บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยเรื่อง การพัฒนาการคิดทางเรขาคณิต เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยใช้แนวการสอนของแวน ฮีลี ผู้ศึกษาได้ศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้องดังนี้

1. หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ พุทธศักราช 2551
    1.1 มาตรฐานและตัวชี้วัดที่เกี่ยวกับเรขาคณิต ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2
    1.2 คุณภาพของผู้เรียนในเรื่องเกี่ยวกับเรขาคณิต เมื่อจบชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3
2. การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
    2.1 ความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
    2.2 ความสำคัญของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
    2.3 ประเภทของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
    2.4 แนวทางการพัฒนาทักษะกระบวนการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
    2.5 บทบาทของครูในการพัฒนาทักษะกระบวนการการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
3. การคิดทางเรขาคณิต
    3.1 ความหมายของการคิดทางเรขาคณิต
    3.2 การคิดทางเรขาคณิตของแวน ฮีลี
    3.3 สมบัติของระดับการคิดทางเรขาคณิตตามแบบแวน ฮีลี
    3.4 กรอบวัดระดับการคิดทางเรขาคณิตที่พัฒนาโดย กูเธอเรสและเจมี
4. กิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการสอนของแวน ฮีลี
5. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ พุทธศักราช 2551

มาตรฐานและตัวชี้วัดที่เกี่ยวข้องกับ ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

สาระที่ 3 เรขาคณิตที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีบทพีทาโกรัส ในช่วงชั้นที่ 3 ได้กำหนดมาตรฐานการเรียนรู้ไว้ดังนี้

มาตรฐาน ค 3.2 : ใช้การนึกภาพ(visualization) ใช้เหตุผลเกี่ยวกับปริภูมิ(spatial reasoning)และใช้แบบจำลองทางเรขาคณิต(geometric model)ในการแก้ปัญหา

มาตรฐาน ค 6.1: มีความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ การเชื่องโยงความรู้ต่างๆทางคณิตศาสตร์ และการเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

จากการศึกษาหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ในสาระที่ 3 ที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีบทพีทาโกรัส สรุปได้ว่า ผู้เรียนเรียนจบนักเรียนสามารถทราบสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากตามทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับ ทั้งในแง่ของความสัมพันธ์ของความยาวของด้านและพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก การพิสูจน์บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัสนักเรียนสามารถพิสูจน์อย่างไม่เป็นทางการได้อย่างคร่าวๆ การนำทฤษฎีบทพีทาโกรัสไปใช้นักเรียนสามารนำทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับกลับไปใช้ในการแก้ปัญหาได้

คุณภาพของผู้เรียนในเรื่องเกี่ยวกับเรขาคณิต เมื่อจบชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ได้กำหนดกรอบสาระและมาตรฐานการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่จำเป็นสำหรับนักเรียนทุกคน เพื่อเป็นเกณฑ์ในการกำหนดคุณภาพของนักเรียนเมื่อเรียนจบการศึกษาขั้นพื้นฐานแต่ละช่วงชั้นไว้ โดยในหลักสูตรได้มีการกำหนดคุณภาพผู้เรียนหลังจบการศึกษาขั้นพื้นฐานในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในเรื่องเรขาคณิตที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีบทพีทาโกรัส ดังนี้

1. มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับพื้นที่ผิวของปริซึม ทรงกระบอก และปริมาตรของปริซึม ทรงกระบอก พีระมิด กรวย และทรงกลม เลือกใช้หน่วยการวัดในระบบต่าง ๆ เกี่ยวกับความยาว พื้นที่ และปริมาตรได้อย่างเหมาะสม พร้อมทั้งสามารถนำความรู้เกี่ยวกับการวัดไปใช้ในชีวิตจริงได้

2. มีความเข้าใจเกี่ยวกับสมบัติของความเท่ากันทุกประการและความคล้ายของรูปสามเหลี่ยม เส้นขนาน ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับและสามารถนำสมบัติเหล่านั้นไปใช้ในการให้เหตุผลและแก้ปัญหาได้ มีความเข้าใจเกี่ยวกับการแปลงทางเรขาคณิต (geometric transformation)ในเรื่องการเลื่อนขนาน(translation) การสะท้อน (reflection) และการหมุน (rotation) และนำไปใช้ได้

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

ความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

นักการศึกษาหลายท่านได้ให้ความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

สมเดช บุญประจักษ์ (2547, หน้า 12) ได้ให้ความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ว่าเป็นการแสดงแนวคิดที่เกี่ยวกับการสร้างหลักการ หาความสัมพันธ์ของแนวคิดและการสรุปที่สมเหตุสมผลตามแนวคิดนั้นซึ่งประกอบไปด้วย

1. ความสามารถในการวิเคราะห์และระบุถึงความสัมพันธ์ของข้อมูล
2. ความสามารถในการหาข้อสรุป
3. ความสามารถในการแสดงหาข้อสรุป และข้อยืนยันสรุปอย่างสมเหตุสมผล

พนารัตน์ แช่มชื่น (2548, หน้า 7) ได้กล่าวว่าทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์หมายถึง ความสามารถในการแสดงความคิดเกี่ยวกับการสร้างหลักการ หาความสัมพันธ์ของแนวคิดนั้นๆ หรือสรุปความคิดรวบยอดแล้วขยายหลักการไปสู่สิ่งอื่น ซึ่งทักษะในการให้เหตุผลประกอบด้วย

1. ความสามารถในการวิเคราะห์และระบุถึงความสัมพันธ์ของข้อมูล
2. ความสามารถในการหาข้อสรุปหรือข้อความคาดการณ์
3. ความสามารถในการยืนยันหรือคัดค้าน ข้อสรุปหรือข้อความคาดการณ์อย่างสมเหตุสมผล

วิสุดา รักชู (2550, หน้า 12) ได้สรุปความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การแสดงแนวคิดเกี่ยวกับ การสร้างหลักการหาความสัมพันธ์แนวคิด และการสรุปที่สมเหตุสมผล

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี [สสวท.] (2546, หน้า1) กล่าวไว้ว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ หมายถึงกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ที่ต้องอาศัยการคิดวิเคราะห์หรือความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ในการรวบรวมข้อเท็จจริง ข้อความ แนวคิด สถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ต่างๆ แจกแจงความสัมพันธ์หรือเชื่อมโยง เพื่อให้เกิดข้อเท็จจริงหรือสถานการณ์ใหม่

รุ่งฟ้า จันทร์จารุภรณ์ (2551, หน้า 12) ได้กล่าวว่าการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ หมายถึง กระบวนการทางคณิตศาสตร์ ที่ต้องอาศัยกระบวนการคิดวิเคราะห์ ความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ในการเก็บรวบรวมข้อเท็จจริง ข้อความ แนวคิด สถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ต่างๆ แจกแจงความสัมพันธ์หรือเชื่อมโยงเพื่อให้เกิดข้อเท็จจริงหรือสถานการณ์ใหม่ๆ

วัชระ น้อยมี (2551, หน้า 75) ได้กล่าวว่า การให้เหตุผล หมายถึงการอ้างหลักฐานเพื่อยืนยันข้อสรุปของเราว่าเป็นจริง หรือเป็นการแสดงแนวคิดเกี่ยวกับการสร้างหลักการหา

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

ความสัมพันธ์ของแนวคิดและการสรุปที่สมเหตุสมผลตามแนวคิด กฎเกณฑ์หรือความจริงนั้นๆ พร้อมทั้งสามารถที่จะยืนยันหรือคัดค้านข้อความคาดการณ์ได้อย่างสมเหตุสมผล

สุภาพร ฟองจันทร์ตา (2552, หน้า 7) ได้กล่าวว่าการให้เหตุผลคือความสามารถในการแสดงแนวคิด โดยอ้างอิงความรู้ ข้อมูลหรือข้อเท็จจริง อย่างสมเหตุสมผล

วราคณา พรมเทพ (2552, หน้า 24) ได้กล่าวว่าการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การใช้ความรู้ ข้อมูลหรือข้อเท็จจริง ในการอ้างอิงหรือสนับสนุน เพื่อช่วยให้ได้ข้อสรุปทางคณิตศาสตร์หรือหาข้อความแสดงสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ โดยการเขียนข้อความอ้างอิงผลได้อย่างสมเหตุสมผล

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ หมายถึง กระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ที่ต้องอาศัย ข้อเท็จจริง แนวคิด กฎเกณฑ์หรือสถานการณ์จริง ในการอ้างอิงหรือสนับสนุนเพื่อให้ได้ข้อสรุปทางคณิตศาสตร์ หรือหาข้อความแสดงสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ โดยสามารถเขียนข้อความอ้างอิง พูด หรือแสดงกระบวนการอย่างใดอย่างหนึ่งเพื่อสนับสนุนสิ่งที่ต้องการอธิบายได้อย่างสมเหตุสมผล

ความสำคัญของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

มีผู้กล่าวถึงความสำคัญของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ดังนี้

สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งสหรัฐอเมริกา[NCTM], (2000) กล่าวว่า ความสามารถในการให้เหตุผลเป็นปัจจัยที่สำคัญในการทำให้เกิดความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ โดยครูสามารถส่งเสริมให้เกิดขึ้นกับนักเรียนระหว่างการเรียนการสอนได้ และเมื่อจบการศึกษาระดับมัธยมศึกษา นักเรียนควรมีความรู้ความเข้าใจและสามารถพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ได้ รวมถึงความสามารถในการอ้างเหตุผลได้ถูกต้องตามหลักตรรกศาสตร์ และเห็นคุณค่าของการให้เหตุผล มุ่งเน้นให้นักเรียนได้ฝึกให้เหตุผล จะทำให้นักเรียนได้ฝึกการคิดวิเคราะห์เพื่อแก้ปัญหาอย่างเป็นระบบและฝึกใช้การอ้างอิงจากข้อเท็จจริงที่ได้เรียนรู้มาแล้ว ทำให้นักเรียนสามารถตัดสินใจได้อย่างรอบคอบ

ประเภทของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

นักการศึกษา ได้แบ่งการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

สมัย เหล่าวานิชย์ (2525, หน้า 4) แบ่งการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ไว้ 3 ลักษณะคือ

1. การให้เหตุผลแบบอุปนัย (inductive reasoning) เป็นวิธีการให้เหตุผลโดยเหตุย่อยหลายๆเหตุ เหตุย่อยแต่ละเหตุจะมีอิสระต่อกันและเหตุย่อยทั้งหลายนี้จะรวมเป็นสรุปที่เป็นเหตุการณ์ทั่วไปในวงกว้าง

2. การให้เหตุผลแบบนิรนัย (deductive reasoning) เป็นวิธีการให้เหตุผลโดยมีเหตุใหญ่ (major premise)และติดตามด้วยเหตุย่อย (minor premise) ลดหลั่นกันตามลำดับความสัมพันธ์ระหว่างเหตุย่อยและเหตุใหญ่จนทำให้เกิดข้อสรุป

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

3. การให้เหตุผลแบบสหัชญาณ (intuitive reasoning) เป็นการให้เหตุผลซึ่งเกิดจากความคิดที่เกิดขึ้นมาในขณะใดขณะหนึ่ง ความคิดที่เกิดขึ้นในลักษณะนี้ ของแต่ละบุคคลจะมีความแตกต่างกัน ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับ ความรู้พื้นฐาน ประสบการณ์ และจิตใต้สำนึก ทฤษฎีทางคณิตศาสตร์หลายๆทฤษฎีเกิดจากการให้เหตุผลที่เกิดจากความคิดแบบนี้ก่อน หลังจากนั้นก็จะพยายามพิสูจน์ให้เป็นจริง โดยกำหนด อนิยาม นิยาม สัจพจน์ และการให้เหตุผลแบบนิรนัย

ศุภกิจ เฉลิมวิสุตม์กุล (2528, หน้า 29) แบ่งการให้เหตุผลออกเป็น 2 ประเภทได้แก่

1. การให้เหตุผลแบบอุปนัย (inductive reasoning) เป็นการให้เหตุผลโดยอ้างอิงหลักฐานจากประสบการณ์ กล่าวคือ เราเชื่อว่าสิ่งนั้นเป็นจริงเพราะเราเคยพบว่ามันเป็นเช่นนั้นมาก่อนและเมื่อมีประสบการณ์แบบเดียวกันหลายๆ ครั้ง เราก็สรุปว่าเป็นกฎหรือเป็นความจริงทั่วๆไปเกี่ยวกับสิ่งนั้น

2. การให้เหตุผลแบบนิรนัย (deductive reasoning) เป็นวิธีการให้เหตุผลโดยนำเอาความจริงจากความรู้เดิม มาพิจารณาตามหลักของเหตุผลแล้วสรุปความจริงใหม่ออกมา โดยไม่ต้องอาศัยการทดลองหรือการสังเกตจากประสบการณ์

สสวท. (2550, หน้า 39) ได้แบ่งประเภทของการให้เหตุผลออกเป็น 3 แบบ ดังนี้

1. การให้เหตุผลแบบหยั่งรู้ (intuitive reasoning) การให้เหตุผลแบบหยั่งรู้ของคนเราไม่ได้เกิดขึ้นมาจากพิจารณาถึงข้อเท็จจริงหรือหลักฐานใด ๆ แต่เกิดจากการที่คนเรานั้นรู้สึกถึงได้ว่าน่าจะเกิดเหตุการณ์ที่ตัวเองรู้สึกได้นั้น

2. การให้เหตุผลแบบอุปนัย (inductive reasoning) การให้เหตุผลแบบอุปนัยเป็นการมองหารูปแบบ และสร้างรูปทั่วไปและข้อความคาดการณ์จากการสังเกตตัวอย่างเป็นจำนวนมากแล้วนำมาสร้างเป็นข้อสรุป ลักษณะของการให้เหตุผลชนิดนี้มักจะเกิดในชีวิตประจำวันบ่อย ๆ รวมถึงการสอนคณิตศาสตร์ในชั้นเรียนด้วย ครูมักจะให้นักเรียนใช้เหตุผลประเภทนี้หาคุณสมบัติของสิ่งต่าง ๆ ที่ครูต้องการ

3. การให้เหตุผลแบบนิรนัย (deductive reasoning) การให้เหตุผลแบบนิรนัยใช้เพื่อแสดงความถูกต้องของการให้เหตุผลชนิดต่าง ๆ ได้เป็นอย่างดีในแง่ของการตรวจสอบข้อสรุปและสร้างเหตุผลสนับสนุนที่น่าเชื่อถือ ลักษณะของการให้เหตุผลชนิดนี้จะมีความเป็นทางการมากกว่าแบบอุปนัย การพัฒนาให้ผู้เรียนมีความสามารถในการให้เหตุผลแบบนิรนัยจะนำไปสู่การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ที่ดีได้

บารูดีและคลูนีย์ (Baroody and Cooney, 1998, อ้างใน เจนสมุทร แสงพันธ์, 2550, หน้า 10) ซึ่งได้ศึกษาการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในการแก้ปัญหาปลายเปิดโดยเน้นการแก้ปัญหาเป็นกลุ่มย่อย ได้แบ่งประเภทของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ 6 ข้อ คือ

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

1. การให้เหตุผลแบบหยั่งรู้ (intuitive reasoning) การให้เหตุผลแบบหยั่งรู้ของคนเราไม่ได้เกิดขึ้นมาจากพิจารณาถึงข้อเท็จจริงหรือหลักฐานใด ๆ แต่เกิดจากการที่คนเรานั้นรู้สึกถึงได้ว่าน่าจะเกิดเหตุการณ์ที่ตัวเองรู้สึกได้นั้น

2. การให้เหตุผลแบบอุปนัย (inductive reasoning) การให้เหตุผลแบบอุปนัยเป็นการมองหารูปแบบ และสร้างรูปทั่วไปและข้อความคาดการณ์จากการสังเกตตัวอย่างเป็นจำนวนมากแล้วนำมาสร้างเป็นข้อสรุป ลักษณะของการให้เหตุผลชนิดนี้มักจะเกิดในชีวิตประจำวันบ่อย ๆ รวมถึงการสอนคณิตศาสตร์ในชั้นเรียนด้วย ครูมักจะให้นักเรียนใช้เหตุผลประเภทนี้หาคุณสมบัติของสิ่งต่าง ๆ ที่ครูต้องการสอน เช่น คุณสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก เป็นต้น

3. การให้เหตุผลแบบนิรนัย (deductive reasoning) การให้เหตุผลแบบนิรนัยใช้เพื่อแสดงความถูกต้องของการให้เหตุผลชนิดต่าง ๆ ได้เป็นอย่างดีในแง่ของการตรวจสอบข้อสรุปและสร้างเหตุผลสนับสนุนที่น่าเชื่อถือ ลักษณะของการให้เหตุผลชนิดนี้จะมีความเป็นทางการมากกว่าแบบอุปนัย การพัฒนาให้ผู้เรียนมีความสามารถในการให้เหตุผลแบบนิรนัยจะนำไปสู่การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ที่ดีได้ เช่น การพิสูจน์ข้อความในรูป “ถ้า.....แล้ว” หรือ “.....ก็ต่อเมื่อ.....”

4. การให้เหตุผลเชิงสัดส่วน (proportional reasoning) การให้เหตุผลเชิงสัดส่วนเป็นการให้เหตุผลที่เกี่ยวข้องกับปริมาณที่เพิ่มขึ้นหรือลดลงซึ่งผู้เรียนจะใช้ความรู้เกี่ยวกับสัดส่วนในการคำนวณเพื่อสนับสนุนหรือคัดค้านคำตอบ

5. การให้เหตุผลเชิงปริภูมิ (spatial reasoning) การให้เหตุผลเชิงปริภูมิเกี่ยวข้องกับความรู้สึกเชิงปริภูมิของบุคคลโดยเฉพาะอย่างยิ่งกับการให้เหตุผลเกี่ยวกับคุณสมบัติ และความสัมพันธ์ของรูปสองมิติและรูปทรงสามมิติ

6. การให้เหตุผลเชิงนามธรรม (abstracting reasoning) การให้เหตุผลเชิงนามธรรมเป็นลักษณะของการให้เหตุผลขั้นสูงที่สามารถอธิบายและให้เหตุผลเกี่ยวกับสิ่งที่เป็นนามธรรมได้โดยที่ไม่ต้องอาศัยการอ้างอิงสิ่งที่เป็นรูปธรรม

ดาฟเฟอร์ (Daffer, 1990, อ้างใน สุภาพร ฟองจันทร์ตา, 2552, หน้า 9) ได้แบ่งประเภทของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ออกเป็น 2 ประเภทคือ

1. การให้เหตุผลแบบอุปนัย (inductive reasoning) เป็นกระบวนการการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเกี่ยวข้องกับการใช้ข้อมูลในการสร้างหลักการใหม่ ค้นหารูปทั่วไป รูปแบบทางคณิตศาสตร์ วิเคราะห์สถานการณ์ และในการอธิบายสมบัติและโครงสร้างต่างๆทางคณิตศาสตร์เพื่อนำไปสู่การสรุปเป็นมโนคติ หรืออาจกล่าวได้ว่า การให้เหตุผลแบบอุปนัย เกิดจากผลของกรณีเฉพาะหลายๆ ตัวอย่าง แล้วนำไปสู่ข้อสรุปเป็นกฎเกณฑ์ทั่วไป

