

บทที่ 3

วิธีนิวตันแบบช่วงเชิงองค์ประกอบ

วิธีของนิวตันแบบช่วงเชิงองค์ประกอบ มีขั้นตอนในการหารากสมการคล้ายคลึงกับวิธีนิวตันแบบช่วงที่กล่าวในบทที่แล้ว แต่เพราะในระบบสมการขนาดใหญ่ที่ต้องคำนวณเมทริกซ์ผกผันซึ่งต้องใช้เวลาในการคำนวณมาก วิธีของนิวตันแบบช่วงเชิงองค์ประกอบจะใช้ตัวดำเนินการแบบช่วงกระทำกับตัวแปรที่ละองค์ประกอบ ทำให้ไม่ต้องคำนวณเมทริกซ์ผกผัน

3.1 วิธีของนิวตันแบบช่วงเชิงองค์ประกอบ

ระเบียบวิธีของนิวตันแบบช่วงเชิงองค์ประกอบ สำหรับการหาเวกเตอร์คำตอบทุก ๆ ค่าของระบบสมการไม่เชิงเส้น จะใช้แนวคิดแบบเดียวกับระเบียบวิธีของนิวตันโดยทั่วไป แต่ใช้คุณสมบัติเชิงเลขคณิตแบบช่วง (interval arithmetic) มาพิจารณาแทน

จากระบบสมการ n มิติ

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))^T = 0 \quad \text{เมื่อ } f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (3.1)$$

ประกอบด้วยฟังก์ชันค่าจริง n ฟังก์ชัน $(f_i: D \rightarrow \mathbb{R})$ เวกเตอร์ $X^* \in D$ เป็นคำตอบของสมการ (4.1) ถ้า $f_i(X^*) = 0$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

ถ้าตรึงค่า(fixed) ตัวแปรจำนวน $n-1$ ตัวใน n ตัวของแต่ละฟังก์ชัน f_i ก็จะสามารถมองเป็นฟังก์ชันค่าจริงหนึ่งมิติได้ ดังนั้นก็สามารถใช้ระเบียบวิธีของนิวตันแบบช่วงสามัญ (ordinary interval newton method) สำหรับฟังก์ชันหนึ่งมิติได้ ซึ่งเป็นธรรมดาเป็นไปได้ที่จะได้คำตอบที่ทำให้ $f_i = 0$ โดยสิ้นเชิง ถ้าตรึงค่าตัวแปรโดยไม่มีหลักการใด ๆ แต่ถ้าแทนที่ตัวแปรตรึงค่าให้สมนัย (correspond) กับส่วนประกอบ $[x]_j$ ของเวกเตอร์ช่วง $[x]$ ก็จะสามารถได้คำตอบของระบบสมการแน่นอน

เพื่อให้เห็นภาพได้ชัดเจน กำหนดให้ $f = (f_1, f_2)^T : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ เป็นฟังก์ชัน
ผลต่างต่อเนื่อง และกำหนดให้ $[x] \in I \subseteq \mathbb{R}^2$ เป็นเวกเตอร์ช่วงของกล่องค้นหา ซึ่ง
 $[x] = ([x]_1, [x]_2)^T \subseteq D$

พิจารณาฟังก์ชัน $f_1 : D \rightarrow \mathbb{R}$ จากเงื่อนไขเริ่มต้น $x^* \in [x]$, $f_1(x^*) = 0$

กำหนดให้ฟังก์ชัน $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ นิยามโดย $g(y) = f_1(x^*, y)$

ใช้ระเบียบวิธีนิวตันแบบช่วงหนึ่งมิติ (one-dimensional interval Newton method) ในการ
หาคำตอบทุก ๆ คำตอบของ g ได้ จะเรียกได้ว่าทุก ๆ คำตอบ y^* ของฟังก์ชัน g เป็น
ส่วนประกอบที่สองของคำตอบสำหรับปัญหานี้ ด้วยเหตุที่จุด x_1^* โดยปกติแล้วจะไม่ทราบค่าซึ่ง
จะแทนด้วยช่วง $[x]_1$ ที่เป็นส่วนประกอบแรกของกล่องค้นหา (search box) ก็จะได้นิพจน์
 $f_1([x]_1, y)$ และโดยเหตุที่ค่าช่วง x_1^* เป็นเซตย่อยอยู่ใน $f_1([x]_1, y)$ จะได้ว่า

$$g(y) \in f_1([x]_1, y)$$

อนุพันธ์ $g'([x]_2)$ นั้นจะถูกนำมาใช้สำหรับทำตัวดำเนินการของนิวตันแบบช่วง
(interval Newton operator) คือ

$$N([x]_2) = c - \frac{g(c)}{g'([x]_2)} \subseteq c - \frac{f_1([x]_1, c)}{\frac{\partial f_1}{\partial x_2}([x]_1, [x]_2)} \quad (3.2)$$

เมื่อ $c = m([x]_2)$ และสมมติว่า $0 \notin g'([x]_2) = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}([x]_1, [x]_2)$

จากสมการที่ (3.2) ส่วนประกอบ $[x]_2$ ของเวกเตอร์ช่วงค้นหาก็จะลดขนาดลง ในทำนองเดียวกัน
ถ้าตรงค่า x_2 และแทนที่ด้วยส่วนประกอบที่สองของ $[x]$ ที่ลดขนาดลงแล้ว ก็จะสามารถกระทำ
กับส่วนประกอบที่หนึ่ง $[x]_1$ ของกล่องค้นหาได้

เมื่อพิจารณาตัวอย่างข้างต้นแล้วจะเห็นข้อดีของวิธีเชิงองค์ประกอบ คือ ในการแก้ปัญหา ระบบสมการไม่เชิงเส้นโดยระเบียบวิธีของนิวตันหลายมิติ จำเป็นต้องมีการทำเมทริกซ์ผกผัน แต่ วิธีเชิงองค์ประกอบเป็นวิธีที่ทำกับระบบในลักษณะกึ่งหนึ่งมิติ ซึ่งไม่จำเป็นต้องทำเมทริกซ์ผกผัน ดังนั้นการใช้เลขคณิตแบบช่วงส่วนเพิ่ม (extended interval arithmetic) ก็จะทำให้วิธีเชิง องค์ประกอบ สามารถนำมาใช้ได้กับทุกกรณี ยิ่งกว่านั้นสำหรับแต่ละองค์ประกอบ $[x]_j$ จำนวน n ตัวของกล่องค้นหาที่จะแทนลงในฟังก์ชัน f_i ที่แตกต่างกันจำนวน n ฟังก์ชัน สามารถที่จะ เลือกตัดทอน (prune) ช่วง $[x]_j$ ได้ ซึ่งทำให้วิธีนิวตันเชิงองค์ประกอบมีประสิทธิภาพสูง

3.2 ตัวดำเนินการนิวตันเชิงองค์ประกอบ N_{cmp}

จะวิเคราะห์วิธีเชิงองค์ประกอบจากทฤษฎีค่ากลาง(mean-value theorem) เหมือนกับวิธีนิวตันแบบช่วงในหนึ่งมิติแบบปกติ

กำหนดให้ $f = (f_1, f_n)^T : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่จะทำการพิจารณา เลือกฟังก์ชัน f_i มาหนึ่งตัว และละค่าตัวแปรทุกตัวยกเว้น x_j ให้ตรึงค่าไว้ เราจะได้ฟังก์ชันค่าจริงหนึ่งมิติ

$$\tilde{f}(ij)(x_j) = f_i(x_1^*, \dots, x_{j-1}^*, x_j, x_{j+1}^*, \dots, x_n^*)$$

เมื่อ $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ และ $x_k^* \in \mathbb{R}$ ($k \neq j$)

ตัวแปรค่าจริง x_j จะเปลี่ยนแปลงอยู่ภายในส่วนประกอบที่ j $[x]_j$ ของกล่องค้นหา $[x] \in I \times \mathbb{R}^2$ ดังนั้นเมื่อนำทฤษฎีค่ากลางมาใช้จะได้

$$\exists \xi \in [x]_j : \tilde{f}(ij)(c_j) - \tilde{f}(ij)(x_j) = \tilde{f}'(ij)(\xi)(c_j - x_j) \quad (3.3)$$

เมื่อ $x_j \in [x]_j$ และ $c_j = m([x]_j)$

จากนิยามของ $\tilde{f}(ij)$ ที่ได้กำหนดมา อนุพันธ์ $\tilde{f}'(ij)$ จะเป็นอนุพันธ์ย่อย $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$

สมมติว่า $x^* \in \mathbb{R}^n$ เป็นรากของ f และ $\tilde{f}'(ij) \neq 0$ สมการ (3.3) สามารถแปลงไปเป็นสมการดังนี้

$$x_j^* = c_j - \frac{\tilde{f}(ij)(c_j)}{\tilde{f}'(ij)(\xi)} \quad (3.4)$$

เพราะว่า x^* ทำให้ f_i มีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นตัวแปรที่ไม่ทราบค่า $\xi \in [x]_j$ แทนค่าลงในสมการ (3.4) จะได้

$$x_j^* \in c_j - \frac{\tilde{f}(ij)(c_j)}{\tilde{f}'(ij)([x]_j)} = N \quad (3.5)$$

อย่างไรก็ตามถ้า $0 \in \tilde{f}'(ij)([x]_j)$ ในกรณีนี้จะใช้การหารแบบช่วงส่วนเพิ่ม (extended interval division)

ข้อมูลอย่างเดียวของ $x_k^* (k \neq j)$ ที่ปรากฏในฟังก์ชัน $\tilde{f}(ij)$ คือเป็นค่าช่วง ถ้ากล่องค้นหาคือ $[x] = ([x]_1, \dots, [x]_n)^T \in I \subseteq \mathbb{R}^n$ เมื่อ x_k^* เปลี่ยนแปลงอยู่ในช่วง $[x]_k$ แล้วแทนค่าแต่ละ $x_k^* (k \neq j)$ ด้วยช่วง $[x]_k$ เราจะได้ซูเปอร์เซต (super set) ของ N เพราะยังความเป็นเซตย่อยอยู่ ดังนั้นจะได้

$$N \subseteq c_j - \frac{f_i([x]_1, \dots, [x]_{j-1}, c_j, [x]_{j+1}, \dots, [x]_n)}{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}([x]_1, \dots, [x]_n)}$$

เราสามารถนิยามตัวดำเนินการได้ตามนี้ ซึ่งใช้ส่วนประกอบจำนวน i ลำดับของระบบสมการ ที่กระทำกับส่วนประกอบจำนวน j ลำดับของกล่องค้นหา

บทนิยาม กำหนดให้ $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \dots, f_n)^T$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่หาอนุพันธ์ได้ และกำหนดให้ $[x] = ([x]_1, \dots, [x]_n)^T \in I \subseteq \mathbb{R}^n$ เป็นเวกเตอร์ช่วง ซึ่ง $[x] \subseteq D$ และ $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ เมื่อโอเปอเรเตอร์นิวตันแบบช่วงเชิงองค์ประกอบ นิยามโดย

$$N_{cmp}([x], i, j) \square m([x]_j) - \frac{f_i([x]_1, \dots, [x]_{j-1}, m([x]_j), [x]_{j+1}, \dots, [x]_n)}{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}([x]_1, \dots, [x]_n)} \quad (3.6)$$

จากสมการ (3.6) เห็นว่า $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}([x]_1, \dots, [x]_n)$ หรือจาโคเบียนเมทริกซ์ ซึ่งเป็นค่าช่วงค่าหนึ่งทำให้การทำ N_{cmp} เป็นการหารแบบธรรมดาโดยไม่ต้องมีการทำเมทริกซ์ผกผัน