

บทที่ 5

ผลการทดลองเชิงตัวเลข (Numerical Experiments)

ในบทนี้จะนำวิธีการซิงค์ก้าเลอร์คินที่อธิบายไปแล้วในบทที่ 3 และ 4 มาประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหасวมการปัวส์ซองบนโดเมนรูปพัด

5.1 การแก้ปัญหด้วยวิธีการซิงค์ก้าเลอร์คินบนโดเมนรูปพัด

ในการทดลองเชิงตัวเลขจะแก้ปัญหบนโดเมนรูปพัดซึ่งมีมุมภายใน α และรัศมี $r_0 = 1$ โดยที่สมการปัวส์ซองคือ

$$\begin{cases} -\nabla_{r\theta}^2 u(r, \theta) = 1, & (r, \theta) \in \Omega, \\ u(r_0, \theta) = B(\theta), & 0 < \theta < \alpha, \\ u(r, 0) = u(r, \alpha) = 0, & 0 < r < r_0 \end{cases}$$

โดย

$$B(\theta) = -\frac{1}{4} + \frac{\cos 2\theta}{4} + \frac{1 - \cos 2\alpha}{4 \sin 2\alpha} \sin 2\theta + \sin \frac{\pi\theta}{\alpha} + \sin \frac{2\pi\theta}{\alpha}$$

ผลเฉลยของปัญหานี้คือ

$$u(r, \theta) = -r^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{\cos 2\theta}{4} - \frac{1 - \cos 2\alpha}{4 \sin 2\alpha} \sin 2\theta \right) + r^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin \frac{\pi\theta}{\alpha} + r^{\frac{2\pi}{\alpha}} \sin \frac{2\pi\theta}{\alpha}$$

นอกจากนั้นตำแหน่งของผลเฉลยโดยประมาณที่ต้องการตรวจสอบความแม่นยำจะเป็นค่าบนจุดต่อไปนี้

$$U_p = \left\{ (0.9^k, \frac{j\alpha}{(n_p+1)}) : 1 \leq k \leq m_p, 1 \leq j \leq n_p \right\}$$

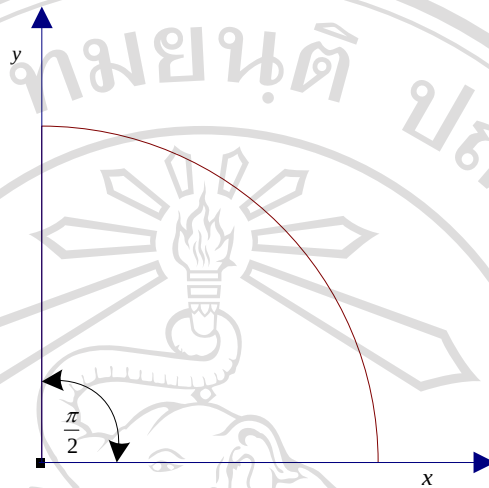
โดย m_p และ n_p คือจำนวนของจุดตัวอย่างที่ใช้ในทิศทาง r และทิศทาง θ ตามลำดับ ส่วนจำนวนของฟังก์ชันพื้นฐานที่ใช้ในการทดลองนี้กำหนดให้ $M_x = M_y = N_x = N_y = N$

ถ้ากำหนดให้ $\hat{u}(r, \theta)$ เป็นผลเฉลยโดยประมาณของปัญหานี้ ค่าความผิดพลาดที่ใหญ่ที่สุดจะแสดงได้ดังสมการต่อไปนี้