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

2. การให้เหตุผลแบบนิรนัย (deductive reasoning) เป็นกระบวนการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ซึ่งใช้รูปแบบการลงความเห็นที่สมเหตุสมผลในการสรุป จากหลักฐานที่ปรากฏเป็นการพิสูจน์ข้อสรุปและตัดสินความถูกต้องของขั้นตอนการคิด การให้เหตุผลนี้เป็นการให้เหตุผลที่เป็นแบบตรรกะ เป็นการให้เหตุผลโดยใช้โครงสร้างทางคณิตศาสตร์เป็นพื้นฐาน คือ อนิยาม นิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีบท ซึ่งอาจกล่าวได้ว่า การให้เหตุผลแบบนิรนัย เป็นการให้เหตุผลที่ใช้ข้อสรุปที่เป็นกฎเกณฑ์ทั่วไปเป็นหลัก แล้วจะได้ผลสรุปของกรณีเฉพาะที่สอดคล้องกับกฎเกณฑ์หลักการที่เป็นจริงเสมอ

เมื่อพิจารณาจากนักการศึกษาหลายๆท่านสามารถแบ่งการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ออกเป็น 2 รูปแบบหลักๆ คือ การให้เหตุผลแบบอุปนัยและการให้เหตุผลแบบนิรนัย ซึ่งสามารถสรุปได้ดังนี้

1. การให้เหตุผลแบบอุปนัย เป็นกระบวนการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่พิจารณาจากข้อมูลที่เกิดซ้ำๆ หลายๆครั้งจนนำไปสู่ข้อสรุป

2. การให้เหตุผลแบบนิรนัย เป็นกระบวนการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ที่ยอมรับข้อความที่เป็นเหตุแล้วใช้ คำอนิยาม นิยาม และสัจพจน์ ในการอ้างอิงแล้วนำไปสู่ข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล

แนวทางการพัฒนาทักษะกระบวนการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

จากที่ได้กล่าวมาจะเห็นได้ว่าการให้เหตุในวิชาคณิตศาสตร์มีความสำคัญเป็นอย่างยิ่ง ดังนั่น ครูจึงควรส่งเสริมและพัฒนาความสามารถทางการให้เหตุผลของนักเรียน มีนักการศึกษาหลายท่านได้ให้แนวทางการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลดังต่อไปนี้

สสวท. (2544, หน้า 195) ได้กล่าวถึงการพัฒนาผู้เรียนให้มีทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ควรดำเนินการดังนี้

1. ให้ผู้เรียนได้พบกับโจทย์ปัญหาที่ผู้เรียนสนใจ เป็นปัญหาที่ไม่ยากเกินความสามารถของผู้เรียนที่จะคิดและให้เหตุผลในการหาคำตอบ

2. ให้ผู้เรียนมีโอกาสและเป็นอิสระที่จะแสดงออกถึงความคิดเห็นในการใช้และการให้เหตุผลของตนเอง

3. ผู้สอนควรช่วยสรุปและชี้แจงให้ผู้เรียนเข้าใจว่าเหตุผลของผู้เรียนถูกต้องตามหลักเกณฑ์หรือไม่ ขาดตกบกพร่องอย่างไร

กรมวิชาการ (2545, หน้า 198-199) ได้กล่าวถึงแนวทางในการพัฒนาทักษะกระบวนการด้านการให้เหตุผลว่า การให้ผู้เรียนรู้จักคิดและให้เหตุผลอย่างสมเหตุสมผลนั้น สามารถสอดแทรกในการเรียนเนื้อหาของวิชาคณิตศาสตร์และวิชาอื่น ๆ ได้ โดยเสนอหลักไว้เป็นข้อ ๆ ดังนี้

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

1. ควรให้ผู้เรียนได้พบกับโจทย์ปัญหาที่ผู้เรียนสนใจ เป็นปัญหาที่ไม่ยากเกินความสามารถของผู้เรียนที่จะคิดและให้เหตุผล

2. ให้ผู้เรียนมีโอกาสและเป็นอิสระที่จะแสดงออกถึงความคิดเห็นในการให้เหตุผลของตัวเอง

3. ผู้สอนช่วยสรุปและชี้แจงให้ผู้เรียนเข้าใจว่า เหตุผลของผู้เรียนถูกต้องตามหลักเกณฑ์หรือไม่ ขาดตกบกพร่องอย่างไร

สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งสหรัฐอเมริกา[NCTM], (2000) ได้ให้ข้อเสนอแนะไว้ว่าในการพัฒนาผู้เรียนให้มีทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์นั้น ควรให้ผู้เรียนได้ฝึกพูดหรือเขียนเพื่อแสดงความคิดหรือยืนยันวิธีการแก้ปัญหาของตนเอง รู้จักการคาดการณ์หรือเดาคำตอบและการสรุปอ้างอิงเป็นกรณีทั่วไปได้อย่างสมเหตุสมผล รวมไปถึงฝึกการใช้ความรู้ข้อมูลหรือข้อเท็จจริงที่มีอยู่ในการสรุปสู่ข้อเท็จจริงใหม่โดยการใช้วิธีการในเหตุผลต่างๆ

บารูดีและคลูนีย์ (Baroody and Cooney, 1998, อ้างใน เจนสมุทร แสงพันธ์, 2550, หน้า 13) ได้นำเสนอเทคนิควิธีการส่งเสริมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์แก่นักเรียนไว้ดังนี้

1. ควรฝึกให้ผู้เรียนคาดเดา ความกลัวว่าจะทำผิดมักจะทำให้เด็กๆ กลัวที่จะเดาหรือสร้างข้อความคาดการณ์ในชั้นเรียน ความกลัวต่างๆ เหล่านั้นอาจจะมาจากประสบการณ์เดิมและปัจจุบันของผู้เรียน สิ่งที่สำคัญครูต้องทำคือ การสร้างบรรยากาศในชั้นเรียนที่ทำให้นักเรียนไม่กลัวที่จะตอบผิดบ้าง นอกจากนี้ครูยังควรที่จะส่งเสริมให้นักเรียนได้คาดเดาคำตอบ คาดเดากับสิ่งที่เห็นเพื่อเป็นการฝึกให้ผู้เรียนได้สังเกตข้อมูลต่างๆครูจะต้องช่วยให้ผู้เรียนมองเห็นว่าคำตอบที่ผิดเป็นกระบวนการหนึ่งของการเรียนรู้ ทำให้การคาดเดาและการสร้างข้อความคาดการณ์เป็นสิ่งที่สำคัญ

2. ควรช่วยให้ผู้เรียนได้เข้าใจถึงคุณค่าของการตอบผิดในการหาคำตอบที่ถูกต้องผู้เรียนจำเป็นต้องเข้าใจว่าการคาดเดาที่ผิดพลาดครั้งก่อนหน้าจะเพิ่มโอกาสในการหาคำตอบที่ถูกต้องมากยิ่งขึ้น เช่นการให้เหตุผลของการตอบในเกม 20 คำถาม เกมนี้จะช่วยให้ผู้เล่นให้เหตุผลโดยการเดาและตัดคุณสมบัติที่ไม่เกี่ยวข้องของคำตอบออกไปเรื่อยๆ

3. ให้ความสำคัญกับการคิดเชิงหยั่งรู้และเน้นว่าทำไมเราจึงต้องตรวจสอบที่หยั่งรู้และการให้เหตุผลแบบอุปนัยและสามารถแสดงการตรวจสอบนั้นได้อย่างไร ในการแก้ปัญหาแต่ละครั้งเรามักจะให้เหตุผลโดยการหยั่งรู้ไปยังคำตอบที่เราต้องการก่อนเสมอ ครูผู้สอนจำเป็นต้องได้รับการตรวจสอบและหาความจริงโดยการเพิ่มเติมข้อมูลรวมไปถึงต้องใช้เหตุผลแบบนิรนัยด้วย

จากที่กล่าวมาข้างต้นสามารถสรุป ดังนั้น การส่งเสริมให้ผู้เรียนเกิดทักษะกระบวนการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ครูควรส่งเสริมให้โอกาสผู้เรียนได้พบโจทย์ปัญหาที่ส่งเสริมการคิด กระตุ้น

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

ให้ผู้เรียนได้คิดอย่างอิสระและครูควรสรุปและเสนอแนะเหตุผลของผู้เรียนเปรียบเทียบการให้เหตุผลของนักเรียนแต่ละเหตุผลด้วย

บทบาทของครูในการพัฒนาทักษะกระบวนการการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งสหรัฐอเมริกา[NCTM], (2000) กล่าวว่า ในการพัฒนาความคิดและการให้เหตุผลของนักเรียนควรทำเป็นประจำ ครูต้องมีความเข้าใจในวิชาคณิตศาสตร์เป็นอย่างดี ครูต้องจัดบรรยากาศในการเรียนคณิตศาสตร์ ครูต้องแสดงให้เห็นความสำคัญของสิ่งที่รู้อย่างมีเหตุผลในเรื่องรูปแบบและข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ เพื่อประเมินความสมเหตุสมผลข้อเสนอที่ได้อภิปรายไว้ นักเรียนต้องพัฒนาความเชื่อมั่นในความสามารถของการให้เหตุผลที่มีต่อคำถามที่มีเหตุผลทางคณิตศาสตร์อื่นๆวิธีนี้ทำให้นักเรียนเชื่อว่าตรรกศาสตร์สำคัญกว่าอำนาจภายนอกในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

พงศธร มหาวิจิตร (2550, หน้า 50) กล่าวว่าการที่ครูสร้างบรรยากาศในการอภิปราย การตั้งคำถามและการฟังในชั้นเรียนครูคาดหมายว่านักเรียนจะต้องค้นหา กำหนดและวิจารณ์คำอธิบายของเพื่อนในชั้นเรียนแบบสืบสวนสอบสวน ครูจะต้องช่วยนักเรียนอภิปรายถึงโครงสร้างทางตรรกศาสตร์ด้วยเหตุผลของนักเรียนเอง การวิจารณ์อย่างมีเหตุผลและการอภิปรายถึงข้อคาดการณ์เป็นเนื้อหาสาระที่มีความละเอียดรอบคอบ การคาดเดาอย่างมีเหตุผลสามารถอธิบายได้ถึงแม้ว่าบางครั้งอาจจะผิด ครูสร้างความชัดเจนในแนวคิดหลักที่นักเรียนไม่สามารถอธิบายได้ด้วยคำแนะนำดังกล่าว นักเรียนจะพัฒนามาตรฐานระดับสูงของการยอมรับความคิดเห็น และพวกเขาเข้าใจถึงความถูกต้องและความรับผิดชอบในการพัฒนาและปกป้องเหตุผลของพวกเขาครูมีบทบาทอย่างมากต่อการพัฒนาทักษะกระบวนการการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ครูช่วยเสนอแนะ เอื้อบรรยากาศในการให้เหตุผลและการคิดที่ถูกต้องตามหลักเกณฑ์ให้เกิดขึ้นกับผู้เรียน

