บทที่ 2
กรอบแนวคิดและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

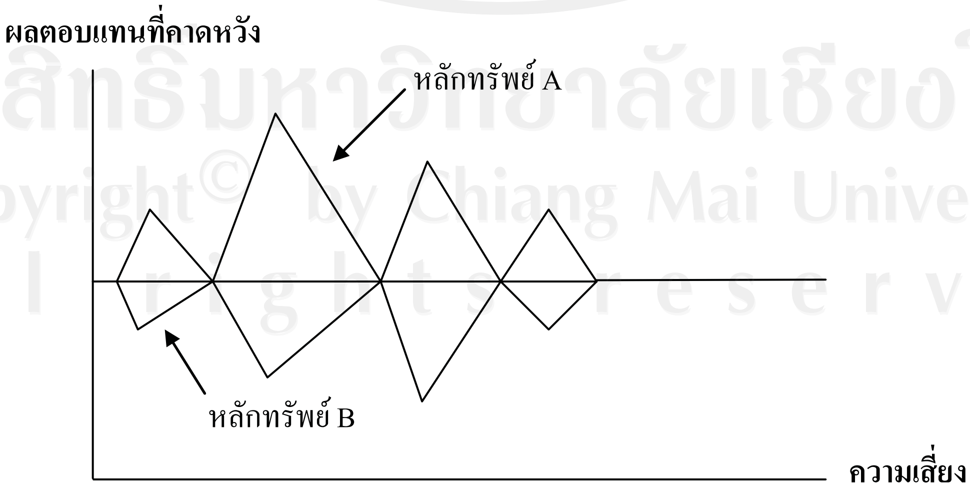
2.1 กรอบแนวคิดและทฤษฎีที่เกี่ยวข้องทางเศรษฐศาสตร์

การศึกษาในครั้งนี้เป็นการวิเคราะห์อัตราผลตอบแทนของราคาทองคำล่วงหน้า (Gold Futures) กับดัชนีกลุ่ม 50 หลักทรัพย์ล่วงหน้า (SET50 Index Futures) ในตลาดอนุพันธ์แห่งประเทศไทย โดยผู้ศึกษาได้รวบรวมแนวคิด ทฤษฎี และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ซึ่งได้จากการค้นคว้าจากแหล่งข้อมูลต่างๆเพื่อนำมาใช้เป็นแนวทางในการศึกษา

2.1.1 ทฤษฎีการลงทุนเบื้องต้น

ทฤษฎีการบริหาร พอร์ตโฟลิโอสมัยใหม่ (Modern Portfolio Theory: MPT) กล่าวไว้ว่า นักลงทุนทุกรายเป็นผู้มีเหตุผล (Rational) และเลือกลงทุนภายในกรอบความเสี่ยงที่ตนได้กำหนดไว้ล่วงหน้า โดยกระจายการลงทุนในหลักทรัพย์หลาย ๆ ประเภทที่มีความสัมพันธ์ (Correlation) ของอัตราผลตอบแทนที่เกิดขึ้นจริงจะไม่เบี่ยงเบนไปจากผลตอบแทนที่คาดหวังไว้

รูปที่ 2.1 การลงทุนเบื้องต้น



ยกตัวอย่างเช่น หากลงทุนในหลักทรัพย์ A และหลักทรัพย์ B ซึ่งอัตราผลตอบแทนของหลักทรัพย์ทั้งสองมีความสัมพันธ์เกือบจะเป็นไปในทิศทางตรงกันข้ามอย่างสมบูรณ์ เมื่อมีเหตุการณ์ใดเหตุการณ์หนึ่งมากระทบหลักทรัพย์ตัวใดตัวหนึ่ง จนทำให้ผลตอบแทนเปลี่ยนแปลงไป ผลตอบแทนรวมของพอร์ตการลงทุนไม่เปลี่ยนแปลงมากนัก อีกทั้งยังช่วยลดความรุนแรงของความเสี่ยงที่เกิดขึ้นด้วย

Harry Markowitz บิดาแห่งทฤษฎีกลุ่มหลักทรัพย์สมัยใหม่มีแนวคิดเรื่องการลงทุนว่า โดยทั่วไปนักลงทุนจะซื้อสินทรัพย์ที่มีความเสี่ยงเมื่อคาดหวังว่าจะได้รับผลตอบแทนคุ้มค่าพอต่อความเสี่ยง ดังนั้นการหาอัตราผลตอบแทนความเสี่ยงที่เหมาะสมกับระดับความเสี่ยงจึงเป็นสิ่งที่นักลงทุนต้องพิจารณา โดยการนำแบบจำลองการตั้งราคาหลักทรัพย์ (Capital Asset Pricing: CAPM) มาประกอบการศึกษาทำการวิเคราะห์ผลทางสถิติเพื่อประเมินผลตอบแทน Markowitz ได้สมมติว่าผู้ลงทุนทุกคนเป็นผู้ลงทุนประเภทหลีกเลี่ยงความเสี่ยง (risk averter) ดังนั้นผู้ลงทุนจึงต้องพยายามที่จะลดความเสี่ยง โดยทำการลงทุนแบบกระจายการลงทุนไปยังหลักทรัพย์อื่นๆที่อยู่ในอุตสาหกรรมที่ต่างกัน แต่การกระจายการลงทุนไปยังหลักทรัพย์หลายๆประเภทนั้นอาจไม่ได้ช่วยลดความเสี่ยงของอัตราผลตอบแทนของกลุ่มหลักทรัพย์แต่อย่างใด (รุ่งระวี สิทธิกร, 2546)

สมมติฐานของมาโควิทซ์เกี่ยวกับพฤติกรรมของผู้ลงทุน

1) การตัดสินใจลงทุนในแต่ละทางเลือกของผู้ลงทุนจะพิจารณาจากการกระจายของโอกาสที่จะเกิดอัตราผลตอบแทน ตลอดช่วงเวลาที่ลงทุนถือหลักทรัพย์นั้นๆ

2) ผู้ลงทุนจะพยายามทำให้อรรถประโยชน์ที่ได้รับสูงสุด และจะคงเส้นอรรถประโยชน์ ซึ่งแสดงถึงอรรถประโยชน์ส่วนเพิ่มอัตราที่ลดลงตลอดช่วงการลงทุน

3) ผู้ลงทุนแต่ละคนจะประมาณความเสี่ยงในการลงทุนบนพื้นฐานของความแปรปรวนของอัตราผลตอบแทนที่คาดว่าจะได้รับ

4) การตัดสินใจของผู้ลงทุนขึ้นกับอัตราผลตอบแทนที่คาดว่าจะได้รับความเสี่ยงเท่านั้น

5) ภายใต้ความเสี่ยงระดับหนึ่ง ผู้ลงทุนจะเลือกลงทุนที่ให้อัตราผลตอบแทนสูงสุด ในทำนองเดียวกันภายใต้อัตราผลตอบแทนระดับหนึ่งผู้ลงทุนจะเลือกการลงทุนที่มีความเสี่ยงต่ำสุด

2.1.2 ทฤษฎีการตั้งราคาหลักทรัพย์ Capital Asset Pricing Model (CAPM)

แบบจำลองนี้ได้นำมาประกอบการศึกษาทำการวิเคราะห์ผลทางสถิติเพื่อประเมินผลตอบแทน ซึ่งแสดงถึงผลการดำเนินงานของหน่วยลงทุน โดยทฤษฎีนี้ William F. Sharp John Lintner และ Jan Mossin ได้พัฒนาขึ้นจากทฤษฎีกลุ่มหลักทรัพย์ใหม่ของ Harry Markwize นำมาประยุกต์เป็นทฤษฎีการกำหนดราคาหลัดทรัพย์ (Capital Asset Pricing Model: CAPM) ซึ่งเป็นแบบจำลองดุลยภาพความสัมพันธ์ระหว่างผลตอบแทนที่คาดหวังกับความเสี่ยง ซึ่งเป็นความเสี่ยงภายใต้แบบจำลองดังกล่าวนี้หมายถึง ความเสี่ยงที่เป็นระบบ (Systematic Risk) หรือความเสี่ยงที่ไม่สามารถกำจัดแม้ด้วยการกระจายการลงทุน (วิรัญญา ก่อเกษมสุข, 2549)

ข้อสมมติฐานของแบบจำลอง CAPM มีดังนี้

1) ตลาดที่นักลงทุนตัดสินใจลงทุนเป็นตลาดแข่งขันสมบูรณ์ การซื้อขายหลักทรัพย์ของแต่ละคนจึงไม่กระทบกับตลาดรวม นักลงทุนเป็น Price Taker คือไม่ได้เป็นผู้กำหนดราคา และมีความคาดหวังในผลตอบแทนของสินทรัพย์ที่มีการแจกแจงปกติ

2) นักลงทุนมีการวางแผนการถือครองหลักทรัพย์เหมือนๆกัน โดยมีพฤติกรรมแบบ myopic คือจะพิจารณาในระยะสั้นเพียงช่วง 1 ระยะเวลาเท่านั้น (Single Period Model)

3) นักลงทุนนั้นสามารถกู้ยืมและให้กู้เงินทุนโดยอัตราดอกเบี้ยคงที่ปราศจากความเสี่ยง

4) นักลงทุนไม่ต้องเสียภาษีจากรายได้ ไม่มีค่าธรรมเนียมใดๆ

5) นักลงทุนทุกคนนั้นมีเหตุผล (Rational) ปัจจัยที่กำหนดการตัดสินใจลงทุนคืออัตราผลตอบแทนที่คาดหวัง และความแปรปรวน (ความเสี่ยง) โดยเป็นผู้หลีกเลี่ยงความเสี่ยง และคาดหวังอรรถประโยชน์สูงสุดจากการลงทุน

6) นักลงทุนทุกคนมีการได้ข่าวสารเกี่ยวกับหลักทรัพย์อย่างสมบูรณ์ มีการวิเคราะห์หลักทรัพย์และคาดการณ์เหมือนๆกัน (Homogeneous Expectation) ภายใต้ข้อสมมติที่ว่านักลงทุนเป็นผู้มีเหตุผลและหลีกเลี่ยงความเสี่ยง รวมทั้งมีความคาดหวังจากการลงทุนเหมือนกัน ถ้าราคาหลักทรัพย์ชนิดหนึ่งต่ำกว่าอีกชนิดหนึ่ง ณ ระดับความเสี่ยงที่เท่ากัน นักลงทุนจะเลือกลงทุนในหลักทรัพย์ที่มีระดับราคาต่ำกว่า ทำให้ราคาหลักทรัพย์นั้นปรับตัวสูงขึ้น และในทางตรงข้าม การขายหลักทรัพย์ที่ราคาสูงกว่าจะส่งผลให้หลักทรัพย์นั้นลดต่ำลง กระบวนการดังกล่าวทำให้ราคาหลักทรัพย์กลับสู่ดุลยภาพในที่สุด และผลตอบแทนที่คาดหวังของแต่ละหลักทรัพย์ยู่ในระดับสูงสุด ณ ความเสี่ยงระดับต่างๆ แบบจำลองนี้สนใจในความเสี่ยงที่เป็นระบบของหลักทรัพย์ (Systematic

risk) เนื่องจากอยู่ภายใต้เงื่อนไขที่ว่า หากกระจายการลงทุนในหลักทรัพย์ที่หลากหลายขึ้นจะสามารถกำจัดความเสี่ยงที่ไม่เป็นระบบได้ ใน CAPM

เมื่อหลักทรัพย์มีค่า $\beta < 1$ หมายความว่า หลักทรัพย์นั้นมีการเปลี่ยนแปลงของอัตราของผลตอบแทนน้อยกว่าอัตราผลตอบแทนของตลาด

เมื่อหลักทรัพย์มีค่า $\beta > 1$ หมายความว่าหลักทรัพย์นั้นมีการเปลี่ยนแปลงของอัตราของผลตอบแทนมากกว่าอัตราผลตอบแทนของตลาด

โดยสามารถแสดงความสัมพันธ์ในรูปแบบสมการได้ดังนี้

$$R_i = \alpha + \beta R_m + \varepsilon_t \tag{1}$$

โดยที่ R_i คือ ผลตอบแทนที่คาดหวังจากการลงทุนในแต่ละหลักทรัพย์ i

β คือ ค่าความเสี่ยง

α คือ ค่าคงที่

R_m คือ อัตราผลตอบแทนของตลาด

ε_t คือ ตัวแปรสุ่ม โดยมีการแจกแจงแบบปกติที่เป็นอิสระต่อกันและเหมือนกัน

ความเสี่ยงของแต่ละหลักทรัพย์สามารถวัดได้จากความเสี่ยงหรือความแปรปรวนของหลักทรัพย์ที่มีต่อความเสี่ยงหรือความแปรปรวนของตลาด ดังนั้น ความเสี่ยงของหลักทรัพย์แต่ละตัวจะเป็นค่าความแปรปรวนร่วมของหลักทรัพย์ที่ i (Covariance) และตลาด ดังนั้นค่าความเสี่ยง (β) สามารถคำนวณจากสูตรทางคณิตศาสตร์ดังนี้

$$\beta = \frac{\operatorname{cov}(R_i, R_m)}{\operatorname{var}(R_m)} \tag{2}$$

ความสัมพันธ์ของอัตราผลตอบแทนที่คาดหวังกับความเสี่ยงสามารถกำหนดแสดงเป็นเส้นตลาดหลักทรัพย์ (Security Market Line : SML) โดยเป็นความสัมพันธ์ที่แสดงระดับผลตอบแทนที่นักลงทุนต้องการ ณ ระดับความเสี่ยงต่างๆหรือเป็นการอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างประสิทธิภาพของผลตอบแทนที่คาดหวังกับความเสี่ยงต่อการลงทุนในหลักทรัพย์ โดยเส้นตลาดหลักทรัพย์นี้ มีข้อสมมุติฐานว่า ตลาดหลักทรัพย์เป็นตลาดที่มีประสิทธิภาพสูง และอยู่ในดุลยภาพ ความแตกต่างของผลตอบแทนที่คาดหวังของหลักทรัพย์แต่ละตัว แสดงถึงความแตกต่างกันของเบต้า (β) ในแต่ละหลักทรัพย์ด้วย ความเสี่ยงที่สูงกว่าของหลักทรัพย์หนึ่งจะแสดงถึงผลตอบแทนที่สูงกว่าด้วยความสัมพันธ์ระหว่างความเสี่ยงและผลตอบแทนที่คาดหวังนี้เป็นเส้นตรง ซึ่งถ้า

ความสัมพันธ์นี้ไม่เป็นเส้นตรงหรือตลาดหลักทรัพย์ไม่เป็นตลาดที่มีประสิทธิภาพแล้ว การลงทุนในหลักทรัพย์ก็จะไม่มีประสิทธิภาพด้วย โดยหากเป็นเส้นโค้งคว่ำลงแสดงให้เห็นว่าเมื่อถือหลักทรัพย์ที่มีความเสี่ยงเพิ่มขึ้นกลับทำให้ผลตอบแทนลดลง หรือหากเป็นเส้นโค้งที่หงายขึ้นแสดงให้เห็นเมื่อถือหลักทรัพย์ที่มีความเสี่ยงน้อยจะให้ผลตอบแทนที่มากขึ้น ดังนั้นการที่ความสัมพันธ์ระหว่างผลตอบแทนที่คาดหวังกับความเสี่ยงเป็นเส้นตรง ผลตอบแทนที่ควรจะได้รับจากการลงทุนในหลักทรัพย์ใดควรเท่ากับการถือหลักทรัพย์ที่ปราศจากความเสี่ยงบวกผลตอบแทนส่วนเพิ่มจากการถือหลักทรัพย์ที่มีความเสี่ยงเท่านั้น หากมีผลตอบแทนอื่นใดที่มากกว่าการลงทุนในหลักทรัพย์นั้นให้ผลตอบแทนที่ผิดปกติ

ถ้าหลักทรัพย์ใดมีความเสี่ยงน้อยกว่าความเสี่ยงของตลาดหรือมีค่าเบต้าน้อยกว่า 1 เรียกว่าหลักทรัพย์เชิงรับ (Defensive Stock) นั่นคือเมื่อตลาดมีอัตราผลตอบแทนเปลี่ยนแปลง 1 หน่วย หลักทรัพย์นั้นจะมีการเปลี่ยนแปลงของอัตราผลตอบแทนน้อยกว่า 1 หน่วย และถ้าหากหลักทรัพย์ใดมีความเสี่ยงมากกว่าความเสี่ยงของตลาดหรือเบต้ามากกว่า 1 เรียกว่าหลักทรัพย์เชิงรุก (Aggressive Stock) นั่นคือ เมื่อตลาดมีอัตราผลตอบแทนเปลี่ยนแปลง 1 หน่วย ความสัมพันธ์ระหว่างผลตอบแทนที่คาดหวังกับความเสี่ยงของหลักทรัพย์สามารถแสดงดังนี้

$$\mathrm{R_i} = \alpha + \mathrm{b}\beta_i \qquad (3)$$

เมื่อ $\beta_{\mathrm{i}} = 0$ จะได้ว่า

$$\mathrm{R_i} = \alpha + \mathrm{b} \times 0$$

ฉะนั้น

$$\mathrm{R_i} = \alpha \qquad (4)$$

ถ้าความเสี่ยงของหลักทรัพย์เท่ากับความเสี่ยงของตลาด หรือ $\beta = 1$ จะได้สมการ (5) เป็น

$$\mathrm{R_m} = \alpha + \mathrm{b} \times 1$$

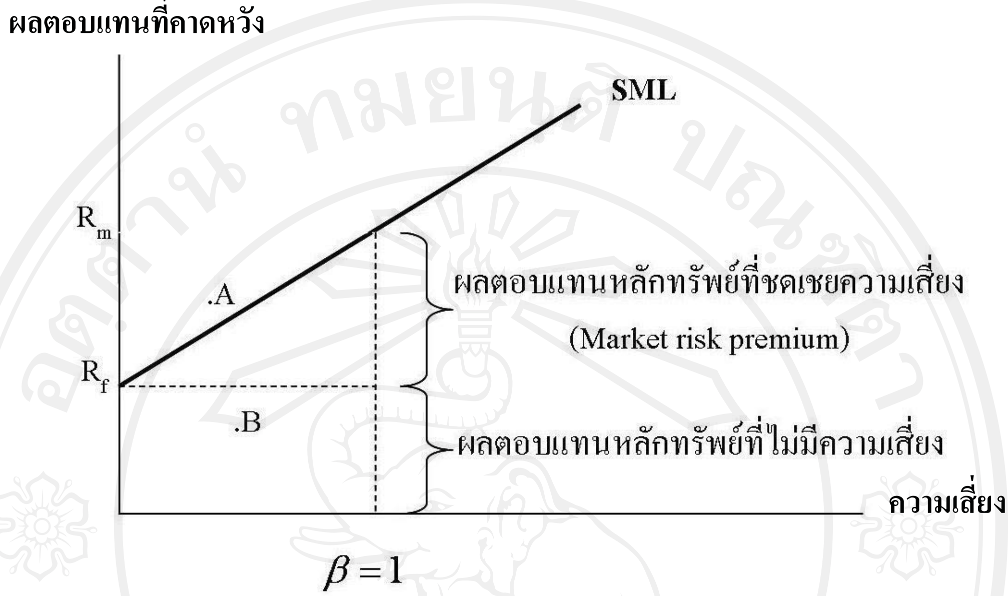
$$\mathrm{R_m} - \alpha = \mathrm{b}$$

$$\mathrm{b} = \mathrm{R_m} - \mathrm{R_f} \qquad (5)$$

จากสมการที่ (3) ถึง (5) จะได้ว่า $\mathrm{R_i} = \mathrm{R_f} + \beta_i(\mathrm{R_m} - \mathrm{R_f})$ (6)

เนื่องจากค่าเบต้า (β) จะแสดงความเสี่ยงเฉพาะความเสี่ยงที่เป็นระบบเท่านั้น ดังนั้น จากสมการ (6) จะได้ว่ามีเพียงความเสี่ยงที่เป็นระบบอย่างเดียวที่มีความสำคัญในการอธิบายผลตอบแทนที่คาดหวัง ความสัมพันธ์ข้างต้นสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 2.2 ดังนี้

รูปที่ 2.2 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างผลตอบแทนที่คาดหวังกับความเสี่ยงในการลงทุนใน หลักทรัพย์



ความสัมพันธ์ระหว่างความเสี่ยงและผลตอบแทนที่คาดหวังนี้เป็นแบบเส้นตรง (รูปที่ 2.2) หากหลักทรัพย์ใดอยู่ที่จุด A จะให้ผลตอบแทนสูงกว่าจุดที่อยู่บนเส้น SML ซึ่งแสดงว่าหลักทรัพย์มีราคาซื้อขายต่ำกว่าราคาที่ควรจะเป็น และหลักทรัพย์ที่อยู่ที่จุด B คือหลักทรัพย์ที่มีผลตอบแทนที่ต่ำกว่าบนเส้น SML ส่วนหลักทรัพย์ B ผู้ลงทุนจะไม่ซื้อเนื่องจากผลตอบแทนที่ได้ต่ำกว่าเส้น SML ราคาจะลดลง ทำให้อัตราผลตอบแทนเพิ่มขึ้นจนเข้าสู่ภาวะสมดุลบนเส้น SML

จากสมการที่ (6) จะได้ว่า $\mathrm{R_i} = \mathrm{R_f} + \beta_i \mathrm{R_m} - \beta \mathrm{R_f}$

ดังนั้น $\mathrm{R_i} = (1-\beta_i)\mathrm{R_f} + \beta_i \mathrm{R_m}$

เมื่อเปรียบเทียบสมการแล้ว จะสามารถเอาค่า α และ $(1-\beta_i)\mathrm{R_f}$ มาเทียบกัน ดังนี้

1) ถ้าค่า $\alpha = (1-\beta_i)\mathrm{R_f}$ หมายถึง อัตราผลตอบแทนของการลงทุนในหลักทรัพย์ที่เลือกมีค่าเท่ากับ อัตราผลตอบแทนจากการลงทุนในตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย

2) ถ้าค่า $\alpha > (1-\beta_i)\mathrm{R_f}$ หมายถึง อัตราผลตอบแทนของการลงทุนในหลักทรัพย์ที่เลือกมีค่ามากกว่า อัตราผลตอบแทนจากการลงทุนในตลาดหลักทรัพย์ ฉะนั้นควรจะลงทุนในหลักทรัพย์นั้นเพราะให้ผลตอบแทนสูง

3) ถ้าค่า $\alpha < (1-\beta_i)\mathrm{R_f}$ หมายถึง อัตราผลตอบแทนของการลงทุนในหลักทรัพย์ที่เลือกมีค่าน้อยกว่าอัตราผลตอบแทนจากการลงทุนในตลาด ฉะนั้น ผู้ลงทุนไม่ควรจะลงทุนในหลักทรัพย์นั้นเพราะให้ผลตอบแทนต่ำ

2.1.3 ทฤษฎีการทำกำไรจากราคาที่ผิดปกติ (Arbitrage Pricing Theory)

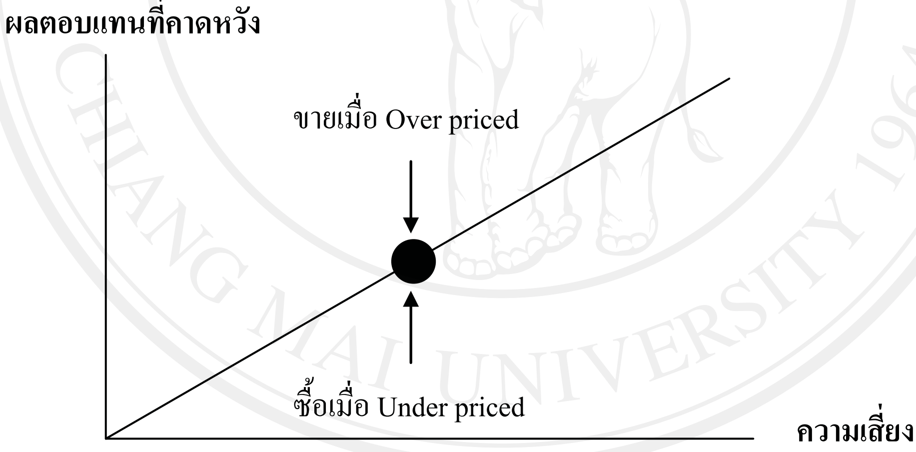
มีข้อสมมติฐานว่าในบางขณะเวลา ราคาตลาดหลักทรัพย์ใดหลักทรัพย์หนึ่งอาจมีมูลค่ามากกว่า หรือต่ำกว่าที่ควรจะเป็นของหลักทรัพย์นั้น ซึ่งเรียกภาวะที่เกิดขึ้นว่า "ราคาที่ผิดปกติ" (Mispricing) โดยอาจมีสาเหตุมาจากที่ราคาตลาดหลักทรัพย์นั้นยังไม่ได้สะท้อนถึงมูลค่าปัจจุบัน ทั้งนี้นักลงทุนในตลาดจะเป็นผู้กำหนดราคาสมดุลของหลักทรัพย์โดยการ

1) ขาย หลักทรัพย์ที่มีมูลค่า **เกิน** กว่าที่ควรจะเป็น (Over priced)

2) ซื้อ หลักทรัพย์ที่มีมูลค่า **ต่ำ** เกินกว่าที่ควรจะเป็น (Under priced)

จนในที่สุด การซื้อขายข้างต้น จะทำให้ราคาที่ผิดปกติของหลักทรัพย์ทั้งหลายวิ่งกับเข้าสู่ภาวะราคาสมดุล

รูปที่ 2.3 การทำกำไรจากราคาที่ผิดปกติ



2.2 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องทางเศรษฐมิติ

2.2.1 การวิเคราะห์อนุกรมเวลา (Time Series Analysis)

อนุกรมเวลา (Time Series) หมายถึง ชุดของข้อมูลที่เก็บรวบรวมตามระยะเวลาเป็นช่วง ๆ อย่างต่อเนื่องกัน ข้อมูลที่แสดงการเคลื่อนไหว ซึ่งเปลี่ยนแปลงไปตามระยะเวลาเป็นช่วง ๆอย่างต่อเนื่อง ซึ่งอาจเก็บเป็นรายวัน รายเดือน รายไตรมาส หรือรายปี ขึ้นอยู่กับประโยชน์ที่จะนำไปใช้ ข้อมูลอนุกรมเวลามีประโยชน์มากในการวิเคราะห์และการตัดสินใจวางแผนทางธุรกิจหรือ

คาดคะเนขั้นแผนงานให้มีความผิดพลาดน้อยที่สุดโดยใช้ข้อมูลในอดีตเป็นพื้นฐานในการคาดการณ์ข้อมูลในอนาคต

2.2.2 การทดสอบความนิ่งของข้อมูล (Unit Root Test)

การทดสอบยูนิทรูทในที่นี้จะนำเสนอวิธี การทดสอบตามแนวทางของ Dickey-Fuller (1981) สมมุติแบบจำลองเป็นดังนี้

$$X_t = \rho X_{t-1} + e_t \tag{7}$$

โดยที่ X_t, X_{t-1} คือ ตัวแปร ณ เวลา t และ t-1

e_t คือ ความคลาดเคลื่อนเชิงสุ่ม (Random Error)

ρ คือ สัมประสิทธิ์อัตสหสัมพันธ์ (Autocorrelation Coefficience)

จาก

$$X_t = \rho X_{t-1} + e_t$$

$$X_t - X_{t-1} = \rho X_{t-1} - X_{t-1} + e_t$$

$$\Delta X_t = (\rho - 1) X_{t-1} + e_t$$

$$\Delta X_t = \theta X_{t-1} + e_t \tag{8}$$

โดยให้ $\theta = (\rho - 1)$ หรือ $\rho = 1 + \theta; -1 < \theta < 0$

θ คือ ค่าพารามิเตอร์

สมมุติฐานของดิกกี้ฟลูเลอร์ คือ

$H_0 : \theta = 0$ มียูนิทรูท

$H_0 : \theta < 0$ ไม่มียูนิทรูท

โดยใช้สถิติ " t " ซึ่งมีสูตรดังต่อไปนี้

$$t = \frac{\hat{\theta}}{S.E.\bar{\theta}}$$

การตัดสินใจยอมรับสมมุติฐาน H_0 เมื่อค่าสถิติ t-statistic ของสัมประสิทธิ์ในรูปสัมบูรณ์มีค่าน้อยกว่าค่าวิกฤติ Mackinnon critical Value หมายความว่า X_t มียูนิทรูท หรือ X_t มีลักษณะไม่นิ่ง

แต่ถ้ายอมรับ H_1 เมื่อค่าสถิติ t-statistic ของสัมประสิทธิ์ในรูปสัมบูรณ์มีค่ามาก กว่าค่าวิกฤติ Mackinnon critical Value หมายความว่า X_t ไม่มียูนิทรูทหรือ X_t มีลักษณะนิ่ง

เนื่องจากข้อมูลอนุกรมเวลา ณ เวลา t มีส่วนสัมพันธ์กับข้อมูลอนุกรมเวลา ณ เวลา t-1 ค่าคงที่และแนวโน้มดังนั้นจึงพิจารณาสมการ 3 รูปแบบที่แตกต่างกันในการทดสอบว่ามียูนิทรูท ดังนี้คือ

$$\Delta X_t = \theta X_{t-1} + e_t \tag{9}$$

$$\Delta X_t = \alpha + \theta X_{t-1} + e_t \tag{10}$$

$$\Delta X_t = \alpha + \beta T + \theta X_{t-1} + e_t \tag{11}$$

ตั้งสมมุติฐานเป็นดังที่กล่าวมาแล้วข้างต้น การทดสอบยูนิทรูทโดยใช้การทดสอบ ดิกกี้ - ฟลูเลอร์ (Dicky-Fuller Test) ซึ่งหากแบบทดลองที่ใช้ในการทดสอบมีปัญหา Autocorrelation ก็จะ ทำให้ค่าสถิติที่ได้มานั้นไม่สามารถนำมาใช้ได้อย่างถูกต้อง ดังนั้นจึงได้มีการเสนอให้รับสมการใหม่โดยการเพิ่มขบวนการถดถอยในตัวเอง (Autoregressive Processes) เข้าไปในสมการ (9) – (11) วิธีการนี้ เรียกว่าอ๊อกเม้นเทดดิกกี้-ฟลูเลอร์ (Augmented Dicky-Fuller Test) ดังมีรายละเอียดดังนี้

$\Delta X_t = \theta X_{t-1} + \Sigma\phi\Delta X_{t-1} + e_t$ แนวเดินเชิงสุ่ม

$\Delta X_t = \alpha + \theta X_{t-1} + \Sigma\phi\Delta X_{t-1} + e_t$ แนวเดินเชิงสุ่มและจุดตัดแกน

$\Delta X_t = \alpha + \beta T + \theta X_{t-1} + \Sigma\phi\Delta X_{t-1} + e_t$ แนวเดินเชิงสุ่มจุดตัดแกนและแนวโน้ม

โดย X_t คือ ข้อมูลอนุกรมเวลา ณ เวลา t

X_{t-1} คือ ข้อมูลอนุกรมเวลา ณ เวลา t-1

$\alpha, \beta, \theta, \phi$ คือ ค่าพารามิเตอร์

T คือ ค่าแนวโน้ม

e_t คือ ความคลาดเคลื่อนเชิงสุ่ม

2.2.3 แบบจำลอง Autoregressive (AR(p))

แบบจำลอง Autoregressive เป็นรูปแบบที่แสดงว่าค่าสังเกต x_t ถูกกำหนดจากค่าของ $x_{t-1},...,x_{t-p}$ หรือ ค่าสังเกตที่เกิดขึ้นก่อนหน้า p โดยกระบวนการหรือระบบ AR(p) คือ กระบวนการหรือระบบ Autoregressive ที่มีอันดับที่ p ซึ่งเขียนอยู่ในรูปสมการได้ดังนี้

$$\text{AR(p) คือ} \quad x_t = \mu + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + ... + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t \tag{12}$$

โดยที่ μ คือ ค่าคงที่ (Constant Term)

ϕ_j คือ พารามิเตอร์ตัวที่ j

ε_t คือ ความคลาดเคลื่อน ณ เวลา t

2.2.4 แบบจำลอง Moving Average (MA(q))

แบบจำลอง Moving Average (MA) เป็นรูปแบบที่แสดงว่าค่าสังเกต x_t ถูกกำหนดจากค่าความคลาดเคลื่อน $\varepsilon_{t-1},...,\varepsilon_{t-q}$ หรือค่าความคลาดเคลื่อนที่อยู่ก่อนหน้า โดยกระบวนการ หรือระบบ MA(q) คือ กระบวนการ Moving Average ที่มีอันดับ q ซึ่งเขียนในรูปของ MA(q) ได้ดังนี้

$$\text{MA(q) คือ} \quad x_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - ... - \theta_q \varepsilon_{t-q} \tag{13}$$

โดยที่ μ คือ ค่าคงที่ (Constant Term)

θ_j คือ พารามิเตอร์เฉลี่ยเคลื่อนที่ตัวที่ j

ε_t คือ ความคลาดเคลื่อน ณ เวลา t

2.2.5 แบบจำลอง Autoregressive Moving Average (ARMA(p,q))

แบบจำลอง Autoregressive Moving Average (ARMA) เป็นแบบจำลองที่นำเอา กระบวนการ Autoregressive และ Moving Average มาใช้รวมกัน โดยกระบวนการหรือระบบ ARMA(p,q) คือกระบวนการหรือระบบ Autoregressive ที่มีอันดับที่ p และ Moving Average ที่มีอันดับ q ซึ่งเขียนอยู่ในรูปสมการได้ดังนี้

แบบจำลอง ARMA(p,q) ได้ดังนี้

$$x_t = \delta + \phi x_{t-1} + \phi x_{t-2} + ... + \phi x_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - ... - \theta_q \varepsilon_{t-q} \tag{14}$$

โดยที่ x_t คือ ค่าสังเกตในอนุกรมเวลา ณ เวลา t

p คือ อันดับของ Autoregressive

q คือ อันดับของ Moving Average

δ คือ ค่าคงที่ (Constant Term)

t คือ เวลา

ϕ คือ พารามิเตอร์ของ Autoregressive

θ คือ พารามิเตอร์ของ Moving Average

ε_t คือ กระบวนการ White Noise ซึ่งก็คือ ค่าความคลาดเคลื่อน ณ เวลา t

2.2.6 แบบจำลอง Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (ARCH)

ในการวิเคราะห์อนุกรมเวลาส่วนใหญ่แล้วจะมีการกำหนด Stochastic Variable ให้มีความแปรปรวนคงที่ (Homoscedastic) ซึ่งในการประยุกต์ใช้กับบางข้อมูลนั้นค่าความแปรปรวนของค่าความคาดเคลื่อน (Error Term) จะไม่ใช่ฟังค์ชั่นของตัวแปรอิสระแต่มีค่าเปลี่ยนแปลงไปตามช่วงเวลาที่ขึ้นอยู่กับขนาดของความคาดเคลื่อนที่เกิดในอดีต และในบางการศึกษา เช่น แบบจำลองของเงินเฟ้อ อัตราดอกเบี้ยหรือผลตอบแทนจากตลาดหลักทรัพย์ในบางคาบเวลาจะมีความผันผวน (Volatility) สูง (และค่าความคลาดเคลื่อนขนาดใหญ่) ตามด้วยคาบเวลาที่มีความผันผวน (Volatility) ต่ำ (และค่าความคลาดเคลื่อนขนาดเล็ก) สรุปได้ว่าค่าความคลาดเคลื่อนในอดีตที่ผ่านมาจากการถดถอยจะขึ้นอยู่กับค่าความผันผวน (Volatility) ของค่าความคลาดเคลื่อนในอดีตที่ผ่านมา (Ender, Walter(1995) อ้างถึงในทรงศักดิ์ ศรีบุญจิตต์ และอารี วิบูลย์พงศ์, 2542)

Engle, Robert F (1982) ได้แสดงให้เห็นว่าความเป็นไปได้ที่เราจะสร้างแบบจำลองหรือความเป็นไปได้ในการหาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของอนุกรมเวลาไปพร้อมกันนั้นในขั้นต้นการพยากรณ์อย่างมีเงื่อนไขจะมีความแม่นยำเหนือการพยากรณ์อย่างไม่มีเงื่อนไขมาก ซึ่งจากแบบจำลอง Autoregressive Moving Average (ARMA) ซึ่งสมมุติว่าเรามีแบบจำลอง ARMA ที่นิ่ง (Stationary) ดังนี้

$$x_t = a_0 + a_1 x_{t-1} + \varepsilon_t \tag{15}$$

และต้องการพยากรณ์ x_{t+1} อย่างมีเงื่อนไข ดังนี้คือ

$$E_t x_{t+1} = a_0 + a_1 x_t \tag{16}$$

ถ้าเราใช้ค่าเฉลี่ยแบบมีเงื่อนไขในการพยากรณ์ x_{t+1} ค่าความคลาดเคลื่อนของความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไขที่พยากรณ์ได้ดังนี้ คือ

$$E_t\left[(x_{t+1} - a_0 - a_1 x_t)^2\right] = E_t \varepsilon_{t+1}^2 = \sigma^2 \tag{17}$$

ถ้าเปลี่ยนไปใช้การพยากรณ์อย่างไม่มีเงื่อนไขแล้ว ผลที่จะใช้เป็นค่าเฉลี่ยในช่วง Long-Run ของลำดับ $\{x_t\}$ ซึ่งเท่ากับ $\dfrac{a_0}{(1-a_1)}$ จะได้ความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์อย่างไม่มีเงื่อนไขดังนี้ คือ

$$E\{(x_{t+1}-\frac{a_0}{(1-a_1)})^2\} = E[(\varepsilon_{t+1}+a_1\varepsilon_t+a_1^2\varepsilon_{t-1}+a_1^3\varepsilon_{t-2}+...)^2] \qquad (18)$$

เมื่อ $\dfrac{1}{(1-a_1)^2}>1$ ค่าความแปรปรวน (Variance) จากการพยากรณ์แบบไม่มีเงื่อนไข (Unconditional Variance) จะมีค่าสูงกว่าความแปรปรวนของการพยากรณ์แบบมีเงื่อนไข (Conditional Variance) ในลักษณะเดียวกันถ้าความแปรปรวน (Variance) ของ $\{\varepsilon_t\}$ ไม่คงที่หรือไม่คงตัว (Constant) เราสามารถจะประมาณค่าความแปรปรวน (Variance) ได้โดยการใช้แบบจำลอง ARMA สมมุติว่าเรามีแบบจำลองดังนี้

$$x_t = a_0 + a_1x_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (19)$$

เพราะฉะนั้นความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไข (Conditional Variance) ของ x_{t+1} สามารถเขียนได้ดังนี้

$$Var(x_{t+1}\,|\,x_t) = E[(x_{t+1}-a_0-a_1x_t)^2] = E_t\varepsilon_{t+1}^2 \qquad (20)$$

และจากที่ให้ $E_t\varepsilon_{t+1}^2 = \sigma_{t+1}^2$ จึงแสดงว่าความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไขไม่ใช่ค่าคงที่และจะได้แบบจำลองในการประมาณค่าส่วนที่เหลือ (Residuals) ออกมาดังนี้

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t+1}^2 + ... + \alpha_q\varepsilon_{t-q}^2 + \nu_t \qquad (21)$$

เมื่อ ν_t = White Noise Process

เราเรียกสมการที่มีลักษณะเช่นนี้ว่า แบบจำลอง Autoregressive Conditional Heteroskedastic (ARCH) และสมการนี้เป็น ARCH(q) ค่า $E_t\varepsilon_{t+1}^2$ หรือ σ_{t+1}^2 จะประกอบไปด้วย 2 องค์ประกอบ คือ ค่าคงที่และความผันผวน (Volatility) ในคาบเวลาที่ผ่านมา ซึ่งเขียนได้เป็นส่วนเหลือกำลังสองของคาบในอดีต ARCH(q) ส่วนค่าสัมประสิทธิ์ $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_q$ สามารถหาค่าได้โดยวิธี Maximum Likelihood

2.2.7 แบบจำลอง Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity(GARCH)

Bollerslev (1986) ได้ให้ความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไข (Conditional Variance) มีลักษณะเป็น ARMA Process โดยที่ให้ Error Process มีลักษณะดังนี้ คือ

$$\varepsilon_t = \nu_t\sqrt{h_t} \qquad (22)$$

โดยที่ความแปรปรวนของ $v_t = \sigma_v^2 = 1$ และ

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i h_{t-i} \qquad (23)$$

เมื่อ $\{v_t\}$ คือ White Noise Process ที่เป็นค่าอิสระจากเหตุการณ์ในอดีต (ε_{t-1}) ค่าเฉลี่ยแบบมีเงื่อนไขและไม่มีเงื่อนไข (Conditional and Unconditional Means) ของ ε_t จะเท่ากับศูนย์ ใส่ค่าคาดหมาย (Expected Valued) ของ ε_t จะได้

$$E\varepsilon_t = Ev_t\sqrt{h_t} = 0 \qquad (24)$$

สำหรับการหาความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไข (Conditional Variance) ของ ε_t ถูกกำหนดโดยสมการ

$$E_{t-1}\varepsilon_t^2 = h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i h_{t-i} \qquad (25)$$

ดังนั้นความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไขของ ε_t ถูกกำหนดโดย h_t ในสมการ (25) แบบจำลองนี้เรียกว่า Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (GARCH) (p,q) นั้นใช้กระบวนการ Autoregressive และ Moving Average ในการหาค่าความแปรปรวนที่มีลักษณะ Heteroscedasticity Variance (ทรงศักดิ์ ศรีบุญจิตต์, อ้างถึงใน ฐิติศักดิ์ กิตติศักดิ์ธาดากุล, 2552)

2.2.8 แบบจำลอง Multivariate GARCH

รูปแบบหนึ่งของแบบจำลองพลวัตที่ความสัมพันธ์ของ Variances และ Covariances ของ Error Terms สำหรับ N สมาชิกของ $y_t = (y_{1t},\ldots,y_{Nt})'$ มีความสัมพันธ์กันดังสมการ

$$y_t = \mu_t + \varepsilon_t \qquad (26)$$

เมื่อ $\varepsilon_t = H_t^{1/2} Z_t$, $H_t^{1/2}$ เป็น NxN Matrix (27)

$$Z_t = i.i.d \qquad E(Z_t) = 0 \qquad Var(Z_t) = I_N$$

$$\mu_t = \mathrm{E}(y_t \mid I_{t-1}) = \mathrm{E}_{t-1}(y_t)$$

$$H_t = H_t^{1/2}\left(H_t^{1/2}\right) = Var(y_t \mid I_{t-1}) = Var_{t-1}(y_t)$$

โดยที่ I_{t-1} เป็นข้อมูลข่าวสารที่เวลา t-1 $H_t^{1/2}$ เป็นเมตริก NxN ซึ่ง H_t เป็น Condition Variance Matrix ของ y_t ค่าของ μ_t และ H_t จะขึ้นกับ Parameters θ ที่ไม่ทราบค่าโดยมีเงื่อนไขของ Parameters θ คือ $H_t => 0 \; \forall t$ ส่วนมากจะพยายามหลีกเลี่ยงการมีจำนวน Parameter มากๆ แต่ต้องเพียงพอสำหรับสภาพพลวัตของ H_t

รูปแบบต่างๆของ M-GARCH โดยพิจารณาจาก Conditional Covariances

1) แบบจำลอง Vector Error-Correction (VEC)

รูปแบบของ VEC ในแบบจำลองนี้ h_{ijt} เป็น Linear Function ของ Squared Errors ในอดีต, Cross Product ของ Errors และค่าในอดีตของ H_t ตัวอย่าง VEC (1,1) คือ (Bollerslev; Engle and Wooldridge, 1988)

$$h_t = c + A\eta_{t-1} + Gh_{t-1} \tag{28}$$

โดยที่ $h_t = \text{vech } H_t$

$\eta_t = \text{vech } \left(\varepsilon_t \varepsilon_t^{'}\right)$

vech เป็นกระบวนการที่ใช้สามเหลี่ยมด้านล่างของ NxN Matrix โดยจะมีทั้งหมด N(N+1)/2x1 Vector:

$$\text{vech } H_t = (h_{11t}, h_{21t}, h_{22t}, h_{31t}, ..., h_{NNt})^{'}$$

$$\begin{bmatrix} h_{11t} & h_{12t} & h_{13t} & \bullet & h_{1Nt} \\ h_{21t} & & & & \\ h_{31t} & & & & \\ \bullet & & & & \\ h_{N1t} & & & & h_{NNt} \end{bmatrix}$$

VEC เป็นกระบวนการที่เปลี่ยนจากหนึ่ง Matrix เป็น Column Vector :

$$H_t = (h_{11t}, h_{21t}, ...h_{N1t}, h_{12t}, h_{22t}, ...h_{NNt})^{'}$$

$$\begin{bmatrix} h_{11t} \\ h_{21t} \\ h_{22t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t-1}^2 \\ \varepsilon_{1,t-1}\varepsilon_{2,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11,t-1} \\ h_{21,t-1} \\ h_{22,t-1} \end{bmatrix}$$

จำนวน Parameters ที่ใช้ $= \dfrac{N(N+1)(N(N+1)+1)}{2}$ (สำหรับ N= 2,3,4 จะได้จำนวน Parameters = 21, 78, 210 ตามลำดับ)

เพื่อที่จะลดจำนวน Parameter ให้น้อยลง Bollerslev, Engle and Wooldridge (1988) ได้เสนอแบบจำลอง Diagonal VEC (DVEC) ซึ่ง A และ G เป็น Diagonal Matrices ทำให้ลดจำนวน Parameter จาก 21 เหลือ 9 เมื่อ N = 2 และจาก 78 เหลือ 18 เมื่อ N = 3 ค่า Variance h_{iit} ในแต่ละตัวจะขึ้นกับค่า Error กำลังสองของตัวมันเอง ใน Period ที่แล้วและค่า Variance ใน Period ที่แล้ว

($h_{ii,t-1}$) เท่านั้น ส่วนค่า Covariance h_{ijt} จะขึ้นกับค่า Error ของ i และ j ใน Period ที่แล้ว และค่า Covariance ในอดีต $h_{ij,t-1}$ โดยมีข้อกำหนดว่าจะไม่เกิด Spillover Effect

เราสามารถเขียนรูปแบบได้ดังนี้

$$h_{1\ t1} = c_1 + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-1} & \varepsilon_{2,t-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}/2 \\ a_{12}/2 & a_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1} \end{pmatrix} + \mathrm{E}_{t-2}\left[\begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-1} & \varepsilon_{2,t-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12}/2 \\ g_{12}/2 & g_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1} \end{pmatrix} \right]$$

$$h_{1\ t2} = c_2 + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-1} & \varepsilon_{2,t-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22}/2 \\ a_{22}/2 & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1} \end{pmatrix} + \mathrm{E}_{t-2}\left[\begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-1} & \varepsilon_{2,t-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{21} & g_{22}/2 \\ g_{22}/2 & g_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1} \end{pmatrix} \right]$$

$$h_{2\ t2} = c_3 + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-1} & \varepsilon_{2,t-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32}/2 \\ a_{32}/2 & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1} \end{pmatrix} + \mathrm{E}_{t-2}\left[\begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-1} & \varepsilon_{2,t-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{31} & g_{32}/2 \\ g_{32}/2 & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1} \end{pmatrix} \right]$$

นำค่า h ในแต่ละส่วนมารวมกันได้ดังนี้

$$H_t = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-1} & \varepsilon_{2,t-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{1,t-1} & \varepsilon_{2,t-1} \end{pmatrix} \mathrm{x} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}/2 & a_{21} & a_{22}/2 \\ a_{12}/2 & a_{13} & a_{22}/2 & a_{23} \\ a_{21} & a_{22}/2 & a_{31} & a_{32}/2 \\ a_{22}/2 & a_{23} & a_{32}/2 & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-1} & 0 \\ \varepsilon_{2,t-1} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{1,t-1} \\ 0 & \varepsilon_{2,t-1} \end{pmatrix} + \mathrm{E}_{t-2}[\ldots]$$

ซึ่งสามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบทั่วไปของ H_t ใน VEC(1,1) ดังนี้

$$H_t = C + \left(I_N \otimes \varepsilon_{t-1}^{'}\right)\tilde{A}\left(I_N \otimes \varepsilon_{t-1}\right) + \mathrm{E}_{t-2}\left\lfloor \left(I_N \otimes \varepsilon_{t-1}^{'}\right)\tilde{G}\left(I_N \otimes \varepsilon_{t-1}\right) \right\rfloor$$

โดยมีเงื่อนไขเพื่อที่จะให้ H_t เกิด Positive คือ $C \geq 0, \tilde{A} \geq 0, \tilde{G} \geq 0$

2) แบบจำลอง Baba, Engle, Kraft and Kroner (BEKK)

Engle and Kroner (1995) ได้พัฒนารูปแบบแบบจำลองกำลังสองในสมการ Conditional Covariance เพื่อให้เกิดเฉพาะ Positive Definiteness ของการประมาณค่าในโครงสร้างดังเดิมในรูปของ vech ในชื่อ BEKK Model รูปแบบของแบบจำลอง BEKK(1,1,K) และไม่มีตัวแปรภายนอก คือ

$$H_t = C^{'}C + \sum_{k=1}^{k} A_k^{'}\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-1}^{'}A_k + \sum_{k=1}^{k} G_k^{'}H_{t-1}G_k \qquad (29)$$

โดยที่ C, A_k และ G_k เป็น NxN Matrices แต่ C เป็นสามเหลี่ยมบนของ Matrix

$$\begin{bmatrix} h_{11t} & h_{21t} \\ h_{12t} & h_{22t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} \\ 0 & C_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t-1}^2 & \varepsilon_{1,t-1}\varepsilon_{2,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1}\varepsilon_{1,t-1} & \varepsilon_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} h_{11,t-1} & h_{21,t-1} \\ h_{21,t-1} & h_{22,t-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$$

มีจำนวน Parameters = $\dfrac{N(5N+1)}{2}$ (สำหรับ N = 2, 3, 4 จะได้จำนวน Parameters = 11, 24, 42 ตามลำดับ)

3) แบบจำลอง Bivariate Factor-GARCH(1,1,1)

$$h_{11t} = w_{11}^* + \lambda_1^2 h_t \tag{30}$$

$$h_{21t} = w_{21}^* + \lambda_1 \lambda_2 h_t \tag{31}$$

$$h_{22t} = w_{22}^* + \lambda_2^2 h_t \tag{32}$$

โดยที่ $\lambda_2 = (1 - w_1 \lambda_1)/(1 - w_1)$

$$h_t = w + \alpha^2 f_{t-1}^2 + \beta^2 h_{t-1}$$

$$f_t = w' \varepsilon_t$$

ถ้าเราเขียน $y_t - \mu_t = \varepsilon_t = \lambda f_t + e_t$ และสมมุติว่า f_t (The common shock, a scalar r.v.) และ e_t (The idiosyncratic shock, a Nx1 vector) ไม่สัมพันธ์กัน ซึ่ง $Var_{t-1}(e_t) = \Omega^*$ และ $Var_{t-1}(f_t) = h_t$ เราจะได้ว่า

$$Var_{t-1}(\varepsilon_t) = \Omega^* + \lambda \lambda' h_t$$

จะเกิด Weak Stationary Occurs ถ้า $\alpha_k^2 + \beta_k^2 < 1, \quad \forall k$ มีจำนวน Parameters เท่ากับ $\dfrac{N(N+5)}{2}$ (สำหรับ N = 2, 3, 4 จะได้จำนวน Parameters = 7, 12, 18 ตามลำดับ)

รูปแบบต่างๆของ M-GARCH โดยพิจารณาจาก Conditional Correlations

CCC and DCC รูปของแบบจำลองนี้ H_t เขียนอยู่ในรูปของ

$$H_t = D_t R_t D_t \tag{33}$$

$$D_t = diag\left(h_{11t}^{1/2} \ldots\right) h_{NNt}^{1/2}$$

$R_t = (\rho_{ijt})$ โดยที่ $\rho_{ijt} = 1$

R_t เป็น NxN Matrix ของ Conditional Correlations และ h_{iit} ถูกนิยามให้เป็น Univariate GARCH model ดังนี้

$$h_{ijt} = \rho_{ijt} \sqrt{h_{iit} h_{jjt}} \qquad \forall \neq j \tag{34}$$

H_t มีค่าเป็นบวกจาก R_t และค่า h_{iit} แต่ละตัวที่มีค่าเป็นบวก

1) แบบจำลอง Constant Condition Correlations (CCC)

ในกรณีนี้ $R_t = R = \left(\rho_{ij}\right), \rho_{ii} = 1$ ค่า Conditional Correlation มีค่าคงที่ (CCC) ดังนั้น

$$h_{ijt} = \rho_{ij}\sqrt{h_{iit}h_{jjt}} \qquad \forall i \neq j$$

จำนวน Parameters ที่จำเป็นคือ $\dfrac{N(N+5)}{2}$ (Bollerslev, 1990).

2) แบบจำลอง Dynamic Conditional Correlation (DCC)

Tse and Tsui (2002) ได้เสนอ $DCC_T\left(\mathrm{M}\right)$:

$$R_t = \left(1-\theta_1-\theta_2\right)R + \theta_1\psi_{t-1} + \theta_2 R_{t-1} \tag{35}$$

$$\psi_{ij,t-1} = \frac{\sum_{m=1}^{M} u_{i,t-m}u_{j,t-m}}{\sqrt{\left(\sum_{m=1}^{M} u_{i,t-m}^2\right)\left(\sum_{m=1}^{M} u_{j,t-m}^2\right)}} \tag{36}$$

$$u_{it} = \varepsilon_{it}\Big/\sqrt{h_{iit}} \tag{37}$$

โดยที่ θ_1, θ_2 >0 และ $\theta_1 + \theta_2$ <1 และ R จะมีรูปแบบเหมือน R ในแบบจำลอง CCC และค่า $\psi_{ij,t-1}$ จะเท่ากับ 1 ในทุกๆค่าของ i

ψ_{t-1} เป็น Sample Correlation Matrix ของ ε_t

สำหรับ $\tau = t-M, t-M+1, ..., t-1$ ซึ่งเงื่อนไขที่จำเป็นเพื่อให้แน่ใจว่า ψ_{t-1} จะเป็น Positive คือ $M \geq N$

R_t เป็นค่าเฉลี่ยของ Correlation Matrices $\left(R, \psi_{t-1}, R_{t-1}\right)$ ซึ่ง R_t จะมากกว่าศูนย์เสมอก็ต่อเมื่อทั้งสามตัวประกอบมีค่ามากกว่าศูนย์

จำนวน Parameter ที่จำเป็นคือ $\dfrac{\left(N+1\right)\left(N+4\right)}{2}$

ถ้า $\theta_1 = \theta_2 = 0$ จะได้รูปแบบจำลองเป็น CCC

DCC : Dynamic condition correlations

$DCC_E(1,1)$:

$$R_t = \left(diagQ_t\right)^{-1/2} Q_t \left(diagQ_t\right)^{-1/2}$$

Q_t เป็น NxN Matrix ที่สมมาตรและมากกว่าศูนย์ดังนี้

$$Q_t = \left(1-\theta_1-\theta_2\right)\overline{Q} + \theta_1 u_{t-1}u_{t-1}^{'} + \theta_2 Q_{t-1}$$

โดยที่ $u_t = \left(u_{1t}...u_{Nt}\right)^{'}, u_{it} = \varepsilon_{it}\Big/\sqrt{h_{iit}}, \overline{Q}$ เป็น NxN Matrix ที่สมมาตรและมากกว่าศูนย์และ $\theta_1, \theta_2 > 0$ และ $\theta_1 + \theta_2 < 1$ จะได้ว่า Q_t มากกว่าศูนย์และ R_t มากกว่าศูนย์ Q_t

เป็น Covariance Matrix ของ u_t ถ้า q_{iit} ไม่เท่ากับหนึ่ง จะทำให้เปลี่ยนรูปแบบเป็น Correlation Matrix ดังสมการ R_t ด้านบน (Engle, 2002) จำนวน Parameter ที่จำเป็นคือ $\frac{(N+1)(N+4)}{2}$

ถ้า $\theta_1 = \theta_2 = 0$ และ $\overline{q_{iit}} = 1$ จะได้รูปแบบจำลองเป็น CCC

ในทั้งสองแบบจำลองของ DCC ค่า Correlation ทั้งหมดมีลักษณะเป็นพลวัต ซึ่งลดจำนวน Parameter ที่จำเป็นลงเมื่อเปรียบเทียบกับแบบจำลอง VEC และ BEKK แต่มันจะมีข้อจำกัดจำนวนมาก โดยเฉพาะเมื่อ N มีค่ามาก

2.2.9 แบบจำลองความผันผวนของหลายตัวแปรพร้อมกัน

แบบจำลองทางเศรษฐมิติที่ใช้ในการศึกษาความผันผวนของ อัตราผลตอบแทนของ Gold Futures และ SET50 Index Futures ได้แก่ แบบจำลอง Dynamic Conditional Correlation (DCC) ของ Engle (2002). และแบบจำลอง Vector Autoregressive Moving Average – GARCH (VARMA-GARCH) ของ Ling and McAleer (2003) ดังนี้

พิจารณารูปแบบสมการ

$$y_t = E(y_t / F_{t-1}) + \varepsilon_t \tag{38}$$

$$\varepsilon_t = D_t \eta_t \tag{39}$$

โดยที่

$y_t = (y_{1t},...,y_{mt})'$ $\eta_t = (\eta_{1t},...,\eta_{mt})'$	คือ	ลำดับของเวคเตอร์เชิงสุ่ม independently and identically distributed (iid)
F_t	คือ	ข้อมูลที่มีอยู่ ณ เวลาที่ t
$D_t = diag(h_{1t}^{1/2},...,h_{mt}^{1/2}), m$	คือ	Square Root ของ Variance Covariance Matrix
$t = 1,\ldots,n.$	คือ	เวลา ณ เวลาที่ $1,\ldots,n.$

ในแบบจำลอง Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (GARCH) นั้น Bollerslev (1990) กำหนดให้เป็นความผันผวนอย่างมีเงื่อนไข (Conditional variance) ของอัตราผลตอบแทนของ SET50 Index Futures และ Gold Futures ตามกระบวนการ GARCH (p,q) คือ

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i h_{t-i} \tag{40}$$

เมื่อ α_i เป็นตัวแทนของ ARCH effects (ผลกระทบในระยะสั้น) และ β_i เป็นตัวแทนของ GARCH effects (ผลกระทบ ในระยะยาว โดยเรียกว่า $\alpha_i + \beta_i$)

2.2.10 แบบจำลอง Vector Autoregressive Moving Average-GARCH (VARMA-GARCH)

เพื่อที่จะรวมความสัมพัน ธ์ซึ่งกันและกันของความผันผวนอย่างมีเงื่อนไข Conditional Variance) ระหว่างตัวแปรภายในนั้น Ling and McAleer (2003) ได้สร้างแบบจำลอง ดังต่อไปนี้

$$H_t = W + \sum_{j=1}^{r} A_{ij}\vec{\varepsilon}_{t-j} + \sum_{j=1}^{s} B_{ij}H_{i,t-j} \qquad (41)$$

เมื่อ $H_t = (h_{1t},...,h_{mt})'$, $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon^2{}_{1t},...,\varepsilon^2_{mt})'$ และ $W, A_i(i=1,...,r)$ และ $B_i(i=1,...,s)$ คือ $m \times m$ เมตริก VARMA-GARCH กำหนดให้ตัวแปรสุ่มทางบวก (Positive Shocks) และตัวแปรสุ่มทางลบ (Negative Shock) มีผลต่อความผันผวนอย่างมีเงื่อนไข (Conditional Variance)

เมื่อ A_{ij} เป็นตัวแทนของ ARCH effects (ผลกระทบในระยะสั้น) และ B_{ij} เป็นตัวแทนของ GARCH effects (ผลกระทบในระยะยาว โดยเรียกว่า $\sum_{j=1}^{r} A_{ij} + \sum_{j=1}^{s} B_{ij}$)

2.2.11 แบบจำลอง Dynamic Conditional Correlation (DCC)

ในกรณีที่ η_t ไม่เป็นลำดับของเวคเตอร์เชิงสุ่มแบบ independently and identically distributed (iid) สมมติฐานของความสัมพันธ์อย่างมีเงื่อนไขที่เป็นค่าคงที่จะไม่สามารถใช้ได้ ซึ่งในการที่จะพิจารณาครอบคลุมถึงความสัมพันธ์อย่างมีเงื่อนไขที่มีการเคลื่อนไหวเปลี่ยนแปลงตามการเปลี่ยนแปลงของเวลา Γ_t Engle (2002); Tse and Tsui (2002) ได้เสนอแบบจำลองที่มีความใกล้เคียงกับความสัมพันธ์อย่างมีเงื่อนไขที่มีการเปลี่ยนแปลงเชิงพลวัตร (Dynamic Conditional Correlation หรือ DCC) และแบบจำลอง Variable Conditional Correlation Multivariate GARCH ซึ่งแบบจำลอง DCC แสดงได้ดังนี้

$$\Gamma_t = (1-\theta_1-\theta_2)\Gamma + \theta_1\eta_{t-1}\eta'_{t-1} + \theta_2\Gamma_{t-1} \qquad (42)$$

เมื่อ θ_1 และ θ_2 คือ Scalar Parameters ในการที่จะรวมผลกระทบของตัวแปรเชิงสุ่มและความสัมพันธ์อย่างมีเงื่อนไขที่มีการเปลี่ยนแปลงเชิงพลวัตร (Dynamic Conditional Correlation) ในช่วงเวลาก่อนหน้าต่อความสัมพันธ์อย่างมีเงื่อนไขที่มีการเปลี่ยนแปลงเชิงพลวัตร (Dynamic Conditional Correlation) ในช่วงเวลาปัจจุบัน

2.3 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

จุฑามาศ สุพรจักร (2552) ทำการศึกษาการวิเคราะห์ความผันผวนของอัตราผลตอบแทนของดัชนีราคาหลักทรัพย์ล่วงหน้าในตลาดอนุพันธ์ โดยแบบจำลองอารีมาอีการ์ช จะทำการศึกษาความผันผวนของอัตราผลตอบแทนของดัชนีราคาหลักทรัพย์ล่วงหน้าใน 4 ประเทศ คือ ไทย สหรัฐอเมริกา ญี่ปุ่น และ ฮ่องกง ใช้ข้อมูลอนุกรมเวลาราคาปิดรายวันตั้งแต่วันที่ 28 เดือนเมษายน พ.ศ.2550 ถึงวันที่ 31 เดือนพฤษภาคม พ.ศ.2551 ในตลาดอนุพันธ์ไทย (TFEX) จำนวน 636 ข้อมูล ตลาดอนุพันธ์ดาวน์โจนส์ (DOW JONES) จำนวน 659 ข้อมูล ตลาดตลาดอนุพันธ์เอสแอนด์พี (S&P) จำนวน 664 ข้อมูล ตลาดอนุพันธ์นิเคอิ (NIKKEI) จำนวน 617 ข้อมูล และตลาดอนุพันธ์ฮั่งเส็ง (HANG SENG) จำนวน 638 ข้อมูลผลการทดสอบยูนิทรูท (Unit Root) โดยวิธี Augmented Dickey–Fuller Test (ADF Test) พบว่าข้อมูลอัตราผลตอบแทนของดัชนีราคาหลักทรัพย์ล่วงหน้าทั้ง 4 ประเทศมีลักษณะมีลักษณะนิ่งที่ระดับ Level (I(0)) จากการพิจารณาผลคอเรลโลแกรม ได้ทำการเลือกแบบจำลองที่เหมาะสมเพียงรูปแบบเดียวสำหรับอัตราผลตอบแทนของดัชนีราคาหลักทรัพย์ล่วงหน้าแต่ละประเทศโดยใช้แบบจำลองอารีมาอีการ์ช และเมื่อทำการตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลองทั้งหมดพบว่า มีลักษณะเป็นไวท์นอยส์ (White Noise) ณ ระดับนัยสำคัญทางสถิติที่ 0.05 ผลการพยากรณ์อัตราผลตอบแทนของดัชนีราคาหลักทรัพย์ล่วงหน้าแต่ละประเทศพบว่าแบบจำลองที่เหมาะสมที่สุดสำหรับอัตราผลตอบแทนของดัชนีราคาหลักทรัพย์ของตลาดอนุพันธ์ไทย ดาวโจนส์ เอสแอนด์พี นิเคอิ และฮั่งเส็ง คือ แบบจำลอง AR(3) MA(3) และ E-GARCH(1,1)แบบจำลอง AR(16) MA(16) และ E-GARCH(1,1) แบบจำลอง AR(11) MA(11) และ E-GARCH(1,1) แบบจำลอง AR(1) AR(6) MA(1) MA(6) และ E-GARCH(1,1) แบบจำลอง AR(1) AR(33) MA(1) MA(33) และ E-GARCH(1,1) ตามลำดับ การศึกษาการวิเคราะห์ความผันผวนของอัตราผลตอบแทนของดัชนีราคาหลักทรัพย์ล่วงหน้าในตลาดอนุพันธ์นี้จึงสรุปได้ว่าแบบจำลองที่เหมาะสมในการพยากรณ์อัตราผลตอบแทนของดัชนีราคาหลักทรัพย์ล่วงหน้าในตลาดอนุพันธ์แต่ละตลาดนั้น เป็นแบบจำลองที่แตกต่างกัน ขึ้นอยู่กับลักษณะการเคลื่อนไหวของราคาหลักทรัพย์ของแต่ละประเทศ ซึ่งช่วยให้นักลงทุนมีความเข้าใจเกี่ยวกับลักษณะความผันผวนของอัตราผลตอบแทนของดัชนีราคาหลักทรัพย์ล่วงหน้า ซึ่งจะนำไปสู่ความสามารถในการลงทุนให้เหมาะสมกับเป้าหมายการลงทุนของนักลงทุนแต่ละคนต่อไป

ฐิติศักดิ์ กิตติศักดิ์ธาดากุล (2552) ได้ทดสอบความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนนักท่องเที่ยวที่เข้ามาเที่ยวในประเทศไทยสูงสุดจำนวน 10 ประเทศ กับอัตราเงินเฟ้อในรูปของดัชนีราคาผู้บริโภคและอัตราแลกเปลี่ยนเมื่อเทียบกับเงินบาทของแต่ละประเทศด้วยแบบจำลองมัลไทวาริเอทการ์ช ซึ่งเป็นข้อมูลทุติยภูมิเป็นรายเดือนตั้งแต่ มกราคม พ.ศ. 2540 ถึง ธันวาคม พ.ศ. 2551 ในการทดสอบครั้งนี้มีการทดสอบความนิ่งของข้อมูล (Unit Root Test) การประมาณค่าความผันผวนของจำนวนนักท่องเที่ยว อัตราเงินเฟ้อและอัตราแลกเปลี่ยนเมื่อเทียบกับเงินบาท (GARCH) และการทดสอบความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนนักท่องเที่ยว อัตราเงินเฟ้อและอัตราแลกเปลี่ยนด้วยแบบจำลองมัลไทวาริเอทการ์ช (Multivariate GARCH) ผลการทดสอบความนิ่งของข้อมูล จำนวนนักท่องเที่ยวพบว่าทุกประเทศมี order of integration เท่ากับ 1 หรือ I(1) ข้อมูลอัตราเงินเฟ้อของแต่ละประเทศพบว่า พบว่าระดับอัตราเงินเฟ้อของทุกประเทศยกเว้น อินเดีย เกาหลีใต้และสหราชอาณาจักร มี order of integration เท่ากับ 1 หรือ I(1) ส่วนประเทศ อินเดีย เกาหลีใต้และสหราชอาณาจักรมี order of integration เท่ากับ 2 หรือ I(2) และข้อมูลอัตราแลกเปลี่ยนของแต่ละประเทศพบว่าอัตราแลกเปลี่ยนเมื่อเทียบกับเงินบาทของทุกประเทศมี order of integration เท่ากับ 1 หรือ I(1) สำหรับค่าความผันผวนของจำนวนนักท่องเที่ยว อัตราเงินเฟ้อและอัตราแลกเปลี่ยน พบว่ามีความแตกต่างกันในแต่ละประเทศและผลการทดสอบความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนนักท่องเที่ยวที่เข้ามาเที่ยวประเทศไทย อัตราเงินเฟ้อและอัตราแลกเปลี่ยนของแต่ละประเทศ ซึ่งพบว่าความสัมพันธ์ของความผันผวนของตัวแปรทั้งสามพบว่าผลของความผันผวนในอัตราเงินเฟ้อซึ่งเป็นผลในระยะยาวจะมีผลต่อความผันผวนของนักท่องเที่ยวในทุกประเทศ ที่ศึกษายกเว้น จีนและสิงคโปร์ ในขณะที่ผลของความผันผวนในอัตราแลกเปลี่ยนซึ่งเป็นผลในระยะยาวต่อความผันผวนของนักท่องเที่ยวจะมีผลเฉพาะในประเทศเยอรมัน ญี่ปุ่น สหรัฐอเมริกาและอินเดีย นอกจากนี้ยังพบว่าผลกระทบในระยะสั้นของอัตราเงินเฟ้อและอัตราแลกเปลี่ยนต่อจำนวนนักท่องเที่ยวต่างชาติจะมีเฉพาะประเทศ จีน มาเลเซียและสิงคโปร์เท่านั้น

ณิษา ฟูศรีนวล (2552) ได้ศึกษาความสัมพันธ์ของความผันผวนอย่างมีเงื่อนไขของเงินเฟ้อ และอัตราดอกเบี้ย รวมถึงผลกระทบจากตัวแปรสุ่มทางด้านบวก และทางด้านลบ ที่ส่งผลต่อความผันผวนอย่างมีเงื่อนไขของตัวแปรทั้งสอง โดยข้อมูลที่ใช้ศึกษาได้แก่ ดัชนีราคาผู้บริโภค (CPI), ดัชนีราคาผู้ผลิต (PPI), อัตราดอกเบี้ยเงินกู้ขั้นต่ำที่ธนาคารพาณิชย์เรียกเก็บจากลูกค้ารายย่อยชั้นดี (MRR) และอัตราดอกเบี้ยเงินกู้ขั้นต่ำที่ธนาคารพาณิชย์เรียกเก็บจากลูกค้ารายใหญ่ชั้นดี (MLR) โดยใช้ข้อมูลอนุกรมเวลารายเดือนระหว่างเดือนพฤษภาคม พ.ศ. 2522 ถึงเดือนกุมภาพันธ์ พ.ศ. 2552 จำนวน 352 ผลการศึกษาพบว่าแบบจำลองความผันผวนแบบ Univariate ที่เหมาะสม

ได้แก่ แบบจำลอง GARCH(1,1) และ GJR(1,1) และพบว่าทั้งสองพจน์ของ ARCH และ GARCH ส่งผลต่อการเปลี่ยนแปลงของความผันผวนอย่างมีเงื่อนไขของอัตราเงินเฟ้อในทิศทางเดียวกัน โดยพจน์ของ GARCH จะส่งผลกระทบต่อพจน์ของ ARCH อีกทั้งยังพบว่าความผันผวนอย่างมีเงื่อนไขของอัตราเงินเฟ้อที่วัดจากอัตราการเปลี่ยนแปลงของดัชนีราคาผู้ผลิต (PPI) มีพฤติกรรมแบบสมมาตร ในขณะที่ความผันผวนอย่างมีเงื่อนไขของอัตราเงินเฟ้อที่วัดจากอัตราการเปลี่ยนแปลงของดัชนีราคาผู้บริโภค (CPI) พฤติกรรมแบบไม่สมมาตร ซึ่งหมายถึงผลกระทบจากตัวแปรสุ่มทางลบในอดีตจะส่งผลให้ความผันผวนอย่างมีเงื่อนไขของอัตราเงินเฟ้อที่วัดจากอัตราการเปลี่ยนแปลงของดัชนีราคาผู้บริโภค (CPI) ในปัจจุบันเพิ่มขึ้นแต่เพิ่มขึ้นน้อยกว่าผลกระทบจากตัวแปรสุ่มทางบวกในอดีต สำหรับด้านอัตราดอกเบี้ยนั้นพบว่าพจน์ของ ARCH และ GARCH ไม่ส่งผลต่อการเปลี่ยนแปลงของความผันผวนอย่างมีเงื่อนไขของอัตราดอกเบี้ย MRR และยังพบว่ามีพฤติกรรมแบบไม่สมมารถเกิดขึ้น โดยผลกระทบจากตัวแปรสุ่มทางลบในอดีตจะส่งผลให้เกิดความผันผวนอย่างมีเงื่อนไขของอัตราดอกเบี้ย MRR ในปัจจุบันเพิ่มขึ้นและเพิ่มมากกว่าผลกระทบจากตัวแปรสุ่มทางบวกในอดีต และสำหรับอัตราดอกเบี้ย MLR นั้นพบว่าขึ้นอยู่กับพจน์ของ GARCH เท่านั้น โดยมีความสัมพันธ์ในทิศทางเดียวกัน และมีพฤติกรรมแบบสมมาตร ซึ่งผลการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างความผันผวนของอัตราเงินเฟ้อ และอัตราดอกเบี้ยด้วยวิธีความสัมพันธ์อย่างมีเงื่อนไขที่เป็นค่าคงที่ (Constant Conditional Correlation), ความสัมพันธ์อย่างมีเงื่อนไขที่ทีการเปลี่ยนแปลงเชิงพลวัตร (Dynamic Conditional Correlation) และวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Ordinary Least Square) พบว่าให้ผลการทดสอบที่สอดคล้องกัน กล่าวคือความผันผวนอย่างมีเงื่อนไขของอัตราเงินเฟ้อ และอัตราดอกเบี้ยไม่มีความสัมพันธ์กัน ดังนั้นผู้วางแผนนโยบายทางการเงินในการดูแลเงินเฟ้อในประเทศไม่ควรมุ่งพิจารณาถึงอัตราดอกเบี้ยเพียงอย่างเดียว ควรพิจารณาตัวเศรษฐกิจมหภาคที่สำคัญอื่นๆ และความผันผวนในอดีตมาประกอบการพิจารณาในการกำหนด นโยบาย เนื่องจากปัจจัยเหล่านี้มีผลต่อความผันผวนของอัตราเงินเฟ้อที่เกิดขึ้นในปัจจุบัน

นิติวัธน์ ดวงงาม (2552) ได้ทดสอบการส่งผ่านความผันผวน (Volatility Spillover Effects) และทดสอบความสัมพันธ์อย่างมีเงื่อนไข (Conditional Correlation) ระหว่างตลาดหุ้นและตลาดพันธบัตรในประเทศไทยและสิงคโปร์ ด้วยแบบจำลองมัลไทวาริเอทการ์ช (Multivariate GARCH) โดยใช้ข้อมูลทุติยภูมิรายของดัชนีราคาปิดตลาดหุ้นและตลาดพันธบัตรของประเทศไทยและประเทศสิงคโปร์ ตั้งแต่วันที่ 3 มกราคม 2547 ถึงวันที่ 31 ธันวาคม 2551 รวมทั้งสิ้น 1040 วัน ซึ่งทดสอบการส่งผ่านความผันผวนของความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไขโดยแบบจำลอง MV-GARCH โดยการประมาณค่าโดยวิธี BEKK(1,1) ในขณะที่การทดสอบความสัมพันธ์แบบมีเงื่อนไข

ใช้วิธีประมาณค่าโดยวิธี Dynamic Conditional Correlation (DCC) และ วิธี Constant Conditional Correlation (CCC) ผลการทดสอบสามารถสรุปได้ว่า เกิดการส่งผ่านความผันผวนของอัตราผลตอบแทนของตราสารการเงินภายในประเทศ ซึ่งมีลักษณะการส่งผ่านที่คล้ายคลึงกันทั้งสองประเทศ กล่าวคือมีการส่งผ่านความผันผวนอย่างมีเงื่อนไขและผลของ Shock จากตลาดหุ้นไปยังตลาดพันธบัตร

วิสูตร พาราทิพย์เจริญชัย (2551) ศึกษาเรื่อง ประสิทธิภาพและแบบจำลองสำหรับการประมาณค่าอัตราถัวความเสี่ยงที่เหมาะสมโดยใช้ดัชนีราคาหลักทรัพย์ล่วงหน้า : กรณีศึกษาของประเทศไทย โดยได้แบ่งแบบจำลองที่ใช้ในการประมาณค่าอัตราถัวความเสี่ยงสามารถแบ่งออกได้ 2 กลุ่มคือ แบบจำลองที่ให้อัตราถัวความเสี่ยงแบบคงที่ (Constant Hedge Ratio) ได้แก่ OLS (Ordinary Least Square), The Bivariate Vector Autoregressive Model (Bi-VAR), The Vector Error Correction Model (VECM) และแบบจำลองที่ให้อัตราถัวความเสี่ยงที่เปลี่ยนแปลงไปตามเวลา (Dynamic hedge ratio) ได้แก่ DVEC–GARCH (1,1) , CC–GARCH (1,1) , BEKK–GARCH (1,1) ผลการศึกษาในช่วง In-sample และ Out-sample ชี้ให้เห็นว่า Futures สามารถป้องกันความเสี่ยงได้จริง ในช่วง In-sample แบบจำลอง CC-GARCH(1,1) เป็นแบบจำลองที่ดีในด้านการ Trade-off ระหว่าง Risk-return แต่ระยะเวลาป้องกันความเสี่ยงค่อนข้างนานและมีการปรับจำนวนสัญญาในแต่ละวันให้สอดคล้องกับข้อมูลที่เข้ามาตลอดจึงทำให้ Transaction Cost ค่อนข้างมากส่งผลให้แบบจำลอง CC-GARCH(1,1) และแบบจำลองในกลุ่ม Dynamic Hedge Strategy ด้อยกว่าแบบจำลองในกลุ่ม Static Hedge Strategy ในขณะที่ Out-sample ได้แบ่งช่วงทดสอบออกเป็น 4 ช่วงพบว่า Out-sample ที่มีช่วงต่อกับ In-sample แบบจำลอง BEKKGARCH(1,1) มีประสิทธิภาพมากที่สุด รองลงมาคือแบบจำลองในกลุ่ม Dynamic HedgeStrategy ขณะที่ Out-sample ที่มีระยะเวลาห่างจาก In-sample ออกไปนาน ๆ แบบจำลองในกลุ่ม Static Hedge Strategy ให้ผลที่ดีกว่าด้านการทดสอบ Lead-lag relationship ระหว่างวันที่ 3 กรกฎาคม 2549 ถึงวันที่ 29 มิถุนายน 2550 โดยใช้ BEKK-GARCH(1,1) ทดสอบผ่าน Restricted และ Unrestricted Model พบว่า มีการส่งผ่านความผันผวนไปมาระหว่างทั้ง 2 ตลาด (Bi-directional transmission in volatility) กล่าวคือความผันผวนในผลตอบแทนของ Spot ได้ส่งผ่านไปยังความผันผวนในผลตอบแทนของ Futures แสดงให้เห็นว่าตลาด Spot เป็นตัวชี้นำตลาด Futures ในขณะเดียวกันความผันผวนในผลตอบแทนของ Futures ได้ส่งผ่านไปยังความผันผวนในผลตอบแทนของ Spot แสดงให้เห็นว่าตลาด Futures เป็นตัวชี้นำตลาด Spot

อภิสิทธิ์ สรรพดิลก (2548) ศึกษาเรื่อง การส่งผ่านความไม่แน่นอนของปัจจัยที่มีผลในตลาดซื้อขายไฟฟ้าจากประสบการณ์ของต่างประเทศโดยใช้วิธีแบบจำลอง Multivariate GARCH ซึ่งเป็นการศึกษาการส่งผ่านความไม่แน่นอนของปัจจัยต่างๆ ที่มีผลต่อราคาไฟฟ้าในตลาดการซื้อขายไฟฟ้าของประเทศอังกฤษและกลุ่มประเทศนอร์คิด เพื่อนำประสบการณ์จากตลาดซื้อขายไฟฟ้าจากต่างประเทศมาคาดคะเนผลที่คาดว่าจะเกิดในประเทศไทยภายหลัก การปรับโครงสร้างและแปรรูปกิจการไฟฟ้า โดยความไม่แน่นอนของราคาในตลาดการซื้อขายไฟฟ้า ในประเทศอังกฤษและในกลุ่มประเทศนอร์ดิค น่าจะสะท้อนถึงความไม่แน่นอนของราคาไฟฟ้า ที่จะเกิดขึ้นในประเทศไทยภายใต้รูปแบบการซื้อขายไฟฟ้าที่เหมือนกัน ผลการศึกษาพบว่าควา มไม่แน่นอนของราคาไฟฟ้าถูกส่งผ่านมาจากความไม่แน่นอนของราคาไฟฟ้าในอดีตเป็นหลักในทั้งสองประเทศ ซึ่งสามารถลดความไม่แน่นอนนี้ได้ด้วยเครื่องมือทางการเงิน เช่นตลาดซื้อขายล่วงหน้า ในขณะที่ปัจจัยอื่นที่ส่งผลต่อการส่งผ่านความแน่นอนของราคาไฟฟ้าจะขึ้นอยู่กับปัจจัยภายในของแต่ละประเทศ เช่น สภาพภูมิอากาศ กำลังการผลิตไฟฟ้าและจำนวนผู้ทำการซื้อขายไฟฟ้าในตลาด นอกจากนี้หากนำรูปแบบตลาดของกลุ่มประเทศนอร์คิดที่ใช้ช่วงเวลาในการซื้อขายครั้งละหนึ่งชั่วโมงมาประยุกต์ใช้ในประเทศไทยจะทำให้เกิดความไม่แน่นอนน้อยกว่าการใช้รูปแบบกรซื้อขายไฟฟ้าที่ใช้ช่วงเวลาครั้งละครึ่งชั่วโมงของประเทศอังกฤษ

Bollerslev , Engle and Wooldridge (1988) เป็นผู้นำเสนอ ซึ่งแบบจำลองที่ไม่มีข้อจำกัดในรูปแบบใดเลยจะใช้วิธี Maximum likelihood ในการคำนวณหา Parameter เมื่อ k คือจำนวน Time Series ที่ปรากฏในแบบจำลอง รูปแบบของแบบจำลองที่ง่ายกว่าที่ถูกเสนอจะอยู่ในลักษณะของ Diagonal Vech โดยจะถือว่า Lag ที่มีค่าสัมประสิทธิ์ไม่เท่ากับศูนย์เท่านั้นที่มีผลกระทบต่อแบบจำลอง ทำให้สามารถลด Parameter ที่จำเป็นให้เหลือ แบบจำลอง Diagonal Vech สามารถที่จะอธิบายความสัมพันธ์ได้ดังเช่นแบบจำลอง GARCH ทั่วไป อย่างไรก็ตามข้อจำกัดของจำนวนParameter ที่จำเป็นเพื่อให้แน่ใจว่าจะเกิด Positive Definiteness of the Conditional Covariance นั้นค่อนข้างจะยากเมื่อจำนวนของ Time Series ที่เกิดขึ้นใน Model มีจำนวนมาก แบบจำลองในลักษณะ Constant Conditional Correlation Multivariate GARCH ถูกนำเสนอในปี 1990 โดย Bollerslev จากการคำนวณ Univariate GARCH ในแต่ละ Time Series และคำนวณหา Correlation Matrix ข้อสมมุติของ Correlation ที่คงที่นั้นทำให้เหมาะกับแบบจำลองที่มีขนาดใหญ่และแน่ใจว่าการประมาณค่านี้จะเกิด Positive definite โดยมีข้อจำกัดเบื้องต้นว่าในแต่ละ Condition Variance ไม่เป็นศูนย์และ Correlation Matrix ต้อง Full Rank อย่างไรก็ตาม การคำนวณด้วย Constant Correlation ไม่ให้วิธีที่ให้ค่า Standard Errors ที่คงที่ในการใช้กระบวนการประมาณค่าใน

หลายๆขั้นตอน ซึ่ง Tsui and Yu (1999) พบว่า Constant Correlation นั้นสามารถที่จะถูกปฏิเสธในสินทรัพย์บางประเภท

Tse and Tsui (2002) ได้นำเสนอรูปแบบของแบบจำลอง Dynamic Correlation Multivariate GARCH แต่ไม่ได้พยายามที่จะแยกการประมาณค่าให้เป็นแต่ละกระบวนการ Univariate GARCH และ ประมาณค่าด้วย Dynamic Correlation เหมือนในแบบจำลองของ Engle (2001) จำนวนของ Parameter ที่จำเป็นในการประมาณค่าคือ จากรูปแบบของแบบจำลองที่กล่าวมาข้างต้นถูกนำมาใช้ในการอธิบายการส่งผ่านความไม่แน่นอน ดังเช่นในงานวิจัยของ Andrew C. Worthington และ Helen Higgs ที่ได้ทดสอบส่งผ่านราคาไฟฟ้าและความไม่แน่นอน