บทที่ 2

การประมาณค่าพารามิเตอร์ p แบบช่วงจากข้อมูลตัวอย่างแบบผกผัน และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 ความนำ

การประมาณค่าพารามิเตอร์ p แบบช่วงจากข้อมูลตัวอย่างแบบผกผันนั้น ด้วยคุณสมบัติของข้อมูลตัวอย่างแล้วย่อมทำให้ตัวประมาณแบบช่วงต่างไปจากข้อมูลที่ได้จากการสุ่มตัวอย่างโดยตรงที่อิงฟังก์ชันความน่าจะเป็นแบบทวินาม อันเนื่องด้วยคุณสมบัติของความเป็นอิสระต่อกันและภายใต้การแจกแจงแบบแบร์นูลลีเดียวกัน หรืออิงฟังก์ชันความน่าจะเป็นแบบปกติมาตรฐานเมื่อตัวอย่างมีขนาดที่มากพอด้วยคุณสมบัติของการลู่เข้าในเชิงการแจกแจงหรือทฤษฎีแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลาง

สำหรับการสุ่มตัวอย่างแบบผกผันนั้น ถึงแม้ว่าข้อมูลตัวอย่างแต่ละหน่วยเกิดขึ้นด้วยฟังก์ชันความน่าจะเป็นแบบแบร์นูลลีเดียวกัน และเป็นอิสระต่อกันก็ตาม หากแต่ด้วยเงื่อนไขที่กำกับกระบวนการเก็บรวบรวมข้อมูลที่จะต้องทำการสุ่มตัวอย่างไปจนกระทั่งได้รับหน่วยตัวอย่างที่มีคุณสมบัติที่ระบุจนครบตามจำนวนที่ต้องการ ดังนั้นฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมของชุดตัวอย่างจึงแตกต่างไปจากกรณีของการสุ่มตัวอย่างโดยตรง

รูปแบบฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมของข้อมูลตัวอย่างนำมาซึ่งตัวประมาณแบบจุดที่มีคุณสมบัติอิงฟังก์ชันความน่าจะเป็นแบบทวินามลบ ซึ่งการสร้างตัวประมาณแบบช่วงก็ต้องอิงฟังก์ชันความน่าจะเป็นดังกล่าวนี้เช่นกัน หากแต่ด้วยคุณสมบัติของฟังก์ชันความน่าจะเป็นสำหรับตัวแปรสุ่มที่ไม่ต่อเนื่องจึงส่งผลให้เกิดปัญหาในส่วนของความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ที่แท้จริงเช่นเดียวกันกับกรณีการสุ่มตัวอย่างโดยตรงที่การสร้างตัวประมาณแบบช่วงดำเนินการโดยอิงฟังก์ชันความน่าจะเป็นแบบทวินาม

2.2 การแจกแจงแบบทวินามลบ (Negative Binomial Distribution) และการประมาณค่าพารามิเตอร์ p จากข้อมูลตัวอย่างแบบผกผัน

2.2.1 การแจกแจงแบบทวินามลบ

การแจกแจงทวินามลบ เป็นการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่อง (Discrete Probability Distribution) ที่พัฒนามาจากการแจกแบบแบร์นูลลี (Bernoulli Distribution) ซึ่งการ-

แจกแจงแบบแบร์นูลลีนั้นเกิดจากการทำการทดลองสุ่ม ซึ่งมีผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ 2 ผลลัพธ์ คือ เกิดผลสำเร็จ หรือเกิดคุณลักษณะที่สนใจ (Success) และไม่เกิดผลสำเร็จ หรือเกิดคุณลักษณะที่ไม่สนใจ (Failure) โดยมีความน่าจะเป็นในการเกิดคุณลักษณะที่สนใจเท่ากับ p และความน่าจะเป็นในการเกิดคุณลักษณะที่ไม่สนใจเท่ากับ $(1-p)$

เมื่อทำการทดลองสุ่มแบบแบร์นูลลี (Bernoulli Trial) ซ้ำๆ กัน n ครั้ง อย่างเป็นอิสระต่อกัน แล้วหากประเด็นความสนใจมุ่งไปที่จำนวนครั้งที่เกิดผลสำเร็จก็จะทำให้เกิดตัวแปรสุ่มภายใต้การแจกแจงทวินาม ในทางตรงกันข้ามเมื่อทำการทดลองสุ่มแบบแบร์นูลลีอย่างเป็นอิสระต่อกัน ต่อเนื่องไปจนกว่าจะเกิดคุณลักษณะที่สนใจหรือผลสำเร็จครบตามจำนวนที่กำหนด แล้วจึงหยุดการทดลองสุ่ม จะทำให้เกิดตัวแปรสุ่มภายใต้การแจกแจงทวินามลบ

นั่นคือเมื่อกำหนดจำนวนครั้งของการเกิดคุณลักษณะที่สนใจไว้เท่ากับ r ซึ่งเป็นค่าคงที่ และให้ Y แทนจำนวนครั้งของการเกิดคุณลักษณะที่ไม่สนใจก่อนที่จะเกิดคุณลักษณะที่สนใจครั้งที่ r ดังนั้น Y เป็นตัวแปรสุ่มภายใต้การแจกแจงทวินามลบ Y ดังนี้