การคิดทางเรขาคณิต

ความหมายของการคิดทางเรขาคณิต

การคิดทางเรขาคณิต หมายถึง การที่นักเรียนสามารถบอก หรืออธิบายเกี่ยวกับเรขาคณิตตามกรอบแนวคิดของ Gutierrez & Jaime (1998) ซึ่งมีทั้งหมด 4 ด้าน คือ

1. การตระหนักเกี่ยวกับรูปร่าง (Recognition)
2. การใช้บทนิยาม (Use of Definition)
3. การจัดกลุ่มของรูปเรขาคณิต (Classification)
4. การพิสูจน์ (Proof)

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

การคิดทางเรขาคณิตของแวน ฮีลี

ระดับการคิดทางเรขาคณิตตามแบบแวน ฮีลี

แวน ฮีลี ได้กำหนดระดับความสามารถทางการคิดในวิชาเรขาคณิตของนักเรียนไว้ 5 ระดับ มีรายละเอียดแต่ละระดับดังต่อไปนี้ (Crowley,1987, หน้า 2-3)

ระดับ 0 ขั้นพื้นฐาน ขั้นการมองเห็นภาพ (Visualization) ความสามารถในระดับนี้ นักเรียนระลึกถึงรูปร่างภายนอกของรูปเรขาคณิต ไม่เข้าใจสมบัติหรือองค์ประกอบของรูป ไม่รู้จักศัพท์ทางเรขาคณิตแต่สามารถแยกแยะรูปร่างได้จากประสบการณ์ที่เคยพบมาก่อน สามารถลอกเรียนแบบการวาดรูปได้ซึ่งสอดคล้องกับแนวคิดของ แบตติส (Battista , 1992) ที่เสนอไว้ว่า ระดับ 0 คือระดับก่อนการรับรู้ นักเรียนรับรู้รูปร่าง แต่ไม่สามารถที่จะแยกแยะความแตกต่างในหมู่ของเรขาคณิต เป็นระดับที่อยู่นอกเหนือจากการจัดระดับการคิดทางเรขาคณิตของแวน ฮีลี

ตัวอย่างพฤติกรรม ระดับ 0

1. นักเรียนสามารถยกตัวอย่างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยมองภาพรวมๆได้ เช่น เมื่อกำหนดรูปสามเหลี่ยมมาให้นักเรียนสามารถระบุได้ว่ารูปใดเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากแต่ไม่สามารถแยกชนิดของรูปสามเหลี่ยมได้

2. นักเรียนสามารถบอก มุม ด้าน จากรูปภาพได้

3. นักเรียนสามารถเปรียบเทียบและจัดประเภทของรูปเรขาคณิตโดยใช้การมองเห็นภาพรวมๆ เช่น ให้คำอธิบายความแตกต่างของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากว่า “รูปหนึ่งใหญ่กว่าอีกรูปหนึ่ง”

4. นักเรียนสามารถอธิบายรูปเรขาคณิตโดยใช้ข้อความที่แสดงถึงภาพรวมๆของรูป เช่น นักเรียนอธิบายรูปสามเหลี่ยมมุมฉากว่า “มองดูเหมือนรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก”

ซึ่งจากระดับดังกล่าวเป็นระดับที่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ก้าวข้ามผ่านเพราะนักเรียนในระดับนี้ เป็นระดับชั้นที่มีความรู้เกี่ยวกับพื้นฐานเรขาคณิตจากชั้นประถมศึกษามาแล้ว จึงน่าจะมีความรู้เกี่ยวกับศัพท์และรูปร่างเรขาคณิตมาแล้ว จึงเริ่มต้นดูจากระดับที่ 1

ระดับ 1 ขั้นการวิเคราะห์ (Analysis) ความสามารถในระดับนี้เป็นการเริ่มต้นการวิเคราะห์ความคิดรวบยอดทางเรขาคณิตที่ได้จากการสังเกตและการทดลอง นักเรียนเริ่มเห็นคุณลักษณะของรูป เห็นสมบัติเฉพาะของรูปทรง สามารถแบ่งรูปออกเป็นกลุ่มๆได้ โดยดูจากองค์ประกอบหรือสมบัติต่างๆของรูป

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

ตัวอย่างพฤติกรรม ระดับ 1

1. นักเรียนสามารถบอกและทดสอบความสัมพันธ์ระหว่างองค์ประกอบต่างๆของรูปได้ เช่น สามารถบอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมมุมฉากเป็นสามเหลี่ยมที่มีด้าน 3 ด้าน มุม 3 มุมและมีมุมขนาด 90 องศาอยู่ 1 มุม และทราบความสัมพันธ์ของด้านรูปสามเหลี่ยมมุมฉากจากการวัดและสังเกต

2. นักเรียนสามารถเปรียบเทียบรูปสามเหลี่ยมมุมฉากกับรูปสามเหลี่ยมอื่นๆ โดยใช้ความสัมพันธ์ของมุม และ ด้าน เช่นในมุมหรือความยาวด้านแยกแยะออกจากกันได้

3. นักเรียนสามารถแก้ปัญหาเรขาคณิตจากการใช้สมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากในการหาเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากได้

4. นักเรียนสามารถจัดประเภทของรูปโดยแยกสิ่งที่เป็นตัวอย่างออกจากสิ่งที่ไม่เป็นตัวอย่างได้ เช่น สามารถแยกรูปสามเหลี่ยมมุมฉากออกจากรูปสามเหลี่ยมชนิดอื่นๆได้

5. นักเรียนสามารถใช้สมบัติของรูปในการตีความและอธิบายลักษณะของรูปและนำสมบัติไปสร้างรูป เช่น นักเรียนรู้จักรูปสามเหลี่ยมมุมฉากแล้วนำสมบัติทั้งสองอย่างคือ มีด้าน 3 ด้าน และมีมุม90องศา 1 มุม แต่ไม่สามารถเชื่อมโยงได้ว่าสมบัติดังกล่าวสามารถสร้างรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วได้

6. นักเรียนสามารถสรุปสมบัติทั่วไปได้ เช่น มุมภายในของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากรวมกันเป็น 180 องศาหรือรวมกันแล้วได้มุมตรง

7. นักเรียนสามารถอธิบายสมบัติของรูปได้ เช่น อธิบายว่าสามเหลี่ยมมุมฉากมีด้าน 3 ด้าน มีมุม 3 มุมและหนึ่งมุมจะต้องมีขนาด 90 องศา

8. นักเรียนสามารถค้นพบสมบัติที่ไม่คุ้นเคยได้ เช่น เมื่อรู้จักรูปสามเหลี่ยมมุมฉากแล้ว นักเรียนสามารถเรียนรู้ความสัมพันธ์อื่นๆได้เพิ่มขึ้น

9. นักเรียนไม่สามารถอธิบายความสัมพันธ์ของรูปได้ เช่น ไม่เข้าใจว่าทำไมด้านตรงข้ามมุมฉากจึงเป็นด้านที่มีความยาวมากที่สุด

10. นักเรียนไม่สามารถสร้างบทนิยามอย่างเป็นทางการ เช่น ไม่สามารถบอกนิยามรูปสามเหลี่ยมมุมฉากซึ่งเป็นเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอได้

11. นักเรียนไม่สามารถอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิตได้ เช่น ไม่เข้าใจว่ารูปสามเหลี่ยมมุมฉากบางรูปเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วได้ บางรูปเป็นสามเหลี่ยมด้านไม่เท่าได้

12. นักเรียนไม่เห็นความสัมพันธ์ของการพิสูจน์หรือไม่ใช้เหตุผลทางตรรกศาสตร์ในการอธิบายสิ่งที่พบ

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

ระดับ 2 ขั้นการสรุปที่ไม่เป็นแบบแผน (Informal Deduction) ความสามารถในระดับนี้นักเรียนสามารถบอกความสัมพันธ์ของสมบัติต่างๆของรูปต่างๆและหาความสัมพันธ์ระหว่างรูปต่างๆสามารถจำแนกประเภทของรูปได้ เริ่มเข้าใจบทนิยามและการใช้เหตุผลอย่างไม่เป็นทางการ แต่ยังไม่เข้าใจระบบสัจพจน์ในการนิรนัยและสามารถเลียนแบบการพิสูจน์ได้แต่ไม่สามารถพิสูจน์ได้ด้วยตนเอง

ตัวอย่างพฤติกรรม ระดับ 2

1. นักเรียนสามารถบอกสมบัติที่แตกต่างกันของรูปเรขาคณิตและตรวจสอบได้ว่าสมบัติดังกล่าวเพียงพอหรือไม่ เช่น สามารถวาดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและระบุความยาวของด้านแต่ละด้านได้อย่างถูกต้อง

2. นักเรียนระบุสมบัติขั้นต่ำในการสร้างรูปได้ เช่น กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากอย่างง่ายๆได้

3. นักเรียนสามารถใช้ข้อมูลที่กำหนดให้หาผลสรุปโดยใช้ความสัมพันธ์ทางตรรกศาสตร์ได้ เช่น รูปสามเหลี่ยม A เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากเพราะมีมุม 90 องศาอยู่ 1 มุม และ รูปสามเหลี่ยม B ก็เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากเพราะมีมุม 90 องศาอยู่ 1 มุม ดังนั้นรูปสามเหลี่ยม C ก็เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเพราะมีมุม 90 องศาเหมือนรูปสามเหลี่ยม A และ B

