บทที่ 2

การอนุมานทางสถิติสำหรับประชากรอันตะ

2.1 ความนำ

การหาข้อสรุปเพื่อทำความเข้าใจเกี่ยวกับประชากรหรือการอนุมานทางสถิติ (Statistical Inference) เป็นสาระหลักที่สำคัญของสถิติศาสตร์ โดยมีขั้นตอนที่สำคัญคือการเก็บรวบรวมข้อมูลจำนวนหนึ่งแล้วนำมาทำการประมวลผลจากนั้นจึงนำผลที่ได้ไปอธิบายสภาพความเป็นไปของประชากรที่สนใจ ในระยะเวลาที่ผ่านมาได้มีการสร้างและพัฒนาระเบียบวิธีเพื่อทำการอนุมานทางสถิติด้วยปรัชญาและกรอบแนวคิดที่แตกต่างกัน เพื่อตอบสนองการใช้ประโยชน์ทั้งสำหรับประชากรอันตะและประชากรอนันต์ (Finite Population and Infinite Population)

2.2 การอนุมานทางสถิติสำหรับประชากรอนันต์

การอนุมานทางสถิติเพื่อจัดทำข้อสรุปเกี่ยวกับประชากรอนันต์ภายใต้แนวคิดที่สำคัญได้แก่ Frequentist หรือ Classical Statistical Inference โดยเริ่มจากความเชื่อที่ว่าประชากรแต่ละหน่วยเกิดขึ้นมาจากกลไกอย่างหนึ่ง แต่ละครั้งที่กลไกดังกล่าวนี้ทำงานจะเกิดหน่วยประชากรขึ้นมาหนึ่งหน่วย กลไกดังกล่าวนี้จะทำงานได้ซ้ำเหมือนเดิมไปไม่สิ้นสุดอย่างต่อเนื่อง โดยที่การซ้ำแต่ละครั้งเป็นอิสระต่อกัน นั่นหมายถึงการเกิดขึ้นของแต่ละหน่วยประชากรนั้นไม่มีผลกระทบใดๆ ต่อการเกิดขึ้นของหน่วยประชากรอื่น ทั้งนี้กลไกดังกล่าวถูกกำกับด้วยรูปแบบความน่าจะเป็นประเภทใดประเภทหนึ่ง ซึ่งหากทราบค่าพารามิเตอร์ของรูปแบบความน่าจะเป็นซึ่งเป็นตัวกำกับพฤติกรรมของรูปแบบความน่าจะเป็นนั้นๆ ก็จะสามารถย้อนกลับไปอธิบายประชากรที่สนใจได้อย่างครบถ้วน[ยงยุทธ ไชยพงศ์, 2548]

ดังนั้นในการศึกษาประชากรอนันต์จึงต้องเก็บข้อมูลที่เป็นวัตถุดิบที่ใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ดังกล่าวโดยการจำลองกลไกที่ก่อให้เกิดหน่วยประชากร เพื่อให้ได้หน่วยตัวอย่างขึ้นมาจำนวนหนึ่งให้เพียงพอซึ่งในทางสถิติเรียกว่าการทดลอง (Experiment) หรือการเฝ้าสังเกต (Observation) สำหรับนำไปใช้ตรวจสอบและอธิบายรูปแบบความน่าจะเป็นที่กำกับกลไกได้อย่างใกล้เคียงกับความเป็นจริงมากที่สุด ซึ่งการสร้างและการพัฒนาระเบียบวิธีทางสถิติสำหรับใช้ในการอนุมานทางสถิติสำหรับประชากรอนันต์นั้นเริ่มจากการประมาณพารามิเตอร์แบบจุดและการ

ทดสอบสมมติฐาน ซึ่งวิธีการสร้างตัวประมาณมีอยู่หลายวิธีแต่วิธีหนึ่งที่ใช้กันมากคือวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Estimation and Likelihood Ratio Test) เนื่องจากวิธีนี้จะให้ตัวประมาณค่าและสถิติทดสอบที่มีคุณภาพที่ดีหลายประการ แต่เนื่องจากการประมาณค่าแบบจุดไม่สามารถให้ค่าประมาณที่ถูกต้องได้เลย นั่นคือ ความน่าจะเป็นที่ตัวประมาณจะมีค่าเท่ากับค่าพารามิเตอร์มีค่าเป็นศูนย์ $\Pr(\hat{\theta} = \theta) = 0$ ในมุมของประเด็นดังกล่าวนี้เป็นข้อด้อยของการประมาณแบบจุด ต่อมาจึงมีการพัฒนาตัวประมาณแบบช่วงขึ้นโดยมีแนวคิดที่จะสร้างตัวสถิติขึ้นมาสองตัวนั่นคือ $L(X_1, X_2,..., X_n)$ และ $U(X_1, X_2,..., X_n)$และคาดว่าค่าพารามิเตอร์ที่สนใจจะตกอยู่ในช่วง $[L,U]$ ด้วยความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$

ในทฤษฎีการอนุมานทางสถิติตัวประมาณแบบช่วงสามารถสร้างได้หลายวิธี โดยวิธีที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลายคือ Inverse of Test Statistics และ Pivotal Quantity ซึ่งวิธีการเหล่านี้ได้นำเอาทฤษฎีขีดจำกัดกลาง (Central Limit Theorem) มาประยุกต์ใช้ ซึ่งทฤษฎีนี้เป็นการนำการลู่เข้าสู่การแจกแจงแบบปกติ (Normal Distribution) มาใช้ และโดยพื้นฐานแล้วข้อมูลแต่ละหน่วยต้องเป็นตัวอย่างสุ่มที่เป็นอิสระกันและมีรูปแบบการแจกแจงเดียวกัน นอกจากการประมาณค่าพารามิเตอร์แล้ววิธีการทางสถิติอีกวิธีหนึ่งที่มีความสำคัญนั่นก็คือ การทดสอบสมมติฐาน โดยในส่วนนี้จะเป็นการทดสอบว่าค่าพารามิเตอร์ของประชากรที่สนใจเป็นไปตามที่คาดไว้หรือไม่ โดยใช้ข้อมูลจากตัวอย่างมาเป็นตัวทดสอบสมมติฐานดังกล่าว [Hogg and Tanis, 1997]

2.3 การอนุมานทางสถิติสำหรับประชากรอันตะ

การหาข้อสรุปสำหรับประชากรอันตะนั้นเริ่มจากความต้องการที่จะศึกษาประชากรที่มีการเปลี่ยนแปลงเกิดขึ้นต่อเนื่องตลอดเวลา หรือคุณลักษณะที่ต้องการศึกษามีการเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่องโดยธรรมชาติ ดังนั้นจึงต้องมีการกำหนดกรอบเวลาให้ชัดเจน ซึ่งเปรียบเสมือนการแช่แข็งประชากรหรือเป็นการสมมติว่าไม่มีการเปลี่ยนแปลงใดๆ เกิดขึ้นในประชากรภายใต้กรอบเวลาที่กำหนด จากนั้นจึงทำการประมาณค่าลักษณะประชากรเพื่อนำค่าประมาณที่ได้ไปอธิบายลักษณะประชากรต่อไป

การอนุมานทางสถิติสำหรับประชากรอันตะจะดำเนินการเพื่อหาข้อสรุปภายใต้แนวคิดที่เชื่อว่าหน่วยแต่ละหน่วยในประชากรอันตะมีค่าของตัวแปรที่สนใจเป็นเพียงค่าคงที่ค่าหนึ่งซึ่งติดอยู่กับหน่วยประชากร ระเบียบวิธีทางสถิติสำหรับศึกษาลักษณะประชากรเช่นนี้โดยเริ่มจากการสำมะโนซึ่งเป็นการเก็บรวบรวมข้อมูลจากทุกหน่วยประชากรแล้วนำข้อมูลที่ได้ไปทำการคำนวณค่าลักษณะประชากร แต่เนื่องจากข้อจำกัดทางด้านเวลาและทรัพยากร ต่อมาได้มีการพัฒนาระเบียบวิธีทางสถิติอีกประเภทหนึ่งขึ้น นั่นคือการสำรวจตัวอย่างซึ่งเป็นการเก็บข้อมูลบางส่วนจาก

ประชากร แล้วจึงนำข้อมูลที่ได้ไปทำการประมาณค่าลักษณะประชากร [William GC, 1992]

