

บทที่ 4

ผลการศึกษา

ในการศึกษาค้นคว้าในครั้งนี้ มีเป้าหมายเพื่อพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง แบบรูป ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนบ้านปางชุม จังหวัดเชียงใหม่ โดยดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูลจากการวิเคราะห์การทำใบงาน ผลจากการทำแบบทดสอบการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง แบบรูป และผลจากการสัมภาษณ์ โดยชื่อของนักเรียนที่ใช้ในการนำเสนอข้อมูลในการศึกษาครั้งนี้เป็นการใช้ชื่อสมมุติ โดยดำเนินการเป็น 2 ขั้นตอน ดังต่อไปนี้

ตอนที่ 1 ผลการวิเคราะห์พัฒนาการของความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง แบบรูป ในแต่ละหน่วยการเรียนรู้

ตอนที่ 2 ผลการวิเคราะห์ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง แบบรูป จากแบบทดสอบการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง แบบรูป และการสัมภาษณ์

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright© by Chiang Mai University

All rights reserved

ตอนที่ 1 ผลการวิเคราะห์พัฒนาการของความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง แบบรูป ในแต่ละหน่วยการเรียนรู้

ผู้ศึกษาได้ศึกษาความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง แบบรูป ของนักเรียน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยวิเคราะห์ระดับการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง แบบรูป ของนักเรียนเป็นรายบุคคล จากใบงานในแต่ละแผนการจัดการเรียนรู้ของแต่ละหน่วยการเรียนรู้ โดยรายละเอียดของผลการวิเคราะห์ข้อมูลเป็นดังนี้

ตาราง 3 การวิเคราะห์ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง แบบรูปในแต่ละหน่วยการเรียนรู้

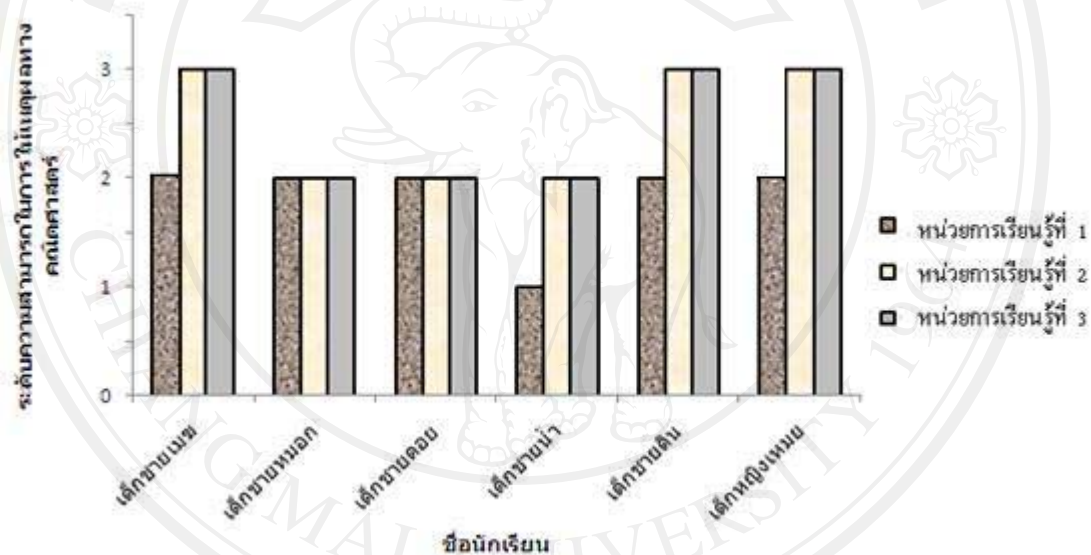
หน่วยที่	ระดับความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์	จำนวน	ร้อยละ
หน่วยที่ 1	0	0	0
	1	1	16.67
	5	5	83.33
	0	0	0
หน่วยที่ 2	0	0	0
	1	0	0
	2	3	50
	3	3	50
หน่วยที่ 3	0	0	0
	1	0	0
	2	3	50
	3	3	50

จากตารางที่ 4 พบว่า ในหน่วยที่ 1 นักเรียนมีระดับการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง แบบรูป ในระดับที่ 2 มากที่สุด จำนวน 5 คน คิดเป็น ร้อยละ 83.33 และนักเรียนมีระดับการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง แบบรูป ระดับที่ 1 จำนวน 1 คน คิดเป็น ร้อยละ 16.67 หน่วยที่ 2 นักเรียนมีระดับการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง แบบรูป เท่ากัน คือ ระดับที่ 2 และระดับที่ 3 คือ

มีจำนวน 3 คน คิดเป็น ร้อยละ 50 ส่วนในหน่วยสุดท้าย คือ หน่วยที่ 3 พบว่า นักเรียนมีระดับการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง แบบรูป เพียงแค่ 2 ระดับ คือ ระดับที่ 2 และระดับที่ 3 โดยมีจำนวน 3 คน และคิดเป็นร้อยละ 50 เท่ากัน

นอกจากนี้เมื่อวิเคราะห์การพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง แบบรูปของนักเรียนแต่ละคน ในแต่ละหน่วยการเรียนรู้ พบว่า นักเรียนแต่ละคนมีพัฒนาการในการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง แบบรูป ดีขึ้น ดังแผนภูมิที่ 1

แผนภูมิ 1 ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง แบบรูป ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จากการทำใบงาน

