

บทที่ 3

วิธีการซิงค์กาเลอรืคินสำหรับปัญหาค่าขอบเขต 1 มิติ

วิธีการซิงค์กาเลอรืคินถูกสร้างขึ้นมาสำหรับการแก้ไขปัญหาค่าขอบเขตซึ่งในบทนี้จะแสดงวิธีการแก้ปัญหาค่าขอบเขต 1 มิติด้วยวิธีการซิงค์กาเลอรืคิน โดยจะแสดงการแก้ปัญหในช่วง $[0, \alpha]$ และ $[0, \infty)$

3.1 การแก้ปัญหในช่วง $[0, \alpha]$

กำหนดสมการปัวส์ซองในการแก้ปัญหในช่วง $[0, \alpha]$ ดังนี้

$$\begin{cases} -u_{yy}(y) = f(y), & 0 < y < \alpha \\ u(0) = u(\alpha) = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

ซึ่งให้ค่าเฉลยโดยประมาณของสมการ (3.1) แสดงอยู่ในรูป

$$u_{n_y}(y) = \sum_{j=-M_y}^{N_y} u_j v_j(y) \quad (3.2)$$

โดย $n_y = M_y + N_y + 1$ และให้ $v_j(y)$ เป็นฟังก์ชันพื้นฐาน (Basis function) ที่แสดงอยู่ในรูปของฟังก์ชันซิงค์ดังนี้

$$v_j(y) = S(j, h_y) \circ \phi_y(y) \equiv \text{sinc}\left(\frac{\phi_y(y) - jh_y}{h_y}\right) \quad (3.3)$$

โดยที่ $h_y > 0$ และ ฟังก์ชัน $\phi_y(y)$ เป็นฟังก์ชันที่ช่วยกำหนดฟังก์ชันพื้นฐานให้อยู่ในช่วง $[0, \alpha]$ ซึ่ง

$$y = \psi_y(t) = \frac{\alpha e^{\frac{\pi}{2} \sinh t}}{e^{\frac{\pi}{2} \sinh t} + e^{-\frac{\pi}{2} \sinh t}}; \quad t = \psi^{-1}(y) \equiv \phi_y(y) \quad (3.4)$$

ผลคูณภายใน (Inner product) สำหรับวิธีการซิงค์กาเลอรืคินจะกำหนดให้อยู่ในรูปแบบดังต่อไปนี้

$$(f, g) = \int_0^\alpha f(y)g(y)\phi'_y(y)^{-\frac{1}{2}} dy \quad (3.5)$$

ถ้าแทน f และ g ด้วย $-u_{yy} - f$ และ v_l ตามลำดับจะได้สมการ

$$(-u_{yy} - f, v_l) = 0, \quad -M_y \leq l \leq N_y \quad (3.6)$$

ถ้ากำหนดให้ $y_j = \phi_y^{-1}(jh_y)$ จะได้

$$[\delta_{lj}^{(2)}] \equiv h_y^2 \frac{d^2}{d\phi_y^2} [S(l, h_y) \circ \phi_y(y)] \Big|_{y=y_j} = \begin{cases} -\frac{\pi^2}{3}, & j=l \\ -\frac{2(-1)^{j-l}}{(j-l)^2}, & j \neq l \end{cases}$$

กำหนดเมทริกซ์ $I_y^{(2)}$ ซึ่งมีขนาด $n_y \times n_y$ ดังนี้

$$I_y^{(2)} = [\delta_{lj}^{(2)}], \quad -M_y \leq j, l \leq N_y$$

โดย $n_y = M_y + N_y + 1$

จากนั้นนำหลักการสร้างระบบดิสคริตด้วยฟังก์ชันซิงค์มาประยุกต์กับสมการ (3.6) จะได้ระบบดิสคริตดังต่อไปนี้

$$S_y u = D \left((\phi'_y)^{-\frac{3}{2}} \right) f \quad (3.7)$$

โดยที่

$$u = (u_{-M}, \dots, u_N)^T, \quad (3.8)$$

$$f = (f_{-M}, \dots, f_N)^T \quad (3.9)$$

$$S = \left\{ -\frac{1}{h_y^2} I_y^{(2)} + D \left(\frac{-1}{(\phi'_y)^2} \left(\frac{1}{\sqrt{\phi'_y}} \right)'' \right) \right\} D((\phi'_y)^{\frac{1}{2}}) \quad (3.10)$$

และ $D(\omega)$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมที่มีรูปแบบดังนี้

$$D(\omega) = \begin{pmatrix} \omega(y_{-M_y}) & & \\ & \ddots & \\ & & \omega(y_{N_y}) \end{pmatrix}$$

ซึ่งสมการ (3.7) ที่ได้นี้คือระบบสมการเชิงเส้นที่แสดงระบบดิสคริตของ สมการ (3.1) ดังนั้นถ้าแก้

