(a+b)}{2}$, $x_2 = b$ และ $h = \frac{b-a}{2}$

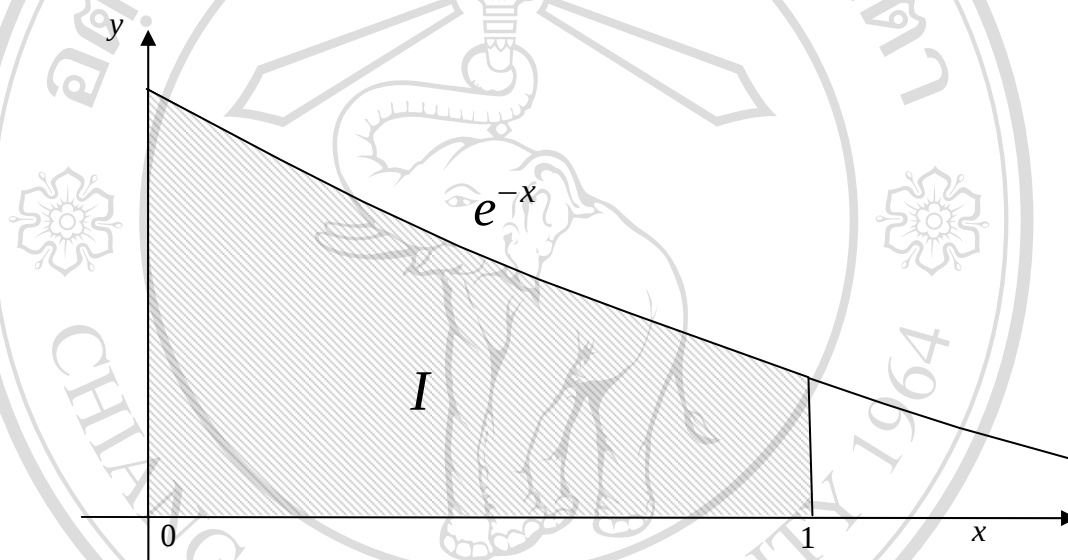


รูปที่ 2.8 การอินทิกรัลโดยแบ่งช่วงออกเป็น 2 ส่วน

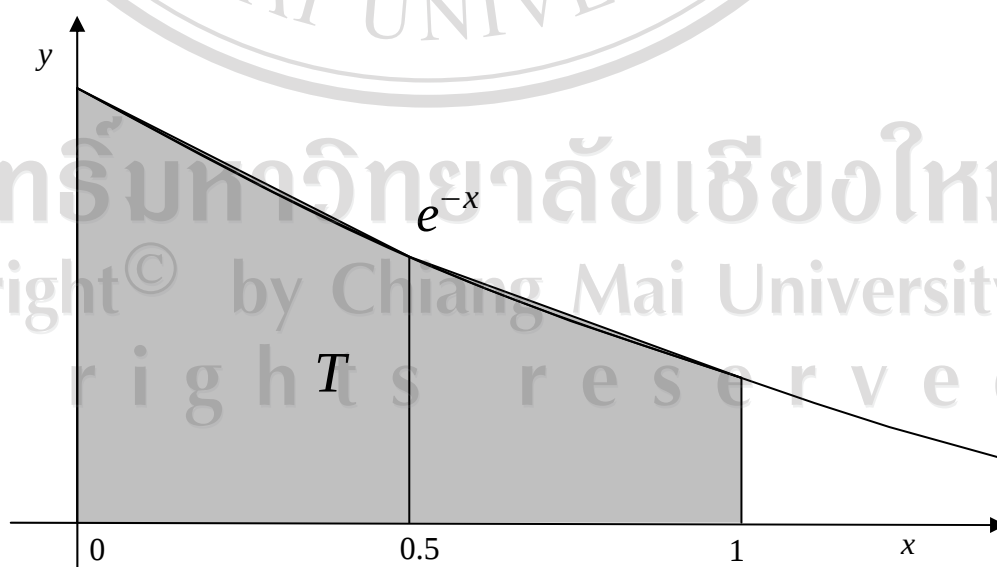
ตัวอย่างที่ 2

จากตัวอย่างที่ 1 ถ้านำสมการ (2.15) มาใช้ในการหาค่าอินทิกรัลจะได้

$$\begin{aligned} T &= \frac{0.5 \times \left(e^0 + e^{-\frac{1}{2}} + e^{-1} \right)}{2} \\ &= \frac{0.5 \times (1 + 2 \times 0.60653 + 0.36788)}{2} \\ &= 0.64524 \end{aligned}$$