$$f(y;p) = \binom{r+y-1}{y} p^r (1-p)^y \qquad ; \quad y = 0,1,2,\ldots$$

มีพารามิเตอร์ที่กำกับการแจกแจงนี้ คือ r และ p

โดยมีค่าคาดหวัง และความแปรปรวน [Casella and Berger, 2002] เป็นดังนี้

ค่าคาดหวัง $$E(Y) = \frac{r(1-p)}{p}$$

ความแปรปรวน $$Var(Y) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

2.2.2 การประมาณค่าพารามิเตอร์ p จากข้อมูลตัวอย่างแบบผกผัน

เนื่องจากวิธีการเก็บข้อมูลแบบโดยตรงนั้นมีปัญหา ไม่สามารถประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ต้องการได้ อันเนื่องมาจากประชากรที่สนใจมีคุณสมบัติ เป็นประชากรที่พบได้ยาก จึงได้มีการพัฒนาวิธีการเก็บรวบรวมข้อมูลแบบผกผันขึ้นมา ข้อมูลตัวอย่างแต่ละหน่วย มีคุณสมบัติเป็นตัวแปรสุ่มแบบแบร์นูลลีทุกประการ หากแต่มีฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมของชุดตัวอย่างทั้ง n หน่วยที่แตกต่างกัน จึงมีผลให้ตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดสำหรับทำการประมาณค่าพารามิเตอร์ p ต่างกันไปด้วย

สำหรับการประมาณค่าพารามิเตอร์ p ภายใต้การสุ่มตัวอย่างโดยตรงนั้น มีข้อมูลตัวอย่างเกิดขึ้นทีละหน่วย ซึ่งมีการกำหนดขนาดตัวอย่างที่ต้องการคือ n หน่วย โดยมีคุณสมบัติเป็นค่าคงที่

เมื่อทำการสุ่มตัวอย่างแล้วจะได้ข้อมูลตัวอย่าง $X_1, X_2, ..., X_n$ ซึ่งมีคุณสมบัติเป็นตัวอย่างสุ่ม คือ แต่ละหน่วยตัวอย่างเป็นอิสระต่อกัน และอยู่ภายใต้การแจกแจงแบบแบร์นูลลีเดียวกัน (Independent and Identically Distributed) จึงทำให้ฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมของตัวอย่างสุ่ม เป็นดังนี้

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

เมื่อสมมติว่าได้ทำการเก็บข้อมูลตัวอย่างเสร็จสิ้นแล้ว ทำให้ทราบค่าข้อมูลตัวอย่าง $X_1, X_2, ..., X_n$ ทั้งหมดแล้วนั้น หากต้องการทราบค่าพารามิเตอร์ p ภายใต้หลักการแนวคิดแบบคลาสสิกจึงได้นำฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมดังกล่าวนี้มาใช้เป็นฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นซึ่งมีพารามิเตอร์ p เป็นตัวแปรที่ต้องการทราบค่า ภายใต้เงื่อนไขที่ทราบค่า $X_1, X_2, ..., X_n$ ทั้งหมด จึงได้ทำการสร้างตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Estimator) จนได้ตัวประมาณ $\hat{p} = \sum_{i=1}^{n} X_i / n$

การสร้างตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุด อาจทำได้โดยใช้ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของผลบวกของตัวอย่างสุ่มมาใช้เป็นฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น เนื่องจากฟังก์ชันความน่าจะเป็นของผลบวก $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ นั้นโดยพื้นฐานแล้วก็ถูกสร้างขึ้นมาจากฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมดังนี้

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

ทั้งนี้ภายใต้ทฤษฎีความน่าจะเป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นของผลบวก $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ ถ้ากำหนดให้ W เป็นตัวแปรสุ่ม แทนจำนวนครั้งที่เกิดผลสำเร็จในการทดลองสุ่มย่อยแบบแบร์นูลลี n ครั้ง นั่นคือ $W = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ หรือ $W = \sum_{i=1}^{n} X_i$ จะได้ว่า W เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบทวินาม ก็คือฟังก์ชันความน่าจะเป็นแบบทวินาม $f(w) = \binom{n}{w} p^{w}(1-p)^{n-w}$ โดยที่พจน์แรกไม่มีส่วนเกี่ยวข้องกับพารามิเตอร์ p แต่พจน์ที่สองและพจน์ที่สามมีพารามิเตอร์ p และ W ซึ่งเป็นผลรวมของข้อมูลตัวอย่าง เมื่อใช้วิธีการทางคณิตศาสตร์ในที่สุดก็จะได้ตัวประมาณ $\hat{p} = \frac{W}{n}$ ซึ่ง $W = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ นั่นก็คือตัวประมาณเดียวกัน

สำหรับในกรณีการสุ่มตัวอย่างแบบผกผัน ข้อมูลตัวอย่างยังเป็น $X_1, X_2, ..., X_n$ เช่นเดิม หากแต่มีการกำหนดเงื่อนไขว่าจะต้องสุ่มตัวอย่างจนกว่าจะได้ลักษณะที่สนใจจนครบ r หน่วย ดังนั้นขนาดตัวอย่าง n จึงไม่ได้เป็นค่าคงที่ ดังในกรณีของการสุ่มตัวอย่างโดยตรงหากแต่ n

มีคุณสมบัติเป็นตัวแปรสุ่ม ข้อมูลตัวอย่างสุ่ม $X_1, X_2, ..., X_n$ ถึงแม้ว่าจะเกิดขึ้นภายใต้การแจกแจงแบบแบร์นูลลีเดียวกัน แต่ขาดคุณสมบัติของความเป็นอิสระต่อกัน ดังนั้นการสร้างฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นของข้อมูลตัวอย่างโดยตรงจากฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมของ $X_1, X_2, ..., X_n$ เพื่อนำมาใช้ในการหาตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดจึงต้องอิงฟังก์ชันความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข ซึ่งมีความซับซ้อน แต่ในมุมมองของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบจีออเมตริก ซึ่งเป็นการทดลองสุ่มที่อิสระต่อกันจำนวน r ครั้ง ด้วยพารามิเตอร์ p ที่เท่ากัน ซึ่งถ้ามองในมุมมองนี้ตัวอย่างสุ่มจะเป็นอิสระต่อกัน และมีรูปแบบการแจกแจงที่เหมือนกัน

