

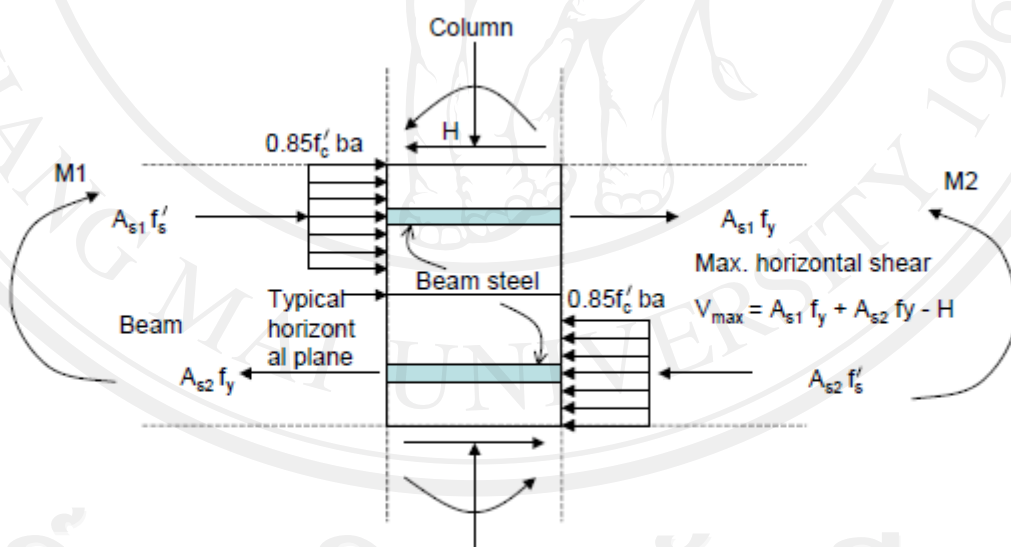
## บทที่ 2

### ทฤษฎี

#### 2.1 จุดต่อคานเสาคอนกรีตเสริมเหล็ก

##### 2.1.1 พฤติกรรมจุดต่อคาน-เสาคอนกรีตเสริมเหล็กภายใต้แรงวิงจักร

ภายใต้น้ำหนักบรรทุกทุกในแนวตั้งจุดต่อคาน-เสาของอาคารจะไม่ได้รับน้ำหนักมากนัก เนื่องจากโมเมนต์ที่คานทั้งสองข้างของจุดต่อมีทิศทางตรงข้ามกัน (โมเมนต์ลบทั้งคู่) ทำให้มีการถ่ายเทโมเมนต์ในจุดต่อไม่มาก แต่เมื่อมีแรงกระทำด้านข้างมากกระทำกับจุดต่อระหว่างเสากับคาน จะทำให้จุดต่อนั้นมีการถ่ายแรงสูงมาก เนื่องจากโมเมนต์ที่ปลายคานทั้งสองข้างของจุดต่อมีทิศทางเดียวกันทำให้เกิดการไม่สมดุลของโมเมนต์ (Unbalance Moment) และก่อให้เกิดแรงเฉือนแนวราบกระทำกับจุดต่อ ในกรณีจุดต่อภายในอาคารสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 2.1

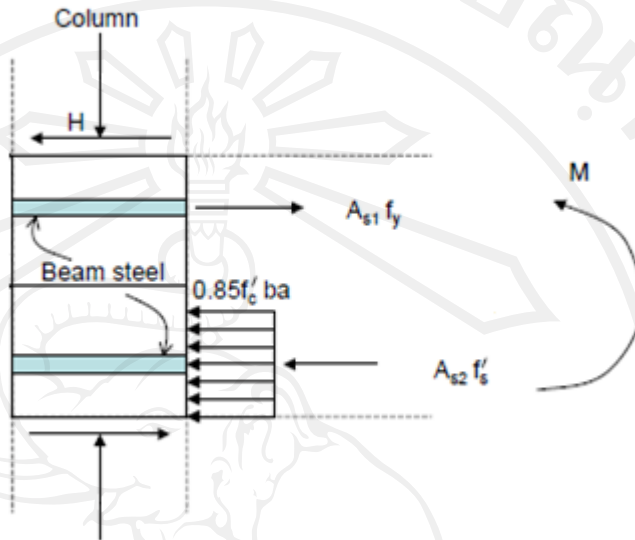


รูปที่ 2.1 แรงเฉือนแนวราบที่กระทำกับจุดต่อภายในอาคาร (อมร, 2553)