4. นักเรียนสามารถให้เหตุผลแบบนิรนัยอย่างไม่เป็นทางการได้ เช่น สามารถพิสูจน์ว่าพื้นที่บนด้านตรงข้ามมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเท่ากับผลรวมของพื้นที่บนด้านประกอบมุมฉากแต่ผู้สอนต้องเป็นผู้แนะนำกระตุ้นนักเรียน

5. นักเรียนไม่สามารถแก้ปัญหาแบบนรินัยได้

6. นักเรียนไม่สามารถแยกแยะระหว่างประโยคเงื่อนไขและบทกลับได้

4. นักเรียนไม่สามารถสร้างความสัมพันธ์ขององค์ความรูปที่ทราบเข้าด้วยกันได้

ระดับ 3 ขั้นการสรุปที่เป็นแบบแผน (Formal Deduction) ความสามารถในระดับนี้นักเรียนสามารถสรุปเรขาคณิตภายใต้สัจพจน์ ทฤษฎี อนิยาม และบทนิยามต่างๆ ได้อย่างเข้าใจและถูกโครงสร้างการให้ลำดับเหตุผล สามารถทำการพิสูจน์ได้หลายรูปแบบภายใต้ข้อเท็จจริง สามารถทำ ทฤษฎีบทกลับได้ สามารถสรุปจากสิ่งที่กำหนดให้ได้ถูกต้องตามลำดับของเหตุผล รวมถึงสามารถพิสูจน์ด้วยตนเองได้และทำมากกว่า 1 วิธีเข้าใจเงื่อนไขที่จำเป็นและพอเพียงเข้าใจความแตกต่างระหว่าง ทฤษฎีบทและบทกลับของทฤษฎีบท

ตัวอย่างพฤติกรรมในระดับ 3

1. นักเรียนเห็นความสำคัญและความจำเป็นของคำนิยาม บทนิยาม และสมมุติฐาน

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

2. นักเรียนสามารถพิสูจน์ความสัมพันธ์ที่อยู่ในระบบสัจพจน์ซึ่งนักเรียนในระดับที่ 2 ทำไม่ได้

3. นักเรียนยอมรับ คุณลักษณะของบทนิยามอย่างเป็นทางการ

4. นักเรียนสามารถพิสูจน์ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับทฤษฎีบทพีทาโกรัสอย่างง่ายๆได้

ระดับ 4 ขั้นการคิดขั้นสูงสุด (Rigor) ความสามารถในระดับนี้นักเรียนต้องมีความรอบรู้ระบบสัจพจน์เป็นอย่างดี สามารถพิสูจน์เรขาคณิตที่ไม่ใช่ของยูคลิดได้ สามารถนำเรขาคณิตไปสัมพันธ์กับวิชาอื่นๆ สามารถมองเรขาคณิตในลักษณะของนามธรรม ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงในระบบสัจพจน์และนิยามต่างๆ ได้

ตัวอย่างพฤติกรรมในระดับ 4

1. นักเรียนสามารถสร้างทฤษฎีได้อย่างถูกต้องในสัจพจน์ที่แตกต่างกัน

2. นักเรียนสามารถเปรียบเทียบระบบสัจพจน์ได้ เช่น เรขาคณิตแบบยูคลิดและเรขาคณิตนอกยูคลิด

3. สามารถคิดแก้ปัญหาในกรณีทั่วไปได้

4. นักเรียนสามารถศึกษาได้อย่างลึกซึ้งเพื่อพัฒนาไปถึงวิธีการใหม่และวิธีทางตรรกศาสตร์

จากการศึกษาบทความ เอกสารและงานวิจัยต่างๆพบว่านักเรียนในสหรัฐอเมริกามีระดับความคิดในขั้นสุดท้ายนี้น้อยมาก ส่วนใหญ่จะพบว่านักเรียนในระดับมัธยมศึกษาจนจบระดับอุดมศึกษาก็มีระดับความคิดทางเรขาคณิตอยู่ใน 3 ระดับแรกเท่านั้น แวนฮีลีให้ความหวังไว้ว่าถ้านำ แนวคิดนี้ไปศึกษากับนักเรียนในท้องถิ่นอื่นๆอาจพบว่ามีนักเรียนมีระดับความคิดทางเรขาคณิตในขั้นสุดท้ายบ้างก็ได้นอกจากนี้การที่ผู้สอนจะตัดสินใจว่านักเรียนมีระดับความคิดอยู่ในระดับใด ผู้สอนจะต้องสังเกตพฤติกรรมของนักเรียน จึงมีความจำเป็นอย่างยิ่งที่ผู้สอนจะต้องทำความเข้าใจในพฤติกรรมของนักเรียนแต่ละระดับเพื่อแยกแยะและพัฒนาให้นักเรียนมีความสามารถในระดับความคิดทางเรขาคณิตที่สูงขึ้น

สมบัติของระดับการคิดทางเรขาคณิตตามแบบแวน ฮีลี

ระดับการคิดทางเรขาคณิตของแวน ฮีลีมีสมบัติ ดังนี้ (Crowley,1987: 4-6)

1. การมีลำดับ (Sequential) หมายถึง การพัฒนาที่มีลำดับขั้นตอนตามลำดับจากระดับความคิดในระดับต่ำไปยังระดับสูงจะสามารถพัฒนาไปสู่ระดับการคิดในระดับสูงได้ต้องศึกษาในระดับการคิดในระดับที่ต่ำกว่าให้มีคุณภาพเพียงพอหมายถึงมีการพัฒนาเป็นลำดับขั้นตอนจากระดับ n ต้องผ่านระดับ n-1 ก่อน

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

2. สิ่งที่ยังไม่ชัดแจ้งในระดับหนึ่งจะชัดแจ้งในระดับถัดไป (Intrinsic and Extrinsic) หมายถึง นักเรียนที่อยู่ในระดับต่ำกว่าจะรู้เรื่องราวต่างๆได้อย่างชัดแจ้งในระดับที่สูงขึ้นจากการวิเคราะห์และศึกษาสมบัติของรูป

3. การมีภาษาประจำ ระดับ (Linguistics) หมายถึง ในแต่ละระดับการคิดจะมีภาษาที่มีความสัมพันธ์กับการคิดในระดับนั้นโดยตรงซึ่งอาจขัดแย้งกับอีกระดับหนึ่งก็ได้ เช่น ความสัมพันธ์ระหว่างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสกับรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ผู้ที่มีระดับการคิดต่างกันจะให้เหตุผลและใช้ภาษาแตกต่างกัน แต่เป็นพื้นฐานต่อกันได้ ดังนั้นภาษาจึงเป็นตัวบอกระดับการคิด

4. การมีพัฒนาการความก้าวหน้า (Advancement) หมายถึง มีการพัฒนาความก้าวหน้าจากระดับหนึ่งไปอีกระดับหนึ่งเป็นการก้าวหน้าพัฒนาระดับความคิดได้แต่ต้องศึกษาเนื้อหาฝึกฝนทักษะจนมีคุณภาพของระดับที่ต่ำกว่าอย่างพอเพียงจึงสามารถไปอยู่ในระดับที่สูงกว่าได้

5. การไม่เข้ากัน (Mismatch) หมายถึง นักเรียนที่อยู่ในระดับใดระดับหนึ่งสามารถเรียนรู้เนื้อหา โครงสร้างคำที่ใช้แตกต่างกันผู้ที่อยู่ต่างระดับกันไม่สามารถเข้าใจในเนื้อหาโครงสร้างและภาษาที่ใช้กันได้ ผู้ที่อยู่ในระดับต่ำกว่าไม่สามารถมีความคิดในระดับที่สูงกว่าได้การกำหนดสมบัติของระดับความคิดนี้เพื่อให้สามารถนำ ระดับการคิดทางเรขาคณิตตามแบบแวน ฮีลีไปใช้ได้ถูกต้องและไปในแนวเดียวกัน และเพื่อเป็นแนวทางในการกำหนดเนื้อหา การจัดกิจกรรม การฝึกทักษะให้ถูกต้องเป็นลำดับขั้นตอนถูกต้องตามสมบัติที่กำหนดแต่ในการนำระดับความคิดไปใช้ศึกษาของนักวิจัยต่างๆพบว่าสมบัตินี้มีความคลาดเคลื่อนในการกำหนดสมบัติซึ่งจะเสนอในงานวิจัยเกี่ยวกับสมบัติของระดับการคิดทางเรขาคณิตตามแบบแวน ฮีลีต่อไป

กรอบวัดระดับการคิดทางเรขาคณิตที่พัฒนาโดย กูเธอเรสและเจมี

การวัดระดับการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนโดยตัวแบบของ แวน ฮีลี สามารถกระทำได้โดยการวิเคราะห์จากคำตอบของนักเรียนจากการทำกิจกรรม ครูสามารถทำการประเมินเชิงวินิจฉัยได้โดยการสังเกต การถามปากเปล่า การให้นักเรียนอธิบายคำตอบด้วยตนเองเพื่อวัดความเหมาะสมของภาษาที่ใช้และการแสดงออกในรูปแบบอื่นๆ และการจัดระดับการคิดของนักเรียนเกี่ยวกับมโนทัศน์นั้นๆจะต้องมีการแสดงพฤติกรรมหรือการปฏิบัติที่ชัดเจน กูเธอเรสและเจมี (Gutierrez & Jaime, 1998) ได้ศึกษาพฤติกรรมที่แสดงออกในแต่ละระดับของ แวน ฮีลี ที่นักเรียนแสดงให้เห็นจึงพัฒนากรอบการคิดทางเรขาคณิตของแวน ฮีลี โดยพิจารณาในแต่ละด้าน เพื่อสามารถจัดระดับนักเรียนให้ถูกต้องมากยิ่งขึ้น ซึ่ง กูเธอเรสและเจมี ได้แบ่งระดับความคิดทางเรขาคณิตออกเป็น 4 ระดับ โดยพิจารณาในแต่ละด้านทั้ง 4 ด้านตารางที่ 1