อีกแนวทางหนึ่งจึงได้นำฟังก์ชันความน่าจะเป็นของจำนวนครั้งที่เกิดลักษณะที่ไม่สนใจของตัวอย่างทั้งหมด (n) ลบด้วยผลบวก $W = X_1 + X_2 + ... + X_n$ คือ $n - W$ หรือ $n - \sum_{i=1}^{n} X_i$ ซึ่งถือว่าเป็นตัวแปรสุ่มที่เกิดขึ้นภายใต้ฟังก์ชันความน่าจะเป็นแบบทวินามลบ มาใช้เป็นฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นแทนในทำนองเดียวกับการใช้ฟังก์ชันความน่าจะเป็นแบบทวินามในกรณีของการสุ่มตัวอย่างโดยตรง จากนั้นจึงนำมาทำการสร้างตัวประมาณแบบจุดสำหรับการประมาณค่าพารามิเตอร์ p ภายใต้การสุ่มตัวอย่างแบบผกผัน

เมื่อพิจารณาตัวแปรสุ่ม $n - W$ หรือ $n - \sum_{i=1}^{n} X_i$ แทนจำนวนการเกิดลักษณะที่ไม่สนใจเทียบกับตัวแปรสุ่ม Y ซึ่งอยู่ภายใต้การแจกแจงแบบทวินามลบได้ดังนี้

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นแบบทวินามลบของตัวแปรสุ่ม $n - W$ คือ

$$f(n-w;p) = \binom{(n-w)+r\text{-}1}{n-w} p^r (1-p)^{n-w}.$$

$$= \frac{[(n-w)+r-1]!}{[(n-w)+r-1-(n-w)]!(n-w)!} p^r (1-p)^{n-w}.$$

จากฟังก์ชันความน่าจะเป็นแบบทวินามลบมาใช้เป็นฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นสำหรับการสุ่มตัวอย่างแบบผกผัน คือ

$$L(r;p \mid n-w) = \frac{[(n-w)+r-1]!}{(n-w)!(r-1)!} p^r (1-p)^{n-w}$$

$$\ln L(r;p \mid n-w) = \ln([(n-w)+r-1]!) - \ln((r-1)!) - \ln((n-w)!) + r\ln p + (n-w)\ln(1-p)$$

$$\frac{\partial}{\partial p} \ln L(r;p \mid n-w) = \frac{r}{p} - \frac{(n-w)}{1-p}$$

พิจารณา ณ จุดที่ทำให้ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นมีค่าสูงสุด คือ

$$\frac{r}{p} - \frac{(n-w)}{1-p} = 0$$

$$r(1-p) - p(n-w) = 0$$

$$r - rp - np + wp = 0$$
$$p(r + n - w) = r$$
$$p = \frac{r}{r + (n - w)}$$

เมื่อพิจารณาตัวแปรสุ่ม $n - W$ แทนจำนวนการเกิดลักษณะที่ไม่สนใจเทียบกับตัวแปรสุ่ม Y ซึ่งอยู่ภายใต้การแจกแจงแบบทวินามลบจะได้

$$p = \frac{r}{r + y}$$

ดังนั้นตัวประมาณค่าภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของพารามิเตอร์ p คือ $\hat{p} = \dfrac{r}{r + y}$

2.3 การประมาณค่าแบบช่วง (Interval Estimation) และวิธีการสร้างตัวประมาณแบบช่วง

2.3.1 การประมาณค่าแบบช่วง

การประมาณค่าแบบช่วงเป็นการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยค่าประมาณสองค่า โดยใช้ตัวประมาณแบบช่วงที่สร้างขึ้นด้วยความเชื่อมั่นที่ว่าค่าพารามิเตอร์ที่แท้จริงจะตกอยู่ระหว่างค่าประมาณทั้งสองด้วยความน่าจะเป็นตามที่กำหนด

โดยพื้นฐานการประมาณค่าแบบช่วงเป็นไปในลักษณะของการนำตัวอย่างสุ่ม $X_1, X_2,...X_n$ ขนาด n หน่วยที่เก็บรวบรวมมาจากประชากรที่มีรูปแบบการแจกแจงแบบเดียวกันและเป็นอิสระต่อกัน (Independent and Identically Distributed Random Sample) โดยมี θ เป็นพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า มาสร้างเป็นฟังก์ชันของตัวอย่างสุ่ม คือ $L(X_1, X_2,...X_n)$ และ $U(X_1, X_2,...X_n)$ สามารถทำการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับพารามิเตอร์ θ ได้จากคู่ฟังก์ชันของตัวอย่างสุ่ม นั่นคือขีดจำกัดล่าง $L(X_1, X_2,...X_n)$ และขีดจำกัดบน $U(X_1, X_2,...X_n)$ โดยที่ $L(X) \le U(X)$ ภายใต้ความเชื่อที่ว่าค่าพารามิเตอร์ที่แท้จริงจะต้องตกอยู่ระหว่างค่าประมาณทั้งสอง ดังนั้นจะได้ว่า $L(X) \le \theta \le U(X)$ และฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มอันมาจากชุดของตัวอย่างสุ่มทั้งสองคือ $[L(X), U(X)]$ ซึ่งเรียกว่า ตัวประมาณแบบช่วง (Interval Estimator) [Casella and Berger, 2002]