รูปที่ 2.9 พื้นที่ใต้กราฟฟังก์ชัน e^{-x}



รูปที่ 2.10 ค่าอินทิกรัล T เมื่อแบ่งการคำนวณออกเป็น 2 ช่วง

จากตัวอย่างนี้จะเห็นได้ว่า ค่าโดยประมาณที่ได้จะใกล้เคียงกับคำตอบที่ถูกต้องกว่าการคำนวณในตัวอย่างที่ 1 ดังนั้นในการหาค่าอินทิกรัลด้วยกฎสี่เหลี่ยมคางหมู ถ้าต้องการเพิ่มความแม่นยำของการคำนวณ จะทำการแบ่งช่วงของการอินทิกรัล ออกเป็นช่วงย่อยๆ n ช่วงแล้วนำสูตรการประมาณค่าทุกช่วงมารวมกัน

ถ้ากำหนดให้

$$h = \frac{b-a}{n}, f_k = f(x_k), x_k = a + kh, k = 0, 1, \dots, n$$

จะได้

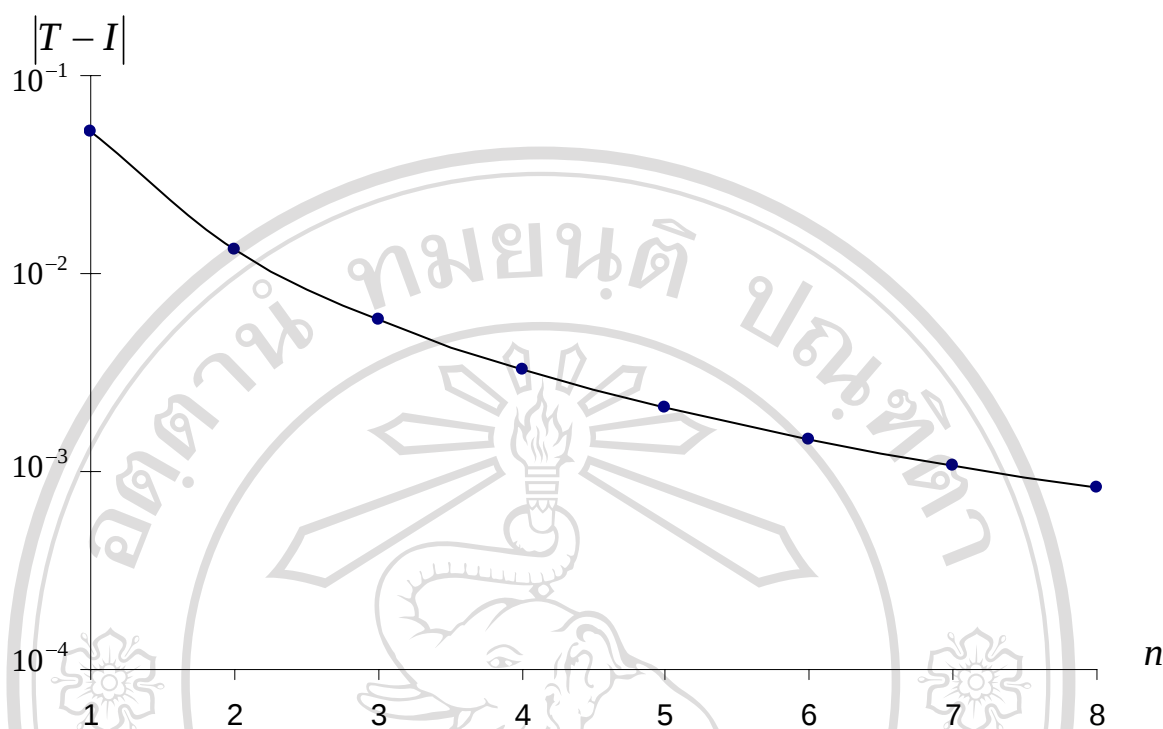
$$T = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{n-1} + f_n) \quad (2.16)$$