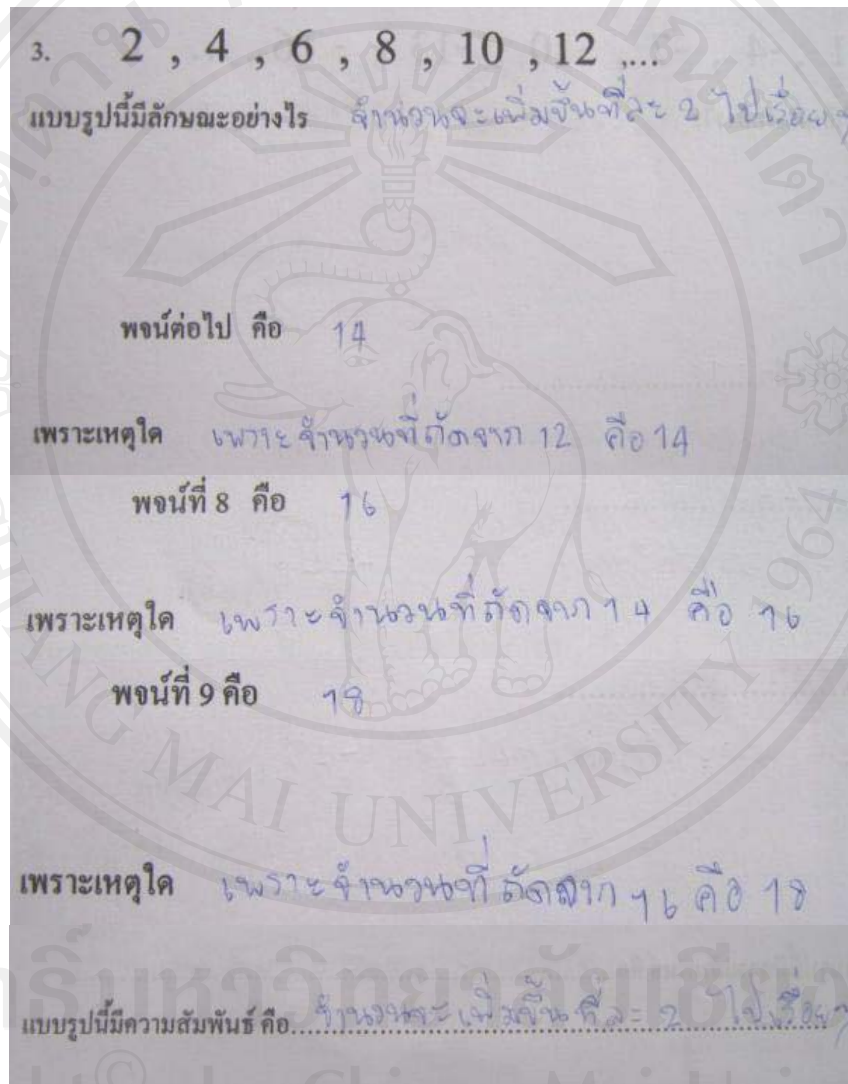


การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนหน่วยที่ 1

การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง แบบรูป ในหน่วยที่ 1 เน้นให้นักเรียนให้เหตุผลเกี่ยวกับลักษณะของแบบรูป การวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของแบบรูป และการหาพจน์ที่อยู่ถัดไป โดยกิจกรรมการเรียนการสอนนั้นที่ครูได้ใช้คำถามกระตุ้นให้นักเรียนได้แสดงความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง แบบรูป ให้นักเรียนลงมือปฏิบัติจริง มีการทำกิจกรรมกลุ่ม และการใช้สื่อการเรียนการสอนที่เชื่อมโยงกับชีวิตประจำวันของนักเรียน เช่น ลายผ้าถุงตีนจก แต่ในการจัดการเรียนการสอนในหน่วยนี้ค่อนข้างใช้เวลานานในการทำกิจกรรม ซึ่งจากการตรวจใบงานพบว่า

นักเรียนมีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง แบบรูป อยู่ในระดับ 2 จำนวน 5 คน ได้แก่ เด็กชายเมฆ เด็กชายหมอก เด็กชายดอย เด็กชายดิน และเด็กหญิงเหมย พบว่า

เมื่อกำหนดสถานการณ์เกี่ยวกับแบบรูปและให้นักเรียนวิเคราะห์แบบรูปนั้น สามารถวิเคราะห์องค์ประกอบของแบบรูปได้ถูกต้องครบถ้วนทุกรายละเอียด โดยสามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างค่าของแต่ละพจน์ ดังตัวอย่างผลจากการทำใบงานของเด็กชายคอย ในการวิเคราะห์แบบรูปในสถานการณ์ปัญหาเกี่ยวกับจำนวนที่เพิ่มขึ้นทีละ 2 รูป ดังภาพที่ 6

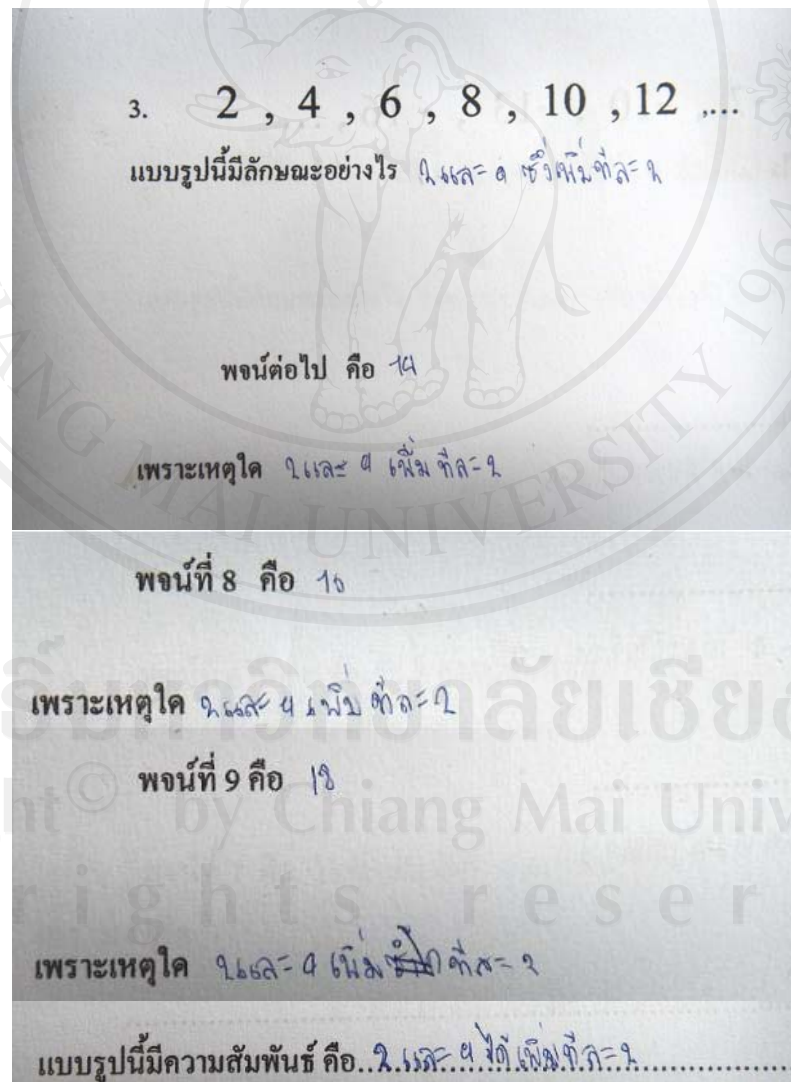


ภาพ 6 การเขียนตอบในใบงานที่ 2 เรื่อง ความสัมพันธ์ของแบบรูป ของเด็กชายคอย

จากภาพที่ 6 พบว่า เด็กชายคอยสามารถวิเคราะห์ พร้อมทั้งได้อธิบายเหตุผลว่า แบบรูปนี้เป็นความสัมพันธ์ของจำนวนที่เพิ่มทีละ 2 ซึ่งเด็กชายคอยได้วิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์ และค่าของแต่ละพจน์ในแต่ละตำแหน่ง และนำตำแหน่งของพจน์ก่อนหน้ามาหา

ค่าของพจน์ถัดไปได้ นอกจากนี้เมื่อกำหนดสถานการณ์เกี่ยวกับแบบรูปและให้นักเรียนวิเคราะห์แบบรูป นักเรียนที่อยู่ในระดับ 3 ก็สามารถวิเคราะห์แบบรูปได้เช่นเดียวกัน

สำหรับนักเรียนที่เหลือ จำนวน 1 คน เป็นนักเรียนมีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง แบบรูป อยู่ในระดับ 1 คือ เด็กชายน้ำ ได้แสดงพฤติกรรมออกมา โดยสามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างค่าของแต่ละพจน์ในแบบรูป ซึ่งเป็นความสัมพันธ์ในมิติเดียวและวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของแบบรูปที่กำหนดให้เพียงคู่เดียว แล้วนำมาสรุปความสัมพันธ์ของแบบรูป โดยมองความสัมพันธ์ระหว่างค่าของแต่ละพจน์ในแบบรูป ดังตัวอย่างผลจากการทำใบงานของเด็กชายน้ำในการวิเคราะห์แบบรูปในสถานการณ์ปัญหาเกี่ยวกับจำนวนที่เพิ่มขึ้นทีละ 2 รูป ดังภาพที่ 7



ภาพ 7 การเขียนตอบในใบงานที่ 2 เรื่อง ความสัมพันธ์ของแบบรูป ของเด็กชายน้ำ

จากภาพที่ 7 พบว่า เด็กชายน้ำได้วิเคราะห์แบบรูป โดยวิเคราะห์แบบรูปจากพจน์แรกและพจน์ที่ 2 ของแบบรูปเพียงเท่านั้น โดยกล่าวว่า จาก 2 และ 4 เพิ่มทีละ 2 แล้วสรุปเป็นความสัมพันธ์ของแบบรูปทั้งหมด โดยมีได้พิจารณาความสัมพันธ์ของจำนวนทั้งหมดที่กำหนดให้

การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนหน่วยที่ 2

การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง แบบรูป ในหน่วยที่ 2 เน้นให้นักเรียนให้เหตุผลในการหาพจน์ต่างๆ และอธิบายความสัมพันธ์ของแบบรูปของรูปภาพ แบบรูปของรูปเรขาคณิต และแบบรูปของจำนวน โดยกิจกรรมการเรียนการสอนเหมือนหน่วยที่ 1 คือ ครูได้ใช้คำถามกระตุ้นให้นักเรียนได้แสดงความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง แบบรูป ให้นักเรียนลงมือปฏิบัติจริง มีการทำกิจกรรมกลุ่ม และการใช้สื่อการเรียนการสอนที่เชื่อมโยงกับชีวิตประจำวันของนักเรียน โดยใช้สถานการณ์ในชีวิตประจำวัน ซึ่งจากการตรวจใบงานพบว่า

นักเรียนมีระดับความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง แบบรูป อยู่ในระดับ 3 จำนวน 3 คน ได้แก่ เด็กชายเมฆ เด็กชายดิน และเด็กหญิงเหมย เมื่อกำหนดสถานการณ์เกี่ยวกับแบบรูปและให้นักเรียนหาพจน์ถัดไป พจน์ไกล และพจน์ทั่วไปของแบบรูปนั้น พบว่า นักเรียนที่มีระดับความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง แบบรูป ระดับ 3 สามารถหาค่าของพจน์ถัดไป พจน์ที่อยู่ใกล้ พจน์ที่อยู่ไกล หรือ พจน์ใด ๆ ของแบบรูปได้อย่างสมบูรณ์ โดยเหตุผลในการสร้างข้อสรุปของนักเรียนจะเริ่มต้นจากการสร้างสูตรที่แทนกฎเกณฑ์ของแบบรูปในกรณีทั่วไป โดยการพิสูจน์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในแต่ละตำแหน่งจากเงื่อนไขของแบบรูปที่กำหนดให้ได้อย่างมีความหมายและสมเหตุสมผล และใช้สูตรดังกล่าวหาค่าของพจน์ต่าง ๆ ในกรณีเฉพาะ ดังตัวอย่างผลจากการทำใบงานของเด็กชายเมฆในการหาพจน์ต่าง ๆ ในสถานการณ์ปัญหาเกี่ยวกับแบบรูปของจำนวนลูกเปิดที่เพิ่มขึ้นทีละ 2 ดังภาพที่ 8

2. ตลาดแห่งหนึ่งขายลูกเป็ด โดยกำหนดแบบรูปของจำนวนลูกเป็ดเป็นชุดต่าง ๆ ดังนี้



ชุดที่ 1 ชุดที่ 2 ชุดที่ 3 ชุดที่ 4 ...

2.1 พจน์ถัดไป จะมีลูกเป็ดกี่ตัว พร้อมอธิบายเหตุผลว่าเพราะเหตุใดจึงเป็นรูปนั้น

ตอบ พจน์ถัดไปจะมีลูกเป็ด 10 ตัว
 เพราะ ในแต่ละชุดมี ลูกเป็ด เพิ่มขึ้นทีละ 2 ตัว
 เพราะ ความสัมพันธ์ของรูปเป็ด เพิ่มขึ้นทีละ 2 ตัว

รูปที่	1	2	3	4	...	n
จำนวน ลูกเป็ด	2	4	6	8	...	$2n$ ตัว

2.2 พจน์ที่ 275 จะมีลูกเป็ดกี่ตัว พร้อมอธิบายเหตุผลว่าเพราะเหตุใดจึงเป็นรูปนั้น

ตอบ พจน์ที่ 275 จะมีลูกเป็ด 550 ตัว เพราะ เอา 275 ตัวมาคูณ
 กับ 2 ก็ได้ 550 ตัว

2.3 พจน์ทั่วไปของแบบรูปเท่ากับเท่าไร พร้อมอธิบายเหตุผล

ตอบ พจน์ทั่วไปของแบบรูปคือ $2n$
 เพราะในแต่ละรูปเพิ่มขึ้นทีละ 2

ภาพ 8 การเขียนตอบในใบงานที่ 4 เรื่อง การหาพจน์ต่างๆ ของแบบรูปของรูปภาพของเด็กชายเมฆ

จากภาพที่ 8 พบว่า เด็กชายเมฆได้หาพจน์ถัดไป พจน์ใกล้เคียง และพจน์ทั่วไปของสามารถหาสูตรแทนพจน์ทั่วไปของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ โดยวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของแบบรูปได้ว่าเป็นความสัมพันธ์ของลูกเป็ดที่เพิ่มขึ้นทีละ 2 ตัว และใช้สูตรในกรณีทั่วไปมาหาค่าของพจน์ต่างๆ ได้ เช่นเดียวกับเด็กชายดิน และเด็กหญิงเหมยก็สามารถหาพจน์ถัดไป พจน์ใกล้เคียง และพจน์ทั่วไปจากสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้เช่นเดียวกัน

ในขณะที่นักเรียนที่มีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง แบบรูป ในระดับ 2 จำนวน 3 คน ได้แก่ เด็กชายหมอก เด็กชายดอย และเด็กชายน้าสามารถหาค่าของพจน์ถัดไป พจน์ที่อยู่ใกล้ พจน์ที่อยู่ไกล หรือ พจน์ใด ๆ ของแบบรูปได้อย่างสมบูรณ์ โดยเหตุผลที่ใช้ในการสร้างข้อสรุปเริ่มต้นจากการสร้างสูตรขึ้นจากการใช้กระบวนการให้เหตุผลแบบอุปนัยเป็นหลัก คือ สร้างสูตรที่ใช้แทนกฎเกณฑ์ของแบบรูปจากการพิจารณาค่าของแต่ละพจน์ต้นๆ ในแบบรูปที่กำหนดให้ แล้วพยายามค้นหาสูตรที่ทำให้ค่าของทุกพจน์เป็นจริง แล้วสรุปว่า สูตรที่สร้างขึ้นนั้นเป็นจริงกับทุกพจน์ โดยไม่สนใจว่า จำนวนที่นำมาดำเนินการในสูตรนั้นจะมีที่มาหรือความหมายอย่างไร ดังตัวอย่างการเผชิญกับสถานการณ์เกี่ยวกับแบบรูปของเด็กชายดอย โดยเมื่อเผชิญสถานการณ์เกี่ยวกับแบบรูปของจำนวนที่เพิ่มขึ้นทีละ 2 ดังภาพที่ 9

1. 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...

1.1 พจน์ถัดไป คือจำนวนใด อธิบายเหตุผลในการหาคำตอบ

ตอบ พจน์ถัดไป คือ 15

เพราะจำนวนเลขเพิ่มขึ้นทีละ 2

มีความสัมพันธ์ คือ เพิ่มขึ้นทีละ 2 ไปเรื่อยๆ

1.2 พจน์ที่ 153 คือจำนวนใด อธิบายเหตุผลในการหาคำตอบ

ตอบ พจน์ที่ 153 คือ 306

เพราะ $2n-1$ หมายถึง 2012

ไปคูณกับ จำนวนที่ต้องการ ถูก แล้วมาลบด้วยหนึ่ง

1.3 พจน์ที่ n เท่ากับเท่าไร อธิบายเหตุผลในการหาคำตอบ

ตอบ พจน์ที่ n คือ $2n-1$

เพราะพจน์ที่ 1 เป็นจำนวน 1

เพราะ $(1 \times 2) - 1 = 1$

พจน์ที่ 2 ก็เลย $(2 \times 2) - 1 = 3$

ภาพ 9 การเขียนตอบในใบงานที่ 6 เรื่อง การหาพจน์ต่างๆ ของแบบรูปของจำนวน ของเด็กชายดอย

จากภาพที่ 9 พบว่า เด็กชายคอยได้วิเคราะห์องค์ประกอบของแบบรูปได้ถูกต้อง สามารถหาสูตรแทนพจน์ทั่วไปของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ ทำให้สามารถหาค่าของพจน์ถัดไป พจน์ที่อยู่ใกล้ พจน์ที่อยู่ไกล หรือพจน์ใด ๆ ของแบบรูปได้ โดยจะสร้างสูตรที่ใช้แทนกฎเกณฑ์ของแบบรูปจากการพิจารณาค่าของแต่ละพจน์ต้นๆ ในแบบรูปที่กำหนดให้ แล้วพยายามค้นหาสูตรที่ทำให้ค่าของทุกพจน์เป็นจริง ดังเห็นได้จากการอธิบายในการหาพจน์ทั่วไปว่า จากพจน์ที่ 1 คือ 1 หาได้จาก $(1 \times 2) - 1$ จากพจน์ที่ 2 คือ 3 หาได้จาก $(2 \times 2) - 1$ ทำให้เห็นว่า เด็กชายคอยจะหาจำนวนที่มาดำเนินการกับค่าของพจน์แล้วได้คำตอบที่ต้องการ แล้วสรุปว่าสูตรที่สร้างขึ้นนั้นเป็นจริงกับทุกพจน์

การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนหน่วยที่ 3

การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง แบบรูป ในหน่วยที่ 3 นักเรียนให้เหตุผลเกี่ยวกับลักษณะของแบบรูปและการหาพจน์ต่าง ๆ ของแบบรูปจากสถานการณ์ปัญหาแบบรูปในชีวิตประจำวัน และใช้ในการออกแบบงานศิลปะ โดยกิจกรรมการเรียนการสอนเหมือนหน่วยที่ 1 และ 2 คือ ครูได้ใช้คำถามกระตุ้นให้นักเรียนได้แสดงความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง แบบรูป ให้นักเรียนลงมือปฏิบัติจริง มีการทำกิจกรรมกลุ่ม และการใช้สื่อการเรียนการสอนที่เชื่อมโยงกับชีวิตประจำวันของนักเรียน โดยใช้สถานการณ์ในชีวิตประจำวัน ซึ่งจากการตรวจใบงานพบว่า

นักเรียนมีระดับความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง แบบรูป จำนวน 3 คน มีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง แบบรูป อยู่ในระดับ 3 ได้แก่ เด็กชายเมฆ เด็กชายดิน และเด็กหญิงเหมย พบว่า นักเรียนที่มีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง แบบรูป ระดับ 3 สามารถแก้ปัญหาจากสถานการณ์ต่าง ๆ ที่กำหนดให้ โดยสามารถหาพจน์ที่อยู่ใกล้ หรือ พจน์ใด ๆ ของแบบรูปได้อย่างสมบูรณ์ และในการหาพจน์ทั่วไปนั้นจะพิสูจน์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในแต่ละตำแหน่งจากเงื่อนไขของแบบรูปที่กำหนดให้อย่างมีความหมายและสมเหตุสมผล และใช้สูตรดังกล่าวหาค่าของพจน์ต่าง ๆ ดังตัวอย่างผลจากการทำใบงานของเด็กหญิงเหมยในการวิเคราะห์แบบรูปในสถานการณ์ปัญหาแบบรูปเกี่ยวกับการปูแผ่นอิฐทางเดินในส่วนที่เพิ่มขึ้นที่ละ 2 ดังภาพที่ 10

1. ลูกแก้วต้องการปูแผ่นอิฐทางเดินในสวน ซึ่งมีแบบให้เลือก ดังรูป

แบบที่ 1 แบบที่ 2 แบบที่ 3 แบบที่ 4

1.1 ถ้าลูกแก้วต้องการปูแผ่นอิฐแบบที่ 50 จะต้องใช้อิฐกี่ก้อน พร้อมอธิบายเหตุผลในการตอบคำถาม

10๔ เพราะมีความสัมพันธ์กันระหว่างจำนวนอิฐที่กำหนดให้กับจำนวนอิฐที่ต่อเติมเพิ่มขึ้นทีละ 2

จึงมีคำตอบ $(50 \times 2) + 2 = 102$

แบบที่	1	2	3	4	...	n
จำนวนอิฐ	4	6	8	10		$2n+2$

1.2 จงหาพจน์ทั่วไปของแบบรูป พร้อมอธิบายเหตุผลให้เข้าใจ

พจน์ทั่วไปของแบบรูป คือ $2n+2$

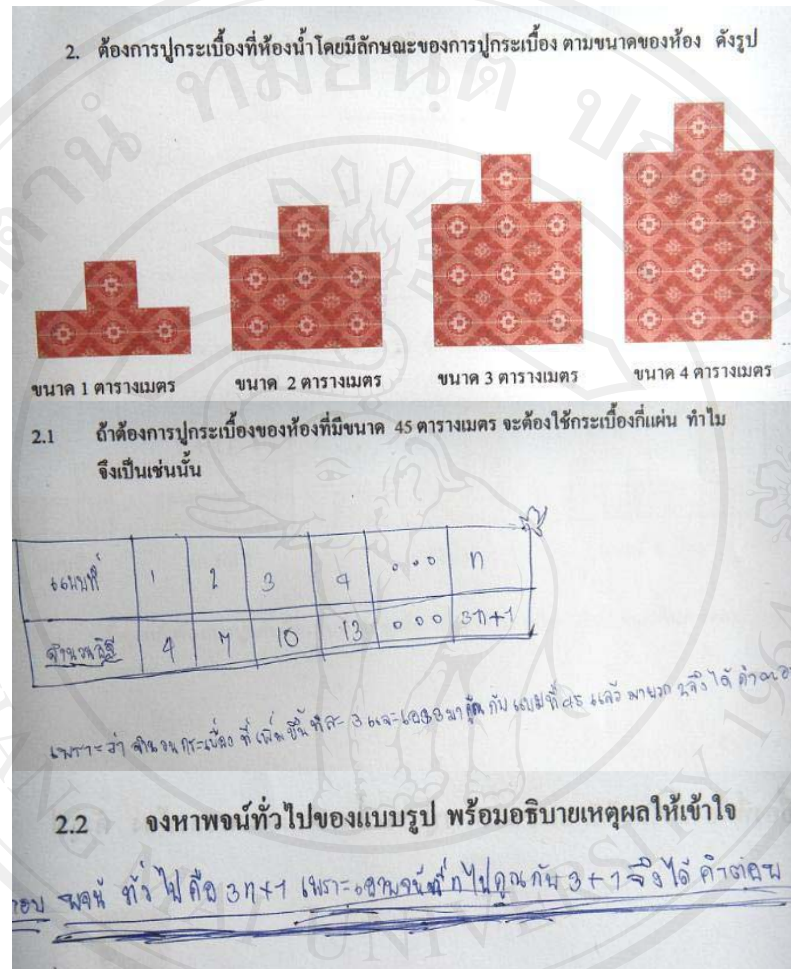
เพราะมีความสัมพันธ์กันระหว่างจำนวนอิฐที่กำหนดให้กับจำนวนอิฐที่ต่อเติมเพิ่มขึ้นทีละ 2

ภาพ 10 การเขียนตอบในใบงานที่ 7 เรื่อง แบบรูปในชีวิตประจำวัน ของเด็กหญิงเหมย

จากภาพที่ 10 พบว่า เด็กหญิงเหมยได้ให้เหตุผลเกี่ยวกับความสัมพันธ์ของแบบรูปว่าเป็นความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนก้อนอิฐที่กำหนดให้ที่ค่อยๆ เพิ่มขึ้นทีละ 2 ก้อน และยังสามารถหาสูตรแทนพจน์ทั่วไปของแบบรูปที่กำหนดให้ได้

ในขณะที่นักเรียนอีก 3 คนที่เหลือ ได้แก่ เด็กชายหมอก เด็กชายดอย และเด็กชายน้ำ เป็นนักเรียนที่มีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง แบบรูป ในระดับ 2 พบว่า เมื่อกำหนดสถานการณ์ให้แก่ปัญหาเกี่ยวกับแบบรูป พจน์ที่อยู่ไกลของแบบรูปได้ โดยจะสร้างสูตรที่ใช้แทนกฎเกณฑ์ของแบบรูปจากการพิจารณาค่าของแต่ละพจน์ต้นๆ ในแบบรูปที่กำหนดให้แล้วพยายามค้นหาสูตรที่ทำให้ค่าของทุกพจน์เป็นจริง แล้วสรุปว่า สูตรที่สร้างขึ้นนั้นเป็นจริงกับทุก

พจน์ ดังตัวอย่างผลจากการทำใบงานของเด็กชายน้ำในการวิเคราะห์แบบรูปในสถานการณ์ปัญหา เกี่ยวกับการปูกระเบื้องในห้องน้ำที่เพิ่มขึ้นทีละ 3 ดังภาพที่ 11

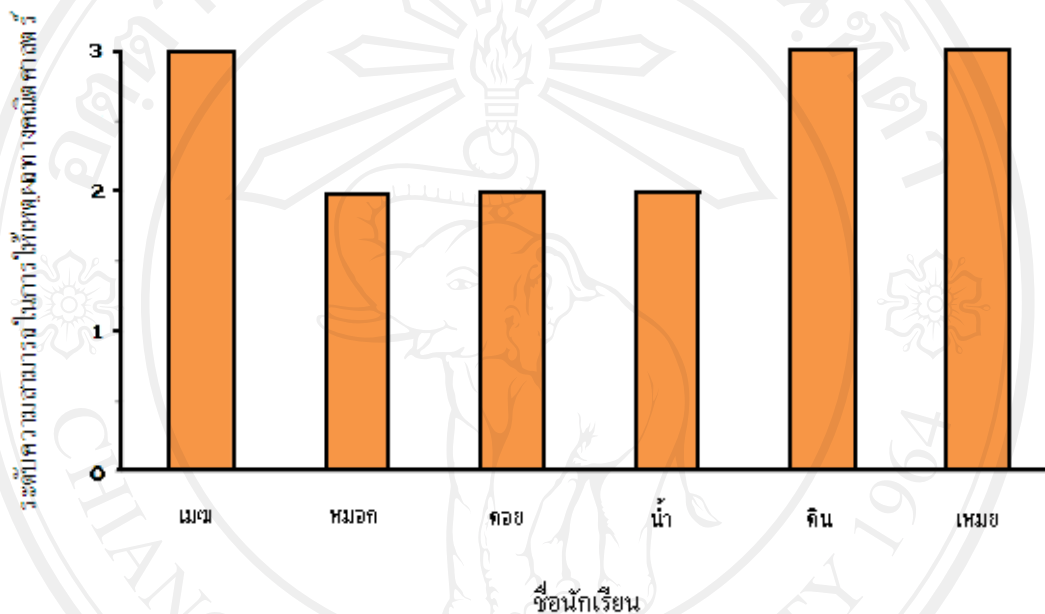


ภาพ 11 การเขียนตอบใบงานที่ 7 เรื่อง แบบรูปในชีวิตประจำวัน ของเด็กชายน้ำ

จากภาพที่ 11 พบว่า เด็กชายน้ำได้ให้เหตุผลเกี่ยวกับความสัมพันธ์ของแบบรูปว่า เป็น จำนวนกระเบื้องที่เพิ่มขึ้นทีละ 3 และสามารถหาค่าของพจน์ที่อยู่ไกลของแบบรูปได้ โดยการหา จำนวนมาแทนค่าแล้วทำให้ได้คำตอบ จึงสรุปเป็นสูตรแทนพจน์ทั่วไปของแบบรูป

ตอนที่ 2 ผลการวิเคราะห์ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง แบบรูป
จากแบบทดสอบการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง แบบรูป และการสัมภาษณ์

แผนภูมิ 2 ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง แบบรูป ของนักเรียนชั้น
 มัธยมศึกษาปีที่ 1 จากการทำแบบทดสอบการให้เหตุผล เรื่อง แบบรูป และ
 การสัมภาษณ์



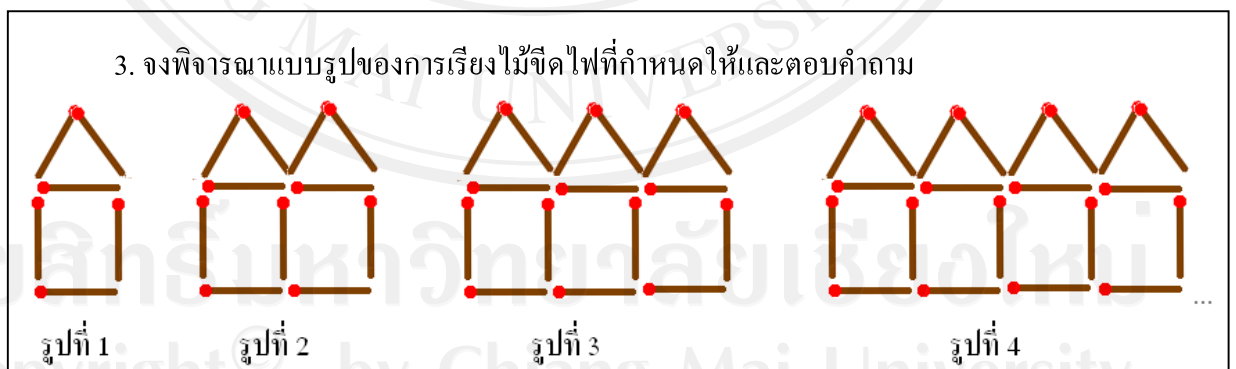
จากแผนภูมิที่ 2 พบว่า นักเรียนมีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เรื่องแบบรูป อยู่ในระดับ 3 จำนวน 3 คน ได้แก่ เด็กชายเมฆ เด็กชายดิน และเด็กหญิงเหมย คิดเป็นร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ส่วนนักเรียนที่เหลืออีก 3 คน ได้แก่ เด็กชายหมอก เด็กชายคอย และเด็กชายน้ำ มีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เรื่องแบบรูป อยู่ในระดับ 2 คิดเป็นร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

จากผลการวิเคราะห์ข้อมูลจากแบบทดสอบวัดการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง แบบรูป และการสัมภาษณ์ สามารถจำแนกนักเรียนออกเป็น 2 กลุ่ม ประกอบด้วย นักเรียนกลุ่มที่ 1 เป็นนักเรียนที่มีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง แบบรูปในระดับ 3 ส่วนนักเรียนกลุ่มที่ 2 เป็นนักเรียนที่มีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง แบบรูปในระดับ 2 ซึ่งรายละเอียดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง แบบรูป ของนักเรียนแต่ละกลุ่ม มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

ความสามารถในการให้เหตุผลของนักเรียนกลุ่มที่ 1

ลักษณะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มที่ 1 ซึ่งนักเรียนในกลุ่มนี้มี
ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง แบบรูป ในระดับ 3 นอกจากนี้ยังสามารถ
วิเคราะห์องค์ประกอบของแบบรูปได้อย่างครบถ้วนทุกรายละเอียด โดยสามารถวิเคราะห์
ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของแต่ละพจน์ในแต่ละตำแหน่งได้ โดยพิสูจน์จาก
เงื่อนไขของแบบรูปที่กำหนดให้ได้อย่างมีความหมายและสมเหตุสมผล นักเรียนสามารถหาสูตรแทน
พจน์ทั่วไปของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ ทำให้สามารถหาค่าของพจน์ถัดไป พจน์ที่อยู่ใกล้ พจน์ที่อยู่
ไกล หรือ พจน์ใด ๆ ของแบบรูปได้อย่างสมบูรณ์ นักเรียนเริ่มต้นจากการสร้างสูตรที่แทนกฎเกณฑ์
ของแบบรูปในกรณีทั่วไป โดยการพิสูจน์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และ ค่าของพจน์
ในแต่ละตำแหน่งจากเงื่อนไขของแบบรูปที่กำหนดให้ได้อย่างมีความหมายและสมเหตุสมผล โดย
อธิบายว่า จำนวนที่ปรากฏอยู่ในสูตรทั่วไปของแบบรูปมีที่มาและความหมายอย่างไร และใช้สูตร
ดังกล่าว หาค่าของพจน์ต่าง ๆ ในกรณีเฉพาะ และยังสามารถแปลงสูตรของพจน์ทั่วไปให้อยู่ในรูป
ของตัวแปรหรือสัญลักษณ์ได้ และสามารถอธิบายเกี่ยวกับตัวแปรที่ใช้ได้อย่างสมบูรณ์ ซึ่งจากการ
วิเคราะห์พบว่า มีนักเรียนกลุ่มที่ 1 จำนวน 3 คน คิดเป็นร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด
ประกอบด้วย เด็กชายเมฆ เด็กชายดิน และเด็กหญิงเหมย โดยแต่ละคนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนอยู่
ในระดับปานกลาง ดี และปานกลาง ตามลำดับ นักเรียนกลุ่มนี้เมื่อเจอสถานการณ์ปัญหา ดังภาพที่

12



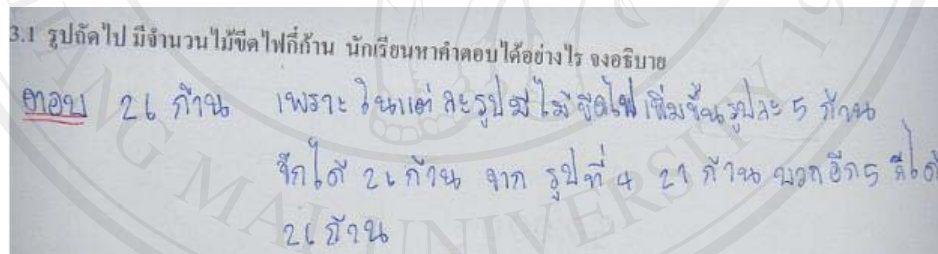
ภาพ 12 สถานการณ์ปัญหาที่ 3

จากปัญหาเกี่ยวกับแบบรูปข้อที่ 3 เป็นสถานการณ์ปัญหาเกี่ยวกับแบบรูปของการเรียงไม้
ขีดไฟ ดังภาพที่ 12 ที่มีลักษณะของก้านไม้ขีดเพิ่มขึ้นทีละ 5 ซึ่งเด็กชายเมฆได้แสดงการให้เหตุผล
ในการวิเคราะห์แบบรูปของตนเองจากบทสัมภาษณ์ ดังนี้

บทสัมภาษณ์ของเด็กชายเมฆ

- ครู : ข้อ 3 อ่านโจทย์ให้ฟังหน่อยค่ะ
- เมฆ : จงพิจารณาแบบรูปของการเรียงไม้ขีดไฟที่กำหนดให้และตอบคำถาม
- ครู : โจทย์กำหนดอะไรมาให้คะ
- เมฆ : เป็นไม้ขีดไฟที่เหมือนรูปบ้านครับ
- ครู : มีความสัมพันธ์อย่างไรคะ
- เมฆ : เพิ่มขึ้นทีละ 5 ครับ
- ครู : รู้ได้ยังไงคะว่าเพิ่มทีละ 5 ดูจากไหนคะ
- เมฆ : จากรูปที่ 1 มี 6 รูปที่ 2 มี 11 รูปที่ 3 มี 16 รูปที่ 4 มี 21 ทำให้รู้ว่าเพิ่มขึ้นทีละ 5

ในการหาพจน์ถัดไปของแบบรูปการเรียงไม้ขีดไฟนั้น เด็กชายเมฆสามารถหาพจน์ถัดไปได้ ซึ่งพิจารณาจากการเขียนตอบในแบบทดสอบการให้เหตุผล เรื่อง แบบรูป ของเด็กชายเมฆ ดังภาพที่ 13



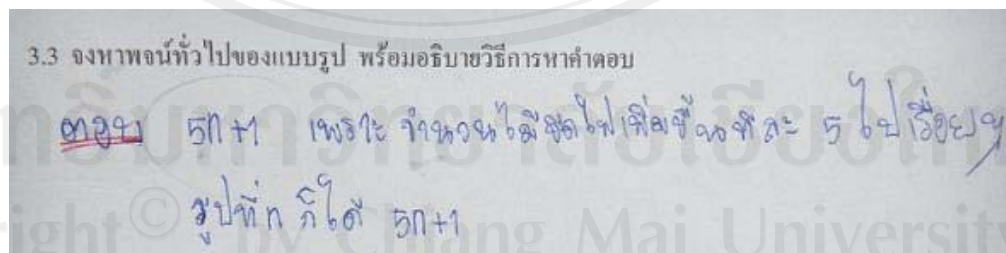
ภาพ 13 การเขียนตอบในแบบทดสอบการให้เหตุผล เรื่อง แบบรูป ของเด็กชายเมฆ

จากภาพที่ 13 พบว่าเด็กชายเมฆสามารถหาพจน์ถัดไปได้ถูกต้อง และได้แสดงเหตุผลในการหาพจน์ถัดไป โดยได้พิจารณาจากแบบรูปว่า มีไม้ขีดไฟเพิ่มขึ้นทีละ 5 ต้องการหาพจน์ถัดไป คือ รูปที่ 5 จึงนำรูปที่ 4 ซึ่งมี 21 ก้านไปบวก 5 ได้คำตอบเท่ากับ 26 ซึ่งเด็กชายเมฆได้อธิบายการให้เหตุผลของตนเองเพิ่มเติมจากบทสัมภาษณ์ ดังนี้

บทสัมภาษณ์ของเด็กชายเมฆ

- ครู : โจทย์ถามอะไรคะ
 เมฆ : รูปถัดไปมีจำนวนไม้ขีดกี่ก้าน
 ครู : ถ้าอย่างนั้นเราจะหาพจน์ถัดได้เท่าไรคะ
 เมฆ : 26 ก้าน
 ครู : มีวิธีคิดอย่างไรคะ
 เมฆ : จากรูปที่ 4 มี 21 ก้าน เลยเอา 5 ไปบวกก็จะได้ 26 ครับ
 ครู : เอา 5 มาจากไหนคะ
 เมฆ : เอา 5 มาจากที่แต่ละรูปเพิ่มขึ้นทีละ 5

เช่นเดียวกันกับนักเรียนคนอื่น ๆ เมื่อเด็กหญิงเหมยและเด็กชายดิน เฝ้ายกับสถานการณ์ปัญหาในการวิเคราะห์แบบรูปจากสถานการณ์ปัญหาต่าง ๆ และการหาพจน์ถัดไปนั้นก็สามารถแสดงเหตุผลในการวิเคราะห์แบบรูปและหาพจน์ถัดไปได้ และจากการที่ให้นักเรียนในกลุ่มนี้พบว่านักเรียนแต่ละคนสามารถหาพจน์ใกล้เคียงได้ถูกต้อง โดยนักเรียนสามารถหาสูตรแทนพจน์ทั่วไปของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ และนำสูตรที่ได้มาใช้ในการหาพจน์ใกล้เคียงของแบบรูป นอกจากนี้เมื่อนักเรียนแต่ละคนเฝ้ายกับสถานการณ์ในการให้หาพจน์ทั่วไปก็สามารถหาพจน์ทั่วไปได้ รวมทั้งได้อธิบายเกี่ยวกับตัวแปรที่นำมาใช้ในสูตร ดังตัวอย่างผลของการเขียนตอบในแบบทดสอบเกี่ยวกับการหาพจน์ทั่วไป ดังภาพที่ 14



ภาพ 14 การเขียนตอบในแบบทดสอบการให้เหตุผล เรื่อง แบบรูป ของเด็กชายเมฆ

จากภาพที่ 14 เด็กชายเมฆสามารถหาพจน์ทั่วไปได้ถูกต้องและได้แสดงเหตุผลในการหาพจน์ทั่วไป โดยจากการพิจารณาว่า จำนวนไม้ขีดไฟเพิ่มขึ้นทีละ 5 จึงได้พจน์ทั่วไปเป็น $5n + 1$ ซึ่งเด็กชายเมฆได้อธิบายการให้เหตุผลของตนเองเพิ่มเติมจากบทสัมภาษณ์ ดังนี้

บทสัมภาษณ์ของเด็กชายเมฆ

ครู : ข้อ 3.3 อ่าน โจทย์ให้ฟังค่ะ

เมฆ : จงหาพจน์ทั่วไปของแบบรูป พร้อมอธิบายวิธีการหาคำตอบ

ครู : ผมหาพจน์ทั่วไปได้เท่าไรค่ะ

เมฆ : $5n + 1$

ครู : อธิบายมาสิว่าแต่ละตัวคืออะไร

เมฆ : n คือ รูปที่ของไม้ขีดไฟ 5 คือ จำนวนที่เพิ่มขึ้นทีละ 5 1 คือ เศษของไม้ขีดไฟ

ครู : มาจากไหนคะ

เมฆ : ดูจาก รูปที่ 1 มี 6 ถ้าเอา $5 \times 1 = 5$ ต้องบวก 1 ได้ 6

รูปที่ 2 มี 11 ถ้าเอา $5 \times 2 = 10$ ต้องบวก 1 ได้ 11

รูปที่ 3 มี 16 ถ้าเอา $5 \times 3 = 15$ ต้องบวก 1 ได้ 16

รูปที่ 4 มี 21 ถ้าเอา $5 \times 4 = 20$ ต้องบวก 1 ได้ 21

นั่นคือ เอาไปคูณ 5 แล้วบวก 1 ที่เป็นเศษ พจน์ที่ n จึงนำ 5 มาคูณรูปที่ของไม้ขีดไฟแล้วนำไปบวกเศษ คือ 1 ครับ

ความสามารถในการให้เหตุผลของนักเรียนกลุ่มที่ 2

ลักษณะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มที่ 2 ซึ่งนักเรียนในกลุ่มนี้มี

ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง แบบรูป ในระดับ 2 นักเรียนสามารถวิเคราะห์องค์ประกอบของแบบรูปได้ถูกต้องครบถ้วนทุกรายละเอียด โดยนักเรียนสามารถหาสูตรแทนพจน์ทั่วไปของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ ทำให้สามารถหาค่าของพจน์ถัดไป พจน์ที่อยู่ใกล้ พจน์ที่อยู่ไกล หรือ พจน์ใด ๆ ของแบบรูปได้อย่างสมบูรณ์ โดยเหตุผลที่ใช้ในการสร้างข้อสรุปเริ่มต้นจากการสร้างสูตรขึ้นจากการใช้กระบวนการให้เหตุผลแบบอุปนัยเป็นหลัก คือ สร้างสูตรที่ใช้แทนกฎเกณฑ์ของแบบรูป จากการพิจารณาค่าของแต่ละพจน์ต้นๆ ในแบบรูปที่กำหนดให้ แล้วพยายามค้นหาสูตรที่ทำให้ค่าของทุกพจน์เป็นจริง แล้วสรุปว่า สูตรที่สร้างขึ้นนั้นเป็นจริงกับทุกพจน์โดยไม่สนใจว่า จำนวนที่นำมาดำเนินการในสูตรนั้นมีที่มาหรือความหมายอย่างไร แล้วใช้สูตรดังกล่าวหาค่าของพจน์ต่าง ๆ ในกรณีเฉพาะ และยังสามารถแปลงสูตรของพจน์ทั่วไปให้อยู่ในรูปของตัวแปรหรือสัญลักษณ์ได้ และสามารถอธิบายเกี่ยวกับสูตรที่เป็นตัวแปรได้ ซึ่งจากการวิเคราะห์พบว่า มีนักเรียนกลุ่มที่ 2 จำนวน 3 คน คิดเป็นร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ประกอบด้วย เด็กชายหมอก เด็กชายดอย และเด็กชายน้ำ โดยแต่ละคนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนอยู่

ในระดับปานกลาง ปานกลาง และอ่อน ตามลำดับ นักเรียนกลุ่มนี้เมื่อเจอสถานการณ์ปัญหาที่ 2 ดังภาพที่ 15



ภาพ 15 สถานการณ์ปัญหาที่ 2

จากภาพที่ 15 เป็นสถานการณ์ปัญหาเกี่ยวกับแบบรูปของการปูกระเบื้องเป็นทางเดินในสวน โดยมีลักษณะของจำนวนกระเบื้องสีเขียวและกระเบื้องสีส้มที่เพิ่มขึ้นทีละ 1 ซึ่งเด็กชายหมอกได้แสดงการให้เหตุผลในการวิเคราะห์แบบรูปของตนเองจากบทสัมภาษณ์ ดังนี้

บทสัมภาษณ์เด็กชายหมอก

ครู : ข้อ 2 อ่านโจทย์ให้ฟังค่ะ

หมอก : ช่างต้องการปูกระเบื้องเป็นทางเดินในสวน โดยมีลักษณะของจำนวนกระเบื้องสีเขียวและกระเบื้องสีส้ม ดังรูป

ครู : โจทย์กำหนดอะไรให้ค่ะ

หมอก : กระเบื้องสีส้มกับสีเขียวครับ

ครู : เป็นยังไงคะ

หมอก : กระเบื้องสีส้มที่ 1 จะมีสีเขียว 4

กระเบื้องสีส้มที่ 2 จะมีสีเขียว 5

กระเบื้องสีส้มที่ 3 จะมีสีเขียว 6

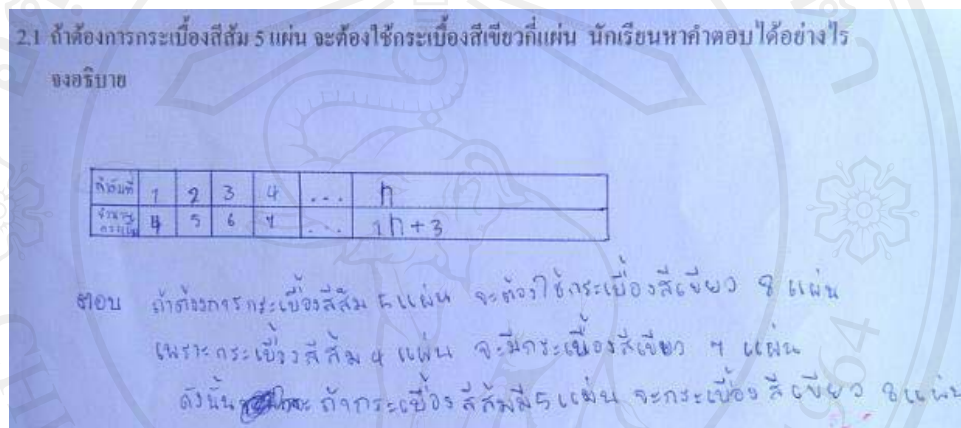
กระเบื้องสีส้มที่ 4 จะมีสีเขียว 7

คือ กระเบื้องสีส้มเพิ่มทีละ 1 กระเบื้องสีเขียวเพิ่มทีละ 1

ครู : รู้ได้อย่างไรว่าเพิ่มขึ้นทีละ 1

หมอก : ดูจากจำนวนกระเบื้องสีส้ม จาก 1 เป็น 2 เป็น 3 เป็น 4 จึงทำให้รู้ว่าเพิ่มขึ้นทีละ 1 และจากจำนวนกระเบื้องสีเขียว จาก 4 เป็น 5 เป็น 6 เป็น 7 ทำให้รู้ว่าเพิ่มขึ้นทีละ 1

ในการหาพจน์ถัดไปของแบบรูปของการปูกระเบื้องนั้น เด็กชายหมอกสามารถหาพจน์ถัดไปได้ ซึ่งพิจารณาจากการเขียนตอบในแบบทดสอบการให้เหตุผล เรื่อง แบบรูป ของเด็กชายหมอก ดังภาพที่ 16



ภาพ 16 การเขียนตอบในแบบทดสอบการให้เหตุผล เรื่อง แบบรูป ของเด็กชายหมอก

จากภาพที่ 16 พบว่า เด็กชายหมอกสามารถหาพจน์ถัดไปได้ถูกต้อง และได้แสดงเหตุผลในการหาพจน์ถัดไป โดยได้พิจารณาจากแบบรูปว่า ถ้ากระเบื้องสีส้ม 5 แผ่น จะต้องใช้กระเบื้องสีเขียว 8 แผ่น โดยพิจารณาจากพจน์ก่อนหน้า คือ เพราะกระเบื้องสีส้ม 4 แผ่น มีกระเบื้องสีเขียว 7 แผ่น ยิ่งไปกว่านั้นเด็กชายหมอกยังได้แสดงการหาพจน์ทั่วไปของแบบรูปได้ด้วย นอกจากนี้เด็กชายหมอกได้อธิบายการให้เหตุผลของตนเองเพิ่มเติมจากบทสัมภาษณ์ ดังนี้

บทสัมภาษณ์เด็กชายหมอก

ครู : โจทย์ถามอะไรคะ

หมอก : ถ้าต้องการกระเบื้องสีส้ม 5 แผ่น จะต้องใช้กระเบื้องสีเขียวกี่แผ่น

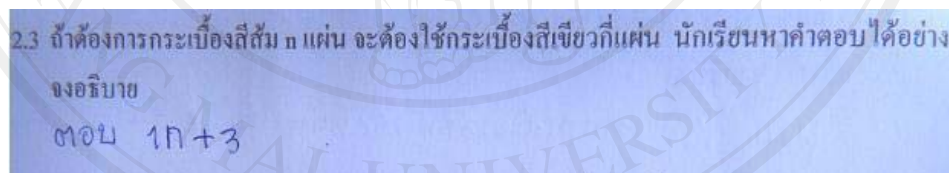
ครู : ได้เท่าไรคะ

หมอก : 8 แผ่น

ครู : หามาจากไหน

หมอก : เอามาจากกระเบื้องสี่เหลี่ยมและสี่เหลี่ยมที่ละ 1 สี่เหลี่ยมที่ 1 มีสี่เหลี่ยม 4 สี่เหลี่ยมที่ 2 มีสี่เหลี่ยม 5 สี่เหลี่ยมที่ 3 มีสี่เหลี่ยม 6 สี่เหลี่ยมที่ 4 มีสี่เหลี่ยม 7 ดังนั้น สี่เหลี่ยมที่ 5 จะมีสี่เหลี่ยม 8 ครับ

เช่นเดียวกันกับนักเรียนคนอื่น ๆ เมื่อเด็กชายคอยและเด็กชายน้า เฝ้ามองกับสถานการณ์ปัญหาในการวิเคราะห์แบบรูปจากสถานการณ์ปัญหาต่าง ๆ และการหาพจน์ถัดไปนั้นก็สามารถแสดงเหตุผลในการวิเคราะห์แบบรูปและหาพจน์ถัดไปได้ และจากการที่ให้นักเรียนในกลุ่มนี้หาพจน์ถัดไปของแบบรูป พบว่า นักเรียนแต่ละคนสามารถหาพจน์ถัดไปได้ถูกต้อง โดยนักเรียนจะสร้างสูตรที่ใช้แทนกฎเกณฑ์ของแบบรูป จากการพิจารณาค่าของแต่ละพจน์ต้น ๆ ในแบบรูปที่กำหนดให้ แล้วพยายามค้นหาสูตรที่ทำให้ค่าของทุกพจน์เป็นจริง แล้วสรุปว่า สูตรที่สร้างขึ้นนั้นเป็นจริงกับทุกพจน์ แล้วนำสูตรที่ได้มาหาพจน์ถัดไป นอกจากนี้เมื่อนักเรียนแต่ละคนเฝ้ามองกับสถานการณ์ในการให้หาพจน์ทั่วไปก็สามารถหาพจน์ทั่วไปได้ แต่นักเรียนในกลุ่มนี้จะไม่สนใจว่า จำนวนที่นำมาดำเนินการในสูตรนั้นจะมีที่มาหรือความหมายอย่างไร ดังตัวอย่างผลของการเขียนตอบในแบบทดสอบของเด็กชายหมอกในสถานการณ์ปัญหาที่ 2 เกี่ยวกับการหาพจน์ทั่วไป ดังภาพที่ 17



ภาพ 17 การเขียนตอบในแบบทดสอบการให้เหตุผล เรื่อง แบบรูป ของเด็กชายหมอก

จากภาพที่ 17 พบว่า เด็กชายหมอกสามารถหาพจน์ทั่วไปได้เป็น $n + 3$ ซึ่งเป็นคำตอบที่ถูกต้อง แต่ไม่ได้เขียนอธิบายแสดงเหตุผลของตนเองในการเขียนในแบบทดสอบ จึงพิจารณาจากการหาพจน์ทั่วไปของแบบรูปจากการที่เด็กชายหมอกได้อธิบายการให้เหตุผลของตนเองเพิ่มเติมจากบทสัมภาษณ์ ดังนี้

บทสัมภาษณ์เด็กชายหมอก

ครู : อ่านโจทย์ให้ฟังหน่อยค่ะ

หมอก : ถ้าต้องการกระเบื้องสี่เหลี่ยม n แผ่นจะใช้กระเบื้องสี่เหลี่ยมกี่แผ่น นักเรียนหาคำตอบได้อย่างไร จงอธิบาย

ครู : โจทย์ต้องการอะไรคะ

หมอก : ถ้าต้องการกระเบื้องสี่เหลี่ยม n แผ่นจะใช้กระเบื้องสี่เหลี่ยมกี่แผ่นครับ

ครู : ได้เท่าไรคะ

หมอก : $1n + 3$

ครู : เรียกว่าอะไรคะ

หมอก : พจน์ทั่วไปครับ

ครู : n คืออะไรคะ

หมอก : n คือ จำนวนกระเบื้องสี่เหลี่ยม

ครู : ผมหา $1n + 3$ มาได้ยังไงคะ

หมอก : เพราะ จำนวนกระเบื้องสี่เหลี่ยม $1 \times 1 + 3 = 4$ ได้เท่ากับที่โจทย์กำหนด

จำนวนกระเบื้องสี่เหลี่ยม $1 \times 2 + 3 = 5$ ได้เท่ากับที่โจทย์กำหนด

จำนวนกระเบื้องสี่เหลี่ยม $1 \times 3 + 3 = 6$ ได้เท่ากับที่โจทย์กำหนด

จำนวนกระเบื้องสี่เหลี่ยม $1 \times 4 + 3 = 7$ ได้เท่ากับที่โจทย์กำหนดเช่นกัน

เพราะฉะนั้น ถ้าจำนวนกระเบื้องสี่เหลี่ยม n ก็เอา $1 \times n + 3$

นั่นคือ เอาจำนวนกระเบื้องคูณ 1 บวก 3 จะเป็นคำตอบครับ