เนื่องจาก $[L(X), U(X)]$ เป็นช่วงสุ่มซึ่งหมายความว่า เมื่อทำการสุ่มตัวอย่างมาหนึ่งชุดจะสามารถสร้างช่วงความเชื่อมั่นได้หนึ่งช่วง ถ้าสุ่มตัวอย่างมาหลายๆ ชุดจากประชากรเดียวกันก็จะสามารถสร้างช่วงความเชื่อมั่นได้หลายช่วง ซึ่งช่วงที่ได้อาจแตกต่างกันไปตามชุดตัวอย่างที่สุ่มมา โดยบางช่วงความเชื่อมั่นอาจจะครอบคลุมค่าพารามิเตอร์จริง และบางช่วงความเชื่อมั่นอาจจะไม่ครอบคลุมค่าพารามิเตอร์จริง จึงต้องมีการกำหนดความน่าจะเป็นว่าช่วงความเชื่อมั่นที่สร้างขึ้นมี

ความน่าจะเป็นในการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์จริงเท่าไร โดยเรียกความน่าจะเป็นที่กำหนดขึ้นนั้นว่าระดับความเชื่อมั่น (Confidence Level) ซึ่งเขียนแทนด้วย $100(1-\alpha)\%$ ในทางปฏิบัติเรามักจะกำหนดระดับความเชื่อมั่นเท่ากับ 90%, 95% หรือ 99% โดย $0<\alpha<1$ และค่า 1-α เรียกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (Confidence Coefficient)

2.3.2 วิธีการสร้างตัวประมาณแบบช่วง

ในการอนุมานทางสถิติสำหรับประชากรอนันต์ การสร้างช่วงความเชื่อมั่นสำหรับพารามิเตอร์ที่สนใจสามารถดำเนินการได้ใน 2 แนวทาง นั่นคือแนวทางเชิงวิเคราะห์ที่ใช้กันอย่างแพร่หลาย และแนวทางที่อิงการคำนวณด้วยคอมพิวเตอร์

2.3.2.1 การสร้างตัวประมาณแบบช่วงภายใต้แนวทางเชิงวิเคราะห์

การสร้างตัวประมาณแบบช่วงเพื่อประมาณค่าพารามิเตอร์เป็นระเบียบวิธีทางสถิติภายใต้ทฤษฎีการอนุมานทางสถิติสำหรับประชากรอนันต์ โดยใช้ตัวอย่างสุ่ม $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ที่เกิดขึ้นภายใต้ฟังก์ชันความน่าจะเป็นเดียวกัน อย่างเป็นอิสระต่อกัน โดยพื้นฐานแล้วการสร้างตัวประมาณแบบช่วงภายใต้แนวทางเชิงวิเคราะห์ที่อิงทฤษฎีความน่าจะเป็นนั้น จำแนกออกได้เป็น 5 วิธี อันเป็นที่รู้จักกันโดยทั่วไป ได้แก่ วิธีการส่วนกลับของสถิติทดสอบ (Inverse of Test Statistics) วิธีการที่ใช้ปริมาณหมุน (Pivotal Quantity) วิธีการหาค่าประมาณที่รับรองช่วงความเชื่อมั่น (Guaranteeing an Interval) วิธีการแบบเบย์เซียน (Bayesian Interval) และวิธีการหาตัวประมาณแบบช่วงที่ไม่ผันแปร (Invariant Intervals) โดยวิธีที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลายคือ วิธีการส่วนกลับของสถิติทดสอบ และวิธีการที่ใช้ปริมาณหมุน

วิธีการส่วนกลับของสถิติทดสอบ(Inverse of Test Statistic)

วิธีการส่วนกลับของสถิติทดสอบเกิดขึ้นภายใต้แนวคิดของการอาศัยความสัมพันธ์ระหว่างการประมาณค่าแบบช่วง และการทดสอบสมมติฐาน เมื่อต้องการสร้างช่วงความเชื่อมั่นสำหรับพารามิเตอร์ใด ๆที่สนใจ จะเริ่มจากการทดสอบสมมติฐาน และสร้างสถิติทดสอบแล้วนำตัวสถิติทดสอบซึ่งเป็นฟังก์ชันของตัวอย่างสุ่ม $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ที่เกี่ยวข้องกับพารามิเตอร์ที่สนใจนั้นมาทำการหาส่วนกลับของสถิติทดสอบ ซึ่งวิธีการนี้จำเป็นที่จะต้องมีสถิติทดสอบที่อยู่ในรูปแบบที่ชัดแจ้งและทราบรูปแบบความน่าจะเป็นที่แท้จริงหรือรูปแบบความน่าจะเป็นโดยประมาณของสถิติทดสอบดังกล่าว

วิธีการที่ใช้ปริมาณหมุน (Pivotal Quantity)

วิธีการที่ใช้ปริมาณหมุนนั้น จะเริ่มจากการหาปริมาณหมุนซึ่งแทนด้วย $Q(X;\theta)=Q(X_1, X_2, \ldots, X_n, \theta)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตัวอย่างสุ่ม $X_1, X_2, \ldots, X_n$ จากประชากรที่มีรูปแบบความน่าเป็น $f(X;\theta)$ และมีพารามิเตอร์ θ ซึ่งไม่ทราบค่า ถ้า $Q(X;\theta)$ มีรูปแบบความ-

น่าจะเป็นที่ไม่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ θ เมื่อสร้างปริมาณหมุนแล้ว จากนั้นประมาณช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ภายใต้ $\Pr\left(Q_1 \le Q(X;\theta) \le Q_2\right) = 1-\alpha$ แล้วแปลงรูปเพื่อให้ได้ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ที่สนใจ โดยช่วงความเชื่อมั่นที่ได้จะสามารถครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ θ ด้วยความน่าจะเป็นที่กำหนด คือ $1-\alpha$ [Casella and Berger, 2002]