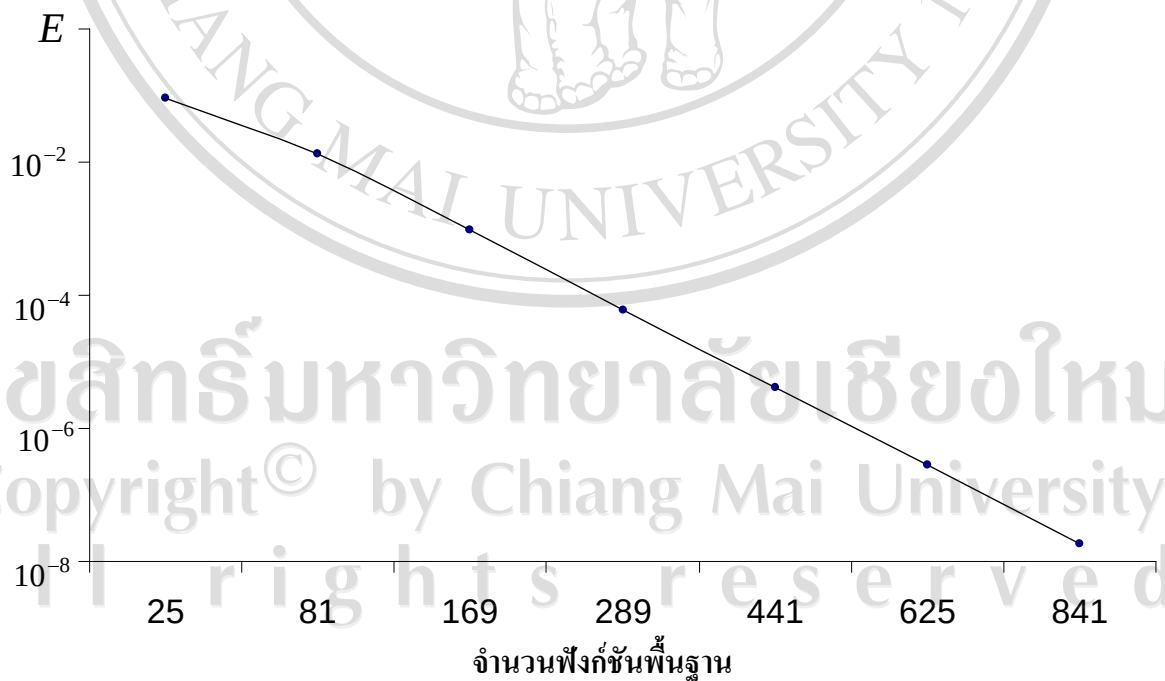
$$E = \max_{(r, \theta) \in U_p} |u(r, \theta) - \hat{u}(r, \theta)|$$

กรณีที่ $\alpha = \frac{\pi}{2}$

ถ้ามุมภายในรูปพัด $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ดังรูปที่ 5.1 จะได้ค่าความคลาดเคลื่อน E ดังรูปที่ 5.2



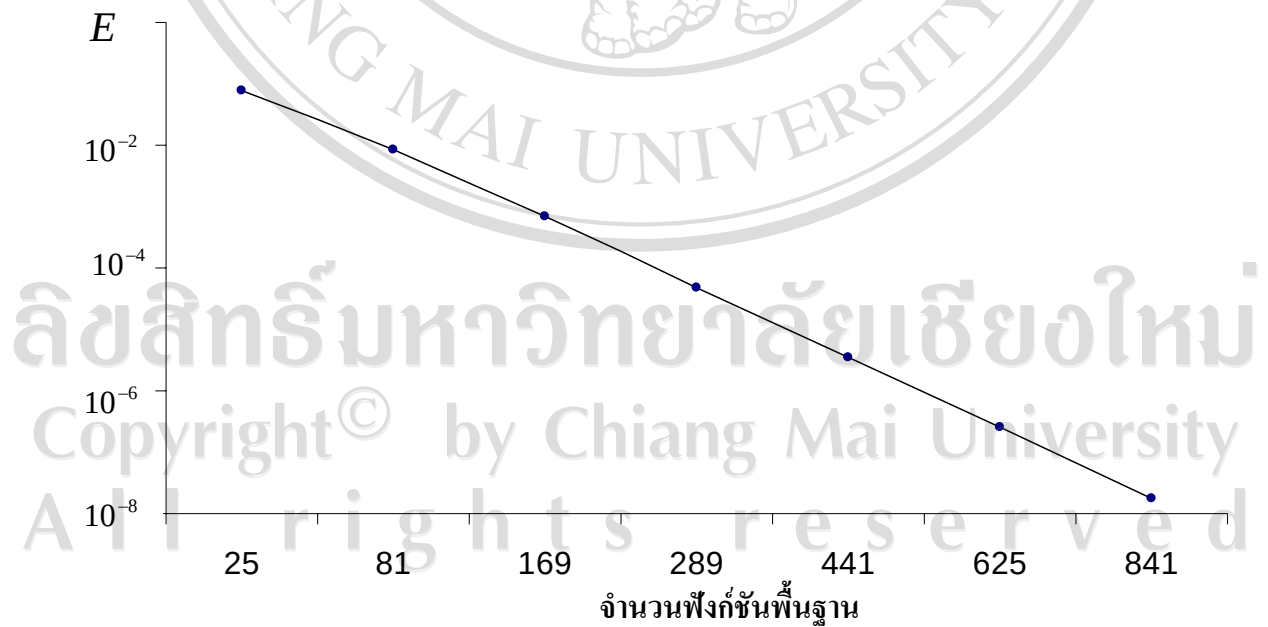
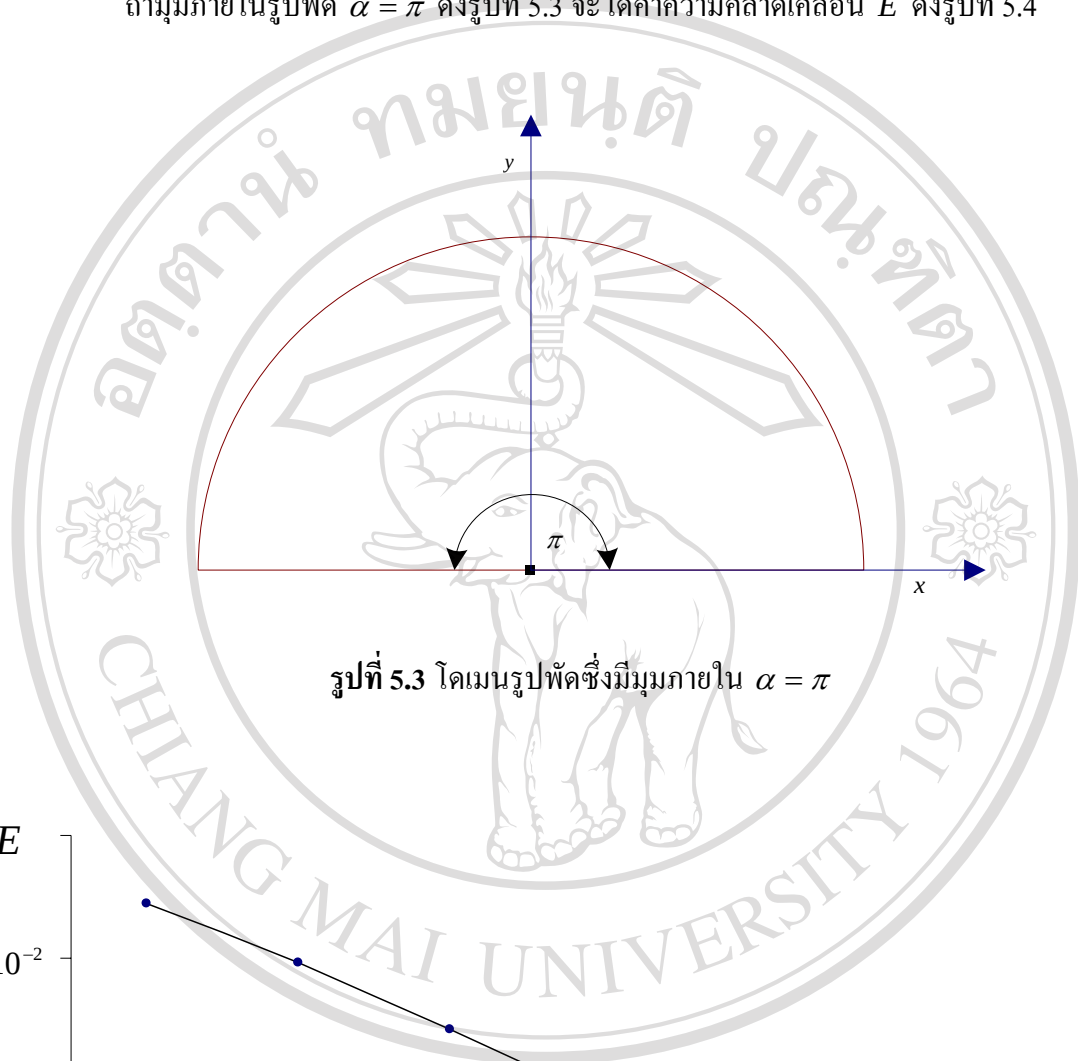
รูปที่ 5.1 โดเมนรูปพัดซึ่งมีมุมภายใน $\alpha = \frac{\pi}{2}$



รูปที่ 5.2 ค่าความคลาดเคลื่อน E เมื่อ $\alpha = \frac{\pi}{2}$

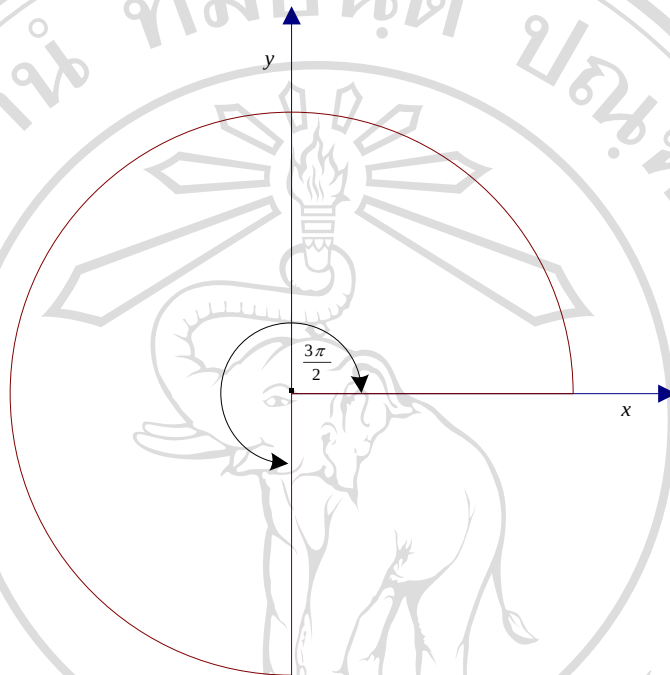
กรณีที่ $\alpha = \pi$

ถ้ามุมภายในรูปพัด $\alpha = \pi$ ดังรูปที่ 5.3 จะได้ค่าความคลาดเคลื่อน E ดังรูปที่ 5.4