สมการ (3.7) จะได้ผลเฉลยโดยประมาณของปัญหานี้ ดังสมการที่ (3.2)

ผลการทดลองเชิงตัวเลขในช่วง $[0, \alpha]$

สมการปัวซองที่ใช้ในการประเมินประสิทธิภาพแสดงดังนี้

$$\begin{cases} -\frac{d^2 u(x)}{dx^2} = -\frac{1}{x}, & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

โดยที่ผลเฉลยแม่นยำของปัญหานี้คือ

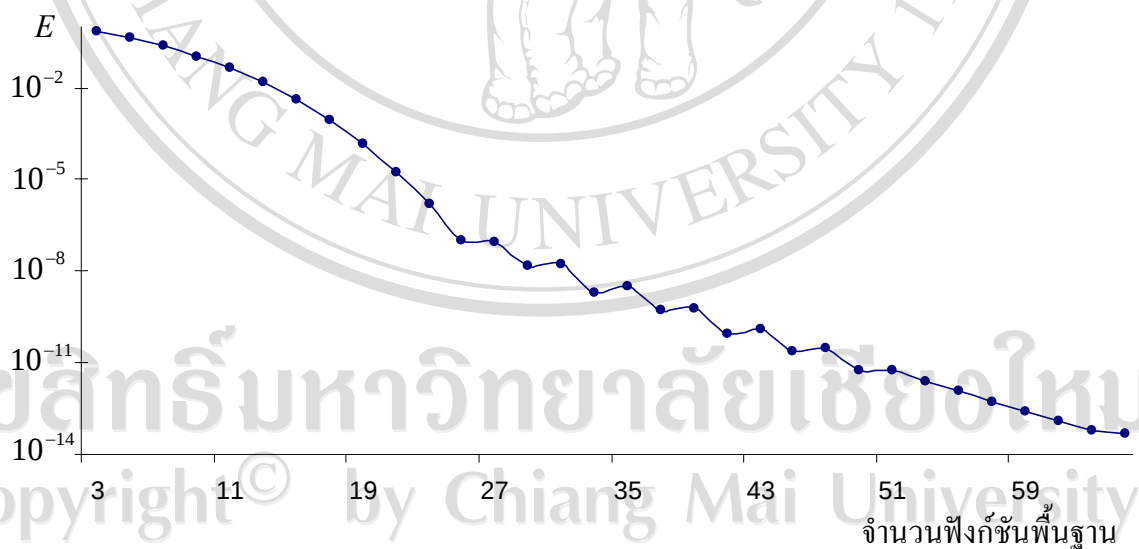
$$u(x) = x \ln x$$

โดยที่ค่าความผิดพลาดที่ใหญ่ที่สุดจะแสดงดังสมการต่อไปนี้

$$E = \max_{0 < i < 100} |u(x_i) - \hat{u}(x_i)|$$

โดยที่

$$x_i = x_{i-1} + 0.1, \quad i = 1, 2, 3, \dots, 99$$



รูปที่ 3.1 กราฟค่าความคลาดเคลื่อน E ของผลการทดลองเชิงตัวเลขในช่วง $[0, \alpha]$

3.2 การแก้ปัญหาในช่วง $[0, \infty)$

กำหนดสมการในการแก้ปัญหาวัดสองในช่วง $[0, \infty)$ ดังนี้

$$\begin{cases} -u_{xx}(x) = f(x), & 0 < x < \infty \\ u(0) = B \\ u(\infty) = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

ซึ่งให้ค่าเฉลี่ยโดยประมาณของสมการ (3.11) แสดงอยู่ในรูป

$$u_{n_x}(x) = \sum_{i=-M_x-1}^{N_x} u_i \mu_i(x) \quad (3.12)$$

โดย $n_x = M_x + N_x + 2$ และให้ $u_i(x)$ เป็นฟังก์ชันพื้นฐาน ที่แสดงอยู่ในรูป

$$\mu_i(x) = \begin{cases} (x+1)e^{-x}, & i = -M_x - 1 \\ S(i, h_x) \circ \phi_x(x) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.13)$$

ฟังก์ชัน $\mu_{-M_x-1}(x)$ ถูกเลือกให้เหมาะสมกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Condition) ที่โจทย์กำหนดให้ในกรณี $x=0$ นั่นคือ

$$\begin{cases} \mu_{-M_x-1}(0) = 1, & \mu'_{-M_x-1}(0) = 0, \\ \mu_{-M_x-1}(\infty) = 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

โดยที่ $h_x > 0$ และฟังก์ชัน $\phi_x(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ช่วยกำหนดฟังก์ชันพื้นฐานให้อยู่ในช่วง $[0, \infty)$ ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$x = \psi_x(x) = e^{s-e^{-s}} + 1; \quad s = \psi_x^{-1}(x) \equiv \phi_x(x) \quad (3.15)$$