ในการการสร้างช่วงความเชื่อมั่นภายใต้วิธีการส่วนกลับของสถิติทดสอบหรือวิธีการที่ใช้ปริมาณหมุน นั้นสามารถนำทฤษฎีบทแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลาง(Central Limit Theorem) มาประยุกต์ใช้ทำให้ได้สถิติทดสอบหรือปริมาณหมุน ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 1 ทฤษฎีบทแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลาง สำหรับ $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Xi$ ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยตัวอย่างของตัวอย่างสุ่ม $X_1, X_2, ..., X_n$ ขนาด n ที่มีรูปแบบการแจกแจงเดียวกันด้วยค่าคาดหวัง $E(X) = \mu$ และค่าความแปรปรวน $Var(X) = \sigma^2$ แล้วนั้น ตัวแปรสุ่ม $W = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ มีรูปแบบการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน $N(0,1)$ เมื่อขนาดตัวอย่าง $n \to \infty$ [Hogg and Tanis, 1997]

การนำทฤษฎีบทแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลางมาใช้ ย่อมต้องคำนึงถึงคุณสมบัติของตัวอย่างสุ่ม นั่นคือตัวอย่างสุ่มจะต้องเป็นอิสระต่อกัน และมีรูปแบบการแจกแจงที่เหมือนกัน หากข้อมูลขาดคุณสมบัติดังกล่าว ย่อมทำให้มีข้อผิดพลาดเกิดขึ้น เช่นในกรณีที่ตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงแบบทวินามลบ ข้อมูลตัวอย่างขาดความเป็นอิสระต่อกัน เพราะจากการที่ทำการทดลองสุ่มซ้ำเป็นกระทำต่อเนื่องไปจนกว่าจะได้จำนวนของผลสำเร็จครบตามจำนวน r ครั้งที่ต้องการ นั่นหมายความว่า n มีคุณสมบัติของการเป็นตัวแปรสุ่ม แต่ในมุมมองของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบจีออเมตริก ซึ่งเป็นการทดลองสุ่มที่อิสระต่อกันจำนวน r ครั้ง ด้วยพารามิเตอร์ p ที่เท่ากัน ซึ่งถ้ามองในมุมมองนี้ตัวอย่างสุ่มจะเป็นอิสระต่อกัน และมีรูปแบบการแจกแจงที่เหมือนกัน

2.3.2.2 การสร้างตัวประมาณแบบช่วงภายใต้แนวทางที่อิงการคำนวณด้วยคอมพิวเตอร์

สำหรับการสร้างตัวประมาณแบบช่วงภายใต้แนวทางที่อิงการคำนวณด้วยคอมพิวเตอร์นั้น โดยพื้นฐานแล้วจะดำเนินการโดยการจำลองข้อมูลด้วยเทคนิคการสุ่มซ้ำด้วยคอมพิวเตอร์แล้วจึงทำการจัดทำข้อสรุปจากการใช้ข้อมูล เทคนิคการสุ่มซ้ำสามารถจำแนกออกเป็น 4 วิธี [Yu, Chong Ho, 2003] ได้แก่ วิธี Randomization Exact Test หรือ วิธี Permutation Test วิธี Cross Validation วิธี Jackknife และวิธีบูทแสตรป โดยวิธีที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลายสำหรับการสร้างช่วงความเชื่อมั่นคือ วิธีบูทแสตรป (Bootstrap)

วิธีบูทแสตรป(Bootstrap)

วิธีบูทแสตรปเป็นวิธีที่ถูกนำเสนอขึ้นโดย แบรดเลย์ เอฟรอน (Bradley Efron)นักสถิติ-ศาสตร์ชาวอเมริกัน ในช่วงปลายปี 1970 ซึ่งเป็นวิธีที่อาศัยการคำนวณจากคอมพิวเตอร์ เพื่อใช้ตรวจสอบ

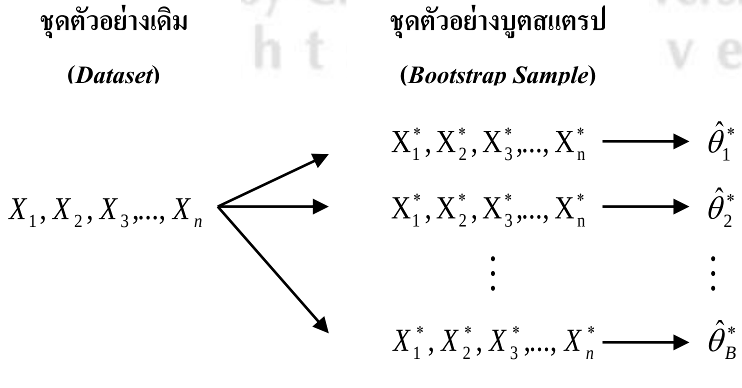
ความแม่นยำของตัวประมาณสำหรับพารามิเตอร์ θ ใด ๆ ดังนั้นจึงทำให้ทราบค่าประมาณพารามิเตอร์ได้จากการใช้ข้อมูลตัวอย่าง [Efron and Tibshirani, 1993] และเป็นวิธีการหาค่าประมาณแบบช่วงของพารามิเตอร์อีกวิธีหนึ่ง

การหาค่าประมาณแบบช่วงเป็นไปโดยอาศัยหลักการสุ่มซ้ำแบบใส่คืนจากตัวอย่างสุ่มเพียงชุดเดียว โดยมีแนวคิดพื้นฐาน คือ ใช้วิธีการสุ่มตัวอย่างแบบใส่คืนขนาด n หน่วย จากตัวอย่างชุดเดิมที่มีอยู่ เพื่อสร้างชุดตัวอย่างขนาด n ที่เป็นไปได้ คือแทนที่จะสุ่มตัวอย่างซ้ำ ๆ จากประชากรที่มีฟังก์ชันการแจกแจง F โดยตรง แล้วจึงใช้การสุ่มตัวอย่างจาก Empirical Distribution Function (F_n) ของข้อมูลตัวอย่าง โดยพื้นฐานมีขั้นตอนการดำเนินการดังต่อไปนี้