โดยแรงเฉือนแนวราบที่กระทำกับจุดต่อนี้สามารถคำนวณได้จากสมการที่ 2.1

$$V_j = A_{s1} f_y + A_{s2} f_y - H \quad (2.1)$$

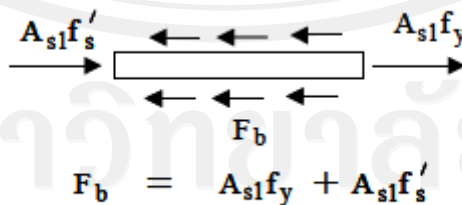
ส่วนกรณีของจุดต่อริมอาคารสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 2.2 และแรงเฉือนแนวราบที่กระทำกับจุดต่อนี้สามารถคำนวณได้จาก สมการที่ 2.2



รูปที่ 2.2 แรงเฉือนแนวราบที่กระทำกับจุดต่อริมอาคาร (อมร, 2553)

$$V_j = A_{s1} f_y - H \quad (2.2)$$

แรงเฉือนแนวราบที่เกิดขึ้นนี้สามารถทำให้จุดต่อเกิดการวิบัติในรูปแบบ Joint Shear Failure ได้ ซึ่งลักษณะสำคัญของการวิบัติในรูปแบบนี้ คือเกิดรอยร้าวทแยงทำมุม 45 องศา ที่บริเวณจุดต่อ นอกจากนี้หากพิจารณาเหล็กเสริมแนวนอนของจุดต่อภายในอาคาร พบว่าปลายเหล็กด้านหนึ่งต้องรับแรงดึงส่วนอีกปลายด้านหนึ่งต้องรับแรงอัดดังรูปที่ 2.3



$$F_b = A_{s1} f_y + A_{s1} f'_s$$

รูปที่ 2.3 แรงกระทำกับเหล็กเสริมในจุดต่อในสภาวะสมดุล (อมร, 2553)

จะเห็นว่าแรงกระทำกับเหล็กเสริมในจุดต่อนั้นมีทิศทางเดียวกัน จึงต้องใช้แรงยึดเหนี่ยวระหว่างคอนกรีตอย่างมากเพื่อให้เกิดความสมดุลของแรงที่กระทำกับเหล็กเสริมนั้น ถ้าแรงยึด