เมื่อเรานำสมการ (2.16) ไปคำนวณหาค่าอินทิกรัลในโจทย์ข้อเดียวกันของตัวอย่างที่ 1 จะได้ผลลัพธ์และค่าความคลาดเคลื่อนดังตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1 ผลลัพธ์และค่าความผิดพลาดจำนวนช่วง n

n	T	ค่าความคลาดเคลื่อน $ T-I $
1	0.683939720585721	5.18E-02
2	0.645235190149177	1.31E-02
3	0.637962716730701	5.84E-03
4	0.635409429027693	3.29E-03
5	0.634226223982118	2.11E-03
6	0.633583123883738	1.46E-03
7	0.633195228311987	1.07E-03
8	0.632943418210480	8.23E-04

จากตารางที่ 2.1 แสดงให้เห็นว่าเมื่อค่า n เพิ่มขึ้นค่าความคลาดเคลื่อนจะลดลงซึ่งสามารถแสดงกราฟความสัมพันธ์ได้ในรูปที่ 2.11



รูปที่ 2.11 ค่าความคลาดเคลื่อน $|T - I|$

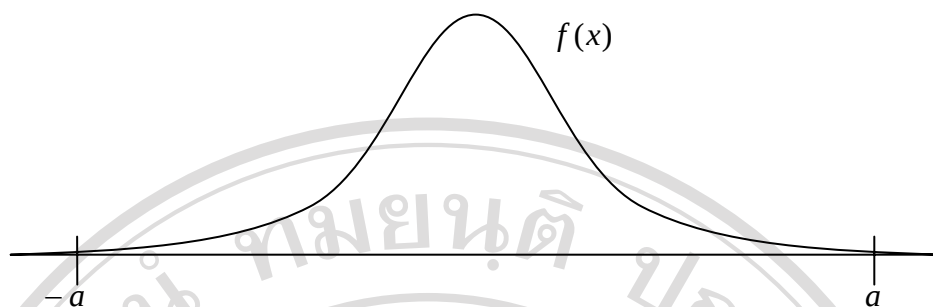
ในทางทฤษฎีค่าความคลาดเคลื่อน E ของกฎสี่เหลี่ยมคางหมูคือ

$$E = T - I \cong \frac{h^2}{12} \int_{x_0}^{x_n} f''(x) dx = \frac{h^2}{12} (f'(x_n) - f'(x_0)) \quad (2.17)$$

ซึ่งมีความหมายว่า ค่าความคลาดเคลื่อนจะผกผันตาม h^2

กฎสี่เหลี่ยมคางหมูนี้เป็นวิธีการพื้นฐานที่ง่ายต่อการคำนวณและการนำไปใช้ แต่ไม่ใช่กฎที่มีประสิทธิภาพสำหรับการหาค่าอินทิกรัลของฟังก์ชันใดๆ แต่ถึงกระนั้นกฎสี่เหลี่ยมคางหมูก็ยังมีประสิทธิภาพสูงมากทั้งในเรื่องความแม่นยำของผลเฉลยโดยประมาณและความเร็วในการคำนวณ สำหรับการหาค่าอินทิกรัลของฟังก์ชันลู่เข้าอย่างรวดเร็ว (Rapid convergence function) ในช่วง $(-\infty, \infty)$ [7, 8]

ฟังก์ชันลู่เข้าอย่างรวดเร็วคือฟังก์ชันที่มีค่าลู่เข้าหา 0 อย่างรวดเร็วเมื่อ $|x| \rightarrow \infty$ ในกรณีนี้ ถ้า a คือค่าที่เล็กมากและ $a > 0$ เราสามารถคิดได้ว่า $f(x) \cong 0$ เมื่อ $|x| > a$ ดังรูปที่ 2.12