ทำการสุ่มตัวอย่างขนาด n หน่วย คือ $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$ จากประชากรที่มีการแจกแจงตามที่กำหนดซึ่งมี θ เป็นพารามิเตอร์ที่ต้องการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับประชากรดังกล่าว และให้ $\hat{\theta}_B$ เป็นตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ θ สำหรับนำมาทำการคำนวณค่าประมาณแบบจุดจากข้อมูลตัวอย่างขนาด n

จากนั้นจึงทำการสุ่มซ้ำจากชุดตัวอย่างเดิม $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$ แล้วนำข้อมูลตัวอย่างที่ได้จากการสุ่มซ้ำในรอบที่ 2 ไปทำการคำนวณค่าประมาณสำหรับพารามิเตอร์ θ โดยใช้ตัวประมาณ $\hat{\theta}$ เช่นเดิม ก็จะได้ค่าประมาณแบบจุดจากข้อมูลตัวอย่างที่ทำการสุ่มซ้ำในรอบที่ 2 ทำการสุ่มซ้ำแล้วทำการคำนวณค่าประมาณแบบจุดไปจนครบ B รอบตามที่กำหนด ก็จะได้ค่าประมาณแบบจุดสำหรับพารามิเตอร์ θ โดยใช้ตัวประมาณ $\hat{\theta}$ ไปเป็นจำนวนทั้งสิ้น B ค่า ซึ่งเมื่อ B มีค่าที่มากพอก็สามารถนำค่าประมาณ B เหล่านั้นไปทำการคำนวณค่าความแปรปรวนของตัวประมาณ $\hat{\theta}$ และฟังก์ชันการแจกแจงของตัวประมาณ $\hat{\theta}$ ที่สร้างขึ้นนี้ยังสามารถนำไปทำการหาค่าประมาณแบบช่วงสำหรับพารามิเตอร์ θ จากส่วนกลับของค่าเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่สอดคล้องกับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด

จากขั้นตอนการดำเนินการข้างต้น สามารถเขียนแผนภาพแสดงได้ดังนี้



รูป 2.1 แสดงขั้นตอนการสุ่มตัวอย่างด้วยวิธีบูทแสตรปโดยพื้นฐาน

2.3.3 การประมาณค่าแบบช่วงสำหรับพารามิเตอร์ p จากข้อมูลตัวอย่างแบบผกผัน

2.3.3.1 วิธีแบบวาล์วโดยอาศัยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Wald-Type Confidence Interval Based on MLE: WM)

จากรูปแบบการแจกแจงทวินามลบ

$$f(y;p)=\binom{r+y-1}{y}p^{r}(1-p)^{y} \qquad ; \quad y=0,1,2,\ldots$$

มีตัวประมาณค่าภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของพารามิเตอร์ p คือ $\hat{p}=\dfrac{r}{r+y}$

และมีค่าความแปรปรวนเป็นดังนี้ $Var(\hat{p})=\dfrac{p^{2}(1-p)}{r}$

ดังนั้น ช่วงความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ สำหรับพารามิเตอร์ p โดยวิธีแบบวาล์วโดยอาศัยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด คือ [Lui K.J, 2004]

$$\left[\max\left\{\hat{p}-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}^{2}(1-\hat{p})}{r}},0\right\},\min\left\{\hat{p}+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}^{2}(1-\hat{p})}{r}},1\right\}\right]$$

2.3.3.2 วิธีแบบวาล์วโดยอาศัยตัวประมาณที่มีคุณสมบัติไม่เอนเอียง และมีความแปรปรวนต่ำสุดอย่างเอกรูป (Wald-Type Confidence Interval Based on UMVUE: WU)

จากรูปแบบการแจกแจงทวินามลบ

$$f(y;p)=\binom{r+y-1}{y}p^{r}(1-p)^{y} \qquad ; \quad y=0,1,2,\ldots$$

เนื่องจาก $\hat{p}$ เป็นตัวประมาณที่เอนเอียงของ p พิจารณาตัวประมาณที่มีคุณสมบัติที่ไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนต่ำที่สุดของ p คือ $\tilde{p}=\dfrac{r-1}{r+y-1}=\dfrac{r-1}{N-1}$

มีค่าความแปรปรวนเป็นดังนี้

$$Var(\tilde{p})=(r-1)(1-p)\left\{\sum_{k=1}^{r-1}\frac{(-p)^{k}}{(1-p)^{k}(r-k)}-\left(\frac{-p}{1-p}\right)^{r}\log(p)\right\}-p$$

และจาก Finney (1949) ให้ตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของ $Var(\tilde{p})$ สำหรับ $r>2$ ดังนี้

$$\hat{Var}(\tilde{p})=\frac{\tilde{p}(1-\tilde{p})}{N-2}$$

ดังนั้น ช่วงความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ สำหรับพารามิเตอร์ p โดยวิธีแบบวาล์วโดยอาศัยตัวประมาณที่มีคุณสมบัติที่ไม่เอนเอียง และมีความแปรปรวนต่ำสุดอย่างเอกรูป คือ [Lui K.J, 2004]

$$\left[\max\left\{\tilde{p}-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\tilde{p}(1-\tilde{p})}{N-2}},0\right\},\min\left\{\tilde{p}+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\tilde{p}(1-\tilde{p})}{N-2}},1\right\}\right]$$