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

ตารางที่ 1 กรอบวัดระดับการคิดทางเรขาคณิตที่พัฒนาโดย กูเธอเรสและเจมี (1998)

ลักษณะบ่งชี้ที่แสดงการคิดทางเรขาคณิตของตามระดับการเรียนรู้ของแวน ฮีลี				
	ระดับที่ 1	**ระดับที่ 2**	**ระดับที่ 3**	**ระดับที่ 4**
การตระหนักเกี่ยวกับรูปร่าง	พิจารณาจากลักษณะรูปร่าง	ใช้สมบัติทางคณิตศาสตร์	-	-
การใช้นิยาม	เขียนบรรยายลักษณะรูปร่างได้	เขียนนิยามหรือสมบัติได้เพียงเล็กน้อย	เข้าใจสมบัติที่เพียงพอและจำเป็น	เข้าใจสมบัติหรือนิยามที่คล้ายกันและนำไปพิสูจน์ได้
การจัดกลุ่มของรูปเรขาคณิต	ใช้รูปร่างลักษณะที่เห็นในการจัดกลุ่ม	ใช้สมบัติและนิยามทางคณิตศาสตร์ในการจัดกลุ่มของรูปเรขาคณิต	ใช้สมบัติและนิยามอธิบายความสัมพันธ์และความแตกต่างระหว่างกลุ่มได้	-
การพิสูจน์	-	พิสูจน์ได้จากตัวอย่าง	ใช้นิยามหรือสมบัติอย่างไม่เป็นทางการในการพิสูจน์	ใช้นิยามหรือสมบัติอย่างเป็นทางการในการพิสูจน์

จากกรอบแนวคิดนี้ พบว่า ในระดับที่ 3 และ ระดับที่ 4 ของด้านการตระหนักเกี่ยวกับรูปร่างไม่ได้กล่าวถึงเนื่องจาก หากนักเรียนมีเหตุผลตั้งแต่ในระดับที่ 2 ขึ้นไป กล่าวคือ นักเรียนใช้สมบัติทางคณิตศาสตร์ในการมองภาพรวมและรูปลักษณ์ภายนอกของรูปเรขาคณิตแล้วนั้น นักเรียนในระดับ 3 และระดับ 4 ก็จะคงความรู้ส่วนนี้ไว้อยู่แล้ว สำหรับ ด้านการจัดกลุ่มของรูปเรขาคณิต พบว่า ในระดับที่ 4ไม่ได้กล่าวถึงเนื่องจากนักเรียนมีเหตุผลในระดับที่ 3 แล้วนักเรียนนักเรียนจะคงความรู้นี้ไว้ไปตลอดอยู่แล้ว และ ในด้านการพิสูจน์ไม่ได้กล่าวถึงในระดับที่ 1 เนื่องจากถ้านักเรียนอยู่ในระดับที่ 1 การแสดงการพิสูจน์หรือทำให้เห็นจริงนั้น ต้องอาศัยการเข้าใจสมบัติต่างๆ ของรูปเรขาคณิตมาอ้างอิง แต่นักเรียนในระดับที่ 1 นี้อาจยังไม่เข้าใจเกี่ยวกับสมบัติต่างๆของรูปเรขาคณิต จึงทำให้ในด้านการพิสูจน์ยังไม่ถูกกล่าวในระดับที่ 1

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

ผู้วิจัยได้วิเคราะห์กรอบวัดระดับการคิดทางเรขาคณิตที่พัฒนาโดย กูเธอเรสและเจมี กับเนื้อหาทฤษฎีบทพีทาโกรัส สามารถพิจารณาได้ดังนี้

ด้านที่ 1 การตระหนักเกี่ยวกับรูปร่าง (Recognition)

ระดับที่ 1 นักเรียนรู้ศัพท์ทั้งหมดของรูปทรงที่เห็นแต่ไม่สามารถให้เหตุผลของคำตอบได้ เช่น เมื่อกำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากมาให้นักเรียนสามารถตอบได้ว่าเป็นสามเหลี่ยมอะไรแต่ไม่สามารถให้เหตุผลได้ว่าทำไมจึงเป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

ระดับที่ 2 นักเรียนรู้ศัพท์ทั้งหมดของรูปทรงที่เห็นและสามารถให้เหตุผลของคำตอบได้เพียงเล็กน้อยเท่านั้นเช่น เมื่อกำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากมาให้นักเรียนสามารถตอบได้ว่าเป็นสามเหลี่ยมอะไรและให้เหตุผลว่าเพราะมีมุมฉาก 1 มุมหรือ มีมุมขนาด 90 องศา 1 มุม

ด้านที่ 2 ด้านการใช้บทนิยาม (Use of definitions)

ระดับที่ 1 นักเรียนสามารถเขียนสมบัติของรูปเรขาคณิตที่นักเรียนเห็นได้ แต่ไม่สามารถนำสมบัติที่เขียนออกมาไปแก้ปัญหาได้ เช่นเมื่อกำหนดความยาวด้านประกอบมุมฉากยาวด้านละ 5 และ 12 ตามลำดับและด้านตรงข้ามมุมฉากยาว x หน่วย จงหาค่าของ x นักเรียนในระดับนี้รู้สมบัติและนิยามต่างๆแต่ไม่สามารถวาดรูปเพื่อนำไปแก้ปัญหาได้ เป็นต้น

ระดับที่ 2 นักเรียนสามารถเขียนสมบัติของรูปเรขาคณิตที่นักเรียนเห็นได้ แต่ไม่สามารถนำสมบัติที่เขียนออกมาไปแก้ปัญหาได้ เช่นเมื่อกำหนดความยาวด้านประกอบมุมฉากยาวด้านละ 5 และ 12 ตามลำดับและด้านตรงข้ามมุมฉากยาว x หน่วย จงหาค่าของ x นักเรียนในระดับนี้รู้สมบัติและนิยามต่างๆสามารถวาดรูปได้แต่ไม่สามารถนำสมบัติและนิยามต่างๆ ไปแก้ปัญหาได้ เป็นต้น

ระดับที่ 3 นักเรียนสามารถเขียนสมบัติของรูปเรขาคณิตที่นักเรียนเห็นได้และสามารถนำสมบัติที่เขียนออกมาไปแก้ปัญหาได้ เช่นเมื่อกำหนดความยาวด้านประกอบมุมฉากยาวด้านละ 5 และ 12 ตามลำดับและด้านตรงข้ามมุมฉากยาว x หน่วย จงหาค่าของ x นักเรียนในระดับนี้รู้สมบัติและนิยามต่างๆสามารถวาดรูปและสามารถนำสมบัติและนิยามต่างๆ ไปแก้ปัญหาได้แต่ไม่สามารถแก้ปัญหาในรูปทั่วไปได้

ระดับที่ 4 นักเรียนสามารถเขียนสมบัติของรูปเรขาคณิตที่นักเรียนเห็นได้และสามารถนำสมบัติที่เขียนออกมาไปแก้ปัญหาได้ เช่นเมื่อกำหนดความยาวด้านประกอบมุมฉากยาวด้านละ 5 และ 12 ตามลำดับและด้านตรงข้ามมุมฉากยาว x หน่วย จงหาค่าของ x นักเรียนในระดับนี้รู้สมบัติและนิยามต่างๆสามารถวาดรูปและสามารถนำสมบัติและนิยามต่างๆ ไปแก้ปัญหาได้แต่ไม่สามารถแก้ปัญหาในรูปทั่วไปได้

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

ด้านที่ 3 ด้านการจัดกลุ่มของรูปเรขาคณิต (Classification)

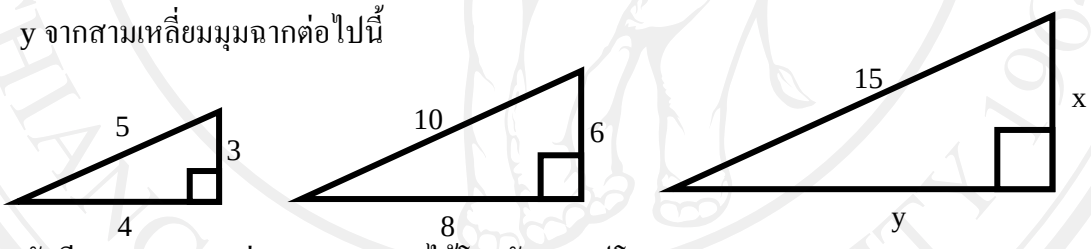
ระดับที่ 1 นักเรียนในระดับนี้ทราบสมบัติที่สามารถจำแนกชนิดของรูปเรขาคณิตได้เพียง1 สมบัติและไม่สามารถนำสมบัติต่างๆมาเชื่อมความสัมพันธ์ได้ เช่น เมื่อกำหนดว่าสามเหลี่ยมมุมฉากคือสามเหลี่ยมที่มีมุมขนาด 90 องศา 1 มุมนักเรียนสามารถแยกสามเหลี่ยมมุมฉากออกจากสามเหลี่ยมชนิดอื่นๆได้แต่เมื่อกำหนดความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากมาให้นักเรียนไม่สามารถแยกสามเหลี่ยมมุมฉากออกจากรูปสามเหลี่ยมอื่นๆได้

ระดับที่ 2 นักเรียนในระดับนี้ทราบสมบัติที่สามารถจำแนกชนิดของรูปเรขาคณิตได้มากกว่า 1 สมบัติและสามารถนำสมบัติต่างๆมาเชื่อมความสัมพันธ์กันแต่ไม่สามารถอธิบายความสัมพันธ์ของสมบัติทั้งสองได้

ระดับที่ 3 นักเรียนในระดับนี้ทราบสมบัติที่สามารถจำแนกชนิดของรูปเรขาคณิตได้มากกว่า 1 สมบัติและสามารถนำสมบัติต่างๆมาเชื่อมความสัมพันธ์กันและสามารถอธิบายความสัมพันธ์ของสมบัติทั้งสองได้

ด้านที่ 4 ด้านการพิสูจน์(Proof)

