

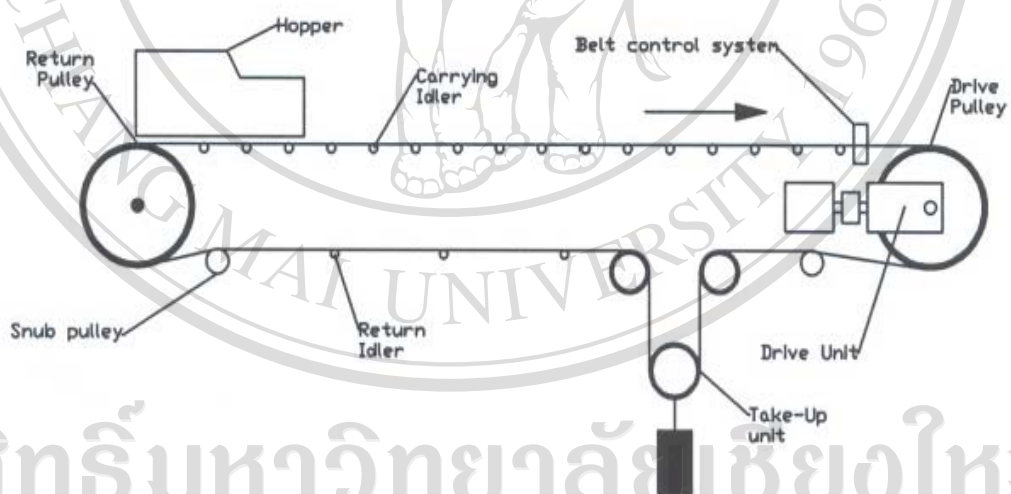
บทที่ 2

หลักการเหตุผลและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

โครงการนี้มุ่งเน้นการวิเคราะห์ความเค้นของเพลามู่เล่ตัวขับเคลื่อนสายพานลำเลียงถ่านลิกไนต์ที่มีผลกระทบมาจากแรงดึงของสายพาน มีหลักการและทฤษฎีที่สำคัญ ดังนี้

2.1 ระบบสายพานลำเลียง

ระบบสายพานเป็นอุปกรณ์ที่ใช้ในการขนส่งวัสดุแบบต่อเนื่อง ปัจจุบันได้มีการนำเอาสายพานลำเลียงมาใช้ในการขนถ่ายวัสดุกันอย่างแพร่หลายเช่น โรงงานปูนซีเมนต์ โรงโม่หิน ไซโลพืชผลทางการเกษตร เหมืองแร่ ซึ่งสายพานลำเลียงมีส่วนประกอบหลักดังรูปที่ 2.1, (ที่มา : ปานมนัส ศิริสมบุญ, 2534)



รูปที่ 2.1 ส่วนประกอบของอุปกรณ์สายพานลำเลียง, (ที่มา : Apex Belting, 1998)

2.1.1 สายพาน (Conveyor Belt) ใช้รองรับวัสดุที่ลำเลียง ส่วนใหญ่ทำมาจากยางโครงสร้างของสายพานประกอบด้วยยางชั้นบน และยางชั้นล่าง แกนรับแรงทำด้วยผ้าใบ(Fabric)หรือลวดเหล็ก (Steel Cord) นอกจากนี้ยังมียางบางระหว่างชั้นผ้าใบ (Cushion Rubber) ในการออกแบบ

สายพานลำเลียงนั้นจะพิจารณาถึงคุณสมบัติของยางสายพาน ความแข็งแรง ความหนาและความกว้างของสายพาน

2.1.2 ชุดขับ (Drive Unit) โดยทั่วไปจะประกอบด้วยมอเตอร์ไฟฟ้าหดรอบด้วยชุดเกียร์บ็อก (Gearbox) เพื่อให้ได้กำลังขับและความเร็วรอบตามที่ต้องการ

2.1.3 มู่เล่ (Pulley) เป็นอุปกรณ์ที่ใช้ขับสายพาน และดึงสายพานให้ตึงทั้งนี้จะขึ้นอยู่กับลักษณะของการติดตั้งและลักษณะของการใช้งาน

2.1.4 ชุดดึงปรับสายพาน (Take- up unit) ใช้สำหรับปรับสายพานให้ตึงตามความต้องการ

2.1.5 ลูกกลิ้งรองรับสายพาน (Idler)

2.1.6 อ่างรับวัสดุ (Hopper)

2.1.7 อุปกรณ์ทำความสะอาดสายพาน (Belt Cleaner)

2.1.8 โต้ะสายพาน (Belt Frame)

2.1.9 อุปกรณ์ควบคุมการทำงานของสายพาน (Belt Control System)

2.2 การหาค่ากำลังขับสายพานลำเลียง

การหาค่ากำลังขับสายพานลำเลียงนั้นสามารถหาได้จากแรงเสียดทานรวมของสายพานลำเลียง ซึ่งส่วนมากจะนิยมใช้มาตรฐาน DIN 22101 และ JIS B8805

2.2.1.มาตรฐาน DIN 22101 (ที่มา : Nordell , L.K., 1987)

$$F_p = Cflg[M + Q_T/(3.6V)] \pm Q_{Tgh}/(3.6V); N \quad (2.1)$$

$$\text{กำลังขับสายพานลำเลียง} \quad P = F_p V/1000; kW \quad (2.2)$$

$$\text{กำลังขับสายพานลำเลียงที่ได้จากการออกแบบ} \quad P_M = P/\eta ; kW \quad (2.3)$$

2.3 การหาค่าแรงดึงสายพาน (Tension Calculation)

การส่งกำลังขับสายพาน (Power Transmission of Belt) การส่งกำลังขับสายพานจะเกิดขึ้นที่มู่เล่ตัวขับ (Drive Pulley) กำลังขับที่ส่งผ่านสายพานทำให้สายพานมีแรงดึง และความเร็ว (V) ถ้าแสดงค่ากำลังขับเป็นกิโลวัตต์ (kW) โดยใช้หน่วย นิวตัน, เมตร และวินาที จะได้สมการดังนี้

$$P = (T_1 - T_2)V/1000 \quad ; kW \quad (2.4)$$

ความแตกต่างระหว่างแรงดึงด้านตึง (Tight Side Tension) และแรงดึงด้านหย่อน (Slack Side Tension) เป็นแรงดึงที่มีผลในการขับสายพานเรียกว่าแรงดึงยังผล (Effective Tension, T_E)

$$T_E = T_1 - T_2 \quad ; \text{ N} \quad (2.5)$$

จะได้ว่า $P = T_E V / 1000 \quad ; \text{ kW} \quad (2.6)$

แรงดึงสูงสุดในสายพานที่ยอมรับได้ จะกำหนดโดยคุณสมบัติของสายพาน แรงดึงสูงสุดจะเกิดที่ด้านตึง (Tight side tension) ขณะที่สายพานเริ่มเคลื่อนที่อย่างนี้มวลจากหยุดหนึ่งสายพานจะถูกดึง แรงดึงสายพานจะเพิ่มขึ้นถึง 20 % จากแรงดึงปกติ, (ที่มา: Yokohama Conveyor Belts Technical Information Catalog, 1974)