การสำรวจตัวอย่างมีขั้นตอนที่สำคัญคือการกำหนดแผนการสุ่มตัวอย่าง การเก็บรวบรวมข้อมูล และการนำข้อมูลที่เก็บรวบรวมมาได้ไปทำการประมาณค่าลักษณะประชากร โดยใช้ตัวประมาณที่สอดคล้องกับแผนการสุ่มตัวอย่างพร้อมทั้งมีเกณฑ์ในการวัดข้อผิดพลาด จากนั้นนำตัวประมาณที่ได้ไปตอบคำถามที่ต้องการทั้งในเชิงพรรณนาและเชิงวิเคราะห์ ซึ่งในสถิติศาสตร์ได้มีการพัฒนาทฤษฎีการสำรวจตัวอย่างเข้ามารองรับการทำงานทั้งหมดตลอดจนกระบวนการวัดข้อผิดพลาดรวมทั้งควบคุมข้อผิดพลาดให้อยู่ในระดับที่ต้องการ [M.E.Thompson, 1997] [สุชาดา กีระนันทน์, 2542]

2.3.1 ทฤษฎีการสำรวจตัวอย่าง (Theory of Sample Survey)

ทฤษฎีการสำรวจตัวอย่าง เป็นการศึกษาถึงแนวคิดในการหาข้อสรุปสำหรับประชากรอันตะซึ่งมีข้อตกลงเบื้องต้นที่สำคัญคือ ประชากรจะต้องมีสมาชิกหรือหน่วยประชากรที่นับจำนวนได้อย่างครบถ้วน โดยที่แต่ละหน่วยประชากรนั้นมีลักษณะต่างๆ ติดอยู่ โดยทฤษฎีนี้ว่าด้วยการเลือกตัวอย่างจากประชากรและการหาค่าประมาณจากตัวอย่างเพื่อประมาณค่าประชากรอย่างมีคุณภาพที่สุด ภายใต้ทรัพยากรที่มีอยู่อย่างจำกัด [Leslie K, 1965]

การสำรวจตัวอย่างเป็นการเก็บรวบรวมข้อมูลมาเพียงบางส่วนของประชากร ดังนั้นจึงต้องทำการสุ่มตัวอย่างเพื่อให้ได้ข้อมูลซึ่งเป็นวัตถุดิบแล้วนำเข้าสู่กระบวนการวิเคราะห์ เพื่ออธิบายสภาพความเป็นไปของประชากร โดยการสุ่มตัวอย่างมีทั้งการสุ่มตัวอย่างที่ไม่เป็นเชิงความน่าจะเป็น (Nonprobabilistic Sampling) และการสุ่มตัวอย่างเชิงความน่าจะเป็น (Probabilistic Sampling) การสุ่มตัวอย่างที่ไม่เป็นเชิงความน่าจะเป็น เป็นวิธีการสุ่มตัวอย่างที่ไม่มีการกำหนดว่าแต่ละชุดตัวอย่างที่เกิดขึ้นจะเกิดขึ้นด้วยความน่าจะเป็นเท่าไร จึงไม่สามารถบอกคุณภาพของตัวประมาณได้ เนื่องจากไม่สามารถคำนวณค่าความแปรปรวนของตัวประมาณได้ ตัวอย่างของการสุ่มประเภทนี้ คือ การสุ่มตัวอย่างแบบเฉพาะเจาะจง (Purposive Sampling) และการสุ่มตัวอย่างแบบโควตา (Quota Sampling)

ส่วนการสุ่มตัวอย่างเชิงความน่าจะเป็น หมายถึง การที่หน่วยประชากรถูกสุ่มขึ้นมาแล้วก่อให้เกิดรูปแบบความน่าเป็นของการได้มาของชุดตัวอย่าง หรือรูปแบบความน่าเป็นของตัวประมาณ เพื่อนำไปสู่การวัดความคลาดเคลื่อนของการประมาณค่า ทั้งในรูปของการแสดงคุณสมบัติความไม่เอนเอียง และฟังก์ชันความแปรปรวนของตัวประมาณ ซึ่งจะชี้ให้เห็นถึงคุณภาพของค่าประมาณที่ได้ โดยในการสุ่มตัวอย่างเราสามารถกำหนดความน่าจะเป็นที่แต่ละหน่วยตัวอย่างจะมีโอกาสถูกสุ่มขึ้นมา ซึ่งสามารถทำได้ 2 ลักษณะ คือการสุ่มตัวอย่างแบบใส่คืน

(Sampling with Replacement) และการสุ่มตัวอย่างแบบไม่ใส่คืน (Sampling without Replacement) ซึ่งทำให้เกิดรูปแบบความน่าจะเป็นของตัวประมาณที่แตกต่างกันออกไป

สำหรับการสุ่มตัวอย่างเชิงความน่าจะเป็นมีแผนการสุ่มตัวอย่างที่ถูกพัฒนาขึ้นมากมายและแผนการสุ่มหนึ่งที่นิยมใช้และเป็นที่รู้จักก็คือ แผนการสุ่มตัวอย่างแบบง่าย (Simple Random Sampling) แผนการสุ่มตัวอย่างแบบมีชั้นภูมิ (Stratified Sampling) และแผนการสุ่มตัวอย่างแบบกลุ่ม (Cluster Sampling) ซึ่งจะได้ทำการอธิบายโดยสรุปดังนี้

การสุ่มตัวอย่างแบบง่าย (Simple Random Sampling)

การสุ่มตัวอย่างแบบง่ายเป็นการสุ่มตัวอย่างที่สำคัญที่สุดในทฤษฎีการสำรวจตัวอย่าง เนื่องจากแผนการสุ่มตัวอย่างเป็นแผนการสุ่มพื้นฐานทั้งในแง่ของการสร้างตัวประมาณและการตรวจสอบคุณสมบัติของตัวประมาณ ซึ่งหากทำการศึกษาถึงกรอบแนวคิดทฤษฎีของแผนการสุ่มอย่างง่ายให้ชัดเจนแล้วก็จะเป็นพื้นฐานสำหรับการศึกษาทฤษฎีของแผนการสุ่มตัวอย่างแบบอื่นๆ ที่มีความซับซ้อนขึ้น โดยแผนการสุ่มตัวอย่างนี้จะเป็นสุ่มเลือกตัวอย่างจากประชากรขนาด N นั่นคือ $y_1, y_2, \cdots, y_N$ ซึ่ง $y_1, y_2, \cdots, y_N$ เป็นค่าที่ติดอยู่กับหน่วยประชากรที่ทราบค่าแต่ไม่ถือเป็นตัวแปรสุ่ม จากนั้นทำการสุ่มเลือกมาจำนวน n โดยสามารถทำได้ 2 ลักษณะ คือการสุ่มตัวอย่างแบบใส่คืน และการสุ่มตัวอย่างแบบไม่ใส่คืน ซึ่งกระบวนการดังกล่าวเป็นวิธีการที่มีคุณสมบัติของการทดลองสุ่มภายใต้ทฤษฎีความน่าจะเป็นอย่างชัดเจนเนื่องจากการสุ่มแต่ละครั้งจะไม่ทราบว่าผลลัพธ์ว่าหน่วยประชากรหน่วยใดจะถูกเลือกมาเป็นหน่วยตัวอย่าง และสามารถแจกแจงผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดซึ่งนำไปแสดงไว้ในปริภูมิตัวอย่าง [ยงยุทธ ไชยพงศ์, 2548]