โดยเมื่อ $N = r + Y \leq 2$ (เช่น $r = 1, Y = 0$ หรือ 1 และ $r = 2, Y = 0$ จะไม่สามารถสร้างช่วงความเชื่อมั่นได้

2.3.3.3 วิธีอาศัยการแจกแจงแบบไคสแควร์ (Confidence Interval Based on Chi-square Distribution: CS)

จากรูปแบบการแจกแจงทวินามลบ

$$f(y;p) = \binom{r+y-1}{y} p^r (1-p)^y \qquad ; \quad y = 0,1,2,\ldots$$

เมื่อค่าความน่าจะเป็นในการเกิดคุณลักษณะที่สนใจ(ค่าพารามิเตอร์ p) มีค่าต่ำ คือ $2(r+Y)p$ จากการแจกแจงแบบไคสแควร์ มีองศาความเป็นอิสระเท่ากับ $2r$ ดังนั้นสามารถประมาณช่วงความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ ของพารามิเตอร์ p โดยวิธีอาศัยการแจกแจงแบบไคสแควร์ได้ดังนี้ [Tian, Tang, Ng and Chan, 2009]

$$\left[\frac{\chi^2_{2r,\alpha/2}}{2(r+y)}, \frac{\chi^2_{2r,1-\alpha/2}}{2(r+y)} \right]$$

2.3.3.4 วิธีสกอร์ (Score Confidence Interval: SC)

จากรูปแบบการแจกแจงทวินามลบ

$$f(y;p) = \binom{r+y-1}{y} p^r (1-p)^y \qquad ; \quad y = 0,1,2,\ldots$$

สามารถแสดง Score Function: $S(p)$ ได้ดังนี้ $S(p) = \dfrac{r}{p} - \dfrac{Y}{1-p}$

และ Fisher Information: $I(p)$ คือ $I(p) = \dfrac{r}{p^2} - \dfrac{Y}{(1-p)^2}$

ดังนั้นสามารถประมาณช่วงความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ ของพารามิเตอร์ p โดยวิธีสกอร์ได้ดังนี้ [Tian, Tang, Ng and Chan, 2009]

$$\left[\begin{array}{l} \max\left\{ \dfrac{(2Nr - rz^2_{\alpha/2}) - \sqrt{r^2 z^4_{\alpha/2} - 4Nr^2 z^2_{\alpha/2} + 4N^2 r z^2_{\alpha/2}}}{2N^2}, 0 \right\}, \\ \min\left\{ \dfrac{(2Nr - rz^2_{\alpha/2}) + \sqrt{r^2 z^4_{\alpha/2} - 4Nr^2 z^2_{\alpha/2} + 4N^2 r z^2_{\alpha/2}}}{2N^2}, 1 \right\} \end{array} \right]$$

โดยเมื่อ $N = r + Y$

2.4 การวัดความผิดพลาดและความเชื่อถือได้ของตัวประมาณแบบช่วง

การวัดความผิดพลาดของตัวประมาณค่าแบบช่วงโดยทั่วไปนิยมวัดจากค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ และความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นโดยการประมาณค่าแบบช่วงจะมีความน่าเชื่อถือได้มากน้อยเพียงใดนั้นจะขึ้นอยู่กับค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์นั้น ว่ามีค่าเท่ากับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดไว้หรือไม่ ซึ่งค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์สามารถคำนวณได้โดยอาศัยแนวคิดแบบความถี่สะสม (Relative Frequency Approach) คือการนับจำนวนครั้งที่ช่วงความเชื่อมั่นนั้นคลุมค่าพารามิเตอร์แล้วนำมาหารด้วยจำนวนครั้งของการทดลองซ้ำ และการคำนวณหาค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น ทำได้โดยการนำผลบวกของผลต่างระหว่างขีดจำกัดบน และขีดจำกัดล่างมาหารด้วยจำนวนรอบของการทดลองซ้ำ

หากพบว่าค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์มีค่าไม่น้อยกว่าระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดแสดงว่าช่วงความเชื่อมั่นที่สร้างขึ้นมีความน่าเชื่อถือ แต่ถ้าค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์นั้น มีค่าน้อยกว่าระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดแสดงว่าช่วงความเชื่อมั่นนั้นแคบเกินไป หรือถ้าค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์มีค่ามากกว่าระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดแสดงว่าช่วงความเชื่อมั่นที่สร้างขึ้นกว้างเกินไป ส่งผลให้การครอบคลุมค่าพารามิเตอร์จริงเกิดความผิดพลาดขึ้น ซึ่งสาเหตุอาจเนื่องมาจากจำนวนตัวอย่างมีขนาดเล็กทำให้รูปแบบการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวประมาณไม่ลู่เข้าสู่การแจกแจงปกติ

การวิเคราะห์เชิงเปรียบเทียบสำหรับการประมาณค่าแบบช่วง ในกรณีที่มีวิธีการประมาณค่าแบบช่วงหลายวิธี จะพิจารณาจากค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์เป็นหลัก โดยวิธีการประมาณค่าแบบช่วงวิธีใดที่ให้ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ไม่น้อยกว่าระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด จะถือว่าวิธีการประมาณค่าแบบช่วงนั้นมีความเหมาะสมหรือมีประสิทธิภาพดีที่สุด

หากในแต่ละสถานการณ์มีวิธีการประมาณค่าแบบช่วงที่ให้ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ไม่น้อยกว่าระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดหลายวิธี จะนำความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นมาร่วมในการพิจารณาด้วย โดยวิธีการประมาณค่าแบบช่วงวิธีใดที่ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นน้อยที่สุด จะถือว่าวิธีการประมาณค่าแบบช่วงนั้นเป็นวิธีการประมาณค่าแบบช่วงที่เหมาะสมที่สุดสำหรับสถานการณ์นั้น ๆ