ระดับที่ 2 นักเรียนสามารถพิสูจน์ความจริงได้จากตัวอย่าง เช่น จงหาความยาวของ x และ y จากสามเหลี่ยมมุมฉากต่อไปนี้



นักเรียนสามารถหาค่าของ x และ y ได้โดยวัดจากรูปโดยตรง

ระดับที่ 3 นักเรียนสามารถพิสูจน์หาค่า x และ y ได้แต่ไม่สามารถอธิบายถึงลำดับขั้นตอนได้

ระดับที่ 4 นักเรียนสามารถพิสูจน์หาค่า x และ y ได้และสามารถอธิบายถึงลำดับขั้นตอนการพิสูจน์ได้และหาแนวทางการพิสูจน์ได้มากกว่า 1 วิธี

กิจกรรมการเรียนการสอนตาม แวน ฮีลี โมเดล

กิจกรรมการเรียนการสอนตาม แวน ฮีลี โมเดล

การพัฒนาการคิดทางเรขาคณิตจากระดับหนึ่งไปสู่อีกระดับหนึ่งสามารถทำได้โดยการสอนและจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่เหมาะสม ซึ่ง ปิแอร์ และ ไดน่า แวน ฮิลี ได้เสนอขั้นตอนการสอนเพื่อพัฒนาระดับความคิดทางเรขาคณิต 5 ขั้นตอน (Van Hiele, cited by Crowley, 1984, หน้า 5) ดังนี้

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

1. การสืบสวนสอบสวน/การแสวงหาความรู้ (inquiry/information) ในขั้นตอนนี้นักเรียนมีความคุ้นเคยกับฟังก์ชัน เช่น ทำการตรวจสอบสิ่งที่เป็นตัวอย่าง และสิ่งที่ไม่เป็นตัวอย่าง

ตัวอย่างกิจกรรม เช่น นักเรียนสามารถแสดงชี้ให้เห็นมุม 90 องศาจากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากได้ชัดเจนและสามารถระบุด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากอย่างง่ายๆได้

2. การกำหนดทิศทางโดยตรง(Directed or guided orientation) นักเรียนทำกิจกรรมที่เกี่ยวข้องกับความสัมพันธ์ที่แตกต่างของเครือข่ายที่ถูกสร้างขึ้นมา เช่น การวัด การมองหาความสัมพันธ์ ตัวอย่างกิจกรรม เช่นนักเรียนสามารถแยกแยะได้ว่ารูปใดเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเมื่อกำหนดความยาวด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมมาให้

3. การอธิบาย (explanation or explicitation) นักเรียนมีความเข้าใจความสัมพันธ์แสดงออกด้วยวาจาและเรียนรู้ศัพท์ทางเทคนิคซึ่งมีเนื้อหาวิชา ตัวอย่างพฤติกรรม เช่น นักเรียนแสดงแนวคิดเกี่ยวกับสมบัติและทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีบทพีทาโกรัส

4. การไม่กำหนดทิศทาง(free orientation) นักเรียนเรียนรู้จากการทำกิจกรรมที่ซับซ้อนขึ้นเพื่อค้นหาแนวทางในเครือข่ายความสัมพันธ์ด้วยตนเอง เช่น รู้ความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่อยู่บนแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก นักเรียนสามารถหาความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปอื่นๆที่อยู่บนแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากได้

5. การบูรณการ(integration) นักเรียนสรุปสิ่งที่ได้เรียนรู้มาทั้งหมดแล้วแสดงออกมาอยู่ในรูปการกระทำและสร้างความสัมพันธ์อยู่ในภาพรวม เช่นสามารถสรุปสมบัติ และ สูตรต่างที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีบทพีทาโกรัสได้

แวน ฮีลี (Van Hiele, 1987, อ้างใน สิริพร ทิพย์คง, 2532, หน้า 49)ได้เสนอแนวทางที่จะช่วยให้การเรียนการสอนเรขาคณิตให้มีประสิทธ์ภาพมากขึ้น ดังนี้

1. การนำ เข้าสู่บทเรียนโดยใช้คำถาม (Information) คือ ครูกล่าวถึงประโยชน์และเหตุผลในการเรียนแนะนำคำศัพท์ในวิชาเรขาคณิตโดยใช้คำถามให้นักเรียนมีโอกาสได้อภิปราย เช่น ครูถามว่า สามเหลี่ยมมุมฉากคืออะไร สามเหลี่ยมด้านเท่าคืออะไร สามเหลี่ยมหน้าจั่วคืออะไร และสามเหลี่ยมพวกนี้มีความสัมพันธ์กันอย่างไรและมีความแตกต่างกันอย่างไร ทำไมจึงเป็นเช่นนี้ จุดมุ่งหมายของกิจกรรมนี้มี 2 ด้านคือ ครูได้เรียนรู้สิ่งที่เป็นความรู้เดิมของนักเรียน และ นักเรียนได้เรียนรู้สิ่งที่เป็นแนวทางการศึกษาเพิ่มเติม

2. การแนะนำ โดยตรงจากครู (Directed Orientation) คือ การให้นักเรียนปฏิบัติตามขั้นตอนในสิ่งที่ครูกำหนดครูจัดกิจกรรมให้นักเรียนมีโอกาสได้สังเกตจนเห็นแนวทางในการแก้ปัญหาโจทย์

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

3. การแสดงความคิดเห็น (Explication) คือ ครูส่งเสริมให้นักเรียนอภิปรายจากสิ่งที่นักเรียนได้พบ ได้จากการสังเกต การสำรวจและการคิด บทบาทของครูลดลงให้นักเรียนช่วยกันสรุปกฎเกณฑ์และสิ่งที่สำคัญซึ่งเป็นประโยชน์ในการเรียนเรขาคณิต

4. การศึกษาด้วยตนเอง (Free Orientation) คือ ครูให้นักเรียนมีอิสระในการเรียนมากขึ้น นักเรียนมีโอกาสสำรวจความสามารถของตน มีประสบการณ์ในการเรียนรู้ด้วยตนเองมากขึ้น สามารถคิดและพิสูจน์เรขาคณิตด้วยตนเองซึ่งมีได้หลายวิธี นักเรียนมีโอกาสในการแก้ปัญหาโจทย์ที่ซับซ้อน สามารถตอบคำถามที่เป็นเหตุเป็นผลได้

5. การบูรณาการ (Integration) คือ ครูช่วยนักเรียนสรุปเนื้อหาสาระในเรื่องที่นักเรียนเรียนโดยครูถามให้นักเรียนช่วยกันตอบและแสดงความคิดเห็นในสิ่งที่เรียนไปแล้ว เช่นการสรุปสูตรและสมบัติของทฤษฎีบทพีทาโกรัส เป็นต้น

การที่ครูเข้าใจเนื้อหาวิชาที่สอนรู้ว่าจะสอนเนื้อหานั้นอย่างไรจึงเหมาะสมกับความคิดของนักเรียนรู้พัฒนาการของขั้นระดับความคิดทางเรขาคณิตจากขั้นหนึ่งไปสู่อีกขั้นหนึ่งจะช่วยให้สามารถจัดกิจกรรมการเรียนการสอนให้สอดคล้องกับความคิดและพัฒนาการทางด้านความรู้และสติปัญญาของนักเรียนซึ่งจะมีผลทำให้นักเรียนสามารถเรียนวิชาเรขาคณิตอย่างเข้าใจมากกว่าการท่องจำหลักสูตรเรขาคณิตจะครอบคลุมระดับความคิดตั้งแต่ระดับ 1 ถึงระดับ 4 แต่นักเรียนส่วนใหญ่มีระดับความคิดไม่ถึงระดับ 4 ดังนั้นการสอนให้มีพัฒนาการในแต่ละขั้นอย่างสมบูรณ์ มีความรู้ในเนื้อหาเรขาคณิตอย่างแจ่มแจ้งจะช่วยให้นักเรียนสามารถพัฒนาระดับความคิดจากระดับหนึ่งไปอีกระดับหนึ่งได้อาจทำให้นักเรียนมีระดับความคิดถึงระดับ 4 ก็เป็นไปได้

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ผู้วิจัยได้ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวกับการพัฒนาระดับการคิดทางเรขาคณิต ตามแนวการสอนของ แวน ฮิลี โดยแบ่งเป็นงานวิจัยในประเทศและต่างประเทศ ซึ่งมีสาระสำคัญดังนี้

งานวิจัยในประเทศ

กุลยา เหมวัสดุกิจ (2545) ได้ทำการศึกษาวิจัยเรื่องผลของการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามรูปแบบแวน ฮิลี ที่มีผลต่อระดับการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนสตรีสมุทรปราการ ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2545 จำนวน 98 คน เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาคือ แผนการสอนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามรูปแบบ แวน ฮิลี เรื่องเส้นขนานและความคล้าย เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล คือ แบบวัดระดับความคิดทางเรขาคณิตที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเอง วิเคราะห์ข้อมูลโดยหาความถี่และร้อยละ ผลการวิจัยพบว่า 1. หลังได้รับการสอนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

ตามรูปแบบของแวน ฮิลี นักเรียนที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตคงที่มีจำนวนมากที่สุด รองลงมาคือมีระดับความคิดทางเรขาคณิตเพิ่มขึ้น 1 ระดับและเพิ่มขึ้น 2 ระดับ ตามลำดับ 2. หลังได้รับการสอนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามรูปแบบของแวน ฮิลี นักเรียนมีระดับความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 1,3และ 4 มีจำนวนเพิ่มขึ้น โดยนักเรียนที่มีความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 4 มีจำนวนเพิ่มขึ้นมากที่สุด ส่วนนักเรียนที่มีความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 0 และ 2 มีจำนวนลดลง โดยนักเรียนที่อยู่ในระดับ 0 มีจำนวนลดลงมากที่สุด