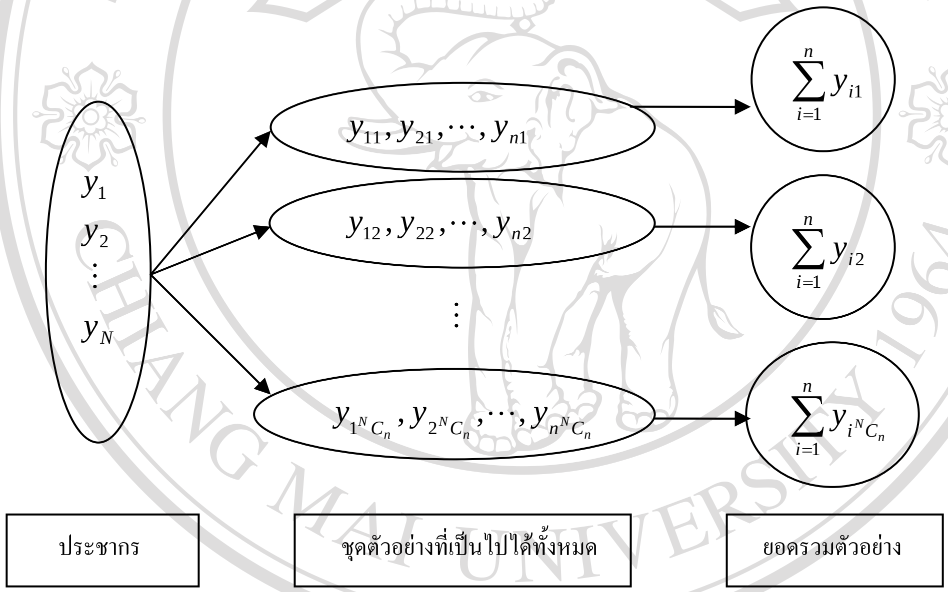
การสุ่มตัวอย่างแบบง่ายที่ไม่ใส่คืน เป็นการสุ่มตัวอย่างที่มีคุณสมบัติของการทดลองสุ่มที่ประกอบด้วย n การทดลองสุ่มย่อยซึ่งการทดลองสุ่มแต่ละครั้งไม่เป็นอิสระกันเนื่องจากการสุ่มครั้งแรกมีผลต่อการสุ่มครั้งถัดไป โดยการสุ่มในครั้งแรกจะมีความน่าจะเป็นที่หน่วยประชากรถูกเลือกเป็นหน่วยตัวอย่างเท่ากับ $1/N$ แต่สำหรับการสุ่มครั้งที่สองจะมีความน่าจะเป็นที่หน่วยประชากรถูกเลือกเป็นหน่วยตัวอย่างเท่ากับ $1/N-1$ เนื่องจากหน่วยประชากรที่ถูกสุ่มมาแล้วจะไม่ถูกสุ่มมาเป็นตัวอย่างซ้ำอีกและแต่ละครั้งหน่วยประชากรที่ยังไม่ถูกสุ่มมีโอกาสที่จะถูกสุ่มขึ้นมาเป็นตัวอย่างด้วยความน่าจะเป็นที่เท่ากัน โดยลำดับที่ของการที่แต่ละหน่วยประชากรถูกสุ่มขึ้นมาเป็นตัวอย่างไม่มีความสำคัญ นั่นคือหน่วยประชากรที่ i ถูกสุ่มขึ้นมาเป็นตัวอย่างในครั้งที่ 1 หรือครั้งที่ 2 หรือครั้งที่ n ก็ถือว่าเหมือนกัน ดังนั้นการนับชุดตัวอย่างที่เป็นไปได้ทั้งหมดจึงใช้หลักของการจัดกลุ่มที่ลำดับไม่มีความสำคัญ (Combination) ซึ่งชุดตัวอย่างที่เป็นไปได้ทั้งหมดมีจำนวน ${}^{N}C_n$ ชุด และแต่ละชุดจะมีความน่าจะเป็นที่จะเกิดขึ้นเท่ากันนั่นคือ $P(y_1, y_2, ..., y_n) = 1/{}^{N}C_n$ รูปแบบความน่าจะเป็นที่กำกับการเกิดขึ้นของชุดตัวอย่างนี้จะนำไปสู่

รูปแบบความน่าจะเป็นของตัวประมาณ นั่นคือยอดรวมตัวอย่างของแต่ละชุดจะมีคุณสมบัติเป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete Random Variable) และมีรูปแบบความน่าจะเป็นเช่นเดียวกับรูปแบบความน่าจะเป็นที่กำกับการเกิดขึ้นของชุดตัวอย่างเนื่องจากจำนวนสมาชิกในปริภูมิตัวอย่างสามารถนับจำนวนได้อย่างครบถ้วนคือ ${}^{N}C_n$ ผลลัพธ์ นั่นคือ

$$f(y) = \frac{1}{{}^{N}C_n}$$

ทั้งนี้การเกิดขึ้นของชุดตัวอย่างที่เป็นไปได้ทั้งหมดและการเกิดขึ้นของตัวแปรสุ่มยอดรวมตัวอย่างแสดงไว้ในภาพที่ 2.1

ภาพที่ 2.1 ชุดตัวอย่างที่เป็นไปได้ทั้งหมดและการเกิดขึ้นของตัวแปรสุ่มยอดรวมตัวอย่างภายใต้แผนการสุ่มตัวอย่างแบบง่ายที่ไม่ใส่คืน



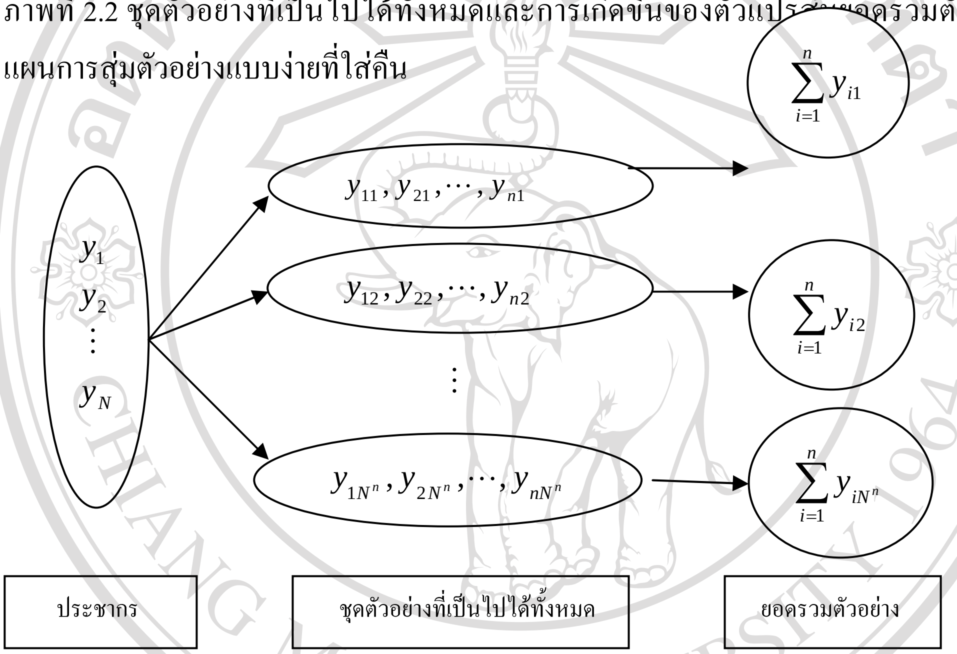
สำหรับการสุ่มตัวอย่างแบบง่ายที่ใส่คืน เป็นการสุ่มตัวอย่างที่แต่ละครั้งหน่วยประชากรที่ยังไม่ถูกสุ่มมีโอกาสที่จะถูกสุ่มขึ้นมาเป็นตัวอย่างด้วยความน่าจะเป็นที่เท่ากันเช่นเดียวกับการสุ่มแบบไม่ใส่คืน แต่เมื่อสิ้นสุดการสุ่มตัวอย่างในแต่ละครั้งหน่วยประชากรที่ถูกสุ่มขึ้นมาเป็นตัวอย่างแล้วจะถูกใส่คืนกลับไปยังประชากรเพื่อเตรียมพร้อมที่จะถูกสุ่มขึ้นมาเป็นตัวอย่างได้ในครั้งต่อไป นั่นคือแต่ละประชากรมีโอกาสถูกสุ่มขึ้นมาเป็นตัวอย่างได้มากกว่า 1 ครั้ง ซึ่งส่งผลให้ความน่าจะเป็นที่หน่วยประชากรถูกเลือกเป็นหน่วยตัวอย่างเท่ากับ $1/N$ ทุกครั้ง ดังนั้นการสุ่มแต่ละครั้งจึงเป็นอิสระต่อกันนั่นคือในการสุ่มตัวอย่างแต่ละครั้งจะมีผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดเท่ากับ N ตามจำนวนหน่วยประชากร และมีลักษณะเช่นนี้ทุกครั้งของการสุ่มตัวอย่าง ดังนั้นการนับจำนวนชุดตัวอย่างที่เป็นไปได้ทั้งหมดจึงใช้หลักการคูณ (Multiplication Principle) นั่นคือผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดจากการทดลองสุ่มหรือชุดตัวอย่างที่

เป็นไปได้ทั้งหมดมีจำนวน N^n ชุด ดังนั้นแต่ละชุดเกิดขึ้นด้วยความน่าจะเป็นเท่ากับ $P(y_1, y_2, ..., y_n) = 1/N^n$ เช่นเดียวกับการสุ่มตัวอย่างแบบง่ายที่ไม่ใส่คืน รูปแบบความน่าจะเป็นที่กำกับการเกิดขึ้นของชุดตัวอย่างนี้เป็นรูปแบบความน่าจะเป็นของยอดรวมตัวอย่างเช่นกัน นั่นคือ

$$f(y) = \frac{1}{N^n}$$

ทั้งนี้การเกิดขึ้นของชุดตัวอย่างที่เป็นไปได้ทั้งหมดและการเกิดขึ้นของตัวแปรสุ่มยอดรวมตัวอย่างแสดงไว้ในภาพที่ 2.2