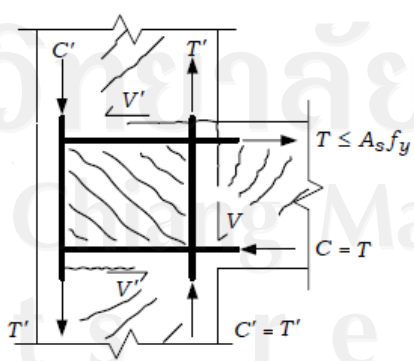
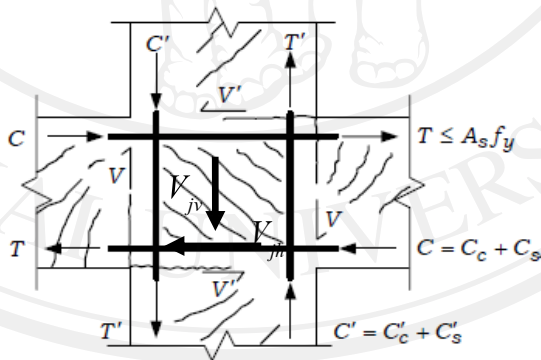
เหนี่ยวระหว่างเหล็กเสริมกับคอนกรีตไม่เพียงพอก็อาจก่อให้เกิดการวิบัติเนื่องจากแรงยึดเหนี่ยว (Bond Failure) การวิบัติในลักษณะนี้จะทำให้โครงสร้างนั้นไม่สามารถขยับยั้งการขยายของรอยร้าวได้ และทำให้เหล็กเกิดการรูดออกจากคอนกรีตจึงเป็นสาเหตุให้เกิดรอยร้าวขนาดใหญ่บริเวณจุดต่อ การวิบัติในลักษณะเช่นนี้เรียกว่าการวิบัติแบบ Bond Pull-Out Failure ซึ่งพบว่าการวิบัติแบบ Joint Shear Failure และ Bond Pull-Out Failure เป็นการวิบัติแบบเปราะจึงไม่เหมาะต่อการต้านทานแรงแผ่นดินไหว ดังนั้นในการออกแบบโครงสร้างต้านทานแรงแผ่นดินไหวจำเป็นต้องไม่ให้เกิดการวิบัติที่จุดต่อ และให้เกิดการวิบัติที่คานแทนตามหลักการคานอ่อน-เสาแข็ง

**2.1.2 แรงเฉือนแนวราบที่กระทำกับจุดต่อคาน-เสาคอนกรีตเสริมเหล็ก**

จุดต่อของอาคารมีความสำคัญอย่างมากเมื่ออาคารนั้นต้องรับแรงจากแผ่นดินไหว เนื่องจากเกิดแรงเฉือนแนวราบกระทำเป็นจำนวนมากที่จุดต่อ เป็นผลให้เกิดแรงคดและแรงดิ่งขึ้นพร้อมกันจนทำให้คอนกรีตบริเวณจุดต่อเกิดการแตกร้าวดังแสดงในรูปที่ 2.4 ซึ่งสามารถคำนวณหาแรงเฉือนแนวราบ และแนวตั้งได้จากสมการที่ (2.3) และ (2.4) ตามลำดับ

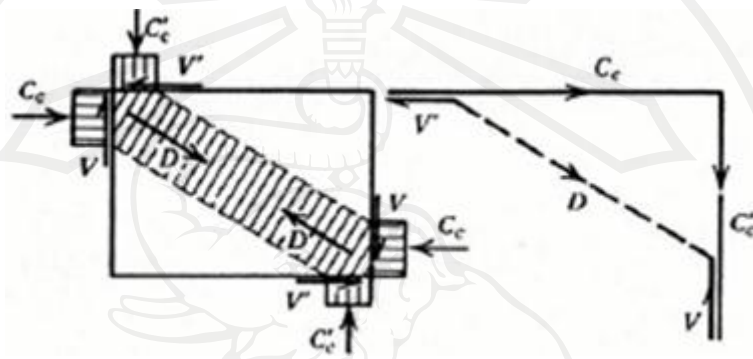
$$V_{jh} = T + C_c + C_s - V' \tag{2.3}$$

$$V_{jv} = T' + C'_c + C'_s - V \tag{2.4}$$



รูปที่ 2.4 รอยร้าว และแรงภายในจุดต่อเมื่อรับแรงแผ่นดินไหว (อมร, 2553)

แรงเฉือนในจุดต่อสามารถต้านทานได้โดยกำลังรับแรงเฉือนของคอนกรีต ( $V_c$ ) และเหล็กเสริมรับแรงเฉือนในจุดต่อ ( $V_s$ ) โดยความสามารถในการรับแรงเฉือนของคอนกรีตสามารถอธิบายได้โดยใช้หลักการชิ้นส่วนรับแรงอัดแนวทแยง (Diagonal Compression Strut) กล่าวคือ หน่วยแรงอัดในคอนกรีตที่เกิดจากคาน ( $C_c$ ) และหน่วยแรงอัดในคอนกรีตที่เกิดจากเสา ( $C'_c$ ) ทั้งหมดรวมกันทำให้เกิดแรงลัพธ์ของคอนกรีตขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 2.5