ผลคูณภายในสำหรับซิงค์กาลอรัคินจะกำหนดให้อยู่ในรูปแบบดังต่อไปนี้

$$(f, g) = \int_0^\alpha f(x)g(x)\phi'_x(x)^{-\frac{1}{2}} dx \quad (3.16)$$

ดังนั้นระบบดิสคริตของวิธีการซิงค์กาลอรัคินจะถูกแสดงด้วยสมการ

$$\mathbf{T}_x \mathbf{u} = D \left(\phi'_x \right)^{\frac{3}{2}} \mathbf{f} \quad (3.17)$$

โดย

$$\mathbf{u} = (u_{-M_x-1}, \dots, u_{N_x})^T, \quad (3.18)$$

$$\mathbf{f} = (f_{-M_x}, \dots, f_{N_x})^T, \quad (3.19)$$

$$T_x = [s_0'' : S_x] \quad , \quad (3.20)$$

$$S_x = \left\{ -\frac{1}{h_x^2} I_x^{(2)} + D \left(\frac{-1}{(\phi'_x)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{1}{\sqrt{\phi'_x}} \right)'' \right) \right\} D((\phi'_x)^{\frac{1}{2}}) \quad (3.21)$$

และ $s_0'' = (s_{-M_x}'', \dots, s_{N_x}'')^T$ เป็นเวกเตอร์ที่มีสมาชิกในตำแหน่งที่ k เท่ากับ $-\mu_0''(x_k)/(\phi_0'(x_k))^{\frac{2}{3}}$

ผลการทดลองเชิงตัวเลขในช่วง $[0, \infty)$

สมการปัวส์ซงที่ใช้ในการประเมินประสิทธิภาพแสดงดังนี้

$$\begin{cases} -\frac{d^2 u(x)}{dx^2} = (2-x)e^{-x}, & 0 < x < \infty \\ u(0) = u(\infty) = 0 \end{cases}$$

โดยผลเฉลยของปัญหานี้คือ

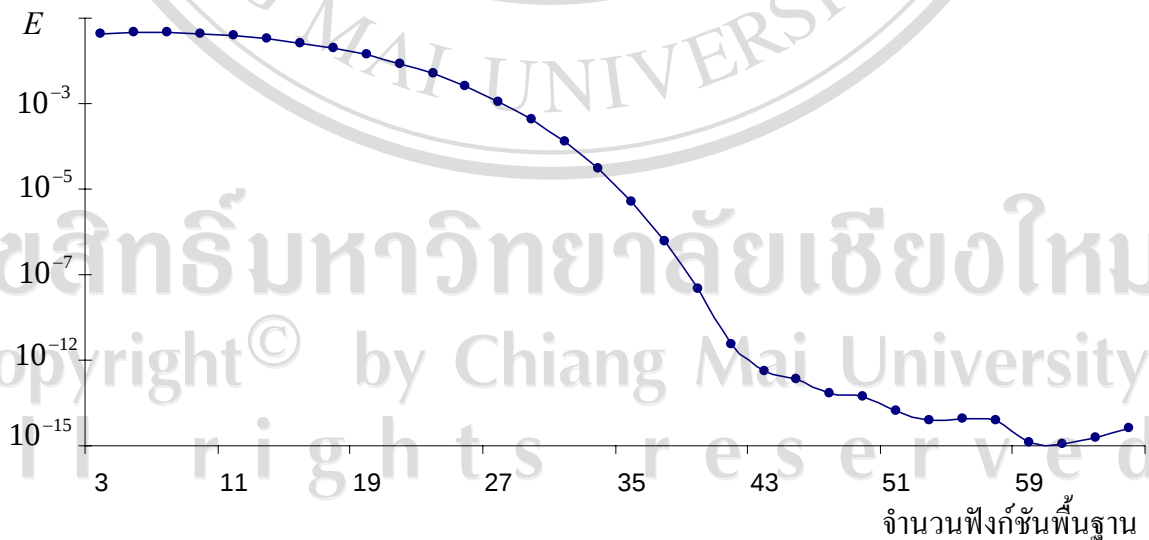
$$u(x) = xe^{-x}$$

โดยที่ค่าความผิดพลาดที่ใหญ่ที่สุดจะแสดงดังสมการต่อไปนี้

$$E = \max_{0 < i < 100} |u(x_i) - \hat{u}(x_i)|$$

โดยที่

$$x_i = x_{i-1} + 0.1, \quad i = 1, 2, 3, \dots, 99$$



รูปที่ 3.2 กราฟค่าความคลาดเคลื่อน E ของผลการทดลองเชิงตัวเลขในช่วง $[0, \infty)$