สายพานลำเลียงที่มีความยาวมาก หรือมีการยกระดับให้สูงมาก แรงดึงด้านตึงก็จะมีค่ามาก เนื่องจากสภาวะที่ไม่เกิดการสลลป $T_1/T_2 \leq e^{\mu\alpha}$ ดังนั้นจึงสามารถเพิ่มประสิทธิภาพการขับเคลื่อนสายพานโดยวิธีดังต่อไปนี้, (ที่มา : Bridge Stone Conveyor Belts Technical Information Catalog, 1990)

- เพิ่มค่าสัมประสิทธิ์ ความเสียดทาน (μ) โดยเคลือบผิวมู่เล่ขับเคลื่อนด้วยวัสดุที่เพิ่มความเสียดทาน เช่นยาง หรือเซรามิก

- เพิ่มค่ามุมสัมผัส (Wrap Angle, α) โดยติดตั้งมู่เล่กด (Snub Pulley) หรือใช้มู่เล่หลายตัว

- เพิ่มแรงดึงสายพานด้านหย่อน (Pre-tension)

2.3.1 แรงดึงสายพานด้านหย่อน (Slack Side Tension, T_2)

จะได้ว่า $T_2 = T_E / (e^{\mu\alpha} - 1) ; \text{ N} \quad (2.7)$

2.3.2 แรงดึงสายพานด้านตึง (Tight Side Tension, T_1)

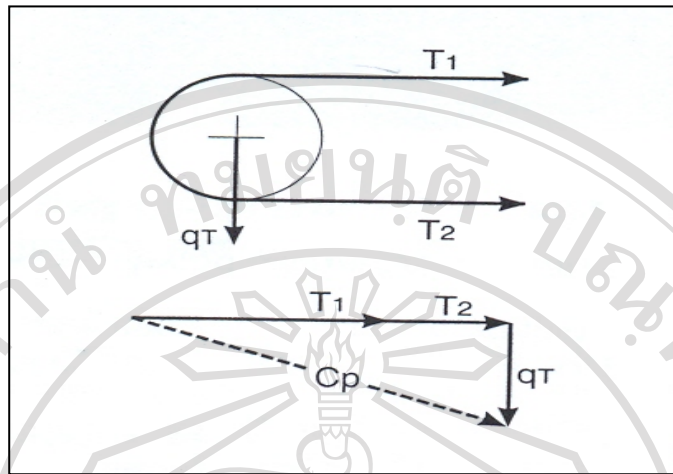
$$T_1 = T_2 + T_E \quad ; \text{ N} \quad (2.8)$$

2.4. การหาขนาดของมู่เล่สายพานลำเลียง

ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของมู่เล่ทั้งตัวขับเคลื่อนและมู่เล่ตัวตาม จะพิจารณาจากชนิดและลักษณะของสายพานว่าเป็นสายพานชนิดสายพานผ้าใบหรือสายพานลวดสลิง

2.4.1 ขนาดของเพลามู่เล่ตัวขับเคลื่อน (Drive Pulley Shaft)

หลังจากที่ได้เลือกขนาดมู่เล่แล้วจะใช้แรงดึงสายพาน T_1 บวก T_2 และน้ำหนักของมู่เล่ (qT), เพื่อหาแรงลัพท์ที่กระทำกับตัวมู่เล่ (C_p) หรือ (W) จากนั้นจึงให้หาขนาดโมเมนต์ดัดและโมเมนต์บิด (Torsion moment, M_t) หรือทอร์ก (Torque, T) จากแรงที่กระทำกับมู่เล่เพื่อจะนำไปหาขนาดเพลามู่เล่ตัวขับเคลื่อนตามสมการ 2.9–2.12, (ที่มา : Singh, M.P., 1994)



รูปที่ 2.2 แรงที่กระทำกับเพลามุมตัวขับ

$$C_p = \sqrt{(T_1 + T_2)^2 + qT^2} \quad ; \text{N} \quad (2.9)$$

$$M_b = \frac{C_p}{2} \times a \quad ; \text{Nm} \quad (2.10)$$

$$M_t, T = \frac{60P}{2\pi n} \quad ; \text{Nm} \quad (2.11)$$

P = กำลังขับ ; kW

n = ความเร็วรอบของมู่เล่ตัวขับ; rpm

$$d = \sqrt[3]{\left[\frac{16}{\pi \tau} \times \sqrt{((K_b M_b)^2 + (K_t M_t)^2)} \right]} \quad ; \text{mm} \quad (2.12)$$

d = ขนาดของเพลามู่เล่ ; mm

τ = ความเค้นเฉือนของวัสดุที่ใช้ทำเพล ; N/mm^2

ตัวประกอบการคัต K_b ขึ้นอยู่กับสภาพการใช้งาน

ตัวประกอบการบิด K_t ขึ้นอยู่กับสภาพการใช้งาน

2.5 ความเค้นที่เกิดขึ้นในเพลามู่เล่

เพลาคือคานาที่หมุนได้ ซึ่งเพลานี้จะรับแรงดึง แรงกด แรงบิดหรือแรงดัดหรือหลายแรงรวมกัน ดังนั้นการคำนวณจึงต้องใช้ความเค้นผสมเข้ามาช่วย แรงเหล่านี้ อาจจะมีการเปลี่ยนแปลงขนาดตลอดเวลา ทำให้เพลาก่อเกิดความเสียหายเพราะความล้าได้ เพลาของมู่เล่ขับเคลื่อนสายพานอยู่ภายใต้ความเค้นผสมคือความเค้นดัดและความเค้นเฉือนที่เกิดจากแรงดึงของสายพาน, (ที่มา : Belt Conveyor for Material Second Edition, 1979)

2.5.1 ความเค้นผสมระหว่างความเค้นดัดและความเค้นเฉือน เมื่อเพลายู่ภายใต้โมเมนต์ดัดและแรงบิดพร้อมกัน จะทำให้เกิดความเค้นหลัก ขึ้นในเพลานี้ซึ่งได้แก่ ความเค้นดัดสถิต ความเค้นดัดเฉื่อยและความเค้นเฉือนสถิต ความเค้นเฉือนเฉื่อย

ถ้าหากพิจารณาชิ้นส่วนที่เล็กๆ ที่ผิวของวัสดุจะได้รับความเค้นระนาบอันเกิดจากความเค้นดัดสถิต (σ_a) และความเค้นดัดเฉื่อย (σ_m) ซึ่งจะหาค่าได้จากสมการดังนี้

- ความเค้นดัดสถิตสามารถแสดงได้ดังสมการ 2.13

$$\sigma_a = K_f \frac{M_a C}{I} \quad (2.13)$$

- ความเค้นดัดเฉื่อยสามารถแสดงได้ดังสมการ 2.14

$$\sigma_m = K_f \frac{M_m C}{I} \quad (2.14)$$

- ความเค้นเฉือนสถิตสามารถแสดงได้ดังสมการ 2.15

$$\tau_a = K_{fs} \frac{T_a C}{J} \quad (2.15)$$

- ความเค้นเฉือนเฉื่อยสามารถแสดงได้ดังสมการ 2.16

$$\tau_m = K_{fs} \frac{T_m C}{J} \quad (2.16)$$

การรวมความเค้นเข้าด้วยกันตามหลักทฤษฎีพลังงานของการเปลี่ยนรูป ตามหลักการออกแบบของก๊อดแมน ดังนั้นจะให้ความเค้นสลับของวอนมิต ดังสมการ (2.17) ความเค้นเฉี่ยของวอนมิตดังสมการ (2.18) และความเค้นสูงสุดของวอนมิต แสดงตามสมการ (2.19) โดยไม่คิดแรงในแนวแกน

$$\sigma'_a = (\sigma_a^2 + 3\tau_a^2)^{\frac{1}{2}} = \left[\left(\frac{32 K_f M_a}{\pi d^3} \right)^2 + 3 \left(\frac{16 K_{fs} T_a}{\pi d^3} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.17)$$

$$\sigma'_m = (\sigma_m^2 + 3\tau_m^2)^{\frac{1}{2}} = \left[\left(\frac{32 K_f M_m}{\pi d^3} \right)^2 + 3 \left(\frac{16 K_{fs} T_m}{\pi d^3} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.18)$$

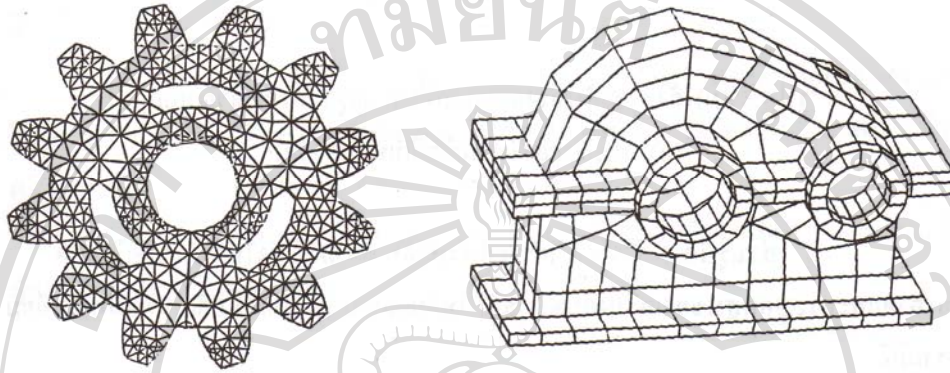
$$\sigma'_{\max} = [(\sigma_m + \sigma_a)^2 + 3(\tau_m + \tau_a)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\sigma'_{\max} = \left[\left(\frac{32 K_f (M_m + M_a)}{\pi d^3} \right)^2 + 3 \left(\frac{16 K_{fs} (T_m + T_a)}{\pi d^3} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.19)$$

2.6 ทฤษฎีระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

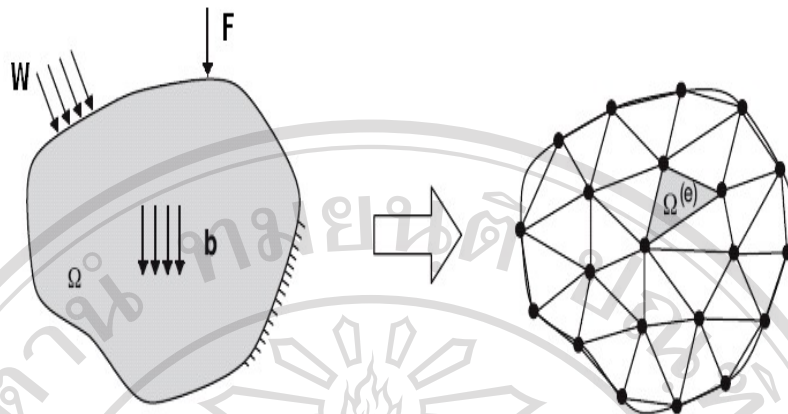
ทฤษฎีระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เป็นระเบียบวิธีเชิงตัวเลข มีแนวความคิดที่ว่าวัตถุที่มีรูปร่างซับซ้อนใดๆ จะสามารถแบ่งออกเป็นชิ้นเล็กๆ ได้ โดยแต่ละชิ้นเล็กๆ เหล่านั้นสามารถพิจารณาแยกกันอย่างอิสระและสามารถประกอบเข้ากันเป็นวัตถุรูปเดิมได้ ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เหมาะสำหรับปัญหาที่มีความยุ่งยากซับซ้อน ซึ่งไม่สามารถหาผลเฉลยแม่นยำได้จากสมการเชิงอนุพันธ์ โดยจะแก้ปัญหาลงอยู่ในรูปฟังก์ชันพีชคณิตแล้วใช้คอมพิวเตอร์คำนวณหาผลลัพธ์ซึ่งมีหลักการสำคัญคือ แบ่งแบบจำลองออกเป็นเอลิเมนต์เล็กๆ ให้มีความเหมาะสมกับรูปแบบของแบบจำลอง แต่ละเอลิเมนต์ต่อเชื่อมกันที่จุดต่อ (Node) ซึ่งเป็นตำแหน่งที่จะคำนวณตัวแปรที่ไม่ทราบค่า โดยการสร้างฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ให้มีความสอดคล้องกับสมการควบคุม ทำให้ได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับเอลิเมนต์นั้นๆ เมื่อนำสมการไฟไนต์เอลิเมนต์มาประกอบเข้าด้วยกันจะได้สมการรวม (Global Equation) จากนั้นแก้ปัญหาคำนวณด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเพื่อหาตัวแปรไม่ทราบค่าที่จุดต่อ ภายใต้สภาวะสมดุลของภาระภายนอกและเงื่อนไขขอบของแบบจำลอง เนื่องจากวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถใช้แก้สมการเชิงอนุพันธ์สำหรับปัญหาที่มีรูปร่างลักษณะ

ซับซ้อนได้อย่างมีประสิทธิภาพ, (ที่มา : อนุชา พรหมวังชา, 2544) ทำให้การประยุกต์ใช้วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ขยายวงกว้างออกไป ดังเช่นรูปที่ 2.3 แสดงรูปแบบจำลองของไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อใช้ในการกระจายตัวของความเค้นของเกียร์ เป็นต้น



รูปที่ 2.3 แบบจำลองของไฟไนต์เอลิเมนต์ของเกียร์, (ที่มา : เศษ เจริญพุทธทอง, 2542)

พิจารณาวัตถุที่มีเนื้อต่อเนื่องใน 3 มิติ รับภาระแบบเป็นจุด (F) แบบกระจาย (W) และแรงเนื่องจากน้ำหนักของวัตถุ (b) ดังรูปที่ 2.4 เมื่อแบบจำลองถูกแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์เล็กๆ ภาระแบบเป็นจุดและแบบกระจาย การขจัดและเงื่อนไขขอบจะถูกแปลงเป็นค่าลงในแต่ละจุดต่อ ในการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ สำหรับปัญหา 3 มิติ จะใช้หลักการของงานเสมือนเหมือนกับสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหา 2 มิติ ต่างกันที่ในปัญหา 3 มิติ จะมี 3 แกน คือ x, y, z ดังนั้นสนามการขจัดจะประกอบไปด้วย u, v, w โดยแต่ละจุดต่อจะมีการขจัด 3 ค่า, (ที่มา : ปราโมช เศษอำไพ, 2542)



รูปที่ 2.4 การแบ่งแบบจำลองออกเป็นเอลิเมนต์เล็กๆ

2.6.1 การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการวิเคราะห์ของแข็ง 3 มิติ จะใช้หลักการของงานเสมือนเอลิเมนต์ที่พิจารณาจะเป็นเอลิเมนต์ที่มีสนามภายในเป็นสนามของการขจัดโดยมีความสัมพันธ์ของความเค้นและความเครียดคือ

$$\{\varepsilon\} = [\partial]\{u\} \quad (2.20)$$

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\} \quad (2.21)$$

เมื่อ $\{\varepsilon\}$ คือ เวกเตอร์ของสนามความเครียดภายในเอลิเมนต์

$\{\partial\}$ คือ Derivative Operator Matrix

$\{u\}$ คือ เวกเตอร์ของสนามการขจัดภายในเอลิเมนต์ประกอบด้วย u, v, w

$\{\sigma\}$ คือ เวกเตอร์ของความเค้นภายในเอลิเมนต์

$[E]$ คือ เมทริกซ์แสดงความสัมพันธ์ของความเค้นและความเครียดในสภาวะยืดหยุ่น

สนามการขจัดภายในโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นค่าสนามภายในเอลิเมนต์และเป็นค่าฟังก์ชันของการขจัดที่จุดต่อ (Node) กล่าวคือ

$$\{u\} = [N]\{d\} \quad (2.22)$$

เมื่อ $[N]$ คือ ฟังก์ชันรูปร่าง (Shape Function) ซึ่งจะขึ้นอยู่กับรูปร่างของเอลิเมนต์
 $\{d\}$ คือ ค่าการจัดที่จุดต่อของเอลิเมนต์เป็นค่าเวกเตอร์ที่แยกมาจากเวกเตอร์ของ
 การจัดรวม $\{D\}$ ซึ่งเป็นผลลัพธ์ของการแก้สมการ

$$[K]\{D\} = \{F\} \quad (2.23)$$

$$\{D\} = [K]^{-1}\{F\} \quad (2.24)$$

เมื่อ $[K]$ คือ Global Stiffness Matrix เป็นเมตริกซ์รวมที่ประกอบ (Assembly) จาก
 Stiffness Matrix $[k]$ ของทุกเอลิเมนต์

$\{F\}$ คือ Global Force Vector เป็นเวกเตอร์รวมที่ประกอบ (Assembly) จาก Element-
 Force Vector $\{f\}$

การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ก็คือการหาค่า $[k]$ และ $\{f\}$ ของเอลิเมนต์ที่มีรูปร่างใดๆ
 โดยที่สมการสมดุลในเอลิเมนต์ คือ

$$[k]\{d\} = \{f\} \quad (2.25)$$

การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการวิเคราะห์ของแข็ง 3 มิติ จะใช้หลักการของ
 งานเสมือน มีหลักการที่สำคัญคือ พลังงานความเครียดเสมือนจะเท่ากับงานที่เกิดขึ้นจากแรง
 ภายนอก

Virtual strain energy = Virtual work of external

$$\delta U_E = \delta W_E \quad (2.26)$$

เมื่อ U_E คือ พลังงานความเครียด

W_E คือ งานเนื่องจากแรงภายนอก

การหา δU_E จะเริ่มจากการแทนค่า $\{u\}$ จากสมการ (2.22) ลงในสมการ (2.20) จะได้
 ความเครียดภายในเอลิเมนต์เท่ากับ

$$\{\varepsilon\} = [d][N]\{d\} \quad (2.27)$$

$$\{\varepsilon\} = [B]\{d\} \quad (2.28)$$

เมื่อ $[B]$ คือ อนุพันธ์ของ $[N]$ สมการ (2.28) แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างการขจัดและความเครียด

ถ้าสมมติว่ามีการขจัดเสมือน $\{\delta d\}$ จะได้ความเครียดเสมือนเท่ากับ $\{\delta \varepsilon\}$ จากพลังงานความเครียดซึ่งมีค่าเท่ากับพื้นที่ใต้กราฟของความเค้นและความเครียด ดังนั้นถ้ามีความเครียดเสมือน $\{\delta \varepsilon\}$ ภายใต้สภาวะความเค้น $\{\sigma\}$ จะได้พลังงานความเครียดเสมือนในเอลิเมนต์ที่มีปริมาตร V คือ

$$\delta U_E = \int_V \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV \quad (2.29)$$

แทนค่า $\{\delta \varepsilon\}^T$ ด้วย $\{\delta d\}^T [B]^T$ และแทนสมการ (2.28) ลงในสมการ (2.29) ได้ $\{\sigma\}$ เท่ากับ $[E][B]\{d\}$ ดังนั้นสมการ (2.29) จะได้ว่า

$$\delta U_E = \int_V \{\delta d\}^T [B]^T [E][B]\{d\} dV \quad (2.30)$$

สำหรับ δW_E จะเท่ากับการขจัดเสมือนคูณด้วยเวกเตอร์ของแรงจากภายนอกที่กระทำที่จุดต่อของเอลิเมนต์

$$\delta W_E = \{\delta d\}^T \{f\} \quad (2.31)$$

จากสมการสมดุลพลังงาน สมการที่ (2.26) จะได้

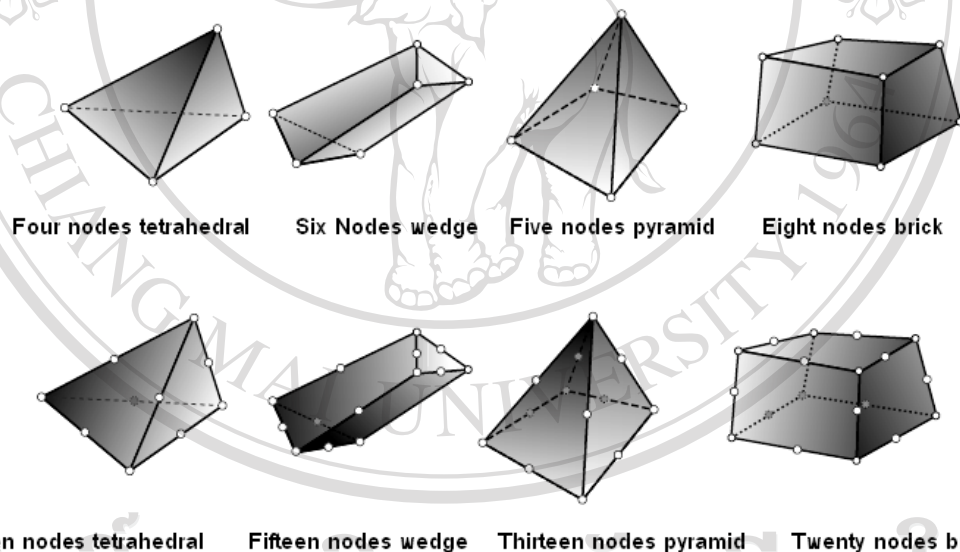
$$\int_V \{\delta d\}^T [B]^T [E][B]\{d\} dV = \{\delta d\}^T \{f\} \quad (2.32)$$

เทอม $\{\delta d\}$ เป็นการขจัดเสมือนที่จุดต่อและ $\{d\}$ เป็นค่าการขจัดที่จุดต่อ ค่าทั้งสองไม่ขึ้นกับปริมาตรของเอลิเมนต์ ดังนั้น

$$[k]\{d\} = \{f\} \quad (2.33)$$

$$\text{เมื่อ } [k] = \int_V [B]^T [E] [B] dV \quad (2.34)$$

2.6.2 เอลิเมนต์ 3 มิติ ในการแบ่งโครงสร้างออกเป็นเอลิเมนต์เล็กๆ นั้น ต้องเลือกชนิดของเอลิเมนต์ที่จะนำไปวิเคราะห์ให้เหมาะสม การเลือกชนิดของเอลิเมนต์จะต้องคำนึงถึงคุณสมบัติของวัสดุหรือโครงสร้างและจำนวนแกน (x, y, z) ที่ใช้บอกตำแหน่งของเอลิเมนต์โดยเอลิเมนต์ 3 มิติที่ใช้ทั่วไปจะมีหลายชนิดดังแสดงในรูปที่ 2.5, (ที่มา : ธงชัย ฟองสมุทร. 2549)



รูปที่ 2.5 รูปร่างของเอลิเมนต์ 3 มิติแบบต่างๆ, (ที่มา : Daryl L. Logan. 2001)

เอลิเมนต์แบบ 3 มิติ ที่นิยมใช้กันมากในทางปฏิบัติมีอยู่สองแบบ คือ เอลิเมนต์ทรงสี่หน้า (Tetrahedral Element) และเอลิเมนต์ทรงหกหน้า (Hexahedral Element) โดยทั่วไปเอลิเมนต์ที่ประกอบด้วยจำนวนจุดต่อมากๆ จะให้ผลเฉลยที่ใกล้เคียงกับค่าแม่นยำมากกว่าของเอลิเมนต์ที่ประกอบด้วยจำนวนจุดต่อน้อย แต่จะยุ่งยากในการแก้สมการและใช้เวลาในการคำนวณมาก

2.7 สเตรนเกจ (Strain Gage)

เซนเซอร์ ที่จะศึกษากันในที่นี้เป็นอุปกรณ์ที่ใช้วัดความเครียดหรือ Strain Gage ซึ่ง สเตรนเกจ นี้เป็นอุปกรณ์ที่นิยมใช้กันอย่างกว้างขวางทั้งในห้องปฏิบัติการและใช้เป็นเครื่องมือวัดหลายๆแบบ ในขั้นแรกนี้เราขอทบทวนเรื่องของความเครียดก่อน

ความเครียดทางวิศวกรรม สำหรับวัสดุที่อยู่ภายใต้การกระแบบธรรมดา นิยามว่าคือ อัตราการเปลี่ยนแปลงความยาวของวัสดุต่อหน่วยความยาวเดิม ดังนั้นในบางกรณีเราอาจจะได้ยินว่ามีผู้เรียกว่า unit strain สำหรับความเครียดตามแนวแกน ϵ_α สามารถเขียนเป็นสมการ ได้อยู่ในรูป

$$\epsilon_\alpha = \frac{dL}{L} \approx \frac{L_2 - L_1}{L_1} = \frac{\Delta L}{L_1} \quad (2.35)$$

เมื่อ

ϵ_α = axial strain

L_1 = linear dimension

L_2 = final linear dimension

จากนิยามตามสมการ (2.35) นี้เราจะเห็นว่าค่าความเครียดนั้นจะเป็นปริมาณที่ไม่มีมิติ แต่อย่างไรก็ตามสำหรับทางวิศวกรรมนั้น ส่วนใหญ่เราจะให้ความสนใจกับวัสดุที่มีการยืดตัวไม่มาก หรืออยู่ในช่วง Elastic Limit ซึ่งก็จะทำให้ค่าความเครียดเป็นตัวเลขที่มีค่าน้อยมาก ดังนั้นในบางกรณีเราจึงนิยมที่จะคูณค่าตัวเลขที่ได้นั้นด้วย 10^6 แล้วเรียกค่าที่ได้ว่าเป็น micro-strain (μ -strain, $\mu\epsilon$ หรือเราอาจเขียน μ -m/m ก็ได้)

ประโยชน์ที่ถ้าหากทราบค่าความเครียดแล้วนั้น ค่าความเค้น (Stress) ที่เกิดขึ้นในชิ้นงานสามารถหาได้โดยใช้ความสัมพันธ์ของความเค้น-ความเครียด ตัวอย่างเช่นกรณีของ Isotropic Materials ใน 3 มิติจะได้ว่า

$$\epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \sigma_{kk} \quad (2.36)$$

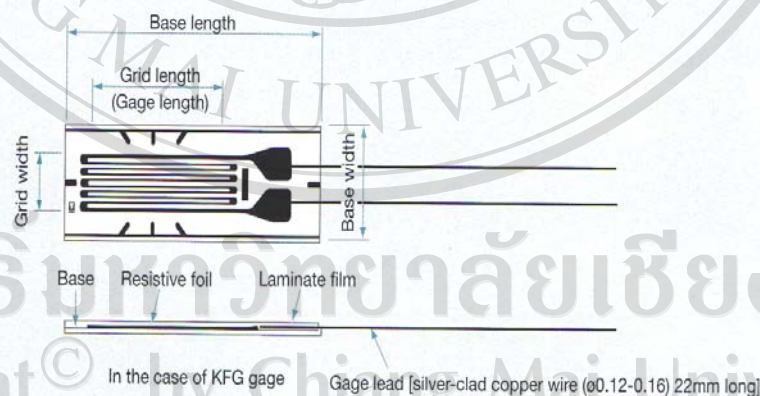
โดย E คือ Young's Modulus

ν คือ Poisson's Ratio

ดังนั้นเมื่อทราบค่าความเครียดก็จะสามารถหาค่าความเค้นและค่าภาระกรรมต่างที่เกี่ยวข้องได้ ทำให้ Strain Gage เป็นอุปกรณ์ที่สำคัญมากแบบหนึ่งในทางวิศวกรรม โดยเฉพาะอย่างยิ่งในด้านการวัดและเครื่องมือวัดซึ่งสามารถนำไปประยุกต์ต่อการวัดการเคลื่อนที่, ความดัน, แรง, โมเมนต์ ฯลฯ.

2.7.1 การวัดความเครียด การวัดความเครียดนั้นวัดได้ทั้งแบบโดยตรงและทางอ้อม การวัดโดยตรงก็คือค่าที่อ่านได้จะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับความเครียดที่เกิดขึ้นบนชิ้นงานเลย สำหรับ Strain Gage นั้นเป็นการวัดความเครียดโดยตรงนั่นคือค่าที่อ่านได้จาก Strain Gage จะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับความเครียดที่เกิดขึ้น อย่างไรก็ตามในช่วงก่อนทศวรรษที่ 1930 นั้นยังไม่มีอุปกรณ์ที่สามารถอ่านค่าความเครียดได้โดยตรง แต่จะเป็นการอ่านค่าระยะการยืดตัวที่เกิดขึ้นกับชิ้นงาน อุปกรณ์นี้เรียกว่า Extensometer ซึ่งในปัจจุบันก็ยังพบเห็นกันอยู่โดยระยะยืดที่วัดได้สามารถนำไปหาค่าความเครียดได้โดยใช้สมการ (2.35)

อุปกรณ์วัดความเครียดโดยตรงนั้นมีหลายแบบ เช่นแบบที่ใช้หลักการทางไฟฟ้า ซึ่งโดยปกติจะใช้หลักการของ Resistive, Capacitate, Inductive หรือ Photoelectric สำหรับ Strain Gage ที่นิยมใช้กันอย่างกว้างขวางและอาจกล่าวได้ว่ากว้างขวางที่สุดจะเป็นแบบ Resistive คือวัดการเปลี่ยนแปลงของความต้านทานไฟฟ้า ส่วนอุปกรณ์วัดความเครียดแบบอื่นๆนั้นก็จะใช้หลักการของ Optical เช่น Photoelasticity, Moire technique, และ Holographic Interferometry เป็นต้น



รูปที่ 2.6 โครงสร้างของ Strain Gage, (ที่มา : Kyowa Electronic, 2002)

ในปี 1856 Load Kelvin แสดงให้เห็นว่าความต้านทานไฟฟ้าของลวดทองแดง และลวดเหล็กนั้น จะเปลี่ยนไปเมื่อตกอยู่ภายใต้ความเครียด โดยเขาได้ใช้ Wheatstone Bridge Circuit และ Galvanometer เป็นอุปกรณ์ที่ใช้ในการทดลอง อย่างไรก็ตาม Strain Gage แบบความต้านทานไฟฟ้า

ที่สามารถนำมาใช้งานได้จริงนั้นได้แพร่หลายขึ้นในช่วงปลายทศวรรษ 1930 และเมื่อเทคโนโลยีของวัสดุพัฒนาขึ้น Strain Gage ก็ได้รับการพัฒนาเรื่อยมา ดังรูปที่ 2.6 แสดงถึงส่วนประกอบ Strain Gage ที่มีชื่อในปัจจุบันนี้

ทฤษฎีและหลักการของ Resistance Strain Gage นั้นไม่มีอะไรซับซ้อน จากหลักการที่เมื่อลวดนั้นถูกดึงจะทำให้ความยาวเพิ่มขึ้นและพื้นที่หน้าตัดลดลง ยังผลให้สภาพความต้านทานไฟฟ้าเปลี่ยนไป ถ้าหากว่าลวดนั้นอยู่ติดกับชิ้นงาน เมื่อชิ้นงานเปลี่ยนขนาดไปลวดก็จะเปลี่ยนแปลงขนาดตามไปด้วย ดังนั้นการวัดการเปลี่ยนแปลงค่าความต้านทานไฟฟ้าของเส้นลวดก็จะเป็นสัดส่วนกับความเครียดที่เกิดขึ้นกับชิ้นงาน

ความสัมพันธ์ของคุณสมบัติทางไฟฟ้าและคุณสมบัติทางกลของวัสดุนั้น สามารถหาได้ดังต่อไปนี้ สมมุติว่าลวดตัวนำมีความยาวเริ่มต้น L พื้นที่หน้าตัด CD^2 (เส้นลวดไม่จำเป็นต้องมีหน้าตัดเป็นวงกลม โดย D จะเป็นมิติความยาวของหน้าตัด และ C เป็นค่าคงที่ ในกรณีของวงกลม D จะเป็นเส้นผ่านศูนย์กลางและ $C = \pi/4$ ส่วนในกรณีสี่เหลี่ยมจัตุรัส D เป็นด้านด้านหนึ่ง และ $C = 1$ เป็นต้น) เมื่อลวดตัวนำอยู่ภายใต้แรงดึง ความยาวจะเพิ่มขึ้น ส่วนพื้นที่หน้าตัดจะลดลงตาม Poisson's ratio จากหลักการไฟฟ้าเบื้องต้น, (ที่มา : Jame W.Dally ,William F.Riley, 1990)

$$R = \frac{\rho L}{A} = \frac{\rho L}{CD^2} \quad (2.37)$$

เมื่อ R คือ ความต้านทานไฟฟ้า (Ω) และ ρ คือ Resistivity ของวัสดุ ($\Omega \text{ m}$) เมื่อเส้นลวดยืดตัวออกนั้น จะสามารถพิจารณาได้ว่า ค่าทุกค่าในสมการ (2.37) ยกเว้นค่า C นั้นเปลี่ยนไป ดังนั้นอนุพันธ์ของสมการ (2.37) จะเป็น

$$dR = \frac{CD^2 (Ld\rho + \rho dL) - 2C\rho LDdD}{(CD^2)^2}$$

$$dR = \frac{1}{CD^2} \left[(Ld\rho + \rho dL) - 2\rho L \frac{dD}{D} \right]$$

(2.38)

หารสมการ (2.38) ด้วย (2.37) จะได้

$$\frac{dR}{R} = \frac{dL}{L} - 2 \frac{dD}{D} + \frac{d\rho}{\rho} \quad (2.39a)$$

ซึ่งอาจเขียนอยู่ในรูป

$$\frac{dR/R}{dL/L} = 1 - 2 \frac{dD/D}{dL/L} + \frac{d\rho/\rho}{dL/L} \quad (2.39b)$$

$$\frac{dL}{L} = \text{axial strain, } \varepsilon_a, \quad \frac{dD}{D} = \text{lateral strain, } \varepsilon_L$$

$$- \frac{dD/D}{dL/L} = \text{Poisson's ratio, } \nu$$

และกำหนดให้ Gage Factor, F มีค่าเป็น

$$F = \frac{dR/R}{dL/L}$$

ซึ่งจะได้

$$F = \frac{dR/R}{dL/L} = \frac{dR/R}{\varepsilon_a} = 1 + 2\nu + \frac{d\rho/\rho}{dL/L} \quad (2.40)$$

ซึ่งสมการนี้จะเป็นสมการพื้นฐานของ Strain gage แบบความต้านทานไฟฟ้า

ในขั้นตอนนี้เราลองมาพิจารณาสมการ (2.40) ถ้าหากว่าเราให้ ρ คงที่ เราจะได้ว่า $F = 1 + 2\nu$

ซึ่งสำหรับโลหะทั่วไปๆ ที่ใช้ทำ Strain Gage จะมีค่า Gage Factor จะมีค่าประมาณ 2.0 สำหรับค่าที่แน่นอนจะทราบได้จากผู้ผลิต Strain Gage นั้นๆ ส่วนอีกค่าหนึ่งที่เราจะได้มาจากผู้ผลิต Strain gage ก็คือค่าความต้านทานของ Strain Gage, R , ซึ่งทั้งค่า F และ R นั้นจะถือว่าเป็นค่าคงที่ในสภาพการทำงานของ Strain Gage ในช่วงความเครียดที่เหมาะสมกับการใช้ Gage แบบนั้นๆ จากสมการ (2.40) จะได้

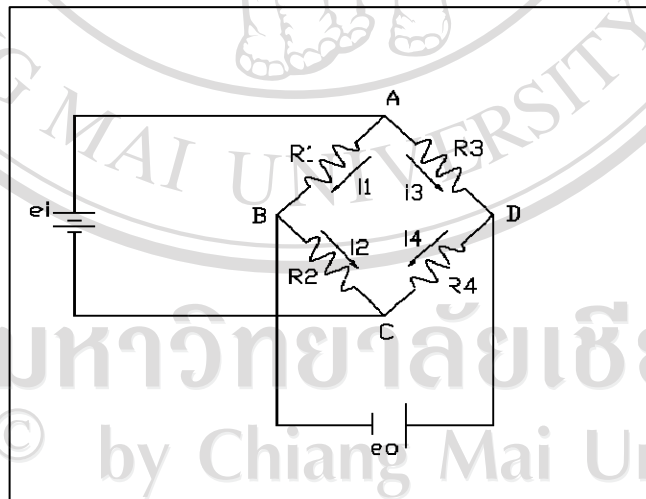
$$\varepsilon_a = \frac{dR/R}{F} \approx \frac{1}{F} \frac{\Delta R}{R} \quad (2.41)$$

ดังนั้นจากสมการ (2.41) ถ้าหากว่าเราสามารถวัดค่า ΔR ที่เปลี่ยนแปลงไปเมื่อวัสดุตกอยู่ภายใต้ความเครียด ก็จะทำให้สามารถหาค่าความเครียด ที่เกิดขึ้นกับวัสดุได้แทนการใช้วิธีการวัดระยะทางโดยตรงอย่างไรก็ตามหากว่าเราลองพิจารณาสมการ (2.41) ในกรณีทั่วไป ถ้าหากใช้

Strain Gage ที่มี $F = 2.0$ และความต้านทาน $R = 120 \, \Omega$ เมื่อเกิดความเครียดขึ้น $1 \, \mu\text{-strain}$ จากสมการ (2.41) จะได้ว่าค่า $\Delta R = FR\epsilon = (2)(120)(1 \times 10^{-6}) = 0.00024 \, \Omega$ หรือความต้านทานของ Strain Gage จะเปลี่ยนไป 0.0002% ซึ่งเป็นค่าที่น้อยมากและการเปลี่ยนแปลงความต้านทานในระดับนี้จึงไม่สามารถที่จะใช้โอห์มมิเตอร์ธรรมดาวัดค่าได้ ดังนั้นจึงจำเป็นต้องมีวงจรไฟฟ้าสำหรับที่จะวัดการเปลี่ยนแปลงความต้านทานในระดับนี้หรือกล่าวโดยย่อก็คือสัญญาณที่ได้จาก Strain Gage จะอยู่ในสภาพที่ไม่เหมาะสมกับการวัด เราจึงต้องการปรับสภาพสัญญาณก่อนทำการบันทึกข้อมูล

2.7.2 วงจรไฟฟ้าเพื่อใช้ปรับสภาพสัญญาณที่ใช้กับ Strain Gage จะต้องเป็นวงจรไฟฟ้าที่มีความไวสูงมากเพราะว่า Strain Gage เองมีการตอบสนองต่อการเปลี่ยนแปลงที่ค่อนข้างต่ำ สำหรับวงจรไฟฟ้าที่ใช้สำหรับ Strain Gage มีด้วยกันหลายวงจร แต่ในเอกสารเรานี้จะกล่าวถึงเฉพาะวงจร Wheatston Bridge แบบความต่างศักย์คงที่เท่านั้น เพราะจัดว่าเป็นวงจรที่นิยมใช้กับ Strain Gage มากที่สุด

สำหรับวงจรไฟฟ้ามาตรฐานนี้ท่านคงจะได้เรียนมาในวิชาวงจรไฟฟ้าเบื้องต้นแล้ว จากรูป ถ้าหากว่าวงจรไฟฟ้านี้สมดุลนั้นคือไม่มีกระแสไฟฟ้าไหลผ่านมิเตอร์ หรือ $i_g = 0$ สำหรับกรณีนี้จะได้ว่า $i_1 = i_2$ และ $i_3 = i_4$ แต่ความต่างศักย์ที่ตกคร่อมมิเตอร์ก็จะต้องเป็นศูนย์เช่นกันดังนั้น $i_1 R_1 = i_3 R_3$ และ $i_2 R_2 = i_4 R_4$ จากความสัมพันธ์ดังกล่าวจะได้ว่า



รูปที่ 2.7 วงจรเวสโตนบริดจ์, ที่มา : (Richard S. Figliola ,Donald E. Beasley, 2006)

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \quad \text{หรือ} \quad \frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4} \quad (2.42)$$

ซึ่งจากหลักการนี้สามารถจะวัดการเปลี่ยนแปลงความต้านทานของความต้านทานแต่ละตัวได้แต่เป็นการใช้การตรวจวัด Voltage แทนที่จะตรวจวัดความต้านทาน ซึ่งวงจรสำหรับ Strain gage นี้บางครั้งเรียกว่า Voltage-Sensitive Wheatston bridge เมื่อพิจารณาจากรูปข้างบนนี้จะได้

$$e_0 = e_B - e_D$$

หรือโดยใช้ Voltage-Divider Relation จะได้

$$e_0 = e_i \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right)$$

หรือ

$$e_0 = e_i \left(\frac{R_2 R_3 - R_4 R_1}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \right)$$

ถ้าหากว่า R_1 เปลี่ยนไปจากเดิมอีก ΔR เราจะได้ว่า

$$e_0 + \Delta e_0 = e_i \left[\frac{R_2 R_3 - (R_1 + \Delta R_1) R_4}{(R_1 + \Delta R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \right]$$

ถ้าหากว่าในขั้นตอนเริ่มต้นนั้น Bridge อยู่ในสภาพสมดุล เราจะได้ว่า $e_0 = 0$ ดังนั้นสมการข้างบนนี้จะเปลี่ยนเป็น

$$\frac{\Delta e_0}{e_i} = \frac{\Delta R_1 / R}{4 + 2(\Delta R_1 / R)} \quad (2.43)$$

ในทางปฏิบัติเราจะใช้ความต้านทานตัวหนึ่งใน Bridge เป็น Strain Gage ดังแสดงในรูป โดยในขั้นแรกเราจะทำให้ Bridge นี้สมดุล เมื่อเราให้ภาระกับชิ้นทดสอบ ชิ้นทดสอบจะเกิดความเครียดขึ้นและ Strain gage ที่ติดอยู่ก็จะเกิดความเครียดในปริมาณที่เท่ากัน และเมื่อความต้านทานของ Strain Gage นี้เปลี่ยนไปเราก็สามารถตรวจวัดได้ โดยใช้การตรวจวัดความต่างศักย์ที่เกิดขึ้นในวงจรแทน และใช้สมการ (2.41) หาค่าความต้านทานที่เปลี่ยนไป

$$e_0 = e_B - e_D$$

หรือโดยใช้ Voltage-Divider Relation จะได้

$$e_0 = e_i \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right)$$

หรือ

$$e_0 = e_i \left(\frac{R_2 R_3 - R_4 R_1}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \right)$$

ถ้าหากว่า R_1 เปลี่ยนไปจากเดิมอีก ΔR เราจะได้ว่า

$$e_0 + \Delta e_0 = e_i \left[\frac{R_2 R_3 - (R_1 + \Delta R_1) R_4}{(R_1 + \Delta R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \right]$$

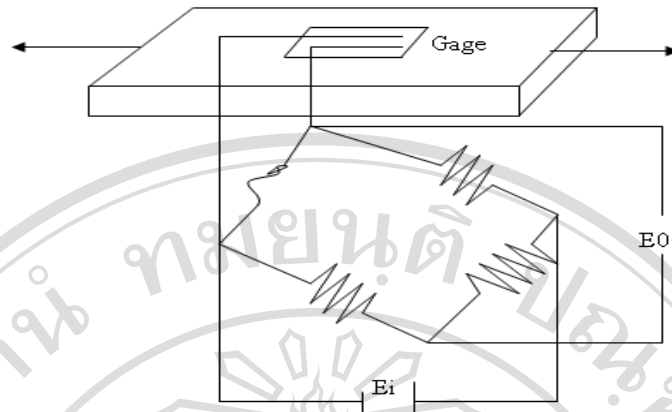
ถ้าหากว่าในขั้นตอนเริ่มต้นนั้น Bridge อยู่ในสภาพสมดุล เราจะได้ว่า $e_0 = 0$ ดังนั้น สมการข้างบนนี้จะเป็น

$$\frac{\Delta e_0}{e_i} = \frac{\Delta R_1 / R}{4 + 2(\Delta R_1 / R)} \quad (2.44)$$

ในทางปฏิบัติเราจะใช้ความต้านทานตัวหนึ่งใน Bridge เป็น Strain Gage ดังแสดงในรูป โดยในขั้นแรกเราจะทำให้ Bridge นี้สมดุล เมื่อเราให้ภาระกับชิ้นทดสอบ ชิ้นทดสอบจะเกิดความเครียดขึ้นและ Strain gage ที่ติดอยู่ก็จะเกิดความเครียดในปริมาณที่เท่ากัน และเมื่อความต้านทานของ Strain Gage นี้เปลี่ยนไปเราก็สามารถตรวจจับได้ โดยใช้การตรวจจับความต่างศักย์ที่เกิดขึ้นในวงจรแทน และใช้สมการ (2.41) หาค่าความต้านทานที่เปลี่ยนไป

แต่ในเมื่อเราต้องการทราบค่าความเครียด ดังนั้นเพื่อความสะดวกเราจึงใช้ค่าจากสมการ (2.42) คือ $\varepsilon = \frac{1}{F} \frac{\Delta R}{R}$ หรือ $\Delta R = FR\varepsilon$ แทนลงในสมการ (2.43) เพื่อให้ได้

$$\Delta e_0 = \frac{e_i F \varepsilon}{4 + 2F \varepsilon} \quad (2.45)$$



รูปที่ 2.8 การต่อวงจรเวสโตนบริดจ์

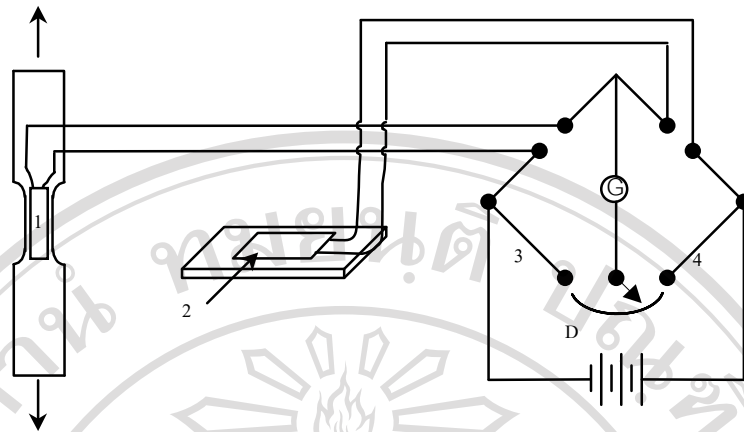
ซึ่งสมการนี้จะให้ค่าการเปลี่ยนแปลงของความต่างศักย์ที่สามารถตรวจวัดได้ สำหรับสมการนี้เมื่อพิจารณาครั้งแรกอาจจะเห็นว่าความต่างศักย์นี้ไม่ได้เป็น Linear Function ของ Strain แต่ถ้าหากลองพิจารณาในกรณีที่ค่าของ Strain นั้นมีค่าน้อยมากทำให้ $4 + 2F\varepsilon \approx 4$ ซึ่งจะได้ว่า

$$\Delta e_0 \approx \frac{e_1 F \varepsilon}{4}$$

ดังนั้นในช่วงที่ค่าความเครียดมีค่าน้อยนั้น ค่าการเปลี่ยนแปลง voltage และ strain จะประมาณได้ว่าเป็น linear function ต่อกัน ลองพิจารณากรณีที่ยกเป็นตัวอย่างก่อนหน้านี้สำหรับ Strain gage ที่มี $F = 2.0$, $R = 120 \Omega$ ซึ่งใช้กับวงจรที่มีค่า $e_1 = 8 \text{ V}$ จะได้ $\Delta e_0 = \frac{8 \times 2 \times \varepsilon}{4 + 2 \times 2 \times \varepsilon}$ และสำหรับความเครียด $\varepsilon = 1 \mu\text{-Strain}$ ซึ่งสามารถประมาณการได้ว่า $4 + 4\varepsilon \approx 4$ ซึ่งทำให้ได้ $e_0 = 4\varepsilon \text{ V} = 4 \mu\text{V}$

2.7.3 การป้องกันผลกระทบของอุณหภูมิ

เมื่อเราผ่านกระแสไฟฟ้าเข้าสู่ขดลวดความต้านทานก็จะทำให้เกิดความร้อนขึ้น ซึ่งอาจทำให้สภาพทางไฟฟ้าของขดลวดเปลี่ยนแปลงไป ดังนั้นเมื่อมีกระแสไฟฟ้าผ่าน Strain Gage ระยะเวลาหนึ่งอาจทำให้ความต้านทานของขดลวดเปลี่ยนแปลงไปแม้ว่าความเครียดของขดลวดไม่มีการเปลี่ยนแปลงไป เราเรียกผลกระทบนี้ว่าผลกระทบเนื่องจากอุณหภูมิ การป้องกันผลกระทบนี้สามารถทำได้โดยใช้ Strain Gage ชนิดเดียวกันติดบนชิ้นวัสดุแบบเดียวกับชิ้นงาน แต่ไม่มีการให้ภาระกรรมใดๆกับชิ้นงานนี้ ดังแสดงในรูปที่ 2.9



รูปที่ 2.9 การต่อ Strain Gageเข้ากับวงจรเวสโตนบริดจ์

ดังนั้นเมื่อมีกระแสไฟฟ้าผ่านขดลวดจะทำให้ทั้ง gage ที่ติดบนชิ้นงานจริงและ gage ที่ติดไว้โดยไม่มีการเกิดการเปลี่ยนแปลงเนื่องจากอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไปเนื่องจากกระแสไฟฟ้าเท่ากัน พิจารณาจากวงจร Bridge พื้นฐานเมื่ออยู่ในสภาพสมดุลเราจะได้

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$$

ถ้าหากว่าอุณหภูมิเปลี่ยนแปลงไปเนื่องจากกระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านขดลวด ทำให้ความต้านทานของ gage 1 และ 2 เปลี่ยนไป ΔR ซึ่งจะได้

$$\frac{R_1 + \Delta R}{R_2 + \Delta R} = \frac{R_3}{R_4}$$

ถ้าหากว่าก่อนที่อุณหภูมิจะเปลี่ยนแปลงไป ซึ่งทำให้ความต้านทานเปลี่ยนไปนั้น เราให้ Bridge อยู่ในสภาพสมดุล จากนั้นเมื่อมีกระแสไฟฟ้าผ่านอุณหภูมิของ Gage ทั้งสองก็จะเปลี่ยนไป แต่วงจร bridge ก็ยังจะสมดุลอยู่ จนกว่าจะมีความเครียดเกิดขึ้นบน gage 1 ดังนั้นการติดตั้งแบบนี้จะสามารถป้องกันผลกระทบจากอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไปได้ ส่วน gage ที่ติดโดยไม่มีการใดๆกระทำมักจะเรียกว่า “dummy gage”