รูปที่ 2.5 แรงลัพธ์ที่เกิดจากหน่วยแรงอัดในคอนกรีตของคานและเสา (อมร, 2553)

แรงประกอบย่อยในแนวราบและแนวตั้งของ Diagonal Compression Strut จะช่วยต้านทานแรงเฉือนที่เกิดขึ้นในจุดต่อ หลังจากนั้นจึงออกแบบเหล็กเสริมรับแรงเฉือนในจุดต่อมาช่วยรับแรงเฉือนในส่วนที่เกินจากกำลังรับแรงเฉือนของคอนกรีต อย่างไรก็ตามเมื่อเกิดแรงแผ่นดินไหวที่กระทำซ้ำไปมาหลายรอบ มีผลให้ความสามารถในการรับแรงเฉือนของคอนกรีตลดลงเนื่องจากคอนกรีตเกิดการแตกร้าว และทำให้ภาระในการรับแรงเฉือนของเหล็กเสริมเพิ่มมากขึ้น ถ้าปริมาณเหล็กเสริมรับแรงเฉือนในจุดต่อไม่เพียงพอก็อาจทำให้เกิดรอยแตกเป็นแนวทแยงเนื่องจากแรงเฉือน (Diagonal Shear Crack) และทำให้เกิดการวิบัติที่จุดต่อได้ในที่สุด

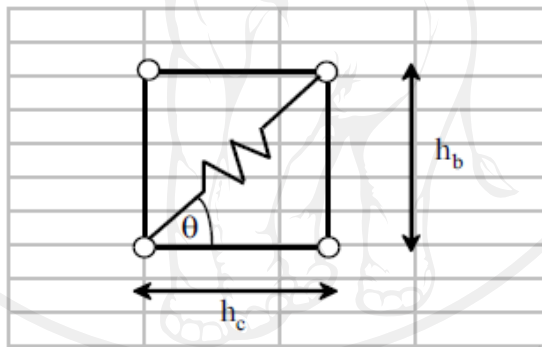
การเสริมเหล็กรับแรงเฉือนในแนวนอนและแนวตั้งในจุดต่อมีความสำคัญอย่างยิ่งเพื่อป้องกันไม่ให้เกิดการวิบัติเนื่องจากแรงเฉือนที่จุดต่อ โดยเสริมเหล็กรับแรงเฉือนในแนวนอนด้วยเหล็กปลอกเสริมพิเศษเพิ่มเติมในจุดต่อ ส่วนเหล็กเสริมรับแรงเฉือนในแนวตั้งอาจใช้เหล็กยื่นในเสาจัดเรียงให้กระจายทั่วทั้งเสาและจุดต่อเป็นต้น

### 2.1.3 แบบจำลองในการออกแบบจุดต่อเพื่อต้านทานแรงเฉือน

แบบจำลองที่ใช้ในการออกแบบจุดต่อเพื่อต้านทานแรงเฉือนต้องสามารถจำลองพฤติกรรม รวมทั้งแสดงจุดอ่อนได้อย่างเหมาะสม โดยแบบจำลองที่นิยมใช้กันในปัจจุบันมีอยู่ 2 รูปแบบคือ Panel Model และ Compression Strut Model ซึ่งในรูปแบบแรกนั้น จะสมมุติให้