ภาพที่ 2.2 ชุดตัวอย่างที่เป็นไปได้ทั้งหมดและการเกิดขึ้นของตัวแปรสุ่มยอดรวมตัวอย่างภายใต้แผนการสุ่มตัวอย่างแบบง่ายที่ใส่คืน



จากข้างต้นจะเห็นว่าภายใต้กรอบแนวคิดของความน่าจะเป็นแบบคลาสสิค การทดลองสุ่มในลักษณะดังกล่าวไม่ว่าจะเป็นการสุ่มแบบใส่คืนหรือไม่ใส่คืน สามารถสร้างรูปแบบความน่าจะเป็นของชุดตัวอย่างทั้งหมดได้ ซึ่งรูปแบบความน่าจะเป็นดังกล่าวทำให้เกิดรูปแบบความน่าจะเป็นของตัวประมาณค่าลักษณะประชากร อันได้แก่ ยอดรวม ค่าเฉลี่ย สัดส่วน และอัตราส่วนของประชากร ส่งผลทำให้สามารถตรวจสอบคุณสมบัติของตัวประมาณได้ด้วยหลักการเดียวกับทฤษฎีการอนุมานทางสถิติสำหรับประชากรอนันต์ทุกประการ เช่น คุณสมบัติความไม่เอนเอียง ความแปรปรวนต่ำสุด และความคงเส้นคงวา เป็นต้น

การสุ่มตัวอย่างแบบมีชั้นภูมิ (Stratified Sampling)

การสุ่มตัวอย่างแบบมีชั้นภูมิเป็นวิธีการเลือกตัวอย่างที่มีประโยชน์ได้มาก โดยเฉพาะในเชิงของการดำเนินงาน ซึ่งสามารถควบคุมประสิทธิภาพในการดำเนินงานได้อย่างมีประสิทธิภาพ เนื่องจากมีการสุ่มประชากรซึ่งเป็นกลุ่มประชากรย่อยอย่างเป็นอิสระกันทำให้ง่ายต่อ

การดำเนินการ โดยการสุ่มตัวอย่างขั้นต้นจะทำการแบ่งประชากรออกเป็นกลุ่มย่อย (Subpopulation) หรือชั้นภูมิ (Stratum) ที่มีจำนวนหน่วยประชากรในแต่ละชั้นภูมิเป็น $N_1, N_2, ..., N_L$ โดยหน่วยแต่ละหน่วยประชากรจะปรากฏอยู่ในชั้นภูมิใดชั้นภูมิหนึ่งเพียงชั้นภูมิเดียวเท่านั้น หรือ $N_1 + N_2 + ... + N_L = N$ จากนั้นทำการสุ่มตัวอย่างหน่วยประชากรจากชั้นภูมิแต่ละชั้นภูมิซึ่งมีขนาดเท่ากับ $n_1, n_2, ..., n_L$ ตามลำดับ ซึ่งวิธีการสุ่มแต่ละชั้นภูมิจะเป็นอิสระต่อกันหรือกล่าวได้ว่าสามารถใช้วิธีการเลือกตัวอย่างที่แตกต่างกันได้ในแต่ละชั้นภูมิ [ยงยุทธ ไชยพงศ์ , 2548]

หากการสุ่มตัวอย่างทุกกลุ่มประชากรย่อยเป็นแบบง่าย แผนการสุ่มตัวอย่างก็จะเรียกว่า การสุ่มแบบง่ายอย่างมีชั้นภูมิ (Stratified Random Sampling) ซึ่งการสุ่มแบบง่ายอย่างมีชั้นภูมิ ก็เปรียบเสมือนการสุ่มตัวอย่างแบบง่าย L ครั้ง ดังนั้นจึงสามารถนำทฤษฎีจากแผนการสุ่มตัวอย่างแบบง่ายมาประยุกต์เป็นทฤษฎีสำหรับแผนการสุ่มตัวอย่างแบบมีชั้นภูมิได้ทั้งในแง่ของการประมาณค่าลักษณะประชากรและการวัดความผิดพลาดของตัวประมาณ นั่นคือหากการสุ่มตัวอย่างเป็นแบบไม่ใส่คืน ชุดตัวอย่างที่เป็นไปได้ทั้งหมดในชั้นภูมิแรกจะมีค่าเท่ากับ ${}^{N_1}C_{n_1}$ ชุด ซึ่งแต่ละชุดจะมีความน่าจะเป็นที่จะถูกสุ่มมาเป็นตัวอย่างเท่ากันนั่นคือ $P(y_1, y_2, ..., y_{n_1}) = 1/{}^{N_1}C_{n_1}$ และในทำนองเดียวกันในชั้นภูมิอื่นๆ ก็จะมีชุดตัวอย่างที่เป็นไปได้ทั้งหมดเท่ากับ ${}^{N_h}C_{n_h}$ ชุด และแต่ละชุดจะมีความน่าจะเป็นที่จะถูกสุ่มมาเป็นตัวอย่างเท่ากับ $P(y_1, y_2, ..., y_{n_h}) = 1/{}^{N_h}C_{n_h}$ ชุด ดังนั้นจำนวนชุดตัวอย่างที่เป็นไปได้ทั้งหมดสามารถคำนวณได้โดยใช้หลักการคูณ (Multiplication Principle) ซึ่งเป็นการนำจำนวนชุดตัวอย่างที่เป็นไปได้ในแต่ละชั้นภูมิมาคูณกัน เนื่องจากแต่ละชั้นภูมิมีการสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน นั่นคือจำนวนชุดตัวอย่างที่เป็นไปได้ทั้งหมดเท่ากับ ${}^{N_1}C_{n_1} \times {}^{N_2}C_{n_2} \times \cdots \times {}^{N_l}C_{n_L}$ ชุด หรือเท่ากับ $\prod_{h=1}^{L} {}^{N_h}C_{n_h}$ ชุด นั่นเอง ซึ่งแต่ละชุดจะมีความน่าจะเป็นที่จะถูกสุ่มมาเป็นตัวอย่างเท่ากัน นั่นคือ $P(y_1, y_2, ..., y_n) = 1/\prod_{h=1}^{L} {}^{N_h}C_{n_h}$ รูปแบบความน่าจะเป็นนี้จะนำไปสู่รูปแบบความน่าจะเป็นของตัวประมาณ เช่น ค่าเฉลี่ยตัวอย่าง $\bar{y}_{str} = \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{y}_h$ ซึ่งจะมีรูปแบบความน่าจะเป็นเช่นเดียวกับรูปแบบความน่าจะเป็นที่กำกับการเกิดขึ้นของชุดตัวอย่างเนื่องจากจำนวนสมาชิกในปริภูมิตัวอย่างสามารถนับจำนวนได้อย่างครบถ้วนคือ $\prod_{h=1}^{L} {}^{N_h}C_{n_h}$ ผลลัพธ์ นั่นคือ

$$f(\bar{y}_{str}) = \frac{1}{\prod_{h=1}^{L} {}^{N_h}C_{n_h}}$$

ในทำนองเดียวกันเมื่อการสุ่มตัวอย่างเป็นแบบใส่คืน ชุดตัวอย่างที่เป็นไปได้ทั้งหมดในแต่ละชั้นภูมิมีค่าเท่ากับ ${N_h}^{n_h}$ ชุด และแต่ละชุดจะมีความน่าจะเป็นที่จะถูกสุ่มมาเป็น

ตัวอย่างเท่ากันนั่นคือ $P(y_1, y_2, ..., y_{n_h}) = 1/N_h^{n_h}$ รูปแบบความน่าจะเป็นที่กำกับการเกิดขึ้นของชุดตัวอย่างนี้จะนำไปสู่รูปแบบความน่าจะเป็นของตัวประมาณเช่นกัน นั่นคือ รูปแบบความน่าจะเป็นของค่าเฉลี่ยตัวอย่างกรณีแผนการสุ่มตัวอย่างแบบชั้นภูมิอย่างง่ายที่การสุ่มเป็นแบบใส่คืน คือ

$$f(\bar{y}_{str}) = \frac{1}{\prod_{h=1}^{L} N_h^{n_h}}$$

ซึ่งแผนการสุ่มแบบมีชั้นภูมิมีลักษณะเด่นคือ นอกจากการประมาณค่าระดับประชากรได้แล้วยังสามารถประมาณค่าระดับชั้นภูมิได้อีกด้วย และสามารถเพิ่มคุณภาพของตัวประมาณด้วยการกำหนดจำนวนชั้นภูมิที่เหมาะสม การคัดหน่วยเข้าชั้นภูมิโดยพยายามทำให้หน่วยที่อยู่ในชั้นภูมิเดียวกันมีความคล้ายคลึงกันแต่ให้หน่วยที่แตกต่างกันอยู่ในชั้นภูมิที่แตกต่างกัน การกำหนดขนาดตัวอย่างให้เหมาะสมกับแต่ละชั้นภูมิ โดยถือหลักว่าขนาดตัวอย่างของชั้นภูมิควรแปรตามระดับความแปรปรวนของชั้นภูมิ ขนาดของชั้นภูมิและค่าใช้จ่ายแต่ละหน่วย ทั้งนี้จะต้องคำนึงถึงความเป็นไปได้ในเชิงของข้อมูลที่มีอยู่หรือที่สามารถหาได้โดยมีค่าใช้จ่ายในการดำเนินการเป็นปัจจัยที่นำไปสู่การตัดสินใจ

การสุ่มตัวอย่างแบบกลุ่ม (Cluster Sampling)

การสุ่มตัวอย่างแบบกลุ่มเป็นแผนการสุ่มที่ถูกพัฒนาขึ้นเพื่อแก้ปัญหาในกรณีที่ต้องจัดทำกรอบตัวอย่าง (Sampling Frame) เนื่องมาจากประชากรมีขนาดใหญ่หรือต้องใช้เวลาที่ยาวนานและงบประมาณเป็นจำนวนมาก โดยเริ่มจากการแบ่งประชากรออกเป็นกลุ่มย่อย (Cluster) จำนวน k กลุ่มย่อย ซึ่งอาจแบ่งตามขอบเขตทางภูมิศาสตร์หรือขอบเขตอื่นก็ได้โดยให้หน่วยประชากรมีความแตกต่างกันระหว่างแต่ละกลุ่มน้อยที่สุด นั่นคือความแตกต่างระหว่างหน่วยประชากรในแต่ละกลุ่มจะต้องอยู่ในระดับที่ค่อนข้างสูง จากนั้นจึงทำการสุ่มกลุ่มย่อยขึ้นมาเป็นตัวอย่างจำนวน m กลุ่มย่อย แล้วจึงทำการเก็บรวบรวมข้อมูลจากทุกหน่วยในกลุ่มตัวอย่างเหล่านั้น [ยงยุทธ ไชยพงศ์, 2548]

สำหรับการประมาณค่าลักษณะประชากรสามารถนำทฤษฎีจากการสุ่มตัวอย่างแบบง่ายมาประยุกต์ใช้ นั่นคือในกรณีที่ขนาดประชากรในแต่ละกลุ่มย่อยมีขนาดเท่ากัน และมีการสุ่มเลือกกลุ่มย่อยแบบไม่ใส่คืน จำนวนชุดตัวอย่างที่เป็นไปได้ทั้งหมดมีจำนวน ${}^{k}C_m$ ชุด และแต่ละชุดจะมีความน่าจะเป็นที่จะถูกสุ่มมาเป็นตัวอย่างเท่ากันนั่นคือ $P(y_1, y_2, ..., y_n) = 1/{}^{k}C_m$ รูปแบบความน่าจะเป็นที่กำกับการเกิดขึ้นของชุดตัวอย่างนี้จะนำไปสู่รูปแบบความน่าจะเป็นของตัวประมาณ เช่น ค่าเฉลี่ยตัวอย่างจะมีรูปแบบความน่าจะเป็นเช่นเดียวกับรูปแบบความน่าจะเป็นที่กำกับการเกิดขึ้นของชุดตัวอย่าง นั่นคือ

$$f(\bar{y}_{cluster}) = \frac{1}{{}^{k}C_{m}}$$

ในทำนองเดียวกันเมื่อการสุ่มตัวอย่างเป็นแบบใส่คืน ชุดตัวอย่างที่เป็นไปได้ทั้งหมดมีค่าเท่ากับ k^m ชุด และแต่ละชุดจะมีความน่าจะเป็นที่จะถูกสุ่มมาเป็นตัวอย่างเท่ากัน นั่นคือ $P(y_1, y_2, ..., y_n) = 1/k^m$ รูปแบบความน่าจะเป็นที่กำกับการเกิดขึ้นของชุดตัวอย่างนี้จะนำไปสู่รูปแบบความน่าจะเป็นของตัวประมาณเช่นกัน นั่นคือ รูปแบบความน่าจะเป็นของค่าเฉลี่ยตัวอย่างกรณีแผนการสุ่มตัวอย่างแบบกลุ่มที่การสุ่มเป็นแบบใส่คืน คือ

$$f(\bar{y}_{cluster}) = \frac{1}{k^m}$$

ข้อดีของแผนการสุ่มตัวอย่างแบบกลุ่มคือไม่จำเป็นต้องมีกรอบตัวอย่างที่มีบัญชีรายชื่อที่ครบถ้วนสมบูรณ์ทั้งหมดเหมือนกับวิธีการสุ่มแบบง่ายและแบบแบ่งชั้นภูมิ และที่สำคัญก็คือประหยัดค่าใช้จ่ายและเวลาสำหรับขั้นตอนการปฏิบัติงานสนามเนื่องจากการกระจายของหน่วยตัวอย่างไปตามพื้นที่ต่างๆจะน้อย แต่ความน่าเชื่อถือได้ของค่าประมาณลักษณะประชากรที่ได้จากการสุ่มตัวอย่างแบบกลุ่มจะอยู่ในระดับที่ต่ำกว่าแผนการสุ่มตัวอย่างแบบง่ายเมื่อใช้ขนาดตัวอย่างที่เท่ากัน แต่สามารถเพิ่มให้สูงขึ้นได้โดยการเพิ่มจำนวนตัวอย่าง

จากข้างต้นพบว่ารูปแบบความน่าจะเป็นของค่าเฉลี่ยตัวอย่าง $f(\bar{y})$ ทั้งกรณีที่มีการสุ่มตัวอย่างแบบง่าย แบบมีชั้นภูมิหรือแบบกลุ่ม ก็พบว่าฟังก์ชันดังกล่าวได้มาจากความน่าจะเป็นร่วมของการเกิดขึ้นของข้อมูลตัวอย่างซึ่งความน่าจะเป็นเหล่านี้ก็คือ Likelihood Function ของข้อมูลซึ่งถือว่าเป็น Likelihood Principle เนื่องจาก $f(\bar{y})$ เป็นฟังก์ชันที่เก็บรายละเอียดพฤติกรรมทั้งหมดของตัวประมาณค่าเฉลี่ยไว้อย่างครบถ้วนแล้ว

แนวทางในการอธิบายเกี่ยวกับประชากรอันตะ

ในยุคแรกๆ การสำรวจตัวอย่างมีเป้าประสงค์หลักเพียงอย่างเดียวคือต้องการอธิบายสภาพความเป็นไปของข้อมูลจากชุดตัวอย่างในเชิงพรรณนา ซึ่งเป็นเพียงการประมาณค่าลักษณะประชากรที่สนใจ อันได้แก่ ยอดรวม ค่าเฉลี่ย สัดส่วน และอัตราส่วนของประชากร จากนั้นจึงทำการพิจารณาคุณภาพของตัวประมาณ ซึ่งในทฤษฎีการสำรวจตัวอย่างสามารถทำการตรวจสอบคุณสมบัติของตัวประมาณได้เช่นเดียวกับการในทฤษฎีการอนุมานทางสถิติต่างกันเพียงรูปแบบความน่าจะเป็นของตัวประมาณเป็นรูปแบบที่เกิดจากการสุ่มหน่วยประชากรมาเป็นตัวอย่าง แทนที่จะเป็นรูปแบบการแจกแจงร่วมของตัวอย่างสุ่มที่ถูกสร้างขึ้นมาจากรูปแบบความน่าจะเป็นที่กำกับกลไกก่อกำเนิดของหน่วยประชากร ซึ่งเกณฑ์การพิจารณาคุณสมบัติของตัวประมาณที่สำคัญคือ [George C, Roger LB, 2002]

- ความไม่เอนเอียง (Unbiased) เป็นแนวคิดที่แสดงให้ทราบว่าโดยเฉลี่ยแล้วตัวประมาณไม่มีแนวโน้มที่จะให้ค่าประมาณที่สูงหรือต่ำกว่าค่าคุณลักษณะประชากรที่แท้จริง ซึ่งในทางทฤษฎีทางสถิติจะแสดงได้โดยการหาค่าคาดหวังของตัวประมาณซึ่งจะต้องเท่ากับค่าลักษณะประชากรที่แท้จริง

- ความแปรปรวนต่ำสุด (Minimum Variance) เป็นแนวคิดที่แสดงให้ทราบว่าโดยเฉลี่ยแล้วกำลังสองของผลต่างระหว่างค่าประมาณที่ได้กับค่าที่แท้จริงเป็นเท่าใด ซึ่งในทางสถิติจะแสดงได้โดยการหาค่าคาดหวังของผลต่างยกกำลังสองของตัวประมาณกับค่าลักษณะประชากรที่แท้จริง

- ความคงเส้นคงวา (Consistency) เป็นแนวคิดที่แสดงให้ทราบถึงข้อดีในการลดความผิดพลาดจากการประมาณค่าลักษณะประชากรจากการใช้ขนาดตัวอย่างที่เพิ่ม นั่นคือเมื่อจำนวนตัวอย่างเพิ่มขึ้นความแปรปรวนของค่าประมาณลดลง ซึ่งในทางทฤษฎีสถิติจะแสดงได้โดยการลู่เข้าของความแปรปรวนของตัวประมาณ

ในระยะเวลาต่อมาการใช้ประโยชน์จากการสำรวจตัวอย่างยังมีความต้องการในเชิงวิเคราะห์ เพื่อหาข้อสรุปในเชิงเปรียบเทียบ ซึ่งการดำเนินการดังกล่าวนี้จึงจำเป็นต้องใช้กระบวนการทางสถิติที่มีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้น โดยการหาข้อสรุปเชิงวิเคราะห์สำหรับประชากรอันตะนั้นได้มีความพยายามในการพัฒนาระเบียบวิธีทางสถิติในการสร้างตัวประมาณแบบช่วงภายใต้แนวคิด Super population แต่วิธีการดังกล่าวยังไม่เป็นที่รู้จักกันอย่างแพร่หลาย ดังนั้นงานวิจัยโดยส่วนใหญ่จึงเป็นเพียงการนำเอาระเบียบวิธีทางสถิติสำหรับประชากรอนันต์มาประยุกต์ โดยกระบวนการทางสถิติที่นำมาใช้ คือ ช่วงความเชื่อมั่น (Confidence Interval) และหากมีการพิจารณาถึงวิธีการสร้างช่วงความเชื่อมั่นจะพบว่าช่วงความเชื่อมั่นถูกสร้างขึ้นภายใต้ทฤษฎีการอนุมานทางสถิติสำหรับประชากรอนันต์ ซึ่งตัวประมาณแบบช่วงสามารถสร้างได้หลายวิธี โดยวิธีที่นิยมกันอย่างมากคือ Inverse of Test Statistics และ Pivotal Quantity [M.E.Thompson, 1997]

2.3.2 การอธิบายประชากรอันตะในเชิงวิเคราะห์โดยใช้ช่วงความเชื่อมั่น

ช่วงความเชื่อมั่นสามารถอธิบายประชากรอันตะในเชิงวิเคราะห์ได้ทั้งกรณีหนึ่งประชากรหรือกรณีที่ประชากรมีมากกว่าหนึ่ง เช่นกรณีหนึ่งประชากร ช่วงความเชื่อมั่นที่ประมาณได้สามารบอกได้ว่าค่าลักษณะประชากรที่สนใจมีค่าอยู่ในช่วง $[L,U]$ ด้วยความเชื่อมั่นกี่เปอร์เซ็นต์และมีโอกาสที่จะมีค่านอกเหนือจากช่วงที่ได้ด้วยความน่าจะเป็นเท่าไหร่ นอกจากนี้ยังสามารถหาข้อสรุปทั้งเชิงเปรียบเทียบในกรณีที่ประชากรมีมากกว่าหนึ่ง เช่น เปรียบเทียบค่าลักษณะประชากรในกลุ่มย่อยหรือการเปรียบเทียบระหว่างกลุ่มประชากร เป็นต้น

ประชากรอันตะมีข้อตกลงเบื้องต้นที่สำคัญคือประชากรจะต้องมีสมาชิกหรือหน่วยประชากรที่นับจำนวนได้อย่างครบถ้วน โดยที่คุณลักษณะทั้งหมดของแต่ละหน่วยประชากร เช่น เพศ อายุ ส่วนสูง การสูบบุหรี่ การออกกำลังกายเป็นความจริงที่ติดอยู่กับแต่ละหน่วยประชากรภายใต้กรอบเวลาที่ทำการศึกษา หรือเป็นตัวแปรที่มีค่าที่เปลี่ยนแปลงไม่ได้สำหรับแต่ละหน่วยประชากร หากแต่เมื่อทำการสุ่มตัวอย่างผลลัพธ์ที่ได้มีคุณสมบัติเป็นตัวแปรสุ่มด้วยความน่าจะเป็นตามสภาพการสุ่มตัวอย่างนั้น ดังนั้นตัวแปรเหล่านี้จึงไม่มีคุณสมบัติเป็นตัวแปรสุ่มดังเช่นในทฤษฎีการอนุมานทางสถิติสำหรับประชากรอนันต์ ดังนั้นการนำข้อมูลที่มาจากการสำรวจตัวอย่างมาทำการประมาณช่วงความเชื่อมั่นซึ่งเป็นระเบียบวิธีทางสถิติที่ใช้หาข้อสรุปในเชิงวิเคราะห์สำหรับประชากรอนันต์จึงอาจทำให้เกิดความผิดพลาดได้ เนื่องจากตัวอย่างที่มาจากประชากรอนันต์มีคุณสมบัติเป็นตัวอย่างสุ่ม นั่นคือตัวอย่างแต่ละหน่วยเกิดขึ้นภายใต้การทดลองสุ่มซึ่งการทดลองสุ่มแต่ละครั้งก่อให้เกิดตัวแปรสุ่ม $X_1,\ldots,X_n$ ซึ่งเป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระกันและมีรูปแบบการแจกแจงเดียวกัน [George C, Roger LB, 2002] [สุชาดา กีระนันทน์, 2542] [William GC, 1992]

การหาข้อสรุปเกี่ยวกับประชากรอนันต์มีเป้าประสงค์หลักคือต้องการทราบค่าพารามิเตอร์ที่กำกับกลไกที่ก่อให้เกิดหน่วยประชากร ดังนั้นจึงมีการสร้างตัวประมาณแบบจุดขึ้นแต่เนื่องจากการประมาณแบบจุดมีข้อด้อยคือ $\Pr\left(\hat{\theta}=\theta\right)=0$ ต่อมาจึงมีการพัฒนาตัวประมาณแบบช่วงขึ้นซึ่งเป็นการสร้างตัวสถิติขึ้นมาสองตัวนั่นคือ $L\left(X_1,X_2,\ldots,X_n\right)$ และ $U\left(X_1,X_2,\ldots,X_n\right)$และคาดว่าค่าพารามิเตอร์ที่สนใจจะตกอยู่ในช่วง $\left[L,U\right]$ ด้วยความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$

ในทฤษฎีการอนุมานทางสถิติการสร้างตัวประมาณแบบช่วงทำได้โดยใช้แนวคิดและวิธีการที่แตกต่างกัน โดยวิธีที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลายคือ Inverse of Test Statistics และ Pivotal Quantity โดยวิธี Inverse of Test Statistics มีแนวคิดว่าเมื่อต้องการสร้างช่วงความเชื่อมั่นสำหรับพารามิเตอร์ที่สนใจจะเริ่มจากการนำตัวสถิติทดสอบที่เกี่ยวข้องกับพารามิเตอร์ที่สนใจมาทำการหา Inverse of Test Statistics ยกตัวอย่างเช่น เมื่อต้องการสร้างช่วงความเชื่อมั่นสำหรับพารามิเตอร์ μ จะนำสถิติทดสอบ $Z=\dfrac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}$ ซึ่งเป็น Likelihood Ratio Test มาหา Inverse of Test Statistics แล้วจึงสร้างช่วงความเชื่อมั่นที่ครอบคลุมค่า μ ภายใต้ $\Pr\left(Z_{\frac{\alpha}{2}}\le Z\le Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$

ส่วนการสร้างช่วงความเชื่อมั่นโดยวิธี Pivotal Quantity นั้นจะเริ่มจากการหาปริมาณหมุน (Pivotal Quantity) ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $Q=q\left(X_1,X_2,\ldots,X_n;\theta\right)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตัวอย่างสุ่มที่มาจากประชากรที่มีฟังก์ชันการแจกแจง $f(x;\theta)$ โดยที่การแจกแจงของ Q เป็นอิสระจากพารามิเตอร์ของประชากร ยกตัวอย่างเช่นต้องการสร้างช่วงความเชื่อมั่นสำหรับพารามิเตอร์ μ แล้วให้ $Q=\sum X_i$ ซึ่งพบว่า $E\left(\sum X_i\right)=n\mu$ และ $V\left(\sum X_i\right)=n\sigma^2$ ดังนั้น $\sum X_i$ ไม่เป็น