รูปที่ 2.12 ฟังก์ชันคู่เข้าอย่างรวดเร็ว

จากเหตุผลนี้ ถ้าต้องการหาค่าอินทิกรัลของฟังก์ชันใดๆ ด้วยกฎสี่เหลี่ยมคางหมู เราสามารถคำนวณหาค่าอินทิกรัลได้อย่างแม่นยำ ถ้าสามารถแปลงฟังก์ชันนั้นให้เป็นฟังก์ชันคู่เข้าอย่างรวดเร็วได้

2.3 การแปลงฟังก์ชันให้เป็นฟังก์ชันคู่เข้าอย่างรวดเร็ว

ถ้ากำหนดให้ $x = \varphi(t)$, $a = \varphi(-\infty)$ และ $b = \varphi(\infty)$ จะได้

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt \quad (2.18)$$

โดยที่

$$g(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t) \quad (2.19)$$

สมการ (2.18) มีความหมายว่า เราสามารถหาค่าอินทิกรัลแบบจำกัดเขตของ $f(x)$ ในช่วง $[a, b]$ โดยการคำนวณหาค่าอินทิกรัลของ $g(x)$ ในช่วง $(-\infty, \infty)$ แทนได้ นอกจากนั้นยังสามารถนำกฎสี่เหลี่ยมคางหมูมาใช้ในการหาค่าอินทิกรัลได้ ถ้าฟังก์ชัน $g(t)$ เป็นฟังก์ชันคู่เข้าอย่างรวดเร็ว

ถ้ากำหนดให้ h คือขนาดของช่วง (Step size) จะได้

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt = \sum_{l=-m}^n g(lh) = h \sum_{l=-m}^n f(\varphi(lh))\varphi'(lh) \quad (2.20)$$

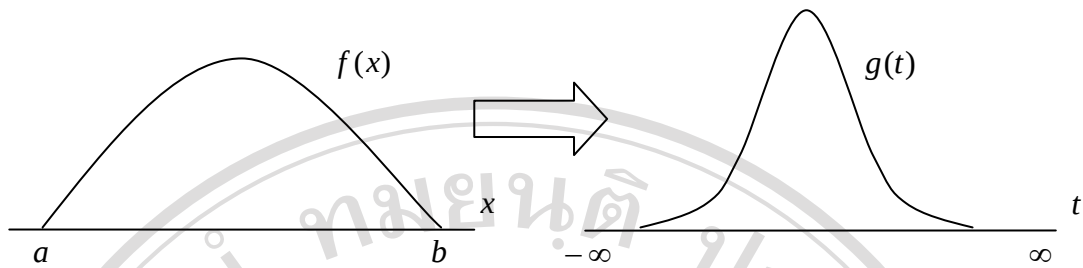
โดยที่ m และ n เป็นค่าคงที่ที่กำหนดขึ้นเพื่อให้ $g(lh)$ มีขนาดเล็กมาก เมื่อ $l \leq -m$ และ $l \geq n$

สูตรที่ใช้แปลงฟังก์ชันให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันคู่เข้าอย่างรวดเร็วแสดงได้ดังนี้

2.3.1 การหาค่าอินทิกรัลในช่วง $[a, b]$

Double Exponential

$$\varphi(t) = \frac{b-a}{2} \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh t\right) + \frac{b+a}{2}, \quad \varphi'(t) = \frac{\pi \frac{b-a}{2} \cosh t}{2 \cosh^2\left(\frac{\pi}{2} \sinh t\right)} \quad (2.21)$$