คอนกรีตสามารถรับแรงเฉือนที่จุดต่อได้เท่ากับกำลังรับแรงเฉือนของคอนกรีต และเหล็กเสริมช่วยรับแรงเฉือนส่วนที่เกินจากกำลังรับแรงเฉือนของคอนกรีตต่อไป ส่วนใน Compression Strut Model นั้นพิจารณาให้คอนกรีตรับแรงในแนวทแยงที่เกิดขึ้นจากแรงอัดกระทำที่มุมของจุดต่อ โดยช่วงที่มีน้ำหนักระทำกับจุดต่อไม่มากนักพฤติกรรมของจุดต่อมีลักษณะคล้ายกับ Panel Model แต่เมื่อน้ำหนักระทำมากขึ้นจุดต่อจะมีพฤติกรรมใกล้เคียงกับ Compression Strut Model เนื่องจากเหล็กเสริมเกิดการรูดไถลออกจากคอนกรีต ดังนั้นโดยทั่วไปจึงนิยมใช้แบบจำลอง Compression Strut Model ในการคำนวณแรงเฉือนในจุดต่อมากกว่า

การจำลองจุดต่อระหว่างคานกับเสาประกอบด้วยชิ้นส่วน 4 ชิ้น ลักษณะเป็นกล่องสี่เหลี่ยมมีจุดต่อเป็นแบบยึดหมุน (Pin Connection) และมีชิ้นส่วนกลางเชื่อมในแนวทแยงมุมเพื่อเพิ่มความเสถียรภาพให้กับแบบจำลอง ดังรูปที่ 2.6 ซึ่งจุดหมุนพลาสติกเนื่องจากแรงตามแนวแกน ถูกกำหนดที่กึ่งกลางของแบบจำลอง



รูปที่ 2.6 แบบจำลองจุดต่อระหว่างคานกับเสา (ATC-40, 1996)

พารามิเตอร์ที่สำคัญสำหรับคำนวณกำลังรับแรงเฉือนของจุดต่อ ขึ้นอยู่กับชนิดของจุดต่อ (ภายใน หรือ ภายนอก) และคานขวาง ตามข้อแนะนำของ ACT-40 ค่ากำลังรับแรงเฉือนของจุดต่อ ( $V_n$ ) และ แรงตามแนวแกน (Axial Strength) ของชิ้นส่วนทแยงมุม แสดงดังสมการที่ (2.5) และ (2.6) ตามลำดับ

$$V_n = 0.262 \gamma \sqrt{f'_c} A_j \quad (2.5)$$

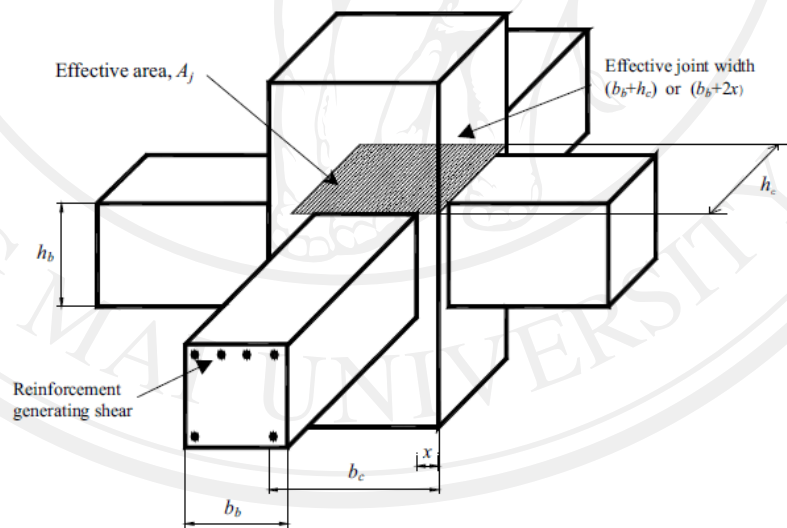
$$\text{axial strength} = \frac{V_n}{\cos \theta} \quad (2.6)$$

