

บทที่ 4

วิธีการซิงค์กาเลอร์คินสำหรับสมการปัวส์ซองบนโดเมนรูปพัด

ในบทที่ 3 ได้แสดงวิธีการแก้ปัญหาค่าขอบเขต 1 มิติไปแล้ว บทนี้จะนำวิธีการแก้ปัญหาดังกล่าวมาประยุกต์ใช้ ในการแก้ปัญหามิติสองมิติ

4.1 การสร้างระบบดิสครีตด้วยฟังก์ชันซิงค์

จากสมการ (1.3) เพื่อให้ง่ายต่อการอธิบายสมการต่างๆ จะแทนตัวแปร η, θ และ $\hat{u}$ ด้วยตัวแปร x, y และ u ตามลำดับ

กำหนดให้ x เป็นค่าคงที่โดยที่ $x = x_k \in (0, \infty)$ การแก้สมการ (1.3) ในทิศทาง y ($0 < y < \alpha$) ก็คือการแก้สมการ

$$\begin{cases} -u_{yy}(x_k, y) = u_{xx}(x_k, y) + f(x_k, y), \\ u(x_k, 0) = u(x_k, \alpha) = 0 \end{cases}$$

เช่นเดียวกันถ้ากำหนดให้ y เป็นค่าคงที่ โดย $y = y_l \in (0, \alpha)$ การแก้สมการ (1.3) ในทิศทาง x ($0 < x < \infty$) ก็คือการแก้สมการ

$$\begin{cases} -u_{xx}(x, y_l) = u_{yy}(x, y_l) + f(x, y_l), \\ u(0, y_l) = B(y_l), \\ u(\infty, y_l) = 0 \end{cases}$$

ในการแก้สมการ (1.3) ด้วยวิธีการซิงค์กาเลอร์คิน ผลเฉลยโดยประมาณของสมการจะกำหนดอยู่ในรูป

$$\hat{u}_{n_x, n_y}(x, y) = \sum_{i=-M_x-1}^{N_x} \sum_{j=-M_y}^{N_y} u_{ij} \mu_i(x) v_j(y) \quad (4.1)$$

โดย $n_x = M_x + N_x + 2$ และ $n_y = M_y + N_y + 1$

ฟังก์ชัน $v_j(y)$ เป็นฟังก์ชันพื้นฐาน (Basis function) แสดงอยู่ในรูปของฟังก์ชันซิงค์ดังนี้

$$v_j(y) = S(j, h_y) \circ \phi_y(y) \equiv \text{sinc}\left(\frac{\phi_y(y) - jh_y}{h_y}\right) \quad (4.2)$$

โดย $h_y > 0$ ฟังก์ชัน $\phi_y(y)$ เป็นฟังก์ชันที่ช่วยปรับฟังก์ชันพื้นฐานให้อยู่ในช่วง $[0, \alpha]$ ซึ่ง

$$y = \psi_y(t) = \frac{\alpha e^{\frac{\pi}{2} \sinh t}}{e^{\frac{\pi}{2} \sinh t} + e^{-\frac{\pi}{2} \sinh t}}; \quad t = \psi_y^{-1}(y) \equiv \phi_y(y) \quad (4.3)$$

ส่วนฟังก์ชัน $\mu_i(x)$ เป็นฟังก์ชันพื้นฐานซึ่งแสดงในรูป

$$\mu_i(x) = \begin{cases} (x+1)e^{-x}, & i = -M_x - 1 \\ S(i, h_x) \circ \phi_x(x) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.4)$$

โดยที่ $h_x > 0$ ฟังก์ชัน $\phi_x(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ช่วยปรับฟังก์ชันพื้นฐานให้อยู่ในช่วง $[0, \infty)$ ซึ่ง

$$x = \psi_x(s) = e^{s-e^{-s}}; \quad s = \psi_x^{-1}(x) \equiv \phi_x(x) \quad (4.5)$$

กำหนดให้ x เป็นค่าคงที่โดย $x = x_k = \phi_x^{-1}(kh_x)$ และ $-M_x \leq k \leq N_x$

ดังนั้นในการแก้สมการ (4.1) ขั้นตอนแรกก็คือ แก้สมการในแนวแกน y นั่นเอง สมการที่ต้องแก้คือ

$$\begin{cases} -u_{yy}(x_k, y) = f(x_k, y) + u_{xx}(x_k, y), & 0 < y < \alpha \\ u(x_k, 0) = u(x_k, \alpha) = 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

จากสมการ (4.1) ผลเฉลยโดยประมาณของปัญหาในสมการ (4.6) จะอยู่ในรูป

$$\begin{aligned} u_{n_x, n_y}(x_k, y) &= \sum_{i=-M_x-1}^{N_x} \sum_{j=-M_y}^{N_y} u_{ij} \mu_i(x_k) v_j(y) \\ &= \sum_{j=-M_y}^{N_y} (u_{kj} + u_{-M_x-1, j} \mu_{-M_x-1}(x_k)) v_j(y) \\ &= \sum_{j=-M_y}^{N_y} c_{kj} v_j(y) \end{aligned} \quad (4.7)$$

โดย

$$c_{kj} = u_{kj} + u_{-M_x-1, j} \mu_{-M_x-1}(x_k) \quad (4.8)$$

จากสมการ (4.6) และ (4.7) นำวิธีการสร้างระบบดิสครีตด้วยวิธีการซิงค์กาเลอรีนในช่วง $[0, \alpha]$ มาประยุกต์ใช้จะได้

$$\mathbf{S}_y \mathbf{c}_k = D \left((\phi_x)^{-\frac{3}{2}} \right) (\mathbf{f}_k + \mathbf{u}_{xx_k}) \quad (4.9)$$

โดย $\mathbf{S}_y$ เป็นเมทริกซ์ ที่ได้จากระบวนการสร้างระบบดิสครีตด้วยวิธีการซิงค์กาเลอรีน [5]

$$\mathbf{c}_k = (c_{k, -M_y}, \dots, c_{k, N_y})^T,$$

$$f_k = (f(x_k, y_{-M_y}), \dots, f(x_k, y_{N_y}))^T,$$

$$u_{xx_k} = (u_{xx}(x_k, y_{-M_y}), \dots, u_{xx}(x_k, y_{N_y}))^T$$

และ $D(\omega)$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมที่มีรูปแบบดังนี้

$$D(\omega) = \begin{pmatrix} \omega(y_{-M_y}) & & \\ & \ddots & \\ & & \omega(y_{N_y}) \end{pmatrix}$$

สมการ (4.9) เป็นระบบดิสครีตที่ได้จากการกำหนดค่า x_k ให้เป็นค่าคงที่แต่ถ้าให้ k มีการเปลี่ยนแปลงโดย $-M_x \leq k \leq N_x$ จะได้

$$CS_y^T D \left((\phi'_x)^{\frac{3}{2}} \right) = (F + U_{xx}) \quad (4.10)$$

โดย

$$C = \{c_{kj}\}_{-M_x \leq k \leq N_x, -M_y \leq j \leq N_y},$$

$$F = \{f(x_k, y_j)\}_{-M_x \leq k \leq N_x, -M_y \leq j \leq N_y}$$

$$U_{xx} = \{u_{xx}(x_k, y_j)\}_{-M_x \leq k \leq N_x, -M_y \leq j \leq N_y}$$

ซึ่งเมทริกซ์ทั้ง 3 มีขนาด $n_x \times n_y$ ถ้ากำหนดให้

$$s_o = (\mu_0(x_{-M_x}), \dots, \mu_0(x_{N_x}))^T$$

$$u_0 = (u_{-M_x-1, -M_y}, \dots, u_{-M_x-1, N_y})^T$$

จากสมการ (4.8) จะได้

$$C = s_o u_0^T + U \quad (4.11)$$

โดย $U = \{u_{kj}\}_{-M_x \leq k \leq N_x, -M_y \leq j \leq N_y}$

ดังนั้นถ้าแทนค่า C ไปในสมการ (4.10) จะได้

$$US_y^T D \left((\phi'_x)^{\frac{3}{2}} \right) = F + U_{xx} - s_o u_0^T S_y^T D \left((\phi'_x)^{\frac{3}{2}} \right) \quad (4.12)$$

ซึ่งสมการ (4.12) นี้คือสมการที่แสดงระบบดิสครีตของปัญหาในสมการ (4.6)

ในแนวแกน x ก็ทำเช่นเดียวกันคือกำหนดให้ y เป็นค่าคงที่โดย $y = y_l = \phi_y^{-l}(lh_y)$

และ $-M_y \leq l \leq N_y$ และแก้สมการต่อไปในแนวแกน x

$$\begin{cases} -u_{xx}(x, y_l) = f(x, y_l) + u_{yy}(x, y_l), & 0 < x < \infty \\ u(0, y_l) = B(y_l) \\ u(\infty, y_l) = 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

ดำเนินการขั้นตอนเดียวกับการแก้สมการในแนวแกน x จะได้ระบบดิสครีตดังต่อไปนี้

$$D\left((\phi'_x)^{\frac{3}{2}}\right) \mathbf{S}_x \mathbf{U} = \mathbf{F} + \mathbf{U}_{yy} - D\left((\phi'_x)^{\frac{3}{2}}\right) \mathbf{s}_0'' \mathbf{u}_0^T \quad (4.14)$$

โดยที่ $\mathbf{S}_x$ เป็นเมทริกซ์ ที่หาได้จากกระบวนการสร้างระบบดิสครีตด้วยวิธีการซิงค์กาเลอรืกัน [5] และ

$$\mathbf{s}_0'' = (s_{-M_x}'', \dots, s_{N_x}'')^T$$

โดย

$$s_k'' = -\mu_0''(x_k) / (\phi_0(x_k))^{\frac{3}{2}}, -M_x \leq k \leq N_x$$

สุดท้ายนำสมการ (4.12) และ (4.14) มารวมกันตามหลักการการแก้ปัญหาค่าขอบเขตระหว่างจุด 2 จุดในระนาบ 2 มิติ จะได้

$$D\left((\phi'_x)^{\frac{3}{2}}\right) \mathbf{S}_x \mathbf{U} + \mathbf{U} \mathbf{S}_y^T D\left((\phi'_x)^{\frac{3}{2}}\right) = \hat{\mathbf{F}} \quad (4.15)$$

โดย

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F} - D\left((\phi'_x)^{\frac{3}{2}}\right) \mathbf{s}_0'' \mathbf{u}_0^T - \mathbf{s}_0 \mathbf{u}_0^T \mathbf{S}^T D\left((\phi'_x)^{\frac{3}{2}}\right)$$

ถ้ากำหนดให้

$$\mathbf{V} = D\left((\phi'_x)^{-\frac{1}{2}}\right) \mathbf{U} D\left((\phi'_y)^{-\frac{1}{2}}\right) \quad (4.16)$$

จากสมการ (4.13) จะได้

$$\mathbf{A}_x \mathbf{V} + \mathbf{V} \mathbf{A}_y = \mathbf{G} \quad (4.17)$$

โดย

$$\mathbf{A}_x = D(\phi'_x) \mathbf{S}_x D\left(\phi_x^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$A_y = D(\phi'_y) S_y D(\phi'^{\frac{1}{2}}_y)$$

$$G = D(\phi'^{\frac{1}{2}}_x) \hat{F} D(\phi'^{\frac{1}{2}}_y)$$

สมการ (4.17) ที่ได้นี้ก็คือสมการเชิงเส้นที่แสดงระบบดิสครีตของสมการ (4.1)

4.2 อัลกอริทึมที่ใช้ในการแก้สมการเชิงเส้น

จากสมการที่ (4.17) จะพบว่าทั้งเมทริกซ์ A_x และ A_y จะเป็นเมทริกซ์สมมาตร (Symmetric matrix) ซึ่งง่ายต่อการหาค่าเฉพาะ [10]

ขั้นตอนแรกสำหรับการแก้สมการเชิงเส้น (4.17) คือจะทำการแก้ปัญหาค่าเฉพาะ

$$A_x \mathbf{x}^{(i)} = \lambda_x^{(i)} \mathbf{x}^{(i)} \quad (4.18)$$

และ

$$A_y \mathbf{y}^{(j)} = \lambda_y^{(j)} \mathbf{y}^{(j)} \quad (4.19)$$

โดย $\{\lambda_x^{(i)}\}_{1 \leq i \leq n_x}$ และ $\{\lambda_y^{(j)}\}_{1 \leq j \leq n_y}$ เป็นค่าเฉพาะ ของ A_x และ A_y ตามลำดับ เวกเตอร์ $\mathbf{x}^{(i)}$ และ $\mathbf{y}^{(j)}$ คือเวกเตอร์เฉพาะ ของ A_x และ A_y ตามลำดับ

ดังนั้นจากสมการ (4.18) และ (4.19) ถ้ากำหนดให้ X และ Y เป็นเมทริกซ์ที่มีเวกเตอร์เฉพาะของ A_x และ A_y เป็นสมาชิกตามลำดับ จะได้

$$A_x = X \Lambda_x X^T \quad (4.20)$$

และ

$$A_y = Y \Lambda_y Y^T \quad (4.21)$$

โดย

$$A_x = \begin{pmatrix} \lambda_x^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_x^{(n_x)} \end{pmatrix}$$

และ

$$A_y = \begin{pmatrix} \lambda_y^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_y^{(n_y)} \end{pmatrix}$$

จากสมการ (4.17) ถ้ากำหนดให้ $W = X^T V Y$ และ $R = X^T G Y$ จะได้

$$A_x W + W A_y = R \quad (4.22)$$

ซึ่ง

$$w_{ij} = \frac{r_{ij}}{\lambda_x^{(i)} + \lambda_y^{(j)}} \quad (4.23)$$

โดย w_{ij} และ r_{ij} คือ ค่าในตำแหน่ง (i, j) ของเมทริกซ์ W และ R ตามลำดับ

สรุปคือการแก้สมการ (4.17) เพื่อหาค่าของเมทริกซ์ V นั้นจะมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. แก้ปัญหาค่าเฉพาะ (4.18) และ (4.19) เพื่อหาค่าเฉพาะและเวกเตอร์เฉพาะ ในที่นี้จะใช้วิธีการคิวอาร์ (QR method) ในการคำนวณ [10]
2. คำนวณหาค่าของเมทริกซ์ R โดย $R = X^T G Y$
3. คำนวณหาค่าของเมทริกซ์ W จากสมการ (4.26)
4. คำนวณหาค่าของเมทริกซ์ V โดย $V = X W Y^T$

จากสมการ (4.16) เมื่อทราบค่าของเมทริกซ์ V แล้ว เราสามารถคำนวณหาค่าของเมทริกซ์ U ได้จากสมการ

$$U = D \left((\phi'_x)^{\frac{1}{2}} \right) V D \left((\phi'_y)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (4.24)$$

นอกจากนั้นความซับซ้อนในการคำนวณสามารถสรุปได้ดังนี้ ในการแก้ปัญหาค่าเฉพาะในสมการ (4.18) และ (4.19) จะใช้การคำนวณ $O(n_x^3)$ และ $O(n_y^3)$ ตามลำดับ [10] ในขั้นตอนที่ 2 และ 4 จะใช้การคำนวณ $O(n_x n_y^2 + n_x^2 n_y)$ ส่วนขั้นตอนที่ 3 จะใช้ $O(n_x n_y)$ ขั้นตอนสุดท้ายที่ใช้ในการหาค่าสัมประสิทธิ์ u_{ij} จากสมการ (4.24) จะใช้การคำนวณ $O(n_x n_y)$ สรุปก็คือการคำนวณทั้งหมดที่ใช้ในการหาผลเฉลยโดยประมาณของสมการ (4.1) ซึ่งก็คือการคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ u_{ij} นั้นจะมีค่าเท่ากับ $O(n_x^3 + n_y^3 + n_x^2 n_y + n_x n_y^2)$ ถ้ากำหนดให้ $n_x = n_y = n$ การคำนวณที่ใช้คือ $O(n^3)$