บุญเสริม ยุพจันทร์ (2547) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์เรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยการจัดกิจกรรมตามลำดับขั้นของแวน ฮิลี กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2546 โรงเรียนกุนนทีรุทธาราม วิทยาคม จำนวน 27 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยประกอบด้วยกิจกรรมการเรียนการสอน แบบทดสอบความสามารถในการพิสูจน์และแบบวัดระดับความคิดทางเรขาคณิต ผลวิจัยพบว่า กิจกรรมการเรียนการสอนตามลำดับขั้นของแวน ฮิลี เรื่องการพิสูจน์ทฤษฎีบททางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ไม่เป็นไปตามเกณฑ์ที่กำหนดให้ และนักเรียนบางส่วนสามารถพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์เรขาคณิตจากระดับ 2 ไประดับ 3 เพียงเล็กน้อยเท่านั้น

ทิพย์รัตน์ นพฤทธิ์ (2548) ได้ทำการพัฒนาการสอนโดยใช้การสอนแบบเปิด และผลของการสอนที่มีต่อระดับการคิดทางเรขาคณิตและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยกลุ่มตัวอย่างคือนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปี่ที่ 2 ของโรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยเชียงใหม่ และกำหนดกลุ่มทดลอง และ กลุ่มควบคุม โดยกลุ่มทดลองได้รับการสอนโดยใช้แผนการสอนซึ่งพัฒนาขึ้นโดยผู้วิจัย โดยยึดแบบรูปของทาบา (Taba Model) และการสอนแบบเปิดและกลุ่มควบคุมได้รับการสอนแบบปกติ ซึ่งสอนตามแบบเรียนและคู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ของสสวท ผลการวิจัยพบว่า กลุ่มทดลองมีระดับการคิดทางเรขาคณิตสูงขึ้นจากระดับการคิดทางเรขาคณิตระดับที่ 2 พัฒนาระดับการคิดทางเรขาคณิตไปสู่ระดับที่ 3

อมรรัตน์ ใจไหว (2551) ได้ทำการศึกษาการพัฒนาแผนจัดกิจกรรมการเรียนการสอน เพื่อส่งเสริมการคิดทางเรขาคณิต ตามแนวการสอนของแวน ฮิลี ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนสามัคคีวิทยาคาร จังหวัดน่าน ปีการศึกษา 2550 ผลการศึกษาทำให้ได้แผนจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามแนวการสอนของแวน ฮิลี เรื่อง การแปลงทางเรขาคณิต สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 จำนวน 4 หน่วย เป็นแผนการสอนที่ส่งเสริมระดับการคิดทางเรขาคณิต 3 ระดับ คือ ขั้นการมองเห็นภาพ ขั้นการวิเคราะห์ และ ขั้นการสรุปที่ไม่เป็นแบบแผน

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

กิจกรรมการเรียนการสอนส่งเสริมการเชื่อมโยง เรื่องการแปลงทางเรขาคณิตกับภูมิปัญญาท้องถิ่นของนักเรียน

จิราวรรณ เทพจินดา (2551) ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัสโดยการใช้สื่อประสมของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนวัดเขาศรีวิชัย จังหวัดสุราษฎร์ธานีกลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนวัดเขาศรีวิชัย จังหวัดสุราษฎร์ธานีภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2550 จำนวน 30 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยคือ แผนการจัดการเรียนรู้จำนวน 15 คาบและแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ผลการวิจัยพบว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัสโดยใช้สื่อประสมหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนซึ่งสูงกว่าเกณฑ์ 60 เปอร์เซนต์อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

งานวิจัยต่างประเทศ

กูเธอเรสและฟอร์ทูนี (Gutierrez and Fortuny, 1991)ได้ทำการศึกษาโดยทำการวิเคราะห์ระดับการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามตัวแบบของแวนฮิลีโดยการพิจารณาคำตอบของนักเรียนในรูประดับของแวน ฮีลี และความถูกต้องแม่นยำทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนเกรด 8 จำนวน 9 คนและนักศึกษาครูเอกประถมศึกษาจำนวน 41 คน โดยแบ่งออกเป็น 3 กลุ่ม คือ กลุ่ม A เป็นนักศึกษาเอกการประถมศึกษาจำนวน 20 คนที่มีความเชี่ยวชาญด้านวิทยาศาสตร์ กลุ่ม B เป็นนักศึกษาเอกการประถมศึกษาจำนวน 20 คนที่มีความเชี่ยวชาญในสาขาอนุบาลและกลุ่ม C เป็นนักเรียนเกรด 8 ผลการวิจัยพบว่า ในกลุ่ม A มีระดับการคิดอยู่ในระดับ 2 กำลังจะก้าวไปในระดับ 3 ส่วนกลุ่ม B อยู่ในระดับ 1 กำลังจะก้าวผ่านไปในระดับ 2 ส่วนกลุ่ม C อยู่ในระดับ 0 กำลังก้าวไปสู่ระดับ 1 และพบว่าระดับการคิดเป็นไปตามลำดับขั้นของตัวแบบแวน ฮีลี

กูเธอเรสและเจมี (Gutierrez and Jaime, 1998) นำ แนวคิดของแวนฮีลีศึกษาวิจัยเกี่ยวกับการใช้แบบประเมินการให้เหตุผลของนักเรียนโดยศึกษาจากการใช้แบบทดสอบชนิดเลือกตอบของยูซิสกิน (1982) และการใช้บทสัมภาษณ์ของ เบอร์เจอร์กับชองเนสสี (1986) พบว่าการใช้บทสัมภาษณ์จะบอกความสามารถในการให้เหตุผลของนักเรียนได้ดีกว่าแต่ยังมีข้อบกพร่องในการให้คะแนน จึงคิดสร้างแบบประเมินการให้เหตุผลของนักเรียนในแนวของแวนฮีลี เป็นแบบประเมินมีจำนวน 8 ข้อ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชาวสเปนจำนวน 309 คน (เป็นนักเรียนประถมระดับ 6-8 และมัธยมศึกษาระดับ 1 -4) แบ่งระดับการให้เหตุผล ของนักเรียนเป็น 4 ระดับ คือ (1) ขั้นการจำ ได้ (2) ขั้นการให้นิยาม (3) ขั้นการแบ่งกลุ่ม และ(4) ขั้นการพิสูจน์ แต่ละระดับมีการแบ่งระดับความสามารถอีก 4 ระดับย่อยๆ ผลการวิจัยพบว่าความสามารถของนักเรียนระดับ

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

ประถมศึกษากับมัธยมศึกษาในระดับ 1 และ 4 ไม่แตกต่างกันความสามารถในระดับ 2 และระดับ 3 นักเรียนระดับมัธยมศึกษามีความสามารถสูงกว่าระดับประถมศึกษา และนักเรียนที่มีความสามารถในระดับ n ต้องผ่านความสามารถในระดับ n-1 ก่อน

ลาริว (Larew, 1999) ได้ศึกษาผลของการเรียนเรขาคณิตโดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์วาดรูปอัตโนมัติเป็นเครื่องช่วยสอนที่มีต่อระดับความคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนวิทยาลัยชุมชน กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนวิทยาลัยชุมชนซึ่งแบ่งออกเป็น 2 กลุ่มคือนักเรียนกลุ่มควบคุมจำนวน 36 คนที่เรียนเรขาคณิตแบบบรรยายและนักเรียนกลุ่มทดลองจำนวน 27 คน ที่เรียนเรขาคณิตโดยใช้โปรแกรมวาดรูปอัตโนมัติ Geo Explorer 1ใน3ของเวลาเรียนเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยคือแบบวัดระดับความคิดทางเรขาคณิตตามรูปแบบแวน ฮิลีของโครงการ CDSSG โดยวัดก่อนและหลังการทดลอง ผลการวิจัยพบว่า จำนวนนักเรียนในกลุ่มทดลองที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตเพิ่มขึ้นไม่สูงกว่าจำนวนนักเรียนในกลุ่มควบคุมที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตเพิ่มขึ้นไม่สูงกว่าจำนวนนักเรียนในกลุ่มควบคุมที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตเพิ่มขึ้นหลังการทดลองในกลุ่มควบคุมนักเรียนที่มีความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 0 มีจำนวนน้อยกว่านักเรียนที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 1 แต่ในกลุ่มทดลองนักเรียนที่มีความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 0 มีจำนวนมากกว่านักเรียนที่มีความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 1

จูลี่ (July, 2001) ได้ศึกษาผลของการใช้ Geometer’s Sketchpad ที่มีต่อความคิดทางเรขาคณิตและความสามารถในการด้านมิติสัมพันธ์ ตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 18 คนของโรงเรียนที่อยู่ในตัวเมือง นักเรียนจะได้รับการสอนโดยใช้ Geometer’s Sketchpad(GSP)เป็นเวลา 10 สัปดาห์มีการทดสอบก่อนและหลังการทดลองโดยการวัดความสามารถด้านมิติสัมพันธ์และระดับความคิดทางเรขาคณิตตามรูปแบบ แวน ฮีลี ผลการวิจัยพบว่า ระดับความคิดทางเรขาคณิตตามรูปแบบ แวน ฮีลี ของนักเรียนหลังการทดลองเพิ่มขึ้นจากก่อนการทดลองโดยเฉพาะนักเรียนที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตตามรูปแบบแวน ฮีลี อยู่ในระดับต่ำ ความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ของนักเรียนเพิ่มขึ้นอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการพัฒนาระดับความคิดทางเรขาคณิตระดับความคิดทาง เรขาคณิตตามแนวการสอนของ แวน ฮิลี แสดงให้เห็นว่าระดับความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตที่เป็นพื้นฐานของเรื่องต่างๆของนักเรียนในระดับชั้นประถมศึกษา มัธยมศึกษา และระดับมหาวิทยาลัยอยู่ในระดับต่ำ นอกจากนี้ ยังมีงานวิจัยบางชิ้น ที่ใช้สิ่งต่างๆ เช่น การใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อเป็นเครื่องมือช่วยนำเสนอรูปแบบการสอนตามแนวการสอนของแวน ฮีลี ซึ่งจะช่วยในการพัฒนาให้นักเรียนมีระดับการคิดทางเรขาคณิตที่สูงขึ้น

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved