

บทที่ 2

วิธีนิวตันแบบช่วง

ระบบสมการไม่เชิงเส้นสามารถหาคำตอบได้หลายวิธี โดยทั่วไปจะทำการคำนวณเชิงเลขคณิตที่อิงจากวิธีนิวตัน ซึ่งง่าย ไม่ซับซ้อน และรวดเร็ว แต่มีข้อด้อยคือถ้าต้องการค่าประมาณเริ่มต้นที่ใกล้เคียงกับคำตอบเพียงพอก็จะสามารถหาคำตอบออกมาได้อย่างถูกต้องและรวดเร็ว ทั้งยังหาได้เพียงคำตอบเดียวเท่านั้น เพื่อแก้ไขจุดด้อยดังกล่าวจึงได้นำเทคนิคเลขคณิตแบบช่วง (interval arithmetics) มาประยุกต์ใช้กับวิธีนิวตัน เรียกว่า วิธีนิวตันแบบช่วง (interval Newton) ซึ่งสามารถหาคำตอบทั้งหมดของระบบสมการได้ อย่างไรก็ตามในกระบวนการวิธีนิวตันแบบช่วงจำเป็นต้องมีการคำนวณเมทริกซ์ผกผันซึ่งหากระบบสมการขนาดใหญ่ต้องใช้เวลาในการคำนวณมาก ในบทนี้จะแนะนำ เลขคณิตแบบช่วง ซึ่งเป็นพื้นฐานของวิธีแบบช่วง

2.1 เลขคณิตช่วง

เลขคณิตแบบช่วง [4] นั้นนำมาใช้เพื่อแก้ปัญหาความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษ (round off error) โดยเฉพาะอย่างยิ่งในการคำนวณที่ต้องการความแม่นยำสูง ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์

$$[x] \subseteq [x_{\min}, x_{\max}]$$

โดยที่ $x_{\min}$ แทนขอบเขตล่าง และ $x_{\max}$ แทนขอบเขตบน นั่นคือช่วง x ประกอบไปด้วยค่าทุกค่าจาก $x_{\min}$ ถึง $x_{\max}$ หรือ $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$

จะเห็นว่าจำนวนช่วงมีลักษณะเป็นเซต ซึ่งตัวดำเนินการเครื่องหมายเท่ากับ ($=$), การเป็นสมาชิก ($\in$), ซับเซต ($\subseteq$), ซับเซตแท้ ($\subset$), ซุปเปอร์เซต ($\supseteq$), ซุปเปอร์เซตแท้ ($\supset$), อินเตอร์เซกชัน ($\cap$) และยูเนียน ($\cup$) ใช้เหมือนกับทฤษฎีของเซต เช่น การรวมกันของค่าช่วงสองค่า หรือยูเนียนจะได้ว่า

$$[x] \cup [y] \subseteq [\min\{x_{\min}, y_{\min}\}, \max\{x_{\max}, y_{\max}\}]$$

สัญลักษณ์ $[x] \subseteq [y]$ จะหมายถึงช่วง $[x]$ มีค่าอยู่ภายในช่วง $[y]$ ถ้า $y_{\min} < x_{\min}$ และ $x_{\max} < y_{\max}$ ซึ่งในที่นี้จะเรียกว่า $[x]$ เป็นอินเนอร์-อินคลูชัน (inner inclusion) ของ $[y]$

ค่าเส้นผ่านศูนย์กลาง (diameter) , รัศมี (radius) และค่าจุดกึ่งกลาง (midpoint) ของช่วง $[x]$ จะนิยามตามลำดับ

$$d([x]) \square diam([x]) \square x_{\max} - x_{\min}$$

$$r([x]) \square rad([x]) \square \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2}$$

$$m([x]) \square mid([x]) \square \frac{x_{\max} + x_{\min}}{2}$$

ค่าสมบูรณ์น้อยที่สุด (smallest absolute value) และค่าสมบูรณ์มากที่สุด (greatest absolute value) ของช่วง $[x]$ นิยามดังนี้

$$\langle [x] \rangle \square \min\{|x| \mid x \in [x]\}$$

$$|[x]| \square \max\{|x| \mid x \in [x]\} = \{|x_{\min}|, |x_{\max}|\}$$

เนื่องจาก $[x]$ เป็นค่าที่ประกอบด้วยค่าจำนวนจริง x จึงทำให้ไม่รู้ค่าที่แน่นอน (exact value) ของ $[x]$ เพื่อวัดคุณภาพของค่าในช่วง $[x]$ จะนิยามเส้นผ่านศูนย์กลางสัมพัทธ์ (relative diameter) ของช่วง $[x]$ โดย

$$d_{rel}([x]) = \begin{cases} \frac{d([x])}{\langle [x] \rangle} & \text{if } 0 \notin [x] \\ d([x]) & \text{otherwise} \end{cases}$$

ค่าเส้นผ่านศูนย์กลางสัมพัทธ์จะบ่งถึงขอบเขตบน (upper bound) ของค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (relative error) ของ x ซึ่งเกี่ยวกับสมาชิกของช่วง $[x]$ ด้วย

การคำนวณค่าจำนวนช่วงนั้นคล้ายกับการคำนวณของจำนวนจริง แต่ในแต่ละขั้นของการคำนวณจะมีการประมาณค่าขอบเขตล่างและขอบเขตบนของปริมาณที่คำนวณด้วยซึ่งสามารถสร้างเป็นสูตรสำหรับตัวดำเนินการพื้นฐานได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
[x] + [y] &= [x_{\min} + y_{\min}, x_{\max} + y_{\max}] \\
[x] - [y] &= [x_{\min} - y_{\max}, x_{\max} - y_{\min}] \\
[x] \cdot [y] &= \left[\min\{x_{\min}y_{\min}, x_{\min}y_{\max}, x_{\max}y_{\min}, x_{\max}y_{\max}\}, \right. \\
&\quad \left. \max\{x_{\min}y_{\min}, x_{\min}y_{\max}, x_{\max}y_{\min}, x_{\max}y_{\max}\} \right] \\
[x]/[y] &= [x] \cdot [1/y_{\max}, 1/y_{\min}] \quad ; 0 \notin [y]
\end{aligned}$$

และสำหรับเลขยกกำลัง

$$[x]^n = \begin{cases} [x_{\min}^n, x_{\max}^n] & \text{if } 0 < x_{\min} \text{ or } n \text{ odd,} \\ [0, |x|]^n & \text{if } 0 \notin [x] \text{ or } n \text{ even,} \\ [x_{\max}^n, x_{\min}^n] & \text{if } 0 < x_{\min} \text{ or } n \text{ even.} \end{cases}$$

สำหรับการหาร $[x]/[y]$ ที่ $0 \in [y]$ จะใช้การหารค่าช่วงส่วนเพิ่ม (extended interval division) มาใช้พิจารณา ดังนี้

$$[x]/[y] = \begin{cases} [-\infty, \infty] & \text{if } x_{\min} < 0 < x_{\max} \text{ or } [x] = 0 \text{ or } [y] = 0 \\ [x_{\max}/y_{\min}, +\infty] & \text{if } x_{\max} \leq 0 \text{ and } y_{\min} < y_{\max} = 0 \\ [-\infty, x_{\max}/y_{\max}] \cup [x_{\max}/y_{\min}, +\infty] & \text{if } x_{\max} \leq 0 \text{ and } y_{\min} < 0 < y_{\max} \\ [-\infty, x_{\max}/y_{\max}] & \text{if } x_{\max} \leq 0 \text{ and } 0 = y_{\min} < y_{\max} \\ [-\infty, x_{\min}/y_{\min}] & \text{if } 0 \leq x_{\min} \text{ and } y_{\min} < y_{\max} = 0 \\ [-\infty, x_{\min}/y_{\min}] \cup [x_{\min}/y_{\max}, +\infty] & \text{if } 0 \leq x_{\min} \text{ and } y_{\min} < 0 < y_{\max} \\ [x_{\min}/y_{\max}, +\infty] & \text{if } 0 \leq x_{\min} \text{ and } 0 = y_{\min} < y_{\max} \end{cases}$$

สำหรับเวกเตอร์ช่วง (interval vector) และเมทริกซ์ช่วง (interval matrices) จะหมายถึงสมาชิกทุกตัวของเวกเตอร์ หรือเมทริกซ์นั้นมีค่าช่วง โดยที่ $IR^n, IR^{n \times m}$ หมายถึง เซตของเวกเตอร์ช่วงค่าจริง มิติ และเซตของเมทริกซ์ช่วงค่าจริงขนาด มิติ ตามลำดับ นิยามดังนี้

$$\begin{aligned}
[x] &\square ([x]_i)_{i=1, \dots, n} \square ([x]_1, \dots, [x])^T \quad \text{for } [x] \in IR^n \\
[A] &\square ([a]_{ij})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}} \square \begin{pmatrix} [a]_{11} & \cdots & [a]_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ [a]_{n1} & \cdots & [a]_{nm} \end{pmatrix} \quad \text{for } [A] \in IR^{n \times m}
\end{aligned}$$

2.2 วิธีนิวตันแบบช่วง

วิธีนิวตันแบบช่วง คล้ายกับวิธีนิวตันแต่ใช้เลขคณิตช่วงในการคำนวณแทน รวมกับวิธีค้นหาแบบแบ่งครึ่ง ซึ่งจากที่ได้กล่าวมาตอนต้นโดยค่า x ทุกค่าที่ทำให้สมการเป็นจริง กำหนดดังสมการที่ 2.1

$$f(x) = 0 \quad (2.1)$$

วิธีนิวตันแบบช่วงสำหรับการแก้สมการ (2.1) สามารถพิจารณาได้ง่ายๆ โดยใช้ทฤษฎีค่ากลาง (mean value theorem) จัดสมการอยู่ในรูปแบบค่ากลางได้ดังนี้

$$f(m([x])) - f(x^*) = f'(\xi) \cdot (m([x]) - x^*)$$

เมื่อ $x^*, \xi \in [x]$ ถ้าเราสมมติว่า เป็นค่าที่ทำให้สมการ (2.1) เป็นจริงจะได้ว่า

$$x^* = m([x]) - \frac{f(m([x]))}{f'(\xi)} \in m([x]) - \frac{f(m([x]))}{f'([x])} \square N([x]) \quad (2.2)$$

จากสมการ (2.2) เรียก $N([x])$ ว่าตัวดำเนินการนิวตันแบบช่วง (interval Newton operator) แต่ว่าช่วงค่าในช่วง $[x]$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน f มีค่าเป็นศูนย์ทุกค่าอาจไม่อยู่ใน $N([x])$ เสมอไปโดยจะต้องทำการหาช่วงที่ตัดกัน (intersection) ระหว่างค่าเก่าและค่าที่คำนวณได้ใหม่ นั่นคือทุกค่าในช่วง $[x]$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน f มีค่าเป็นศูนย์จะอยู่ในช่วง $N([x]) \cap [x]$

เมื่อเริ่มต้นดำเนินการวิธีนิวตันแบบช่วงที่ค่าช่วง $[x]^{(0)}$ โดยสมมติว่า $0 \notin f'([x]^{(0)})$ ได้รูปแบบการทำซ้ำดังนี้

$$[x]^{(k+1)} \square [x]^{(k)} \cap N([x]^{(k)}), k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

เมื่อครั้งที่กำกับได้บนค่าช่วง $[x]$ หมายถึงค่าช่วง $[x]$ ค่าใหม่ที่ได้มาจากการทำซ้ำในกระบวนการของวิธีนิวตันแบบช่วง ส่วน $k = 0$ หมายถึงค่าช่วงเริ่มต้นในการค้นหา

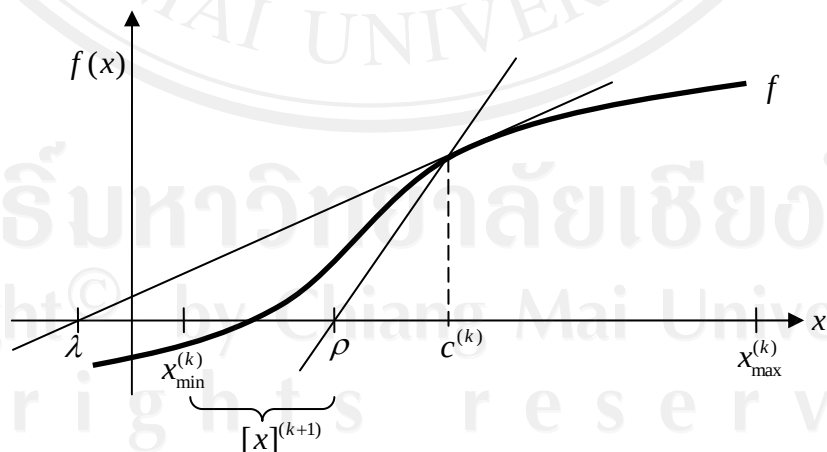
ตัวดำเนินการนิเวศแบบช่วงมีสมบัติดังนี้

1. ถ้า $x^* \in [x]$ ทั้งหมดที่ทำให้ฟังก์ชัน f มีค่าศูนย์ จะได้ $x^* \in N([x])$ ด้วย
2. ถ้า $N([x]) \cap [x] = \emptyset$ หมายถึงฟังก์ชัน f ไม่มีคำตอบในช่วง $[x]$
3. ถ้า $N([x]) \subseteq [x]$ จะได้ว่าฟังก์ชัน f มีคำตอบเพียงคำตอบเดียวในช่วง $[x]$ และใน $N([x])$ ด้วยเช่นกัน

สามารถอธิบายด้วยเรขาคณิตวิเคราะห์ ดังรูปที่ 2.1 โดยวาดเส้นตรงจากจุด $(c^{(k)}, f(c^{(k)}))$ เมื่อ $c^{(k)} = m([x]^{(k)})$ และลากเส้นตรงผ่านให้ผ่านแกน x โดยเส้นตรงทั้งสองมีค่าความชัน $g_{\min}$ (ค่าความชันน้อยสุดของฟังก์ชัน f ในช่วง $[x]$) และ $g_{\max}$ (ค่าความชันน้อยสุดของฟังก์ชัน f ในช่วง $[x]$) ตามลำดับ ซึ่งค่าความชันดังกล่าวสามารถหาได้จากอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ในช่วง $[x]$ นั่นคือ $[g_{\min}, g_{\max}] = f'([x]^{(k)})$ จากนั้นกำหนดจุดตัดของเส้นความชันทั้งสองกับแกน x เป็น λ และ ρ ตามลำดับ และจะได้ตัวดำเนินการนิเวศแบบช่วงมีค่าเป็น $N([x]^{(k)}) = [\lambda, \rho]$ ดังนั้นก็สามารถหาค่าช่วง ค่าต่อไปที่ถูกลดขนาดลงได้โดย

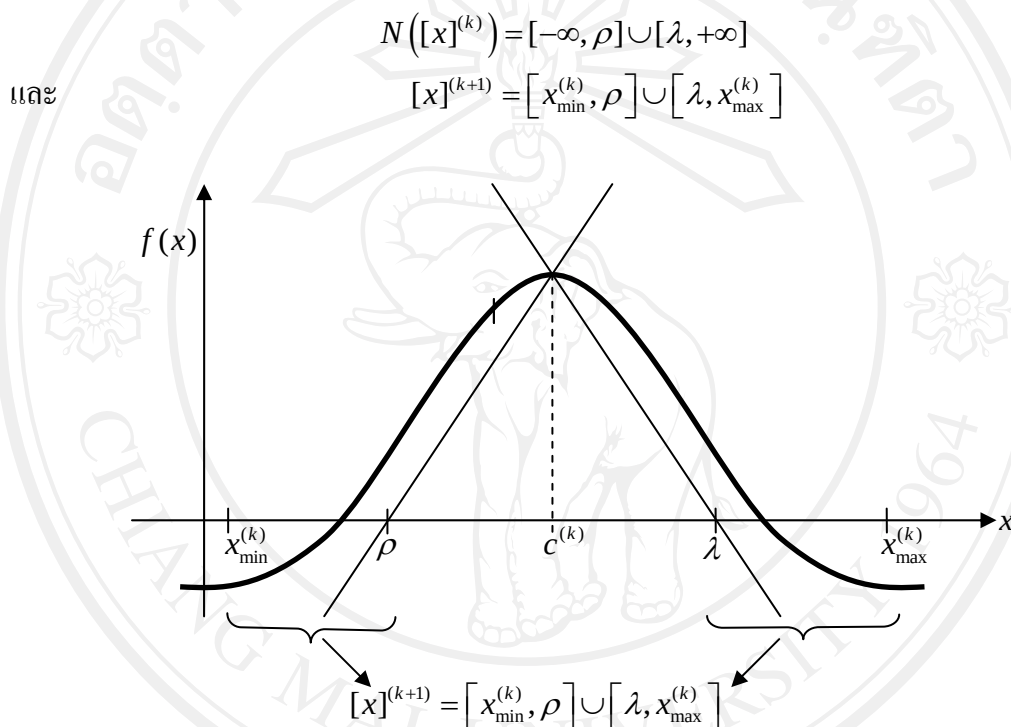
$$[x]^{(k+1)} = [\lambda, \rho] \cap [x]^{(k)} = [x]_{\min}^{(k)}, \rho]$$

จากสมการ (2.3) ถ้าช่วงที่ตัดกันได้ออกมาเป็นเซตว่าง จะหมายถึงฟังก์ชัน f ไม่มีคำตอบในช่วง $[x]^{(k)}$



รูปที่ 2.1 เรขาคณิตวิเคราะห์สำหรับนิเวศแบบช่วง ในกรณี $0 \notin f'([x]^{(0)})$

สำหรับกรณีที่ $0 \in f'([x]^{(0)})$ จะใช้ในการหาค่าช่วงส่วนเพิ่ม ดังที่กล่าวในหัวข้อ 2.1 มาพิจารณา ซึ่งอธิบายได้ดังรูปที่ 2.2 โดยการวาดเส้นตรงสองเส้นลากจากจุด $(c^{(k)}, f(c^{(k)}))$ เมื่อ $c^{(k)} = m([x]^{(k)})$ โคนที่เส้นตรงแรกมีความชันน้อยที่สุด (มีค่าเป็นลบ) และเส้นตรงที่สองมีความชันมากที่สุด (มีค่าเป็นค่าบวก) เส้นตัดกับแกน x ที่จุด λ และ ρ ตามลำดับ ซึ่งจะได้ตัวดำเนินการแบบช่วงเป็น



รูปที่ 2.2 เราคาดคิดวิเคราะห์สำหรับนิวตันแบบช่วง ในกรณี $0 \in f'([x]^{(0)})$

สรุปขั้นตอนการคำนวณต่างๆด้วยวิธีนิวตันแบบช่วง ได้ดังนี้

1. กำหนดเซตบริเวณค้นหา (search box) เริ่มต้น L และให้เซตคำตอบ S เป็นเซตว่าง
2. ถ้า L เป็นเซตว่าง ให้จบการทำงาน
3. ดึงสมาชิกตัวแรกของ L ออกมาเป็น B
4. ทดสอบบริเวณค้นหา B ถ้า ไม่มีคำตอบของสมการ ให้ไปทำข้อ 2
5. ถ้า B มีขนาดเล็กเพียงพอแล้ว ให้เก็บ B ในเซตคำตอบ S แล้วไปทำข้อ 2
6. ใช้ตัวดำเนินการนิวตันแบบช่วงกับ B
7. ถ้า B มีขนาดเล็กแล้ว ให้ไปทำข้อ 5
8. ถ้า ตัวดำเนินการนิวตันแบบช่วงไม่สามารถลดขนาด B ได้ ให้แบ่ง B ออกเป็นสองส่วนโดย $B = B_1 \cup B_2$ และ $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ นำทั้ง B_1 และ B_2 เก็บไว้ใน L แล้วไปทำข้อ 2

2

การทดสอบว่าบริเวณค้นหา B มีคำตอบหรือไม่ในขั้นตอนที่ 4 นั้น วิธีนิวตันแบบช่วงจะอาศัยสมบัติของคณิตศาสตร์ช่วง และในขั้นตอนที่ 6 ระหว่างการคำนวณตัวดำเนินการนิวตันแบบช่วงต้องคำนวณเมทริกซ์ผกผันซึ่งไม่เหมาะกับระบบสมการขนาดใหญ่ ดังนั้นจึงได้เสนอวิธีนิวตันแบบช่วงเชิงองค์ประกอบ โดยขั้นตอนส่วนใหญ่จะคล้ายคลึงกัน แต่จะใช้ตัวดำเนินการแบบช่วงกระทำกับตัวแปรที่ละองค์ประกอบ ซึ่งได้กล่าวในบทที่ 3

ในปี ค.ศ. 1972 เมอร์เรล เอล แพทริกซ์ ได้เสนอวิธีสำหรับการหารากสมการโดยวิธีนิวตันของสมการพหุนาม (Polynomial Equation) สำหรับการประมวลผลแบบขนาน ซึ่งสามารถหาจุดเริ่มต้นได้เอง และไม่ต้องกำหนดขอบเขตของช่วงคำตอบ โดยการหาอนุพันธ์ของสมการซึ่งอยู่ในรูปของสมการพหุนามตัวแปรเดียว (monic polynomial) ลำดับที่ $n-k-2$ โดย k มีค่าเป็น 1 หรือ 2 ขึ้นอยู่กับ n ว่าเป็นเลขคู่หรือเลขคี่ จากนั้นแก้สมการอนุพันธ์เพื่อหาค่าเริ่มต้น รากของสมการโดยประมาณนั้นหาจากเวกเตอร์ $r^{(j)}$ โดยความสัมพันธ์ 2 สมการคือ ผลรวมและผลคูณของเวกเตอร์ $r^{(j)}$ ซึ่งมีค่าเป็น $a_{m_j-1}^{2N-2}$ และ a_0^{2N-2j} ตามลำดับ