ปริมาณหมุนเนื่องจาก $\sum X_i$ มีการแจกแจงแบบปกติ โดยมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ $n\mu$ และความแปรปรวนเท่ากับ $n\sigma^2$ ซึ่งจะเห็นว่าฟังก์ชันการแจกแจงของ $\sum X_i$ ขึ้นอยู่กับ μ ซึ่งเป็นพารามิเตอร์ที่สนใจ แต่ถ้ากำหนดให้ $Q = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ ซึ่งพบว่า $\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ เป็นปริมาณหมุนเนื่องจาก $\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ มีการแจกแจงแบบปกติมารฐานที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และความแปรปรวนเท่ากับ 1 ซึ่งจะเห็นว่าฟังก์ชันการแจกแจงของ $\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ ไม่ขึ้นอยู่กับ μ ซึ่งเป็นพารามิเตอร์ที่สนใจ

เมื่อสร้างปริมาณหมุน $Q = q(X_1, X_2, ..., X_n; \theta)$ จากนั้นประมาณช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ภายใต้ $\Pr(q_1 \le Q \le q_2) = 1 - \alpha$ ซึ่งจะทำการแปลงรูปเพื่อให้ได้ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ที่สนใจ โดยช่วงที่ได้สามารถคลุมค่าพารามิเตอร์ที่สนใจด้วยความน่าจะเป็นที่กำหนดนั่นก็คือ $1 - \alpha$ ซึ่งวิธีนี้ได้นำเอาทฤษฎีขีดจำกัดกลาง มาประยุกต์ใช้ นั่นคือ เมื่อให้ $X_1, X_2, ..., X_n$ เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระและมีการแจกแจงเดียวกัน โดยมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ และความแปรปรวนเท่ากับ σ^2 ถ้าขนาดตัวอย่าง n มีขนาดใหญ่ จะได้ว่าตัวสถิติ $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ จะลู่เข้าสู่การแจกแจงปกติ โดยมีค่าค่าเฉลี่ย $\mu = 0$ และความแปรปรวน $\sigma^2 = 1$ กล่าวได้ว่าตัวสถิติดังกล่าวจะลู่เข้าสู่การแจกแจงแบบปกติมาตรฐานโดยประมาณ (Asymptotically Standard Normal)

ยกตัวอย่างการสร้างช่วงความเชื่อมั่นสำหรับพารามิเตอร์ μ ที่สร้างโดยการใช้ปริมาณหมุนซึ่งเริ่มจากการสร้างปริมาณหมุน $Q = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ โดยที่ Q เป็นฟังก์ชันตัวอย่างสุ่มที่มีการแจกแจงปกติมาตรฐาน โดยมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และความแปรปรวนเท่ากับ 1 และจากการสร้างช่วงความเชื่อมั่น คือการสร้างฟังก์ชันของตัวอย่างสุ่มที่ครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ด้วยความน่าจะเป็นที่กำหนดนั่นคือ $1 - \alpha$ จะได้ว่า

$$\Pr\left(Z_{\frac{\alpha}{2}} < Q < Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

แทนค่า $Q = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ จะได้

$$\Pr\left(Z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} < Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\Pr\left(Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \overline{X} - \mu < Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\Pr\left(Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \overline{X} < -\mu < Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \overline{X}\right) = 1 - \alpha$$

$$\Pr\left(\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} > \mu > \bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

$$\Pr\left(\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

ดังนั้น ช่วงความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ ของ μ คือ $\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

2.3.3 คุณสมบัติของข้อมูล

การจัดทำข้อสรุปโดยใช้กระบวนการทางสถิติโดยมีข้อมูลเป็นวัตถุดิบนั้น มีวัตถุประสงค์หลักคือต้องการได้ข้อสรุปเกี่ยวกับประชากรที่มีความถูกต้องและเกิดข้อผิดพลาดน้อยที่สุด ดังนั้นคุณสมบัติของข้อมูลหรือรูปแบบความน่าจะเป็นของข้อมูลจึงเป็นสิ่งสำคัญ เนื่องจากระเบียบวิธีทางสถิติถูกสร้างขึ้นภายใต้ข้อสมมติเบื้องต้น ซึ่งหากข้อมูลไม่เป็นไปตามข้อสมมติดังกล่าวก็จะส่งผลให้ข้อสรุปที่ได้มีความผิดพลาดเช่น การประมาณค่าแบบช่วงซึ่งเป็นระเบียบวิธีทางสถิติที่ใช้เพื่อหาข้อสรุปสำหรับประชากรอนันต์ ซึ่งในหลายกรณีอยู่บนพื้นฐานของข้อสมมติเบื้องต้นที่ว่าข้อมูลต้องมีคุณสมบัติเป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระกันและมีรูปแบบการแจกแจงเดียวกัน

นั่นคือมีตัวแปรสุ่มที่เกิดขึ้นภายใต้การทดลองสุ่ม โดยตัวแปรสุ่ม $X_1,..., X_n$ ต้องมีความเป็นอิสระต่อกัน และมีรูปแบบการแจกแจงความน่าจะเป็นเดียวกัน นั่นคือ เมื่อพิจารณาถึงการเกิดขึ้นของค่าสังเกตทั้ง n ตัวจะต้องมีความเป็นอิสระต่อกันและมีรูปแบบฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น ที่ใช้อธิบายความน่าจะเป็นในการเกิดขึ้นของแต่ละตัวแปรสุ่ม X_i รูปแบบเดียวกัน โดยสามารถเขียนฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมของ $X_1,..., X_n$ ในรูปผลคูณของฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวอย่างสุ่มแต่ละตัวได้ดังนี้

$$f(x_1,...,x_n) = f(x_1)f(x_2)\cdot ...\cdot f(x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$$

นั่นคือสำหรับกรณีของประชากรอนันต์ ภายใต้รูปแบบความน่าจะเป็นแบบปกติ ปัวซง เอกซ์โพเนนเชียล และแบร์นูลลี รูปแบบความน่าจะเป็นของการเกิดขึ้นของ $X_1,..., X_n$ โดยมี $f(x_1,...,x_n)$ เป็นดังนี้

กรณีที่ประชากรมีการแจกแจงแบบปกติ $f(x_1,...,x_n) = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2}$

กรณีที่ประชากรมีการแจกแจงแบบปัวซง $f(x_1,...,x_n) = \prod_{i=1}^{n}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!}$

กรณีที่ประชากรมีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียล $f(x_1,...,x_n) = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}e^{-x_i/\theta}$

กรณีที่ประชากรมีการแจกแจงแบบแบร์นูลลี $f(x_1,...,x_n) = \prod_{i=1}^{n} P^{x_i}(1-P)^{1-x_i}$

และเมื่อต้องการอนุมานกลับไปยังประชากรก็สามารถดำเนินการโดยการประมาณค่าพารามิเตอร์ $\mu,\ \sigma^2, \lambda, \theta$ และ P ตามลำดับ

เมื่อพิจารณาข้อมูลที่มาจากการสำรวจตัวอย่างเมื่อการสุ่มเป็นแบบใส่คืน พบว่าตัวอย่างแต่ละหน่วย เกิดขึ้นจากการสุ่มตัวอย่างที่แต่ละครั้งของการสุ่มหน่วยประชากรที่ยังไม่ถูกสุ่มจะมีโอกาสที่จะถูกสุ่มขึ้นมาเป็นตัวอย่างด้วยความน่าจะเป็นที่เท่ากัน และเมื่อสิ้นสุดการสุ่มตัวอย่างในแต่ละครั้งหน่วยประชากรที่ถูกสุ่มขึ้นมาเป็นตัวอย่างแล้วจะถูกใส่คืนกลับไปยังประชากรเพื่อเตรียมพร้อมที่จะถูกสุ่มขึ้นมาเป็นตัวอย่างได้ในครั้งต่อไป นั่นคือแต่ละประชากรมีโอกาสถูกสุ่มขึ้นมาเป็นตัวอย่างได้มากกว่า 1 ครั้ง เช่น การสุ่มตัวอย่างในครั้งแรกได้ $X_1 = x_1$ หลังจากนั้นทำการสุ่มในครั้งที่ 2 ได้ $X_2 = x_2$ ซึ่งในลักษณะการสุ่มตัวอย่างแบบใส่คืนนี้มีโอกาสที่ค่าของ x_1 จะเท่ากับค่าของ x_2 โดยมีความน่าจะเป็นที่หน่วยประชากรถูกเลือกเป็นหน่วยตัวอย่างเท่ากับ $1/N$ ทุกครั้ง ลักษณะเช่นนี้แสดงให้เห็นว่า ข้อมูลที่ได้มีคุณสมบัติการเป็นอิสระต่อกันและมาจากรูปแบบความน่าจะเป็นเดียวกัน

สำหรับข้อมูลที่มาจากการสำรวจตัวอย่างเมื่อการสุ่มเป็นแบบไม่ใส่คืนนั้น เกิดขึ้นจากการสุ่มตัวอย่างที่มีคุณสมบัติของการทดลองสุ่มที่ประกอบด้วย n การทดลองสุ่มย่อยซึ่งการทดลองสุ่มแต่ละครั้งไม่เป็นอิสระกันเนื่องจากการสุ่มครั้งแรกมีผลต่อการสุ่มครั้งถัดไป เช่น การสุ่มหน่วยตัวอย่างแรกจากประชากรขนาด N ได้ $X_1 = x_1$ โดยมีความน่าจะเป็นที่หน่วยประชากรถูกเลือกเป็นหน่วยตัวอย่างเท่ากับ $1/N$ ส่วนการสุ่มครั้งที่สองจะได้ $X_2 = x_2$ จากประชากรที่เหลืออยู่ขนาด $N-1$ ซึ่งมีความน่าจะเป็นที่หน่วยประชากรถูกเลือกเป็นหน่วยตัวอย่างเท่ากับ $1/N-1$ เนื่องจากหน่วยประชากรที่ถูกสุ่มมาแล้วจะไม่ถูกสุ่มมาเป็นตัวอย่างซ้ำอีก ซึ่งลักษณะการสุ่มตัวอย่างเช่นนี้จะไม่มีโอกาสที่ค่า $x_1 = x_2$ นั่นคือ $P(X_2 = x_1 | X_1 = x_1) = 0$ ดังนั้นข้อมูลที่ได้มาจากการสุ่มตัวอย่างแบบไม่ใส่คืนนั้นจะขาดคุณสมบัติการเป็นอิสระต่อกันและมาจากรูปแบบความน่าจะเป็นเดียวกัน โดยที่การอนุมานกลับไปยังประชากรดำเนินการโดยผ่านค่าลักษณะประชากร $\bar{Y}, Y, P$ หรือ R แล้วแต่กรณีซึ่งจะถือได้ว่าไม่ใช่พารามิเตอร์บนรูปแบบการแจกแจงดังได้กล่าวมาข้างต้น [George C, Roger LB, 2002]

2.3.4 ความเชื่อถือได้ของตัวประมาณแบบช่วง

การประมาณค่าแบบช่วงเป็นกระบวนการทางสถิติอีกวิธีหนึ่งที่ใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่สนใจ โดยการสร้างตัวประมาณสองตัวโดยที่คาดว่าค่าพารามิเตอร์ที่แท้จริงจะอยู่ระหว่างตัวแปรทั้งสองด้วยความน่าจะเป็นที่ต้องการ ซึ่งการประมาณแบบช่วงเป็นการใช้ข้อมูลจาก

ตัวอย่างซึ่งเป็นเพียงการเก็บรวบรวมข้อมูลบางส่วนจากประชากรดังนั้นย่อมมีความผิดพลาดเช่นเดียวกับการประมาณค่าแบบจุดและการทดสอบสมมติฐาน ซึ่งการวัดความผิดพลาดของตัวประมาณแบบช่วงนั้นใช้ความน่าจะเป็นของการครอบคลุมของตัวประมาณที่ครอบคลุมค่าพารามิเตอร์จริงไว้ได้ตรงตามระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดหรืออยู่ในรูปของค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่น

การประมาณแบบช่วงจะมีความเชื่อถือมากน้อยเพียงใดจะขึ้นอยู่กับความน่าจะเป็นที่ตัวประมาณครอบคลุมค่าพารามิเตอร์จริงว่ามีค่าเท่ากับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดไว้หรือไม่ โดยความน่าจะเป็นของการครอบคลุมสามารถคำนวณได้โดยการนับจำนวนช่วงความเชื่อมั่นที่ค่าพารามิเตอร์ตกอยู่ในช่วงที่สร้างขึ้น แล้วนำมาหารด้วยจำนวนชุดตัวอย่างทั้งหมดที่เป็นไปได้ หากพบว่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมมีค่าเท่ากับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดแสดงว่าช่วงที่สร้างขึ้นมีความน่าเชื่อถือ แต่ถ้าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมมีค่าน้อยกว่าหรือมากกว่าระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดแสดงว่าช่วงที่สร้างขึ้นแคบหรือกว้างจนเกินไป ซึ่งอาจมีสาเหตุมาจากการที่ข้อมูลไม่มีคุณสมบัติตามสมมติฐานเบื้องต้น เช่น ข้อมูลที่ใช้ขาดคุณสมบัติของตัวอย่างสุ่มหรือมีสาเหตุจากการที่ขนาดตัวอย่าง (n) เล็กเกินไปส่งผลทำให้รูปแบบการแจกความน่าจะเป็นของตัวประมาณไม่ลู่เข้าสู่การแจกแจงแบบปกติ

การหาข้อสรุปเชิงวิเคราะห์สำหรับประชากรอันตะได้นำเอาช่วงความเชื่อมั่นมาใช้ ซึ่งเป็นที่ทราบดีว่าข้อมูลที่ได้มาจากการสำรวจตัวอย่างไม่มีคุณสมบัติเป็นตัวแปรสุ่มดังเช่นในทฤษฎีการอนุมานทางสถิติสำหรับประชากรอนันต์ เนื่องจากคุณลักษณะทั้งหมดของแต่ละหน่วยประชากรเป็นความจริงที่ติดอยู่กับแต่ละหน่วยประชากรภายใต้กรอบเวลาที่ทำการศึกษา หรือเป็นตัวแปรที่มีค่าที่เปลี่ยนแปลงไม่ได้สำหรับแต่ละหน่วยประชากร ซึ่งหากเกิดการสุ่มตัวอย่างแบบใส่คืนจะทำให้การได้มาซึ่งตัวอย่างแต่ละหน่วยเกิดขึ้นอย่างเป็นอิสระกันเนื่องจากความน่าจะเป็นที่หน่วยประชากรถูกเลือกเป็นหน่วยตัวอย่างเท่ากับ $1/N$ ทุกครั้ง ซึ่งการเป็นอิสระกันของการได้มาซึ่งตัวอย่างแต่ละหน่วยนี้เป็นคุณสมบัติหนึ่งของตัวอย่างสุ่ม แต่หากลักษณะการสุ่มเป็นแบบไม่ใส่คืนซึ่งการสุ่มครั้งแรกมีผลต่อการสุ่มครั้งถัดไป โดยการสุ่มในครั้งแรกจะมีความน่าจะเป็นที่หน่วยประชากรถูกเลือกเป็นหน่วยตัวอย่างเท่ากับ $1/N$ แต่สำหรับการสุ่มครั้งที่สองจะมีความน่าจะเป็นที่หน่วยประชากรถูกเลือกเป็นหน่วยตัวอย่างเท่ากับ $1/N-1$ ซึ่งถือว่าการเกิดขึ้นของตัวอย่างแต่ละหน่วยขาดความเป็นอิสระกัน ดังนั้นการสุ่มตัวอย่างในลักษณะนี้จะไม่มีคุณสมบัติของตัวอย่างสุ่มภายใต้ประชากรอนันต์

สำหรับกรณีที่การสร้างช่างความเชื่อมั่นเกิดความผิดพลาดอันเนื่องมาจากขนาดตัวอย่างเล็กเกินไปซึ่งส่งผลให้รูปแบบการแจกแจงของตัวประมาณไม่ลู่เข้าสู่การแจกแจงแบบปกติ

เนื่องมาจากเมื่อพิจารณาสูตรที่ใช้ในการคำนวณช่วงความเชื่อมั่น เช่น ช่วงความเชื่อมั่นสำหรับค่าเฉลี่ย $\bar{y} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$ ซึ่งจะเห็นว่าช่วงความเชื่อมั่นจะกว้างหรือแคบมากเพียงใดจะขึ้นอยู่กับ $\bar{y}$ ซึ่งมีรูปแบบการแจกแจงในกรณีที่การสุ่มเป็นแบบไม่ใส่คืนคือ $f(\bar{y}) = \frac{1}{{}^{N}C_{n}}$ และจากทฤษฎี Strong convergence เมื่อ n มีค่ามากๆ จะทำให้ตัวประมาณลู่เข้าสู่การแจกแจงใดๆ ซึ่งในที่นี้เมื่อ n มีค่ามากๆ แล้ว $\bar{y}$ ลู่เข้าสู่การแจกแจงแบบปกติ ก็จะส่งผลให้ช่วงความเชื่อมั่นที่สร้างขึ้นจากตัวประมาณ $\bar{y} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$ มีความน่าจะเป็นของการครอบคลุมเข้าใกล้ระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดมากขึ้น [George C, Roger LB, 2002]