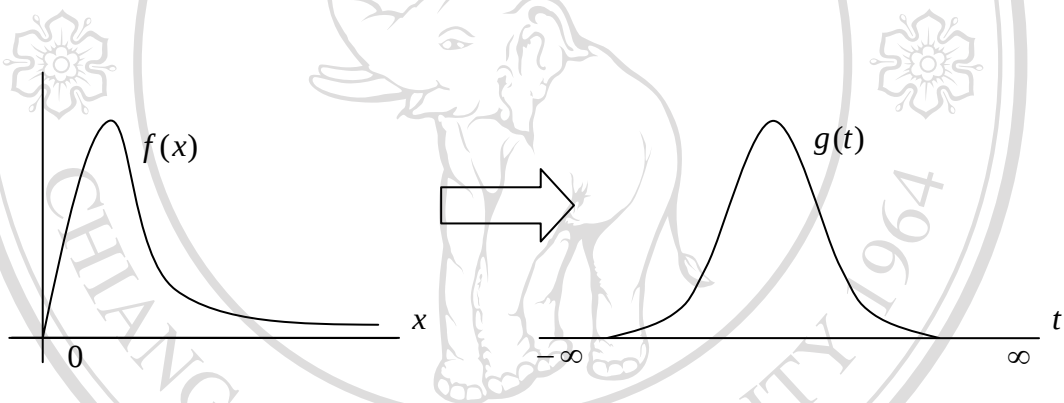


รูปที่ 13 การแปลงฟังก์ชัน $f(x)$ ในช่วง $[a, b]$ ให้อยู่ในรูปฟังก์ชันลู่ออกอย่างรวดเร็ว $g(t)$

2.3.2. การหาค่าอินทิกรัลในช่วง $[0, \infty)$

Double Exponential

$$\varphi(t) = \exp\left(\frac{\pi}{2} \sinh t\right), \quad \varphi'(t) = \frac{\pi}{2} \cosh(t) \exp\left(\frac{\pi}{2} \sinh t\right) \quad (2.22)$$

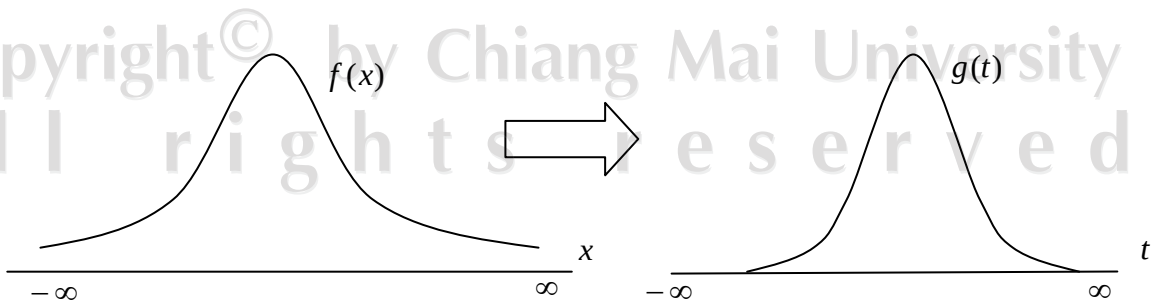


รูปที่ 14 การแปลงฟังก์ชัน $f(x)$ ในช่วง $[0, \infty)$

2.3.3. การหาค่าอินทิกรัลในช่วง $(-\infty, \infty)$

Double Exponential

$$\varphi(t) = \sinh\left(\frac{\pi}{2} \sinh t\right), \quad \varphi'(t) = \frac{\pi}{2} (\cosh t) \cosh\left(\frac{\pi}{2} \sinh t\right) \quad (2.23)$$



รูปที่ 15 การแปลงฟังก์ชัน $f(x)$ ในช่วง $(-\infty, \infty)$ ให้อยู่ในรูปฟังก์ชันลู่ออกอย่างรวดเร็ว $g(t)$

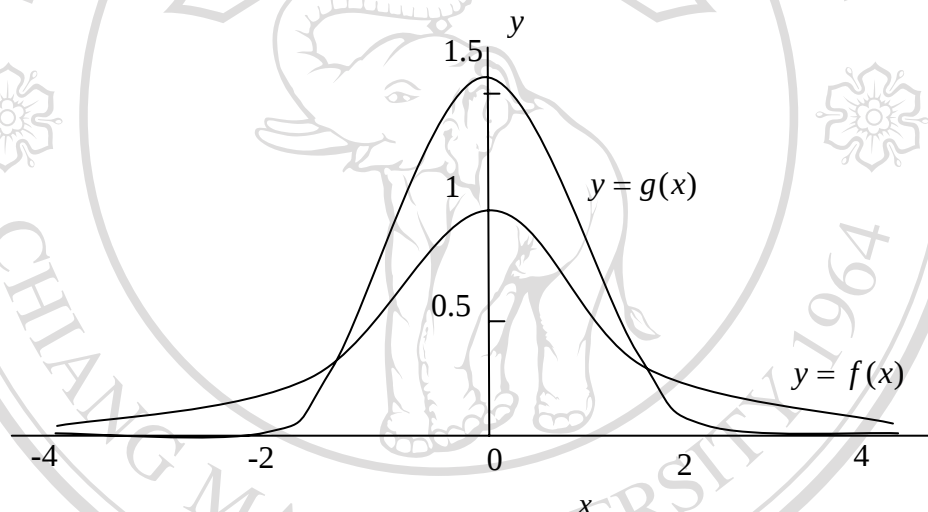
สูตรในสมการ (2.21) (2.22) และ (2.23) มีชื่อเรียกว่าสมการดับเบิลเอกโปเนนเชียล (Double exponential equation) ซึ่งสูตรที่ใช้ในการแปลงฟังก์ชันให้เป็นฟังก์ชันคู่เข้าอย่างรวดเร็ว [7, 8]

ตัวอย่างที่ 3

ค่าอินทิกรัลของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)}$ ในช่วง $(-\infty, \infty)$ คือ

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt = \pi = 3.1415926535897932384\dots$$

โดยที่ $g(t)$ เป็นฟังก์ชันที่ถูกแปลงให้เป็นฟังก์ชันคู่เข้าอย่างรวดเร็วดังรูปที่ 2.16



รูปที่ 2.16 ฟังก์ชัน $f(x)$ และฟังก์ชัน $g(x)$ ในช่วง $(-\infty, \infty)$

เมื่อนำกฎสี่เหลี่ยมคางหมูมาคำนวณหาค่าอินทิกรัลจะได้

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt \approx h \sum_{l=-m}^n f(\varphi(lh))\varphi'(lh) = T$$

ถ้าให้ $h = 0.25$ และ $m = n = 6$ จะได้

$$T = 0.25 \sum_{l=-6}^6 f(\varphi(lh))\varphi'(lh)$$

ตารางที่ 2.2 ตารางแสดงผลการหาค่าอินทิกรัลด้วยการแปลงแบบดับเบิลเอกโปเนนเชียล

m	n	T
1	1	2.50325253633212
2	2	3.12614519550573
3	3	3.14159146144611
4	4	3.14159265358979
5	5	3.14159265358979
6	6	3.14159265358979

จากตัวอย่างนี้จะเห็นว่าความแม่นยำของผลเฉลยโดยประมาณที่ใช้ดับเบิลเอกโปเนนเชียลถูกต้องถึงทศนิยม 14 หลักโดยมีจำนวนช่วงเพียง 13 ช่วงเท่านั้น

สมมติว่าถ้าไม่มีการแปลงฟังก์ชันก่อนการหาค่าอินทิกรัลจะได้ผลลัพธ์ดังตารางที่ 2.3

ตารางที่ 2.3 ตารางแสดงผลการหาค่าอินทิกรัลที่ไม่มีการแปลงฟังก์ชัน

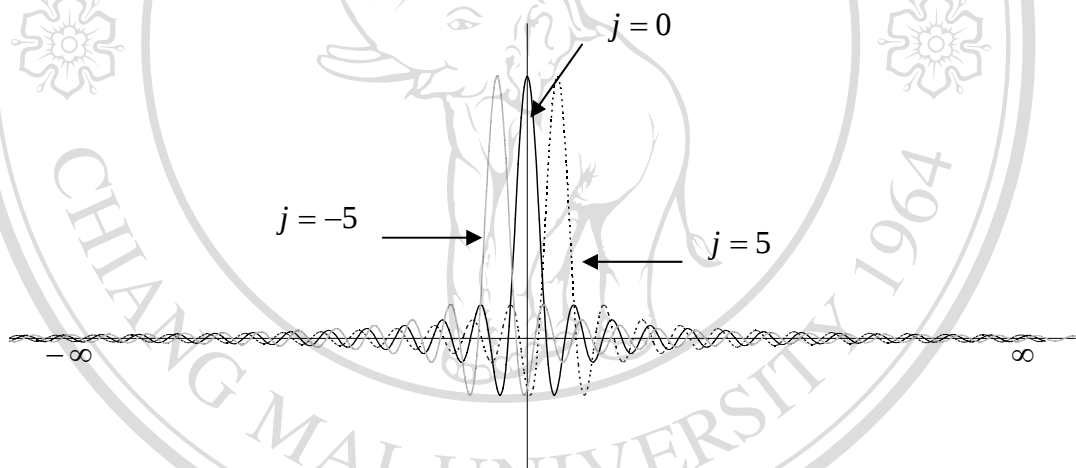
m	n	T
1	1	1.56558823529412
2	2	2.21263326343671
3	3	2.49746716806615
4	4	2.65134716346583
5	5	2.74664750954677
6	6	2.81120402046100
7	7	2.85774022511290
8	8	2.89284322418883
9	9	2.92025033027597
10	10	2.94223492832599
11	11	2.96025748396912
12	12	2.97529830029351
13	13	2.98803950041182
14	14	2.99897020912869
15	15	3.00845020811644
16	16	3.01674998715959
17	17	3.02407679715856
18	18	3.0305920930146
19	19	3.03642350993409
20	20	3.04167327110818

จากตารางที่ 2.2 และ 2.3 จะเห็นว่า การแปลงฟังก์ชันให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันคู่เข้าอย่างรวดเร็วก่อนการคำนวณจะทำให้ผลการหาค่าอินทิกรัลด้วยกฎสี่เหลี่ยมคางหมูมีความแม่นยำสูงขึ้นมากกว่าไม่แปลงฟังก์ชัน ในทางทฤษฎีการแปลงฟังก์ชันโดยใช้ดับเบิ้ลเอกโปเนนเชียลจะทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนลดลงอย่างรวดเร็วในอัตรา $O(e^{(-cN/\log N)})$ [7, 8]

ดังที่ได้กล่าวไว้แล้วในตอนต้น ในงานวิจัยนี้จะใช้ฟังก์ชันซิงค์ (Sinc function) เป็นฟังก์ชันพื้นฐานในการหาผลเฉลยโดยประมาณ โดยที่ฟังก์ชันซิงค์มีคุณสมบัติดังนี้

$$\varphi_j(x) = \text{sinc}\left(\frac{x - jh}{h}\right) = \begin{cases} 1 & , x = jh \\ \frac{\sin(x - jh)}{x - jh} & , x \neq jh \end{cases}$$

ถ้านำฟังก์ชันซิงค์มาแสดงอยู่ในรูปกราฟจะได้กราฟดังรูปที่ 2.17



รูปที่ 2.17 ฟังก์ชันซิงค์

ในกรณีที่ฟังก์ชันพื้นฐานอยู่ในช่วง $(-\infty, \infty)$ จากหลักการของวิธีการกาลีเคอร์คินซึ่งมีความจำเป็นต้องทำการหาค่าอินทิกรัลเพื่อสร้างระบบสมการเชิงเส้น ดังนั้นจึงมีความจำเป็นต้องหาค่าอินทิกรัลเชิงตัวเลขในช่วง $(-\infty, \infty)$ ซึ่งในงานวิจัยนี้จะทำการแปลงฟังก์ชันต่างๆ ด้วยสมการดับเบิ้ลเอกโปเนนเชียลและใช้กฎสี่เหลี่ยมคางหมูใช้ในการหาค่าอินทิกรัลเชิงตัวเลข