2.5 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

Tian, Tang, Ng and Chan, 2009 ได้ทำการศึกษา และเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าแบบช่วงจากข้อมูลตัวอย่างแบบผกผัน ทั้ง 7 วิธี ได้แก่ วิธีแบบวาล์วโดยอาศัยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดวิธี

แบบวาล์วโดยอาศัยวิธีความแปรปรวนต่ำสุดอย่างเอกรูป วิธีเอ็กซ์แซ็ค วิธีอาศัยการแจกแจงแบบไคสแควร์ วิธีอาศัยอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็น วิธีสกอร์ และวิธีอาศัยการประมาณแซดเดิลพอยด์ ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% และ 99% โดยกำหนดจำนวนของสิ่งที่สนใจ (r) เท่ากับ 1,3,5,7,10,20,30, และ 50 และกำหนดค่าพารามิเตอร์ p เท่ากับ 0.001, 0.01, 0.1 และ 0.5 โดยใช้การจำลองข้อมูลแบบมอนติคาร์โลเป็นการศึกษาถึงประสิทธิภาพของวิธีการประมาณค่าแบบช่วงโดยใช้เกณฑ์พิจารณาภายใต้ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ และค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น

ผลการวิจัยพบว่าการเปรียบเทียบช่วงความเชื่อมั่นทั้ง 7 วิธีพบว่าวิธีที่อาศัยการประมาณแซดเดิลพอยด์ มีประสิทธิภาพดีที่สุดในระดับความครอบคลุมที่มีขนาดใหญ่ เนื่องจากมีความสมดุลระหว่างค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ และค่าความกว้างเฉลี่ย และวิธีสกอร์ จะมีประสิทธิภาพเป็นที่น่าพอใจในระดับความครอบคลุมขนาดทั่วไป ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% และค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ ลดลงเมื่อระดับความเชื่อมั่นที่ 99% และ r มีขนาดเล็ก ($r \leq 3$)

กรณีที่ตัวอย่างมีขนาดใหญ่ ($r \geq 30$) วิธีแบบวาล์วโดยอาศัยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดจะเป็นวิธีที่เหมาะสมเนื่องจากมีการคำนวณที่ง่าย และเมื่อ ($r \geq 30$) ที่ p มีค่าเข้าใกล้ 0.5 ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นจะลดลง และค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ลดลงจะไม่พบความแตกต่างมากนักในตัวประมาณแต่ละ วิธีและกรณีที่ขนาดตัวอย่าง $r > 20$ ($r \leq 0.1$) ทั้ง 7 วิธีจะมีค่าความกว้างเฉลี่ยที่คงที่และเหมือนกัน

สิริธร น้อยเจริญ 2549 ได้ทำการศึกษาเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับค่าสัดส่วนของประชากร ที่มีการแจกแจงแบบทวินามลบ โดยทำการเปรียบเทียบวิธีวิลค์ (Wilk's Method) วิธีการทั่วไป (General Method) และวิธีเบยส์ (Bayesian Method) ที่ระดับความเชื่อมั่น 90% 95% และ 99% โดยกำหนดจำนวนของสิ่งที่สนใจ (r) เท่ากับ 1 และ 2 กำหนดขนาดตัวอย่าง (n) มีค่าเท่ากับ 5 ถึง 40 และกำหนดค่าพารามิเตอร์ p เท่ากับ 0.01 ถึง 0.9 โดยใช้การจำลองข้อมูลแบบมอนติคาร์โลเป็นการศึกษาถึงประสิทธิภาพของวิธีการประมาณค่าแบบช่วงโดยใช้เกณฑ์พิจารณาภายใต้ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ และค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วง-ความเชื่อมั่น

ผลการวิจัยพบว่าในกรณีที่ $r = 1$ สำหรับค่า p ที่มีค่าสูง(เข้าใกล้ 1) พบว่าวิธีเบยส์จะให้ค่าความน่าจะเป็นในการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ไม่ต่ำกว่าช่วงความเชื่อมั่นที่กำหนด และให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำที่สุด สำหรับค่า p ที่มีค่าปานกลาง พบว่าวิธีวิลค์จะให้ค่าความน่าจะเป็นในการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ไม่ต่ำกว่าช่วงความเชื่อมั่นที่กำหนด และให้ค่าความ

กว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำที่สุด สำหรับค่า p ที่มีค่าต่ำ (เข้าใกล้ 0) พบว่าวิธีการทั่วไปจะให้ค่าความน่าจะเป็นในการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ไม่ต่ำกว่าช่วงความเชื่อมั่นที่กำหนด และให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำที่สุด

กรณีที่ $r = 2$ สำหรับค่า p ที่มีค่าสูง (เข้าใกล้ 1) เมื่อขนาดตัวอย่าง $11 \leq n \leq 40$ พบว่าวิธีเบยส์จะให้ค่าความน่าจะเป็นในการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ไม่ต่ำกว่าช่วงความเชื่อมั่นที่กำหนด และให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำที่สุด สำหรับค่า p ที่มีค่าปานกลาง พบว่าวิธีวิลค์จะให้ค่าความน่าจะเป็นในการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ไม่ต่ำกว่าช่วงความเชื่อมั่นที่กำหนด และให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำที่สุด สำหรับค่า p ที่มีค่าต่ำ (เข้าใกล้ 0) พบว่าวิธีการทั่วไปจะให้ค่าความน่าจะเป็นในการครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ไม่ต่ำกว่าช่วงความเชื่อมั่นที่กำหนด และให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำที่สุด