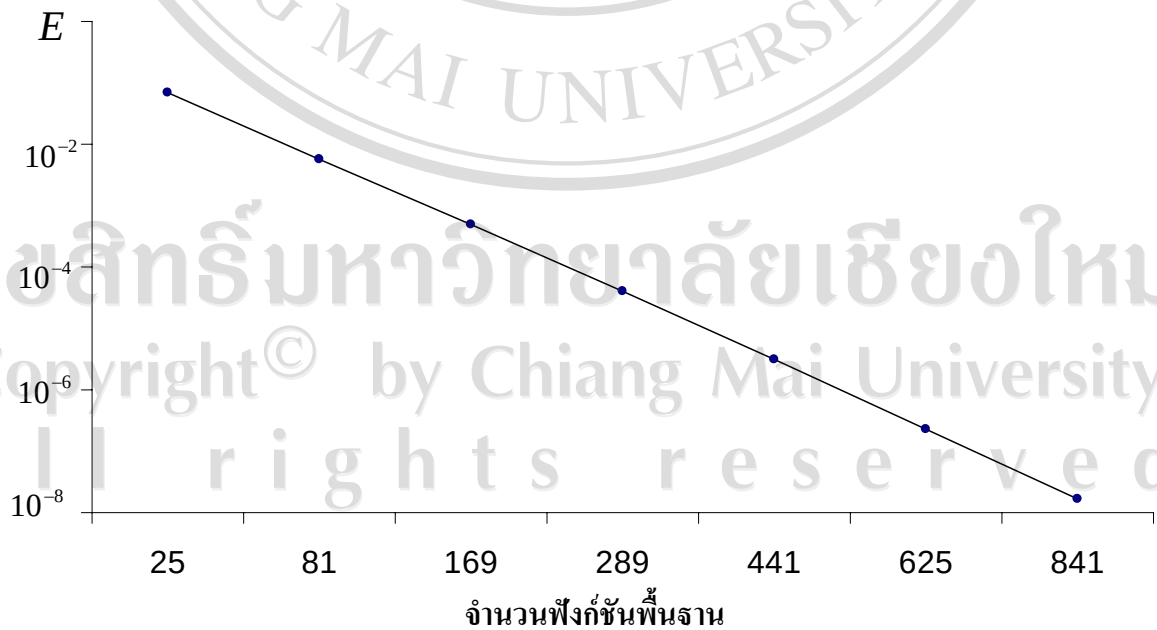


กรณีที่ $\alpha = \frac{3\pi}{2}$

ถ้ามุมภายในรูปพัด $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ ดังรูปที่ 5.5 ค่าความคลาดเคลื่อนแสดงได้ดังรูปที่ 5.6



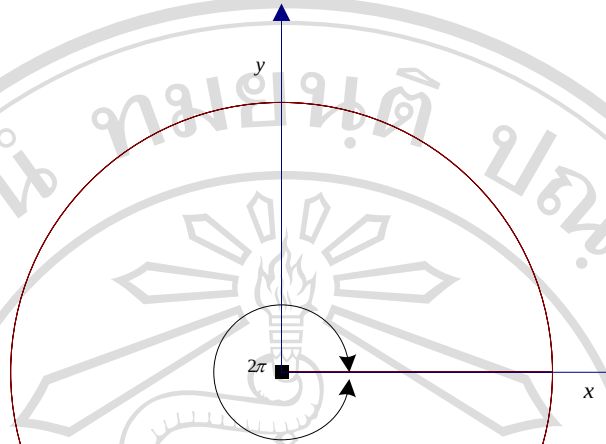
รูปที่ 5.5 โดเมนรูปพัดซึ่งมีมุมภายใน $\alpha = \frac{3\pi}{2}$



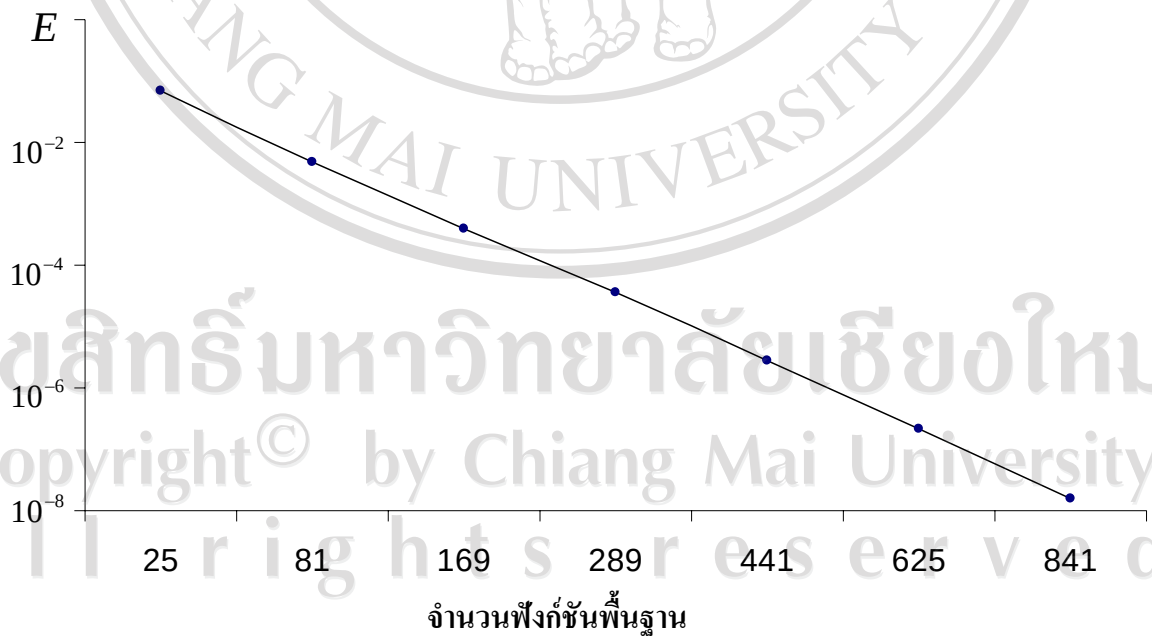
รูปที่ 5.6 ค่าความคลาดเคลื่อน E เมื่อ $\alpha = \frac{3\pi}{2}$

กรณีที่ $\alpha = 2\pi$

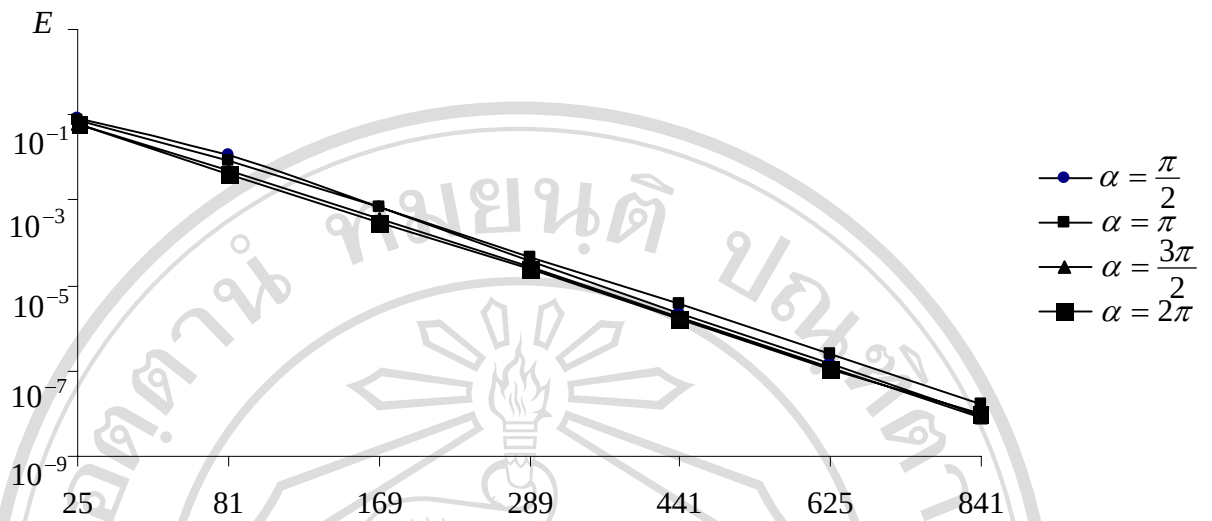
ถ้ามุมภายในรูปพัด $\alpha = 2\pi$ ดังรูปที่ 5.7 ค่าความคลาดเคลื่อนแสดงได้ดังรูปที่ 5.8



รูปที่ 5.7 โดเมนรูปพัดซึ่งมีมุมภายใน $\alpha = 2\pi$

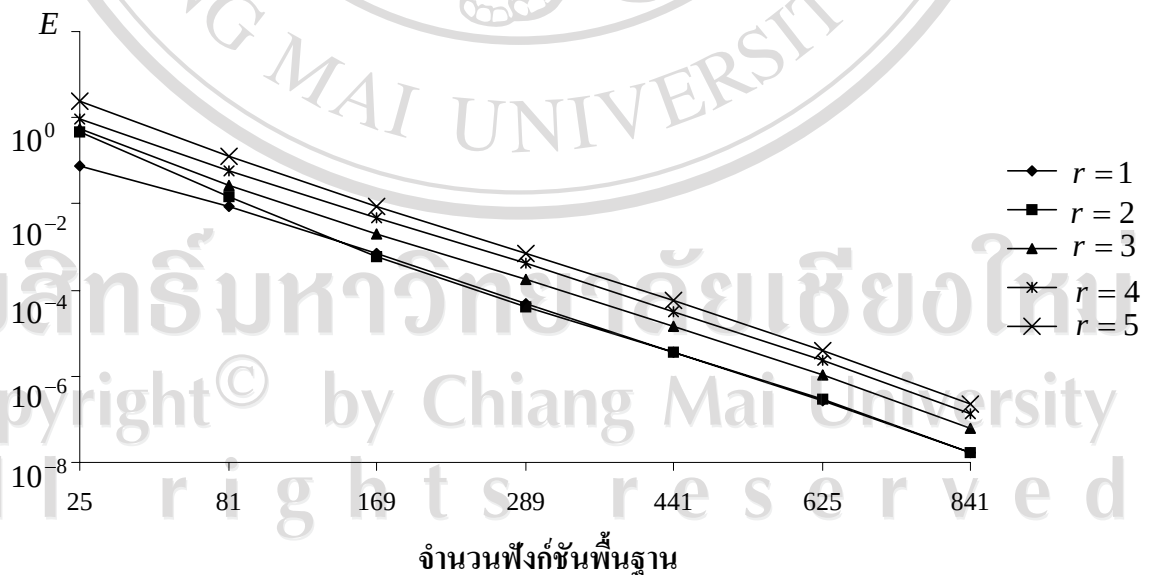


รูปที่ 5.8 ค่าความคลาดเคลื่อน E เมื่อ $\alpha = 2\pi$



รูปที่ 5.9 กราฟเปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อน E เมื่อ $\alpha = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ ตามลำดับ

จากรูปที่ 5.9 แสดงให้เห็นค่าความคลาดเคลื่อน E ที่คำนวณจากวิธีการซิงค์กาเลอรีคินบนโดเมนรูปพัดซึ่งมีมุมภายใน $\alpha = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ ตามลำดับ ซึ่งแสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของวิธีการซิงค์กาเลอรีคินที่ให้ค่าความแม่นยำในทุกๆ ช่วงมุมภายในของโดเมนรูปพัด



รูปที่ 5.10 กราฟเปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อน E เมื่อ $\alpha = \pi$ และ $r = 1, 2, 3, 4, 5$ ตามลำดับ

จากรูปที่ 5.10 แสดงให้เห็นการเปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อน E ที่คำนวณด้วยวิธีการซิงค์กาเลอรีกับบนโดเมนรูปพดซึ่งมีมุมภายใน $\alpha = \pi$ และมีค่ารัศมี $r = 1, 2, 3, 4, 5$ แสดงให้เห็นว่าเมื่อค่ารัศมีเพิ่มขึ้นค่าความคลาดเคลื่อน E จะมีค่าเพิ่มขึ้น แต่ถึงกระนั้นค่าความคลาดเคลื่อนที่ได้ก็ยังคงมีอัตราลดลงแบบฟังก์ชันเอกโปเนนเชียลในทุกๆ ค่ารัศมี r



ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved