

บทที่ 2

วิธีการดำเนินการวิจัย

2.1 วิธีการดำเนินการวิจัย

เริ่มต้นสร้างแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์สำหรับปัญหาที่นำมาวิจัย ได้แบบจำลองซึ่งเขียนได้เป็นสมการควบคุมการอัดตัวระบายน้ำ แล้วกำหนดเงื่อนไขขอบเขต และเงื่อนไขเริ่มต้นให้สอดคล้องกับปัญหา หาผลเฉลยโดยวิธีขึ้นประกอบอันตะ (*Finite Element*) ได้ผลเฉลยคือค่าความดันน้ำส่วนเกิน นำค่าความดันน้ำส่วนเกินที่ได้มาคำนวณหาค่าเปอร์เซ็นต์การอัดตัวระบายน้ำเฉลี่ย

ตรวจสอบค่าเปอร์เซ็นต์การอัดตัวระบายน้ำเฉลี่ยที่ได้ในกรณีระยะห่างระหว่างแถบทางระบายน้ำสำเร็จรูปห่างกันเท่ากับ 0.10 เมตร ในกรณีนี้การอัดตัวระบายน้ำที่เกิดขึ้นจะกลายเป็นการอัดตัวระบายน้ำมิติเดียว ซึ่งหาผลเฉลยได้สำหรับดินเอกพันธ์ที่ไม่มีผิวเสียดสี (อัตราส่วนสัมประสิทธิ์การซึมได้ของดินในบริเวณผิวเสียดสีต่อสัมประสิทธิ์การซึมได้ของดินคงสภาพ

$k_s/k_o=1$) คือผลเฉลยของ *Terzaghi* (1943)

ตรวจสอบค่าเปอร์เซ็นต์การอัดตัวระบายน้ำเฉลี่ยอีกครั้งหนึ่งกับผลเฉลยของ อูธร สารแก่น (2550) สำหรับดินเอกพันธ์ที่ไม่มีผิวเสียดสี และอัตราส่วนระยะห่างระหว่างแถบทางระบายน้ำสำเร็จรูปต่อความกว้างของแถบเท่ากับ 10

2.2 สร้างแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์สำหรับปัญหาที่นำมาวิจัย

การสร้างแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์สำหรับปัญหาที่นำมาวิจัย เป็นการเปลี่ยนปัญหาทางกายภาพมาเป็นปัญหาคณิตศาสตร์ เริ่มต้นจากการตั้งสมมุติฐานและอาศัยกฎเกณฑ์ทางกลศาสตร์ในงานวิจัยนี้คือกฎการไม่สูญหายของมวล ซึ่งได้แสดงเป็นสมการการต่อเนื่อง และกฎการตอบสนองต่อการรับแรงของก้อนดิน ซึ่งแสดงได้เป็นสมการความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียด มารวมกันเป็นทฤษฎีการอัดตัวระบายน้ำ ทฤษฎีการอัดตัวระบายน้ำสำหรับงานวิจัยนี้เป็นทฤษฎีการอัดตัวระบายน้ำ 2 มิติของ *Terzaghi* (1943) ซึ่งแสดงได้เป็นสมการควบคุมการอัดตัวระบายน้ำ ดังมีรายละเอียดต่อไปนี้

2.2.1 สมมุติฐาน ในงานวิจัยนี้ได้ตั้งสมมุติฐานไว้ดังนี้

(1) ดินอ้อมตัวเอกพันธ์ คุณสมบัติเหมือนกันทุกทิศทาง ไร้น้ำหนัก อุนหภูมิคงตัว และอยู่ในสภาวะสมดุลขณะเกิดการอัดตัวระบายน้ำ

(2) เนื้อดินและน้ำที่อยู่ในช่องว่างเป็นวัสดุอัดตัวไม่ได้

- ระบายน้ำ
- (3) น้ำในดินไหลซึมตามแนวราบ และการไหลซึมเป็นไปตามกฎของ *Darcy*
- (4) สัมประสิทธิ์การซึมได้ตามแนวราบของดินคงตัวตลอดเวลาที่เกิดการอัดตัว
- น้อย
- (5) การอัดตัวได้ของดินเกิดขึ้นตามแนวตั้งเพียงแนวเดียว และการวิรูปเกิดขึ้น
- (6) สัมประสิทธิ์การเปลี่ยนแปลงปริมาตรตามแนวตั้งของดินคงตัวตลอดเวลาที่เกิดการอัดตัวระบายน้ำ
- (7) สัมประสิทธิ์การซึมได้ตามแนวราบของดินในบริเวณผิวเสียดสีลดลง จากดินคงสภาพ และมีค่าคงตัวตลอดเวลาที่เกิดการอัดตัวระบายน้ำ แต่สัมประสิทธิ์การเปลี่ยนแปลงปริมาตรตามแนวตั้งของดินคงตัวเท่ากันหมดตลอดเวลาที่เกิดการอัดตัวระบายน้ำ ไม่ว่าจะเป็ดินคงสภาพหรือดินบริเวณที่เกิดผิวเสียดสี
- (8) บริเวณผิวเสียดสีเป็นแท่งทรงกระบอกมีหน้าตัดสม่ำเสมอเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ขนาด กว้าง (pd) ยาว ($a+(p-1)d$) ล้อมแถบทางระบายน้ำสำเร็จรูป โดยที่ a และ d เป็นขนาดของแบบที่ใช้ติดตั้งแถบทางระบายน้ำสำเร็จรูป และ p มีค่าเท่ากับ 2 ถึง 3 ตาม *Basu and Prezzi* (2007)
- (9) ละทิ้งความหนาของแถบทางระบายน้ำสำเร็จรูป และแถบทางระบายน้ำสำเร็จรูปมีสัมประสิทธิ์การซึมได้สูงมาก
- (10) น้ำหนักบรรทุกกดทับบนผิวดินแผ่กระจายสม่ำเสมอตลอดเวลาที่เกิดการอัดตัวระบายน้ำ ความเครียดเฉือนที่เกิดขึ้นในดินเนื่องจากการทรุดตัวต่างระดับ ไม่มีผลต่อการอัดตัวระบายน้ำ (ความเครียดอิสระ (*Free Strain*))
- (11) บริเวณที่ปรับปรุงเสถียรภาพของชั้นดินกว้างใหญ่มาก แถบทางระบายน้ำสำเร็จรูปที่ติดตั้ง และผิวเสียดสีที่เกิดขึ้น ไม่มีผลต่อการกระจายความเค้นที่เกิดขึ้นในดินอันเนื่องมาจากน้ำหนักกดทับ

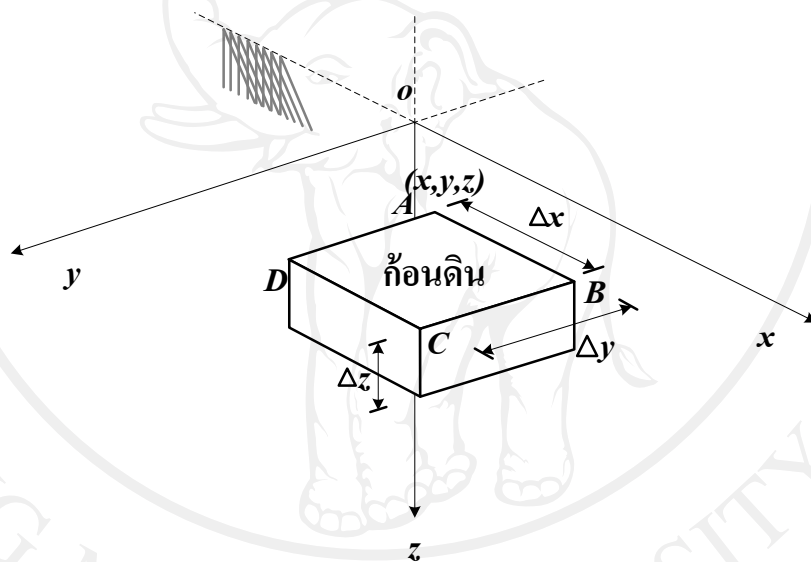
สมมุติฐานข้อที่ 1 ถึง 6 เหมือนกับสมมุติฐานที่ใช้ในทฤษฎีการอัดตัวระบายน้ำของ *Terzaghi* (1943)

2.2.2 สมการควบคุมการอัดตัวระบายน้ำ

ในขณะที่เกิดการอัดตัวระบายน้ำ การเปลี่ยนแปลงความดันน้ำส่วนเกินที่จุดต่างๆในบริเวณที่เกิดการอัดตัวระบายน้ำ สอดคล้องกับกฎการไม่สูญหายของมวล และกฎการตอบสนองต่อการรับแรงของก้อนดิน

เนื่องจากปัญหาที่นำมาวิจัย ความหนาของชั้นดินมากกว่าระยะห่างแถบทางระบายน้ำสำเร็จรูปมาก เส้นทางที่น้ำระบายออกสู่ผิวดินตามแนวคิ่งโดยทั่วไปยาวกว่าเส้นทางที่น้ำระบายเข้าสู่แถบทางระบายน้ำสำเร็จรูปมาก และตามธรรมชาติของดิน สัมประสิทธิ์การซึมได้ของดินตามแนวคิ่งต่ำกว่าสัมประสิทธิ์การซึมได้ของดินตามแนวราบ ดังนั้นการไหลของน้ำจึงใกล้เคียงการไหลตามแนวนอน

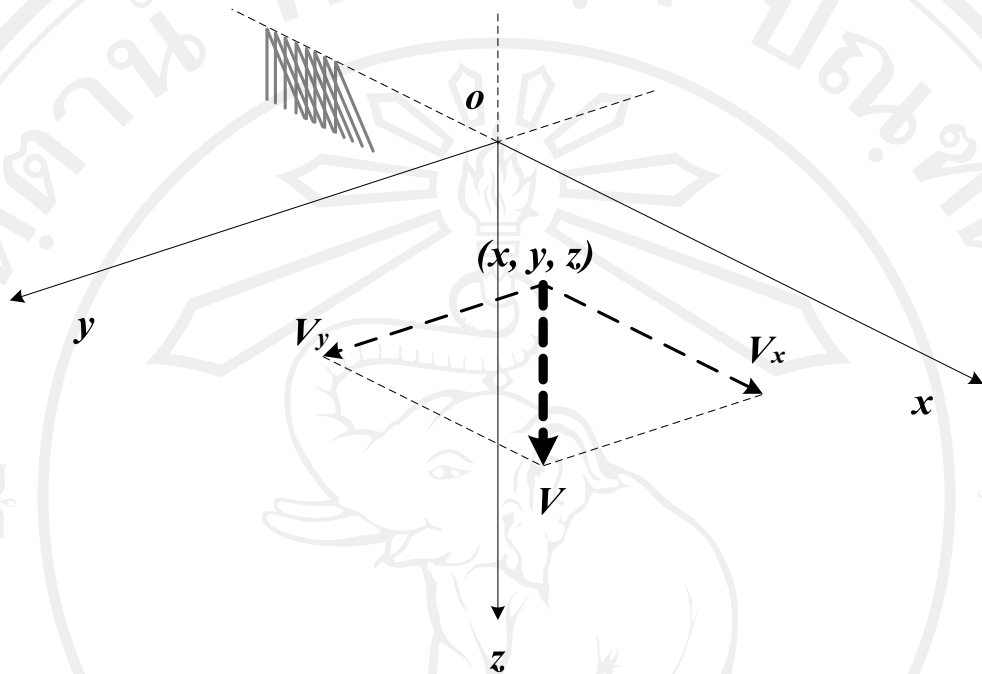
พิจารณาก่อนดินอิมตัวทรงลูกบาศก์ขนาด กว้าง x ยาว y หนา $(\Delta x \Delta y \Delta z)$ หน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้า $ABCD$ ขณะเวลา t ดังแสดงในรูป 2.1 ให้พิกัด (x, y, z) เป็นพิกัดของจุด A ซึ่งอยู่ในบริเวณที่เกิดการอัดตัวระบายน้ำขณะเวลา t



รูป 2.1 ก่อนดินรูปทรงลูกบาศก์

ในขณะใด ๆ น้ำส่วนหนึ่งจะไหลซึมเข้าสู่ก่อนดิน และน้ำอีกส่วนหนึ่งไหลซึมออกจากก่อนดิน ให้ V เป็นความเร็วเต็มพื้นผิว (Superficial velocity) ของน้ำในดินที่จุด (x, y, z) ขณะเวลา t มีทิศทางตามแนวราบ ดังรูป 2.2 เพื่อให้คำนวณง่ายขึ้น จึงแยกความเร็วเต็มพื้นผิว V ออกเป็นความเร็วองค์ประกอบทิศทางตามแกน x บวก และ y บวก คือ V_x และ V_y ตามลำดับ ดังนั้น V_x และ V_y เป็นฟังก์ชันของ x, y, z และ t

ให้ V_{xA} และ V_{xB} เป็นองค์ประกอบความเร็วเต็มพื้นผิวทิศทางตามแกน x บวก ที่จุด A และ B ตามลำดับ ในทำนองเดียวกันให้ V_{yA} และ V_{yD} เป็นองค์ประกอบความเร็วเต็มพื้นผิวทิศทางตามแกน y บวก ที่จุด A และ D ตามลำดับ



รูป 2.2 องค์ประกอบความเร็วเต็มพื้นที่ผิวทิศทางตามแกน x บวก และ y บวก

ดังนั้น

$$V_{xA} = V_x(x, y, z, t)$$

$$V_{xB} = V_x(x + \Delta x, y, z, t)$$

$$V_{yA} = V_y(x, y, z, t)$$

$$V_{yD} = V_y(x, y + \Delta y, z, t)$$

ที่เวลา t

$$\text{น้ำไหลเข้าสู่ก่อนดิน} \approx \Delta x \Delta z V_{yA} + \Delta y \Delta z V_{xA} \dots\dots\dots (2.1)$$

$$\text{น้ำไหลซึมออกจากก่อนดิน} \approx \Delta x \Delta z V_{yD} + \Delta y \Delta z V_{xB} \dots\dots\dots (2.2)$$

จากสมมุติฐานข้อ 1 และข้อ 2 เมื่อมวลดินคงตัวปริมาตรของก่อนดินก็คงตัวด้วย ให้ R เป็น อัตราปริมาตรน้ำที่สะสมในก่อนดินขณะเวลา t ดังนั้นจากกฎการไม่สูญหายของมวล

$$R \approx (\Delta x \Delta z V_{yA} - \Delta x \Delta z V_{yD}) + (\Delta y \Delta z V_{xA} + \Delta y \Delta z V_{xB})$$

แทนค่า V_{xA}, V_{yA}, V_{xB} และ V_{yD} ได้

$$R \approx [V_x(x, y, z, t) - V_x(x + \Delta x, y, z, t)] \Delta y \Delta z + [V_y(x, y, z, t) - V_y(x, y + \Delta y, z, t)] \Delta x \Delta z \quad \dots (2.3)$$

ให้ e เป็นอัตราส่วนช่องว่างที่จุด (x, y, z) ขณะเวลา t

V_s เป็นปริมาตรเนื้อดิน ขณะเวลา t

V_v เป็นช่องว่างของก้อนดิน ขณะเวลา t

ดังนั้น e เป็นฟังก์ชันของ x, y, z และ t V_v เป็นฟังก์ชันของ t จากความสัมพันธ์ระหว่างสถานะ (Phase relationship) ได้

$$V_s \approx \left(\frac{1}{1+e} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \quad \dots (2.4)$$

และ $V_v(t) \approx e(x, y, z, t) V_s$

จากสมมุติฐานข้อที่ 5 การวิรูปน้อย V_s เปลี่ยนไปน้อย ดังนั้น

$$V_v(t + \Delta t) \approx e(x, y, z, t + \Delta t) V_s$$

จากสมมุติฐานข้อที่ 1 ดินอิมตัว ปริมาตรช่องว่างเท่ากับปริมาตรน้ำในก้อนดิน ดังนั้นอัตราปริมาตรน้ำที่สะสม

$$R \approx \frac{[V_v(t + \Delta t) - V_v(t)]}{\Delta t}$$

แทนค่า $V_v(t + \Delta t)$ และ $V_v(t)$ ได้

$$R \approx \frac{[e(x, y, z, t + \Delta t) - e(x, y, z, t)] V_s}{\Delta t} \quad \dots (2.5)$$

แทนค่า R จากสมการ (2.3) และ V_s จากสมการ (2.4) ลงในสมการ (2.5) แล้วเอา

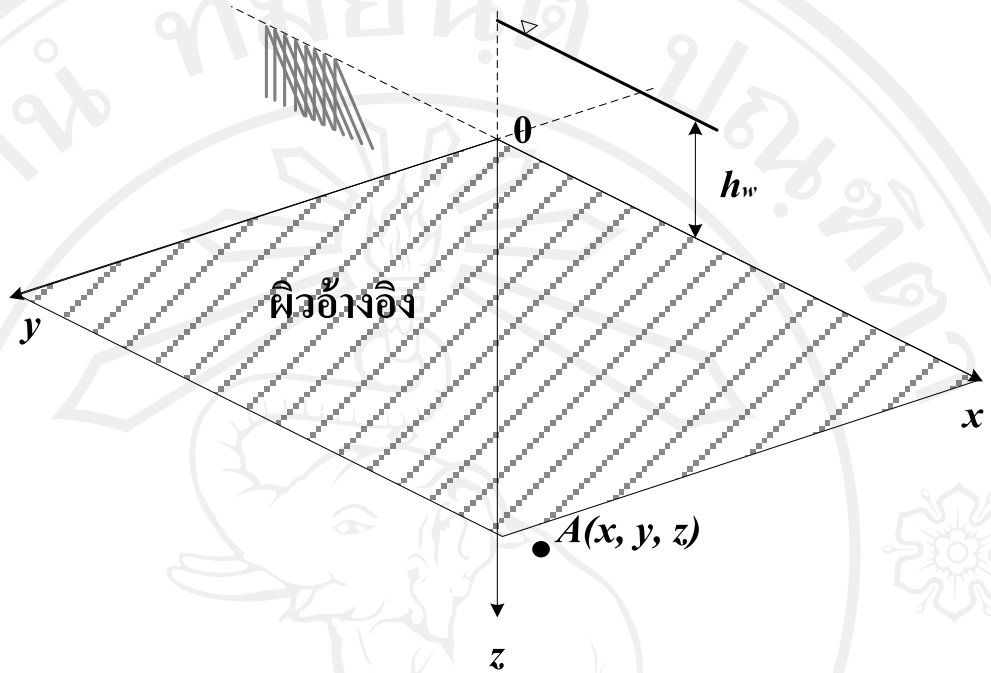
$\Delta x, \Delta y, \Delta z$ ทหารตลอด

$$\begin{aligned} & \frac{[V_x(x, y, z, t) - V_x(x + \Delta x, y, z, t)]}{\Delta x} + \frac{[V_y(x, y, z, t) - V_y(x, y + \Delta y, z, t)]}{\Delta y} \\ & \approx \frac{1}{1+e} \frac{[e(x, y, z, t + \Delta t) - e(x, y, z, t)]}{\Delta t} \quad \dots (2.6) \end{aligned}$$

ขีดลิมิต $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ และ $\Delta t \rightarrow 0$ ได้สมการต่อเนื่อง

$$-\frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{\partial V_y}{\partial y} = \left(\frac{1}{1+e} \right) \frac{\partial e}{\partial t} \quad \dots (2.7)$$

เปลี่ยน V_x และ V_y ออกโดยใช้กฎของ Darcy กำหนดผิวอ้างอิง (Datum) ดังรูปที่ 2.3



รูป 2.3 ผิวอ้างอิง

ให้ k_x และ k_y เป็นสัมประสิทธิ์การซึมได้ตามแนวแกน x และ y ตามลำดับ จากสมมติฐานข้อ 1 และข้อ 4 ได้

$$k_x = k_y = k_h$$

โดยที่ k_h เป็นสัมประสิทธิ์การซึมได้ตามแนวราบ และ k_h มีค่าคงตัว จากสมมติฐานข้อ 3 น้ำในดินไหลซึมตามกฎของ Darcy

$$V_x = k_x i_x = k_h i_x \tag{2.8}$$

$$V_y = k_y i_y = k_h i_y \tag{2.9}$$

โดยที่ i_x เป็น i_y เป็นความลาดเชิงชลศาสตร์ (Hydraulic gradient) ตามแนวแกน x และ y ตามลำดับ

จากคำจำกัดความ

$$i_x = -\frac{\partial h}{\partial x} \tag{2.10}$$

$$i_y = -\frac{\partial h}{\partial y} \tag{2.11}$$

โดยที่ h เป็นหัวรวม (Total Head) ที่จุด (x, y, z) ในขณะเวลา t และ h เป็นฟังก์ชันของ x, y, z และ t จากรูป 2.3

$$h(x, y, z, t) = -z + \frac{1}{\gamma_w} (u + u_s) \quad \dots\dots\dots (2.12)$$

โดยที่ u เป็นความดันน้ำส่วนเกินที่จุด (x, y, z) ขณะเวลา t และ u เป็นฟังก์ชันของ x, y, z และ t

u_s เป็นความดันน้ำในสภาวะคงที่ (Steady state) ที่จุด (x, y, z) และ u_s เป็นฟังก์ชันของ z

γ_w เป็นหน่วยน้ำหนักของน้ำที่จุด (x, y, z) ขณะเวลา t และ γ_w มีค่าคงตัวตามสมมุติฐานข้อ 1 และข้อ 2

จากกลศาสตร์ของไหล

$$u_s(z) = (z + h_w) \gamma_w \quad \dots\dots\dots (2.13)$$

โดยที่ h_w เป็นระดับความสูงของน้ำใต้ดินจากผิวอ้างอิง และ h_w มีค่าคงตัวแทนค่า u_s จากสมการ (2.13) ลงในสมการ (2.12) ได้

$$h(x, y, z, t) = h_w + \frac{u(x, y, z, t)}{\gamma_w} \quad \dots\dots\dots (2.14)$$

แทนค่า h จากสมการ (2.14) ลงในสมการ (2.10) ได้

$$i_x = -\frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial u}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (2.15)$$

แทนค่า i_x จากสมการ (2.15) ลงในสมการ (2.8) ได้

$$V_x = -\frac{k_h}{\gamma_w} \frac{\partial u}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (2.16)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$V_y = -\frac{k_h}{\gamma_w} \frac{\partial u}{\partial y} \quad \dots\dots\dots (2.17)$$

แทนค่า V_x จากสมการ (2.16) และ V_y จากสมการ (2.17) ลงในสมการการต่อเนื่อง (2.7) ได้

$$\frac{k_h}{\gamma_w} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \left(\frac{1}{1+e} \right) \frac{\partial e}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (2.18)$$

เปลี่ยน e ออก จากกฎการตอบสนองต่อการรับแรงของก้อนดิน สำหรับการอัดตัวได้ของดินตามแนวตั้งเพียงแนวเดียวตามสมมุติฐานข้อ 5 และ e เป็นฟังก์ชันของความเค้นกดทับประสิทธิผลตามแนวตั้ง $\bar{\sigma}_z$ เขียนเป็นสมการได้

$$\frac{de}{d\bar{\sigma}_z} = -a_v \quad \dots\dots\dots (2.19)$$

โดยที่ a_v เป็นสัมประสิทธิ์การอัดตัวได้ของโครงก้อนดิน จากสมมุติฐานข้อ 5 การวิรูปน้อยและข้อ 6 ซึ่ง a_v มีค่าคงตัว

เนื่องจากน้ำหนักดินน้อยเมื่อเทียบกับน้ำหนักบรรทุกทุกกดทับบนผิวดิน ในทางปฏิบัติ โดยทั่วไปใกล้เคียงกับสมมติฐานข้อ 1 อาศัยสมมติฐานข้อ 1 ข้อ 10 และข้อ 11 ได้

$$\sigma_z = q_s \quad \dots\dots\dots (2.20)$$

โดยที่ q_s เป็นน้ำหนักบรรทุกทุกกดทับแผ่กระจายบนผิวดิน มีค่าคงตัวตามสมมติฐานข้อ 1 σ_z เป็นความเค้นกดทับทั้งหมดตามแนวตั้งที่จุด (x, y, z) ขณะเวลา t

ความเค้นกดทับประสิทธิผลตามแนวตั้งที่จุด (x, y, z) ขณะเวลา t ตามคำจำกัดความมีค่าเท่ากับ

$$\bar{\sigma}_z(x, y, z, t) = \sigma_z - u(x, y, z, t) - u_s(z) \quad \dots\dots\dots (2.21)$$

แทนค่า σ_z จากสมการ (2.20) ลงในสมการ (2.21) ได้

$$\bar{\sigma}_z(x, y, z, t) = q_s - u(x, y, z, t) - u_s(z) \quad \dots\dots\dots (2.22)$$

อัตราส่วนช่องว่าง e เป็นฟังก์ชันของความเค้นกดทับประสิทธิผลตามแนวตั้ง $\bar{\sigma}_z$ และความเค้นกดทับประสิทธิผลตามแนวตั้ง $\bar{\sigma}_z$ เป็นฟังก์ชันของ (x, y, z) และ t จากกฎลูกโซ่อนุพันธ์ย่อยของ e ในส่วนตัวแปร t เท่ากับ

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{de}{d\bar{\sigma}_z} \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (2.23)$$

แทนค่า $\frac{de}{d\bar{\sigma}_z}$ จากสมการ (2.19) และ $\bar{\sigma}_z$ จากสมการ (2.22) ลงในสมการ (2.23) ได้

$$\frac{\partial e}{\partial t} = a_v \frac{\partial u}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (2.24)$$

แทนค่า $\frac{\partial e}{\partial t}$ จากสมการ (2.24) ลงในสมการ (2.18) ได้สมการควบคุมการอัดตัวระบายน้ำ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k_h}{\gamma_w m_v} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad \dots\dots\dots (2.25)$$

โดยที่ m_v เป็นสัมประสิทธิ์การเปลี่ยนแปลงปริมาตรตามแนวตั้ง $= \frac{a_v}{1+e}$ มีค่าคงตัวตามสมมติฐานข้อ 6 ดังนั้นสมการควบคุมการอัดตัวระบายน้ำสำหรับปัญหาที่นำมาวิจัย เขียนได้ดังนี้

ในดินคงสภาพ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k_o}{\gamma_w m_{vo}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad \dots\dots\dots (2.26)$$

ในผิวเสียดสี ตามสมมติฐานข้อ 7 $m_{vs} = m_{vo}$

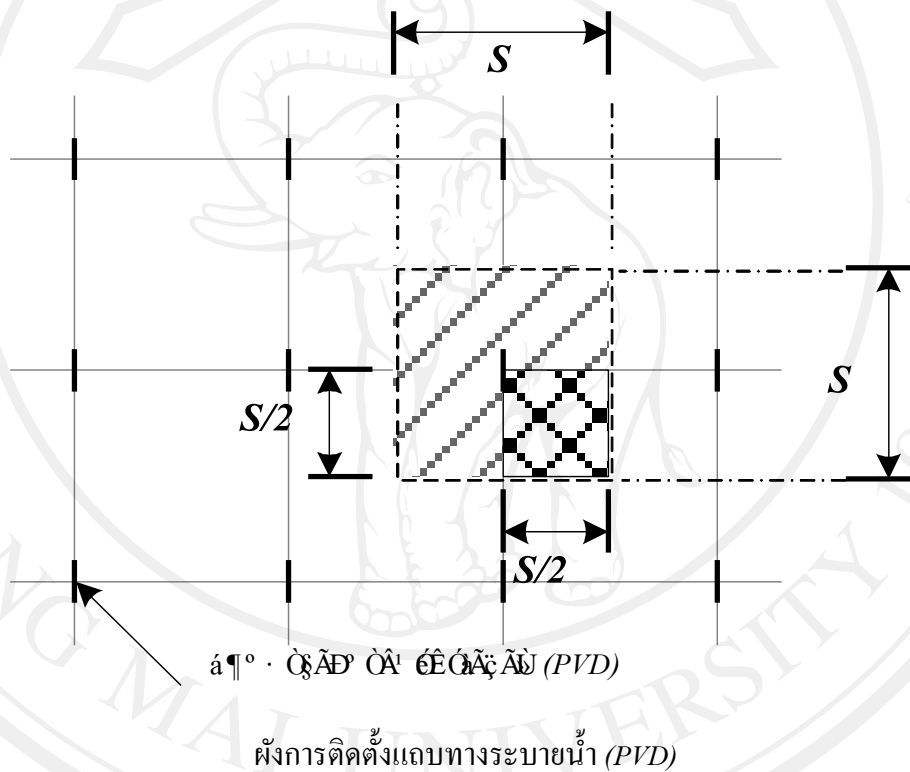
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k_s}{\gamma_w m_{vo}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad \dots\dots\dots (2.27)$$

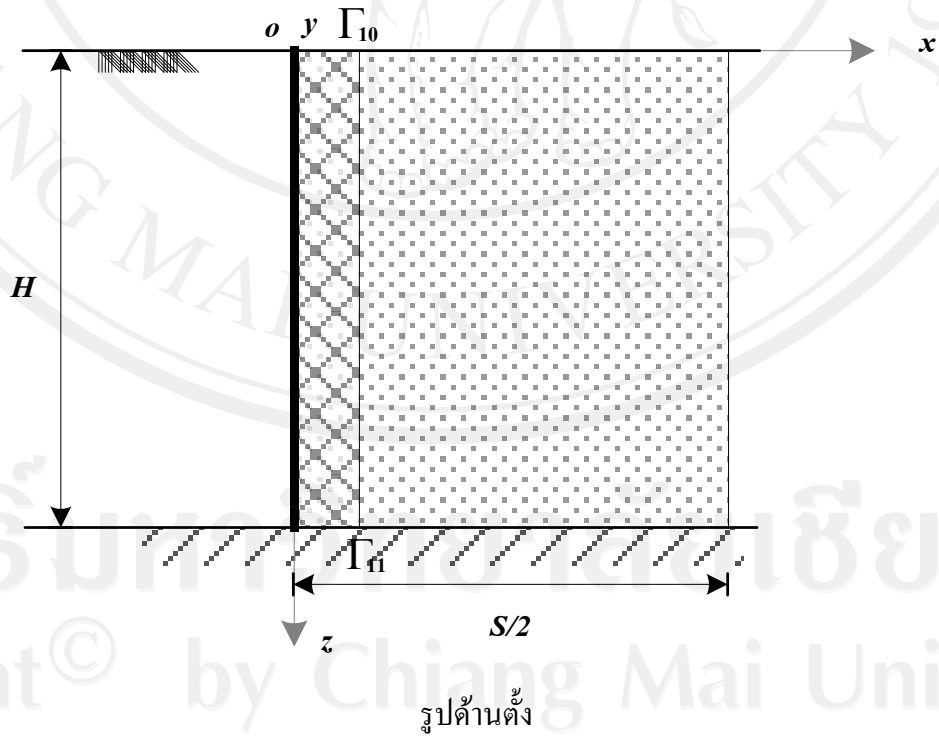
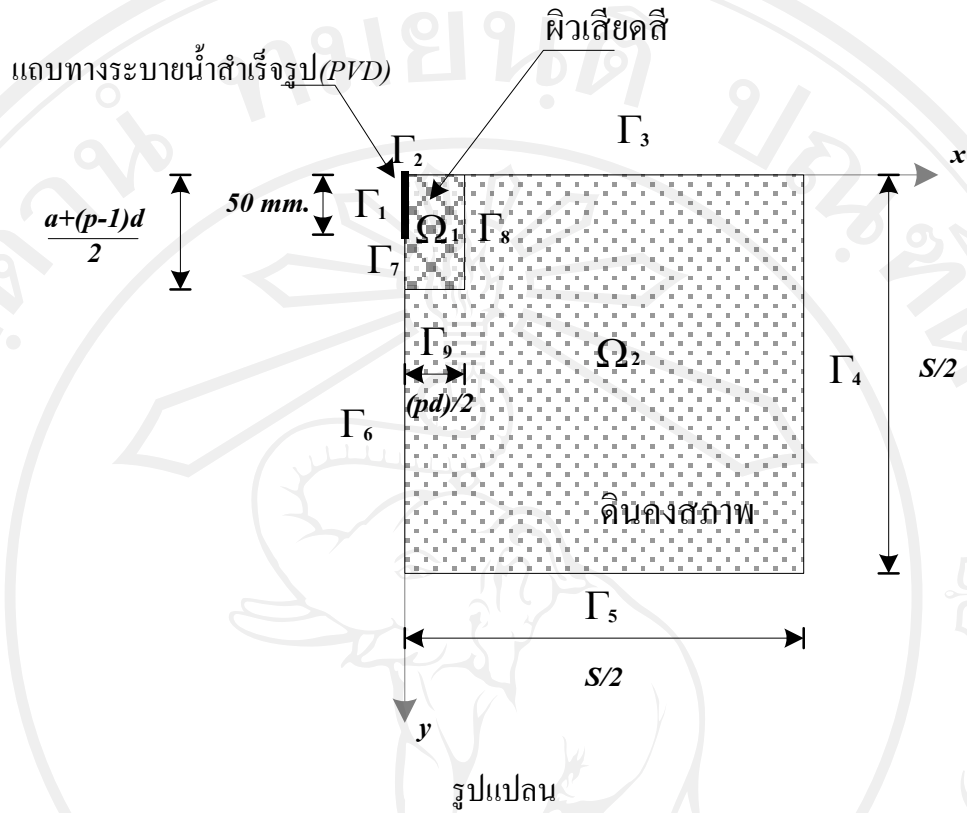
โดยที่ k_o และ k_s เป็นสัมประสิทธิ์การซึมได้ตามแนวราบของดินคงสภาพ และบริเวณผิวเสียดสีตามลำดับ m_{vo} และ m_{vs} เป็นสัมประสิทธิ์การเปลี่ยนแปลงปริมาตรตามแนวตั้งของดินคงสภาพ และผิวเสียดสีตามลำดับ k_o, k_s, m_{vo} และ m_{vs} มีค่าคงตัวตามสมมติฐานข้อ 7

2.3 การหาผลเฉลย

จากสมมุติฐานข้อ 11 และโดยสมมาตร การอัดตัวระบายน้ำเข้าสู่แถบทางระบายน้ำสำเร็จรูปแต่ละแถบเหมือนกัน ดังนั้นบริเวณที่ไหลซึมเข้าสู่แถบทางระบายน้ำสำเร็จรูปเป็นรูปทรงบอกรหน้าตัดสี่เหลี่ยมจัตุรัส ขนาดด้านเท่ากับระยะห่างของแถบ ดังรูป 1.11

ตั้งระบบพิกัดฉากคาร์ทีเซียน x,y,z ไว้ที่กลางแถบทางระบายน้ำ ดินที่เกิดการอัดตัวระบายน้ำเข้าสู่แถบทางระบายน้ำถูกแบ่งออกเป็น 4 ส่วนเท่าๆกันโดยสมมาตรอีกครั้ง การอัดตัวระบายน้ำของดินแต่ละส่วนเหมือนกัน จึงหาผลเฉลยการอัดตัวระบายน้ำของดินเพียงส่วนเดียว ดังรูป 2.4





รูป 2.4 ส่วนหนึ่งของดินที่อัดตัวระบายน้ำเข้าสู่แถบทางระบายน้ำ

2.3.1 เงื่อนไขขอบเขต

จากรูป 2.5 แบ่งบริเวณการอัดตัวระบายน้ำได้เป็น 2 บริเวณคือ บริเวณดินแปรสภาพ (ผิวเสียดสี *Smear zone*) Ω_1 และบริเวณดินคงสภาพ Ω_2 ผิวบริเวณที่เกิดการอัดตัวระบายน้ำแบ่งได้เป็นผิวภายนอก และผิวภายใน ผิวภายนอกประกอบด้วยผิวแถบทางระบายน้ำ Γ_1 ผิวเสียดสี Γ_2 และ Γ_7 ผิวดินคงสภาพ $\Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5$ และ Γ_6 ผิวบน Γ_{10} และผิวล่าง Γ_{11} จากสมมุติฐานข้อ 9 ละทิ้งความหนาของแถบทางระบายน้ำ ผิวภายในประกอบด้วยผิวรอยต่อระหว่างดินคงสภาพและผิวเสียดสีคือ Γ_8 และ Γ_9

เงื่อนไขขอบเขต

ผิว Γ_1 จากสมมุติฐานข้อ 9 สัมประสิทธิ์การซึมได้ของแถบทางระบายน้ำมีค่าสูงมาก ความดันน้ำส่วนเกินเท่า 0

$$u(o, y, z, t) = 0 \quad 0 \leq y \leq 50 \text{ มม.}, 0 \leq z \leq H \text{ มม.}, 0 < t \dots\dots\dots (2.28)$$

ผิว Γ_2 โดยสมมาตรน้ำซึมผ่านไม่ได้ ความลาดเชิงกลศาสตร์ตามแนวแกน y เท่ากับ 0

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, o, z, t) = 0 \quad 0 < x \leq \frac{pd}{2} \text{ มม.}, 0 \leq z \leq H \text{ มม.}, 0 < t \dots\dots\dots (2.29)$$

ผิว Γ_3 โดยสมมาตร น้ำซึมผ่านไม่ได้ ความลาดเชิงกลศาสตร์ตามแนวแกน y เท่ากับ 0

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, o, z, t) = 0 \quad \frac{pd}{2} < x \leq \frac{S}{2} \text{ มม.}, 0 \leq z \leq H \text{ มม.}, \\ 0 < t \dots\dots\dots (2.30)$$

ผิว Γ_4 โดยสมมาตร น้ำซึมผ่านไม่ได้ ความลาดเชิงกลศาสตร์ตามแนวแกน x เท่ากับ 0

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\frac{pd}{2}, y, z, t) = 0 \quad 0 \leq y \leq \frac{S}{2} \text{ มม.}, 0 \leq z \leq H \text{ มม.}, \\ 0 < t \dots\dots\dots (2.31)$$

ผิว Γ_5 โดยสมมาตรน้ำซึมผ่านไม่ได้ ความลาดเชิงกลศาสตร์ตามแนวแกน y เท่ากับ 0

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, \frac{S}{2}, z, t) = 0 \quad 0 \leq x \leq \frac{S}{2} \text{ มม.}, 0 \leq z \leq H \text{ มม.}, \\ 0 < t \dots\dots\dots (2.32)$$

ผิว Γ_6 โดยสมมาตรน้ำซึมผ่านไม่ได้ ความลาดเชิงกลศาสตร์ตามแนวแกน x เท่ากับ 0

$$\frac{\partial u}{\partial x}(o, x, z, t) = 0 \quad \frac{1}{2}[a + (p-1)d] \leq y \leq \frac{S}{2} \text{ มม.}, \\ 0 \leq z \leq H, 0 < t \dots\dots\dots (2.33)$$

ผิว Γ_7 โดยสมมาตรน้ำซึมผ่านไม่ได้ ความลาดเชิงขดศาสตร์ตามแนวแกน x เท่ากับ 0

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, x, z, t) = 0 \quad 50 \leq y \leq \frac{1}{2}[a + (p-1)d] \text{ มม.},$$

$$0 \leq z \leq H \text{ มม.}, \quad 0 < t \quad \dots\dots\dots (2.34)$$

ผิว Γ_8 อัตราการไหลซึมของน้ำออกจากบริเวณ Ω_2 เข้าสู่บริเวณ Ω_1 เท่ากัน ตามกฎการ
 มาสซุหยายของมวล

$$k_o \lim_{x \rightarrow \frac{pd}{2}^+} \frac{\partial u}{\partial x} = k_s \lim_{x \rightarrow \frac{pd}{2}^-} \frac{\partial u}{\partial x} \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{2}[a + (p-1)d] \text{ มม.},$$

$$0 \leq z \leq H \text{ มม.}, \quad 0 < t \quad \dots\dots\dots (2.35)$$

ผิว Γ_9 อัตราการไหลซึมของน้ำออกจากบริเวณ Ω_2 เข้าสู่บริเวณ Ω_1 เท่ากัน ตามกฎการ
 มาสซุหยายของมวล

$$k_o \lim_{y \rightarrow \frac{1}{2}[a+(p-1)d]^+} \frac{\partial u}{\partial x} = k_s \lim_{y \rightarrow \frac{1}{2}[a+(p-1)d]^-} \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$0 \leq x \leq \frac{pd}{2} \text{ มม.}, \quad 0 \leq y \leq H, \quad 0 < t \quad \dots\dots\dots (2.36)$$

ผิว Γ_{10} อัตราการไหลซึมออกของน้ำจากผิวบนชั้นดินเท่ากับ 0 เนื่องจากน้ำไหลซึมตาม
 แนวราบ ตามสมมติฐานข้อ 3

$$\frac{\partial u}{\partial z}(x, y, 0, t) = 0 \quad 0 \leq x \leq \frac{S}{2} \text{ มม.}, \quad 0 \leq y \leq \frac{S}{2} \text{ มม.},$$

$$0 < t \quad \dots\dots\dots (2.37)$$

ผิว Γ_{11} อัตราการไหลซึมออกของน้ำจากผิวบนชั้นดินเท่ากับ 0 เนื่องจากน้ำไหลซึมตาม
 แนวราบ ตามสมมติฐานข้อ 3

$$\frac{\partial u}{\partial z}(x, y, H, t) = 0 \quad 0 \leq x \leq \frac{S}{2} \text{ มม.}, \quad 0 \leq y \leq \frac{S}{2} \text{ มม.},$$

$$0 < t \quad \dots\dots\dots (2.38)$$

2.3.2 เงื่อนไขเริ่มต้น

เนื่องจากน้ำหนักบรรทุกกดทับบนผิวดิน (q_s) แต่กระจายสม่ำเสมอเพิ่มขึ้นอย่างฉับพลัน
 ทันที จากสมมติฐานข้อ 1 ข้อ 2 ข้อ 5 และข้อ 11 ตัวแปรเสริมความดันน้ำส่วนเกิน (Pore pressure
 parameter) C เท่ากับ 1 ตาม Lambe, T.W. and Whitman, R.V (1979) ดังนั้น

$$u(x, y, z, 0) = q_s \quad 0 \leq x \leq \frac{S}{2} \text{ มม.}, \quad 0 \leq y \leq \frac{S}{2} \text{ มม.},$$

$$0 \leq z \leq H \text{ มม.} \quad \dots\dots\dots (2.39)$$

2.3.3 การหาผลเฉลยความดันน้ำส่วนเกิน

เพื่อให้สามารถวิเคราะห์ปัญหาได้มากขึ้น จึงคิดค่าต่างๆอยู่ในรูปตัวแปรคือ ระยะห่าง
 ระหว่างแถบทางระบายน้ำสำเร็จรูป S น้ำหนักบรรทุกกดทับบนผิวดิน q_s เวลาตั้งแต่เริ่มบรรทุก

น้ำหนักกดทับ t สัมประสิทธิ์การเปลี่ยนแปลงปริมาตรตามแนวตั้งของดินคงสภาพ m_{vo} สัมประสิทธิ์การซึมได้ของตามแนวราบของดินคงสภาพ k_o และสัมประสิทธิ์การซึมได้ตามแนวราบของผิวเสียดสี k_s

ในการหาผลเฉลยจึงต้องกำจัดตัวแปรเหล่านี้ทั้งหมด โดยเปลี่ยนตัวแปรใหม่ให้เป็นตัวแปรไร้มิติดังนี้

$$\begin{aligned} \text{ให้ } U &= \frac{u}{q_s} \\ K_h &= \frac{k_s}{k_o} \\ T &= \frac{k_o t}{\gamma_w m_{vo} d_{ceq}^2} \end{aligned}$$

โดยที่ d_{ceq} เป็นเส้นผ่าศูนย์กลางของวงกลมที่มีพื้นที่เท่ากับบริเวณที่น้ำไหลซึมเข้าสู่แถบทางระบายน้ำสำเร็จรูปแต่ละแถบ

$$d_{ceq} = \frac{2S}{\sqrt{\pi}}$$

จากสมมติฐานข้อ 3 น้ำไหลซึมตามแนวราบ ดังนั้นทุกจุด (x, y, z) ภายในบริเวณที่เกิดการอัดตัวระบายน้ำ Ω_1 และ Ω_2

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad 0 < t \quad \dots\dots\dots (2.40)$$

จากสมการ (2.37) สมการ (2.38) สมการ (2.39) และสมการ (2.40) บ่งชี้ว่า u ไม่ขึ้นกับ z นั่นคือ

$$u(x, y, z, t) = u(x, y, t) \quad 0 \leq x \leq \frac{S}{2} \text{ มม.}, \quad 0 \leq y \leq \frac{S}{2} \text{ มม.}, \quad 0 \leq t \quad \dots\dots\dots (2.41)$$

อาศัยสมการ (2.41) และกฎลูกโซ่เขียนสมการควบคุมการอัดตัวระบายน้ำ เงื่อนไขขอบเขตและเงื่อนไขเริ่มต้นในรูปตัวแปรใหม่ U, T, K_h และ d_{ceq} ได้ดังนี้

(1) สมการควบคุมการอัดตัวระบายน้ำ

ในดินคงสภาพ

$$\frac{\partial U}{\partial T} = d_{ceq}^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad 0 < T \quad \dots\dots\dots (2.42)$$

ในผิวเสียดสี (*Smear zone*)

$$\frac{\partial U}{\partial T} = d_{ceq}^2 K_h \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad 0 < T \quad \dots\dots\dots (2.43)$$

(2) เงื่อนไขขอบเขต

$$U(o, y, T) = 0 \quad 0 \leq y \leq 50 \text{ มม.}, \quad 0 < T \quad \dots\dots\dots (2.44)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x, o, T) = 0 \quad 0 < x \leq \frac{S}{2} \text{ มม.}, \quad 0 < T \quad \dots\dots\dots (2.45)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} \left(\frac{pd}{2}, y, T \right) = 0 \quad 0 \leq y \leq \frac{S}{2} \text{ มม.}, 0 < T \dots\dots\dots (2.46)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} \left(x, \frac{S}{2}, T \right) = 0 \quad 0 \leq x \leq \frac{S}{2} \text{ มม.}, 0 < T \dots\dots\dots (2.47)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} (o, y, T) = 0 \quad 50 < y \leq \frac{S}{2} \text{ มม.}, 0 < T \dots\dots\dots (2.48)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{pd}{2}^+} \frac{\partial U}{\partial x} = K_h \lim_{x \rightarrow \frac{pd}{2}^-} \frac{\partial U}{\partial x} \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{2} [a + (p-1)d] \text{ มม.},$$

$$0 < T \dots\dots\dots (2.49)$$

$$\lim_{y \rightarrow \frac{1}{2} [a + (p-1)d]^+} \frac{\partial u}{\partial y} = K_h \lim_{y \rightarrow \frac{1}{2} [a + (p-1)d]^-} \frac{\partial U}{\partial y} \quad 0 \leq x \leq \frac{pd}{2} \text{ มม.}, 0 < T \dots\dots\dots (2.50)$$

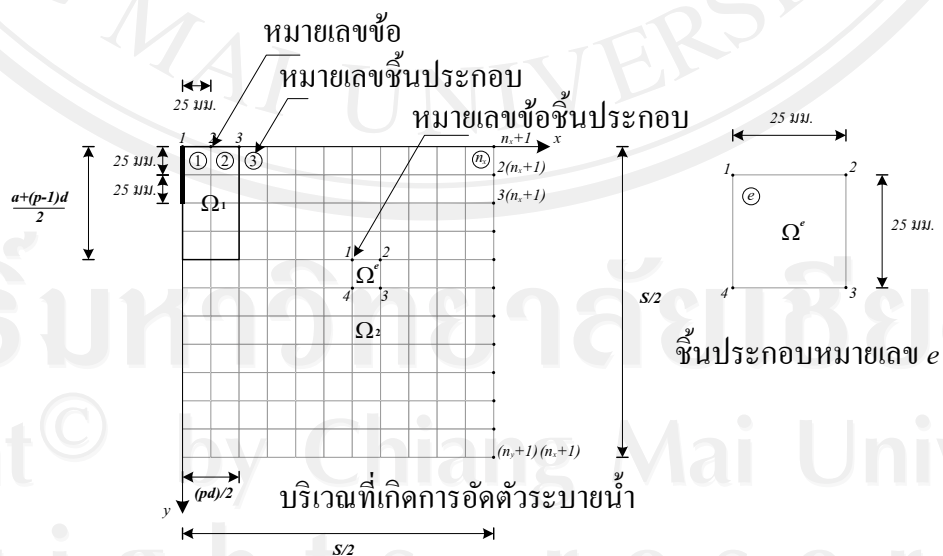
(3) เงื่อนไขเริ่มตัน

$$U(x, y, T) = 1 \quad 0 \leq x \leq \frac{S}{2} \text{ มม.}, 0 \leq y \leq \frac{S}{2},$$

$$0 < T \dots\dots\dots (2.51)$$

หาผลเฉลยโดยวิธีขึ้นประกอบอันตะ (Finite element method) สร้างสมการควบคุมการอัดตัวระบายน้ำ และเงื่อนไขขอบเขตสมการ (2.42) ถึงสมการ (2.50) แบบใช้งานง่าย (Weak form) โดยวิธีถ่วงน้ำหนักส่วนตกค้าง (Weighted residue method)

แบ่งบริเวณที่เกิดการอัดตัวระบายน้ำ (รูปที่ 2.5) Ω_1 และ Ω_2 ออกเป็นชั้นประกอบสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 25 มม. x 25 มม. ต่อเนื่องกันเต็มบริเวณ Ω_1 และ Ω_2 และมีจำนวนชั้นประกอบตามแกน x คือ n_x เท่ากับจำนวนชั้นประกอบตามแกน y คือ n_y ดังรูป 2.5



รูป 2.5 การลงหมายเลขรวมของชั้นประกอบและข้อ

จัดสมการ (2.42) และสมการ (2.43) ใหม่ได้

$$d_{ceq}^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + d_{ceq}^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial U}{\partial T} = 0$$

$$0 < T \quad \text{ภายในบริเวณ } \Omega_2 \quad \dots\dots\dots (2.52)$$

$$d_{ceq}^2 K_h \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + d_{ceq}^2 K_h \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial U}{\partial T} = 0$$

$$0 < T \quad \text{ภายในบริเวณ } \Omega_1 \quad \dots\dots\dots (2.53)$$

จากบทตั้งมูลฐานของแคลคูลัสของการแปรผัน (*Fundamental lemma of the calculus of variations*) เขียนสมการ (2.52) และสมการ (2.53) ในรูปปริพันธ์ของค่าว่างน้ำหนักส่วนตักข้างได้เป็น

$$\int_{\Omega_2} W \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(d_{ceq}^2 \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(d_{ceq}^2 \frac{\partial U}{\partial y} \right) - \frac{\partial U}{\partial T} \right\} dx dy = 0 \quad \dots\dots\dots (2.54)$$

$$\int_{\Omega_1} W \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(d_{ceq}^2 K_h \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(d_{ceq}^2 \frac{\partial U}{\partial y} \right) - \frac{\partial U}{\partial T} \right\} dx dy = 0 \quad \dots\dots\dots (2.55)$$

โดยที่ $W = W(x, y)$ เป็นฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักที่มีความต่อเนื่องใน Ω_1 และ Ω_2

ลดอันดับอนุพันธ์ลง จากสูตรอนุพันธ์ผลคูณ

$$W \frac{\partial}{\partial x} \left(d_{ceq}^2 \frac{\partial U}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(W d_{ceq}^2 \frac{\partial U}{\partial x} \right) - \left(d_{ceq}^2 \frac{\partial U}{\partial x} \right) \frac{\partial W}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (2.55)$$

และ

$$\int_{\Omega^e} W \frac{\partial}{\partial x} \left(d_{ceq}^2 \frac{\partial U}{\partial x} \right) dx dy = \int_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial x} \left(W d_{ceq}^2 \frac{\partial U}{\partial x} \right) dx dy - \int_{\Omega^e} \left(d_{ceq}^2 \frac{\partial U}{\partial x} \right) \frac{\partial W}{\partial x} dx dy \quad \dots\dots\dots (2.56)$$

โดยที่ Ω^e เป็นบริเวณที่เกิดการอัดตัวระบายน้ำของชั้นประกอบหมายเลข e ซึ่งอยู่บนบริเวณ Ω_2 แต่จากทฤษฎีของกรีน (*Green's theorem*)

$$\int_{\Omega^e} \frac{\partial U}{\partial x} \left(W d_{ceq}^2 \frac{\partial U}{\partial x} \right) dx dy = \oint_{\Gamma^e} m_x W d_{ceq}^2 \frac{\partial U}{\partial x} d\Gamma^e \quad \dots\dots\dots (2.57)$$

โดยที่ Γ^e เป็นเส้นรอบรูปของบริเวณชั้นประกอบหมายเลข e

$d\Gamma^e$ เป็นความยาวชั้นประกอบของเส้นรอบรูป Γ^e มีค่าเป็นบวก

m_x เป็นโคไซน์แสดงทิศทาง (*Direction cosine*) ตามแกน x ของเวกเตอร์หน่วย

ตามแนวตั้งฉาก (*Unit normal vector*) กับเส้นรอบรูป เวกเตอร์หน่วยนี้มีทิศพุ่งออกจากภายในชั้นประกอบหมายเลข e

รวมสมการ (2.56) และ (2.57) เข้าด้วยกัน

$$\int_{\Omega^e} W \frac{\partial U}{\partial x} \left(d_{ceq}^2 \frac{\partial U}{\partial x} \right) dx dy = \oint_{\Gamma^e} m_x W d_{ceq}^2 \frac{\partial U}{\partial x} d\Gamma^e - \int_{\Omega^e} \left(d_{ceq}^2 \frac{\partial U}{\partial x} \right) \frac{\partial W}{\partial x} dx dy \quad \dots (2.58)$$

โดยที่ Ω^e อยู่ในบริเวณ Ω_2

ในทำนองเดียวกัน

$$\int_{\Omega^e} W \frac{\partial U}{\partial y} \left(d_{ceq}^2 \frac{\partial U}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma^e} m_y W d_{ceq}^2 \frac{\partial U}{\partial y} d\Gamma^e - \int_{\Omega^e} \left(d_{ceq}^2 \frac{\partial U}{\partial y} \right) \frac{\partial W}{\partial y} dx dy \quad \dots (2.59)$$

โดยที่ m_y เป็นโคไซน์แสดงทิศทาง (*Direction cosine*) ตามแกน y ของเวกเตอร์หน่วยตามแนวตั้งฉาก (*Unit normal vector*) กับเส้นรอบรูป เวกเตอร์หน่วยนี้มีทิศพุ่งออกจากภายในชั้นประกอบหมายเลข e

สมการ (2.52) เป็นจริงภายในบริเวณ Ω_2 ดังนั้นสมการ (2.52) และสมการ (2.54) เป็นจริงภายในบริเวณ Ω^e ซึ่งอยู่ภายในบริเวณ Ω_2 ด้วยดังนั้น

$$\int_{\Omega^e} W \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(d_{ceq}^2 \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(d_{ceq}^2 \frac{\partial U}{\partial y} \right) - \frac{\partial U}{\partial T} \right\} dx dy = 0 \quad 0 < T \quad \dots (2.60)$$

แทนค่า $\int_{\Omega^e} W \frac{\partial U}{\partial x} \left(d_{ceq}^2 \frac{\partial U}{\partial x} \right) dx dy$ จากสมการ (2.58)

และ $\int_{\Omega^e} W \frac{\partial U}{\partial y} \left(d_{ceq}^2 \frac{\partial U}{\partial y} \right) dx dy$ จากสมการ (2.59) ลงในสมการ (2.60) ได้สมการควบคุม

การอัดตัวระบายน้ำรูปแบบใช้งานง่าย สำหรับชั้นประกอบอิสระ แต่ละชั้นในบริเวณ Ω_2 ดังนี้

$$\oint_{\Gamma^e} \left\{ m_x W d_{ceq}^2 \frac{\partial U}{\partial x} + m_y W d_{ceq}^2 \frac{\partial U}{\partial y} \right\} d\Gamma^e - \int_{\Omega^e} \left\{ d_{ceq}^2 \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial x} + d_{ceq}^2 \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial T} \right\} dx dy = 0 \quad \dots (2.61)$$

ประมาณค่าฟังก์ชัน U ทุกจุด (x,y) ตลอดบริเวณชั้นประกอบ Ω^e ที่ตัวประกอบเวลา T ด้วย

สมการ

$$U(x, y, T) = U^e(x, y, T) \approx \sum_{j=1}^4 U_j^e(T) \Psi_j^e(x, y) \quad 0 < T \quad \dots (2.62)$$

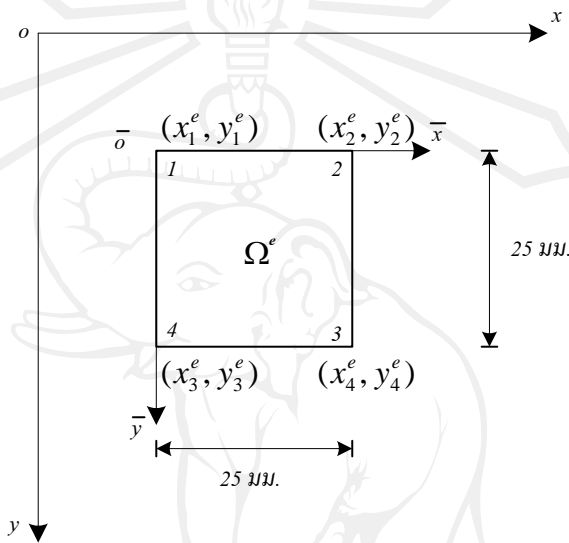
โดยที่ U_j^e เป็นค่า U ที่ข้อ j ของชั้นประกอบ e ที่ตัวประกอบเวลา T

J เป็นเลขเต็มหน่วยมีค่าเท่ากับ 1, 2, 3 และ 4

Ψ_j^e เป็นฟังก์ชันประมาณค่าในช่วง (*Interpolation function*) ซึ่งมีคุณสมบัติดังนี้

$$\Psi_j^e(x_i^e, y_i^e) = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } i \neq j \\ 1 & \text{ถ้า } i = j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3, 4 \quad \dots\dots\dots (2.63)$$

x_j^e และ y_j^e เป็นพิกัด i ของชั้นประกอบ e ในระบบพิกัด xy ดังรูป 2.6



รูป 2.6 ระบบพิกัดเฉพาะที่ $\bar{x}\bar{y}$

การหาฟังก์ชัน $\Psi_j^e(x, y)$ ทำได้ง่ายขึ้นโดยใช้ระบบพิกัดเฉพาะที่ $\bar{x}\bar{y}$ (ในรูป 2.6) ซึ่งมีการแปลงพิกัดตามสมการ

$$\bar{x} = x - x_1^e \quad \dots\dots\dots (2.64)$$

$$\bar{y} = y - y_1^e \quad \dots\dots\dots (2.65)$$

ดังนั้น $\Psi_j^e(x, y) = \Psi_j^e(\bar{x}, \bar{y}) \quad \dots\dots\dots (2.66)$

และสมการ (2.63) กลายเป็น

$$\Psi_j^e(x_i^e, y_i^e) = \Psi_j^e(\bar{x}_i, \bar{y}_i) = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } i \neq j \\ 1 & \text{ถ้า } i = j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3, 4 \quad \dots\dots\dots (2.67)$$

โดยที่ \bar{x}_i และ \bar{y}_i เป็นพิกัดของข้อ i ของชั้นประกอบ e ในระบบ $\bar{x}\bar{y}$

จากสมการ (2.63) เมื่อ $j=1$ ได้เงื่อนไข

$$\Psi_1^e(\bar{x}_i, \bar{y}_i) = 0 \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad \dots\dots\dots (2.68)$$

และ $\Psi_1^e(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = 1 \quad \dots\dots\dots (2.69)$

นั่นคือจากสมการ (2.68) เลือก $\Psi_1^e \equiv 0$ บนเส้น $x=25$ และ $y=25$ ดังนั้น $\Psi_1^e(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ มีรูปแบบเป็น

$$\Psi_1^e(\bar{x}, \bar{y}) = c_1(25 - \bar{x})(25 - \bar{y}) \quad \dots\dots\dots (2.70)$$

โดยที่ c_1 เป็นตัวคงค่าเลือก (Arbitrary constant)

โดยที่ c_1 จากการแทนค่าพิกัดข้อ 1 คือ $\bar{x} = 0$ และ $\bar{y} = 0$ ลงในสมการ (2.69) และสมการ (2.70) ได้

$$c_1 = \frac{1}{(25)(25)} \quad \dots\dots\dots (2.71)$$

ดังนั้น $\Psi_1^e(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{(25)(25)}(25 - \bar{x})(25 - \bar{y}) = (1 - \frac{\bar{x}}{25})(1 - \frac{\bar{y}}{25})$ (2.72)

ในทำนองเดียวกันหา $\Psi_2^e(\bar{x}, \bar{y})$, $\Psi_3^e(\bar{x}, \bar{y})$ และ $\Psi_4^e(\bar{x}, \bar{y})$ ได้เป็น

$$\Psi_2^e(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\bar{x}}{25} \left(1 - \frac{\bar{y}}{25}\right) \quad \dots\dots\dots (2.73)$$

$$\Psi_3^e(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\bar{x}}{25} \left(1 - \frac{\bar{y}}{25}\right) \quad \dots\dots\dots (2.74)$$

$$\Psi_4^e(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\bar{x}}{25} \left(1 - \frac{\bar{y}}{25}\right) \quad \dots\dots\dots (2.75)$$

เขียนสมการควบคุมการอัดตัวระบายน้ำของชั้นประกอบ e ในบริเวณ Ω_2 จากสมการ (2.61) ได้

$$\int_{\Omega^e} \left\{ W \frac{\partial U}{\partial T} + d^2_{ceq} \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial x} + d^2_{ceq} \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial y} \right\} dx dy = \int_{\Gamma^e} q_n W d\Gamma^e \quad \dots\dots\dots (2.76)$$

โดยที่ $q_n = m_x d^2_{ceq} \frac{\partial U}{\partial x} + m_y d^2_{ceq} \frac{\partial U}{\partial y}$ (2.77)

ประมาณค่า U ด้วย U^e และ W ด้วย $\Psi_j^e (j=1,2,3,4)$ ได้สมการควบคุมการอัดตัวระบายน้ำของชั้นประกอบ e ในบริเวณ Ω_2 ในรูปของเมทริกซ์ (Matrix) ดังนี้

$$[M^e] \{ \dot{U}^e \} + [K^e] \{ U^e \} = \{ Q^e \} \quad \dots\dots\dots (2.78)$$

โดยที่ $U^e = \frac{\partial U^e}{\partial T}$

$$M_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \Psi_i^e \Psi_j^e dx dy \quad \dots\dots\dots (2.79)$$

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \left(d^2_{ceq} \frac{\partial \Psi_i^e}{\partial x} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial x} + d^2_{ceq} \frac{\partial \Psi_i^e}{\partial y} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial y} \right) dx dy \quad i, j = 1, 2, 3, 4 \quad \dots\dots\dots (2.80)$$

$$Q_i^e = \int_{\Gamma^e} q_n \Psi_i^e d\Gamma^e \quad i, j = 1, 2, 3, 4 \quad \dots\dots\dots (2.81)$$

ในทำนองเดียวกัน สมการควบคุมการอัดตัวระบายน้ำของชั้นประกอบ e ในบริเวณ Ω_1 ในรูปของเมทริกซ์ (Matrix) เขียนได้เป็น

$$[M^e] \{ \dot{U}^e \} + K_h [K^e] \{ U^e \} = K_h \{ Q^e \} \quad \dots\dots\dots (2.82)$$

เขียนสมการควบคุมการอัดตัวระบายน้ำของชั้นประกอบทุกชั้นโดยใช้สมการ (2.76) สำหรับชั้นประกอบที่อยู่ใน Ω_2 และใช้สมการ (2.82) สำหรับชั้นประกอบที่อยู่ใน Ω_1 จนครบทุกชั้นประกอบ แล้วบวกสมการควบคุมการอัดตัวระบายน้ำของชั้นประกอบทุกชั้นเข้าด้วยกัน นั่นคือประกอบสมการควบคุมการอัดตัวระบายน้ำของชั้นประกอบเข้าด้วยกันจนครบทุกชั้น อาศัยการต่อเนื่องของ U ที่ข้อ เปลี่ยนหมายเลขชั้นประกอบที่ข้อเดียวกันเป็นหมายเลขรวมของข้อ และการหักล้างกันของ q_n บนด้านติดกันระหว่างชั้นประกอบแต่ละชั้นที่อยู่ในเนื้อเดียวกัน และอาศัยเงื่อนไขขอบเขตสมการ (2.49) และสมการ (2.50) ในการหักล้างกันของ q_n บนด้านติดกันระหว่างชั้นประกอบแต่ละชั้นที่อยู่ในดินเนื้อต่างกัน เหลือ q_n บนเส้นรอบรูป $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6$, และ Γ_7 ได้สมการควบคุมการอัดตัวระบายน้ำแบบใช้งานง่ายใหม่ในรูปชุดสมการเชิงอนุพันธ์ดังนี้

$$[M]\{\dot{U}^e\} + [K]\{U\} = \{Q\} \quad \dots\dots\dots (2.83)$$

$$\text{โดยที่ } \{\dot{U}^e\}^T = \left[\frac{\partial U_1}{\partial T}, \frac{\partial U_2}{\partial T}, \frac{\partial U_3}{\partial T}, \dots, \frac{\partial U_{(n_y+1)(n_x+1)}}{\partial T} \right]$$

$$\{U\}^T = [U_1, U_2, U_3, \dots, U_{(n_y+1)(n_x+1)}]$$

$$\text{และ } \{Q\}^T = [Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_{(n_y+1)(n_x+1)}]$$

กำหนดเงื่อนไขขอบเขตเส้นรอบรูป $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6$, และ Γ_7 ได้โดยตรง โดยใช้สมการ (2.28) ถึงสมการ (2.34) สมการ (2.37) และสมการ (2.38)

$\{U\}$ และ $\{Q\}$ ที่เกิดขึ้นมีลักษณะดังนี้คือ ถ้า $U_i = 0$; Q_i ไม่ทราบค่าและ U_i ไม่ทราบค่า $Q_i = 0$ ละทิ้งสมการที่ไม่ทราบค่า Q_i จัดสมการใหม่ได้

$$[M^r]\{\dot{U}^r\} + [K^r]\{U^r\} = \{0\} \quad \dots\dots\dots (2.84)$$

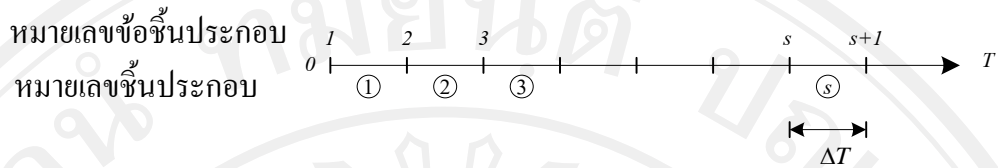
โดยที่ $[M^r]$ และ $[K^r]$ เป็นเมทริกซ์ $[M]$ และ $[K]$ ที่ละทิ้งแถว (Row) และสดมภ์ (Column) i ที่ไม่ทราบค่า Q_i

$$\{\dot{U}^r\} \text{ และ } \{U^r\} \text{ เป็นเวกเตอร์แนวตั้ง (Column vector) } \{\dot{U}\} \text{ และ } \{U\} \text{ ที่ละทิ้ง}$$

แถว i ที่ไม่ทราบค่า Q_i

แบ่งตัวประกอบเวลา T ออกเป็นชั้นส่วนประกอบเวลาขาว ΔT เท่ากัน และต่อกันดังรูป

2.7 ดังนั้นข้อที่ S และ $S+1$

รูป 2.7 การแบ่งขึ้นประกอบของตัวประกอบเวลา T

สมการ (2.84) กลายเป็น

$$[M^r] \left\{ \dot{U}^r \right\}_s + [K^r] \{U^r\}_s = \{0\} \quad \dots\dots\dots (2.85)$$

และ $[M^r] \left\{ \dot{U}^r \right\}_{s+1} + [K^r] \{U^r\}_{s+1} = \{0\} \quad \dots\dots\dots (2.86)$

เอา $(1-\lambda)$ คูณสมการที่ (2.85) ได้

$$(1-\lambda)[M^r] \left\{ \dot{U}^r \right\}_s + (1-\lambda)[K^r] \{U^r\}_s = \{0\} \quad \dots\dots\dots (2.87)$$

เอา λ คูณสมการที่ (2.86) ได้

$$\lambda[M^r] \left\{ \dot{U}^r \right\}_{s+1} + \lambda[K^r] \{U^r\}_{s+1} = \{0\} \quad \dots\dots\dots (2.88)$$

เอาสมการ (2.87) บวก สมการ (2.88) ได้

$$[M^r] \left[(1-\lambda) \left\{ \dot{U}^r \right\}_s + \lambda \left\{ \dot{U}^r \right\}_{s+1} \right] + [K^r] \left[(1-\lambda) \{U^r\}_s + \lambda \{U^r\}_{s+1} \right] = \{0\} \quad \dots\dots\dots (2.89)$$

ประมาณ $(1-\lambda) \left\{ \dot{U}^r \right\}_s + \lambda \left\{ \dot{U}^r \right\}_{s+1} \approx \left\{ \dot{U}^r \right\}_{s+1} \approx \frac{\{U^r\}_{s+1} - \{U^r\}_s}{\Delta T} \{0\}$

$$0 \leq \lambda \leq 1 \quad \dots\dots\dots (2.90)$$

ดังนั้นสมการ (2.89) กลายเป็น

$$[M^r] \left[\frac{\{U^r\}_{s+1} - \{U^r\}_s}{\Delta T} \right] + [K^r] \left[(1-\lambda) \{U^r\}_s + \lambda \{U^r\}_{s+1} \right] = 0 \quad \dots\dots\dots (2.91)$$

จัดรูปสมการ (2.91) ใหม่เป็น

$$\left[\frac{[M^r]}{\Delta T} + \lambda[K^r] \right] \{U^r\}_{s+1} = \left[\frac{[M^r]}{\Delta T} - (1-\lambda)[K^r] \right] \{U^r\}_s \quad \dots\dots\dots (2.92)$$

กำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นตามสมการ (2.51)

$$\{U^r\}_1 = \{1\} \quad s=1 \quad \dots\dots\dots (2.87)$$

ใช้ $\{U^r\}_1$ คำนวณ $\{U^r\}_2$ จากสมการ (2.86) ตามวิธีกำจัดของเกาส์ (*Gauss elimination method*) และใช้ $\{U^r\}_2$ คำนวณ $\{U^r\}_3$ ทำวนเช่นนี้ไปเรื่อยๆ เพื่อหา $\{U^r\}_4, \{U^r\}_5, \{U^r\}_6, \dots$ จนถึงข้อที่ต้องการ

งานวิจัยนี้ใช้ชิ้นประกอบอันตรรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 25 มม. x 25 มม. 4 ข้อ เชิงเส้นและ ส่วนเพิ่มเติมตัวประกอบเวลา $\Delta T = 0.0001$ เลือกลำ $\lambda = 0.5$ ตามเร็งก์ - นิคอลสัน (Crank - Nicolson) คำนวณปริพันธ์ $\int_{\Omega^e} \Psi_i^e \Psi_j^e dx dy$ และ $\int_{\Omega^e} \left(d_{ceq}^2 \frac{\partial \Psi_i^e}{\partial x} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial x} + d_{ceq}^2 \frac{\partial \Psi_i^e}{\partial y} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial y} \right) dx dy$ โดยการหาปริพันธ์โดยตรงดังนี้

จากสมการ (2.64) และสมการ (2.65)

$$x = \bar{x} + x_1^e \quad \dots\dots\dots (2.93)$$

$$y = \bar{y} + y_1^e \quad \dots\dots\dots (2.94)$$

เปลี่ยนตัวแปร x และ y เป็น \bar{x} และ \bar{y} ตามสมการ (2.93) สมการ (2.94) และสมการ (2.66) ได้

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^e} \Psi_i^e \Psi_j^e dx dy &= \int_{x_1^e}^{x_1^e+25} \int_{y_1^e}^{y_1^e+25} \Psi_i^e(x, y) \Psi_j^e(x, y) dx dy \\ &= \int_0^{25} \int_0^{25} \Psi_i^e(\bar{x}, \bar{y}) \Psi_j^e(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} \quad \dots\dots\dots (2.95) \end{aligned}$$

แทนค่า $\Psi_1^e(\bar{x}, \bar{y}), \Psi_2^e(\bar{x}, \bar{y}), \Psi_3^e(\bar{x}, \bar{y})$ และ $\Psi_4^e(\bar{x}, \bar{y})$ จากสมการ (2.72) สมการ (2.75) แล้วใช้ปริพันธ์

$$\int_0^{25} \left(1 - \frac{\bar{x}}{25} \right) d\bar{x} = \frac{25}{3} \quad \dots\dots\dots (2.96)$$

$$\int_0^{25} \left(1 - \frac{\bar{x}}{25} \right) \left(\frac{\bar{x}}{25} \right) d\bar{x} = \frac{25}{6} \quad \dots\dots\dots (2.97)$$

$$\int_0^{25} \left(\frac{\bar{x}}{25} \right) \left(\frac{\bar{x}}{25} \right) d\bar{x} = \frac{25}{3} \quad \dots\dots\dots (2.98)$$

$$\int_0^{25} \left(1 - \frac{\bar{x}}{25} \right) d\bar{x} = \frac{25}{2} \quad \dots\dots\dots (2.99)$$

$$\int_0^{25} \left(\frac{\bar{x}}{25} \right) d\bar{x} = \frac{25}{2} \quad \dots\dots\dots (2.100)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{25} \int_0^{25} \Psi_1^e(\bar{x}, \bar{y}) \Psi_1^e(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} &= \frac{625}{9} \\ \int_0^{25} \int_0^{25} \Psi_1^e(\bar{x}, \bar{y}) \Psi_2^e(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} &= \frac{625}{18} = \int_0^{25} \int_0^{25} \Psi_2^e(\bar{x}, \bar{y}) \Psi_1^e(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} \\ \int_0^{25} \int_0^{25} \Psi_1^e(\bar{x}, \bar{y}) \Psi_3^e(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} &= \frac{625}{36} = \int_0^{25} \int_0^{25} \Psi_3^e(\bar{x}, \bar{y}) \Psi_1^e(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} \\ \int_0^{25} \int_0^{25} \Psi_1^e(\bar{x}, \bar{y}) \Psi_4^e(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} &= \frac{625}{18} = \int_0^{25} \int_0^{25} \Psi_4^e(\bar{x}, \bar{y}) \Psi_1^e(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{25} \int_0^{25} \Psi_2^e(\bar{x}, \bar{y}) \Psi_2^e(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} &= \frac{625}{9} \\ \int_0^{25} \int_0^{25} \Psi_2^e(\bar{x}, \bar{y}) \Psi_3^e(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} &= \frac{625}{18} = \int_0^{25} \int_0^{25} \Psi_3^e(\bar{x}, \bar{y}) \Psi_2^e(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} \\ \int_0^{25} \int_0^{25} \Psi_2^e(\bar{x}, \bar{y}) \Psi_4^e(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} &= \frac{625}{36} = \int_0^{25} \int_0^{25} \Psi_4^e(\bar{x}, \bar{y}) \Psi_2^e(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} \\ \int_0^{25} \int_0^{25} \Psi_3^e(\bar{x}, \bar{y}) \Psi_3^e(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} &= \frac{625}{9} \\ \int_0^{25} \int_0^{25} \Psi_3^e(\bar{x}, \bar{y}) \Psi_4^e(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} &= \frac{625}{18} = \int_0^{25} \int_0^{25} \Psi_4^e(\bar{x}, \bar{y}) \Psi_3^e(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} \\ \int_0^{25} \int_0^{25} \Psi_4^e(\bar{x}, \bar{y}) \Psi_4^e(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} &= \frac{625}{9}\end{aligned}$$

โดยกฎลูกโซ่

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi_i^e}{\partial x} &= \frac{\partial \Psi_i^e}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} = \frac{\partial \Psi_i^e}{\partial \bar{x}} \\ \therefore \frac{\partial \Psi_1^e}{\partial x} &= -\frac{1}{25} \left(1 - \frac{\bar{y}}{25} \right) \\ \frac{\partial \Psi_2^e}{\partial x} &= \frac{1}{25} \left(1 - \frac{\bar{y}}{25} \right) \\ \frac{\partial \Psi_3^e}{\partial x} &= \frac{1}{25} \left(\frac{\bar{y}}{25} \right) \\ \frac{\partial \Psi_4^e}{\partial x} &= -\frac{1}{25} \left(\frac{\bar{y}}{25} \right)\end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi_1^e}{\partial y} &= -\frac{1}{25} \left(1 - \frac{\bar{x}}{25} \right) \\ \frac{\partial \Psi_2^e}{\partial y} &= -\frac{1}{25} \left(\frac{\bar{x}}{25} \right) \\ \frac{\partial \Psi_3^e}{\partial y} &= \frac{1}{25} \left(\frac{\bar{x}}{25} \right) \\ \frac{\partial \Psi_4^e}{\partial y} &= \frac{1}{25} \left(1 - \frac{\bar{x}}{25} \right)\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}\int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_1^e}{\partial x} \frac{\Psi_1^e}{\partial x} d\bar{x} d\bar{y} &= \frac{1}{3} \\ \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_1^e}{\partial x} \frac{\Psi_2^e}{\partial x} d\bar{x} d\bar{y} &= -\frac{1}{3} = \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_2^e}{\partial x} \frac{\Psi_1^e}{\partial x} d\bar{x} d\bar{y} \\ \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_1^e}{\partial x} \frac{\Psi_3^e}{\partial x} d\bar{x} d\bar{y} &= -\frac{1}{6} = \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_3^e}{\partial x} \frac{\Psi_1^e}{\partial x} d\bar{x} d\bar{y} \\ \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_1^e}{\partial x} \frac{\Psi_4^e}{\partial x} d\bar{x} d\bar{y} &= \frac{1}{6} = \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_4^e}{\partial x} \frac{\Psi_1^e}{\partial x} d\bar{x} d\bar{y} \\ \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_2^e}{\partial x} \frac{\Psi_2^e}{\partial x} d\bar{x} d\bar{y} &= \frac{1}{3} \\ \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_2^e}{\partial x} \frac{\Psi_3^e}{\partial x} d\bar{x} d\bar{y} &= \frac{1}{6} = \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_3^e}{\partial x} \frac{\Psi_2^e}{\partial x} d\bar{x} d\bar{y}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_2^e}{\partial x} \frac{\Psi_4^e}{\partial x} d\bar{x} d\bar{y} = -\frac{1}{6} = \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_4^e}{\partial x} \frac{\Psi_2^e}{\partial x} d\bar{x} d\bar{y} \\
& \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_3^e}{\partial x} \frac{\Psi_3^e}{\partial x} d\bar{x} d\bar{y} = \frac{1}{3} \\
& \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_3^e}{\partial x} \frac{\Psi_4^e}{\partial x} d\bar{x} d\bar{y} = -\frac{1}{3} = \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_4^e}{\partial x} \frac{\Psi_3^e}{\partial x} d\bar{x} d\bar{y} \\
& \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_4^e}{\partial x} \frac{\Psi_4^e}{\partial x} d\bar{x} d\bar{y} = \frac{1}{3} \\
& \text{และ} \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_1^e}{\partial y} \frac{\Psi_1^e}{\partial y} d\bar{x} d\bar{y} = \frac{1}{3} \\
& \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_1^e}{\partial y} \frac{\Psi_2^e}{\partial y} d\bar{x} d\bar{y} = \frac{1}{6} = \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_2^e}{\partial y} \frac{\Psi_1^e}{\partial y} d\bar{x} d\bar{y} \\
& \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_1^e}{\partial y} \frac{\Psi_3^e}{\partial y} d\bar{x} d\bar{y} = -\frac{1}{6} = \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_3^e}{\partial y} \frac{\Psi_1^e}{\partial y} d\bar{x} d\bar{y} \\
& \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_1^e}{\partial y} \frac{\Psi_4^e}{\partial y} d\bar{x} d\bar{y} = -\frac{1}{3} = \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_4^e}{\partial y} \frac{\Psi_1^e}{\partial y} d\bar{x} d\bar{y} \\
& \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_2^e}{\partial y} \frac{\Psi_2^e}{\partial y} d\bar{x} d\bar{y} = \frac{1}{3} \\
& \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_2^e}{\partial y} \frac{\Psi_3^e}{\partial y} d\bar{x} d\bar{y} = \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_3^e}{\partial y} \frac{\Psi_2^e}{\partial y} d\bar{x} d\bar{y} \\
& \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_2^e}{\partial y} \frac{\Psi_4^e}{\partial y} d\bar{x} d\bar{y} = \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_4^e}{\partial y} \frac{\Psi_2^e}{\partial y} d\bar{x} d\bar{y} \\
& \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_3^e}{\partial y} \frac{\Psi_3^e}{\partial y} d\bar{x} d\bar{y} = \frac{1}{3} \\
& \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_3^e}{\partial y} \frac{\Psi_4^e}{\partial y} d\bar{x} d\bar{y} = \frac{1}{6} = \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_4^e}{\partial y} \frac{\Psi_3^e}{\partial y} d\bar{x} d\bar{y} \\
& \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_4^e}{\partial y} \frac{\Psi_4^e}{\partial y} d\bar{x} d\bar{y} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$\therefore [M^e] = \frac{625}{36} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{และ} \quad [K^e] = \frac{d_{ceq}^2}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

2.4 เปอร์เซ็นต์การอัดตัวระบายน้ำเฉลี่ย (Average Percentage of Consolidation)

กำหนดเปอร์เซ็นต์การอัดตัวระบายน้ำเฉลี่ย $\bar{U}(T)$ เท่ากับค่าเฉลี่ยของความดันน้ำส่วนเกินที่กระจายลดลงขณะใดๆ หาด้วยความดันน้ำส่วนเกินตอนเริ่มต้น ดังนั้น

$$\bar{U}(T) = \frac{\int_{\Omega} [u(x, y, z, 0) - u(x, y, t)] dx dy}{\int_{\Omega} u(x, y, 0) dx dy} \times 100\% \quad \text{..... (2.101)}$$

จัดสมการ (2.101) พร้อมทั้งเปลี่ยนตัวแปร t เป็น T และ u เป็น U ได้

$$\bar{U}(T) = \left[1 - \frac{4}{s^2} \int_0^{s/2} \int_0^{s/2} U(x, y, T) dx dy \right] \times 100\% \quad \text{..... (2.102)}$$

หาปริพันธ์ $\int_0^{s/2} \int_0^{s/2} U(x, y, T) dx dy$ โดยวิธีของซิมป์สัน (Simpson) สองครั้งซ้อน ใช้ค่า $U(x, y, T)$ ที่คำนวณได้จาก $\{U\}_s$ ซึ่งได้จาก $\{U^r\}_s$ เพิ่มสมาชิก (Element) 0 ลงไปตำแหน่งแถวที่ s ละที่ s