โดยค่า  $\gamma$  ได้แสดงไว้ดังตารางที่ 2.1

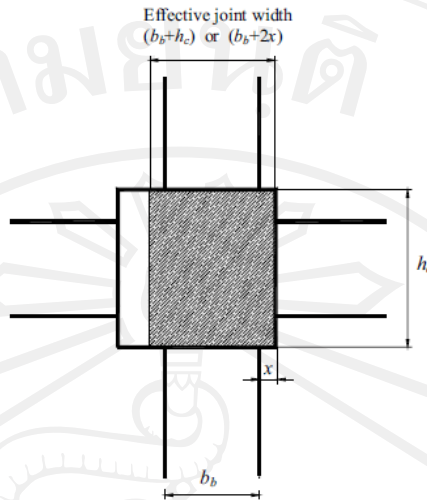
ตาราง 2.1 ค่า  $\gamma$  ที่ใช้ในการคำนวณหาแรงเฉือนที่จุดต่อ (ATC-40, 1996)

$\rho$	Value of $\gamma$				
	Interior Joint with transverse Beam	Interior Joint without transverse Beam	Exterior Joint with transverse Beam	Exterior Joint without transverse Beam	Knee Joint
$< 0.003$	12	10	8	6	4
$\geq 0.003$	20	15	15	12	8

โดย  $A_j$  คือ พื้นที่ประสิทธิผลของจุดต่อคำนวณด้วยค่าผลคูณระหว่างความลึกของจุดต่อกับความกว้างของจุดต่อมีหน่วยเป็นตารางเซนติเมตร แสดงดังรูปที่ 2.7 และ 2.8



รูปที่ 2.7 พื้นที่ประสิทธิผลของจุดต่อ (ATC-40, 1996)



รูปที่ 2.8 พื้นที่ประสิทธิผลของจุดต่อ (ATC-40, 1996)

พื้นที่ประสิทธิผลของ Diagonal Strut ( $A_{st}$ ) แสดงด้วยสมการ ( $A_{st} = a_s b_s$ ) โดยที่  $a_s$  คือความลึกของ Diagonal Strut มีค่าเท่ากับ  $\sqrt{a_b^2 + a_c^2}$  โดย  $a_b$  และ  $a_c$  คือค่าความลึกของ Compression Zone ในคานและเสาตามลำดับ และ  $b_s$  คือความกว้างของ Diagonal Strut หรือความกว้างของจุดต่อ แต่เนื่องจากในขณะที่เกิดการวิบัติของจุดต่อ Compression Zone ของจุดหมุนในคานเกิดใกล้บริเวณเสาจึงกำหนดให้ความลึกของ Diagonal Strut  $a_s = a_c$  ซึ่งสามารถคำนวณได้จากสมการที่ (2.7)

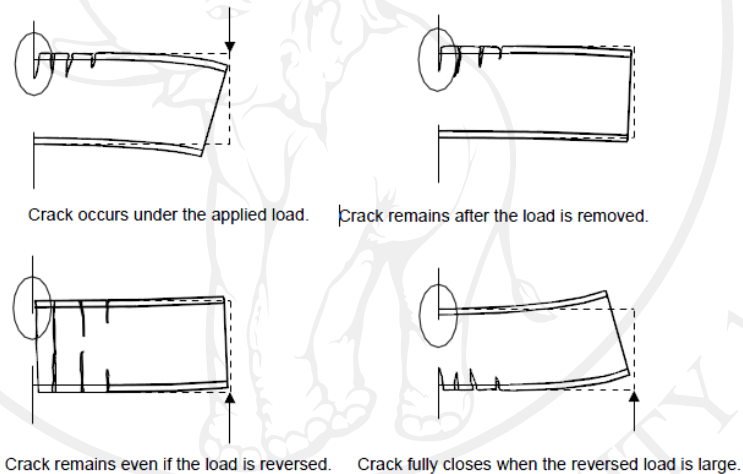
$$a_c = \left(0.25 + 0.85 \frac{N}{A_g f_c}\right) h_c \quad (2.7)$$

โดยที่  $N$  คือแรงตามแนวแกน ส่วน  $A_g$  คือพื้นที่หน้าตัดเสา และ  $h_c$  คือความหนาของเสาในทิศที่แรงกระทำ

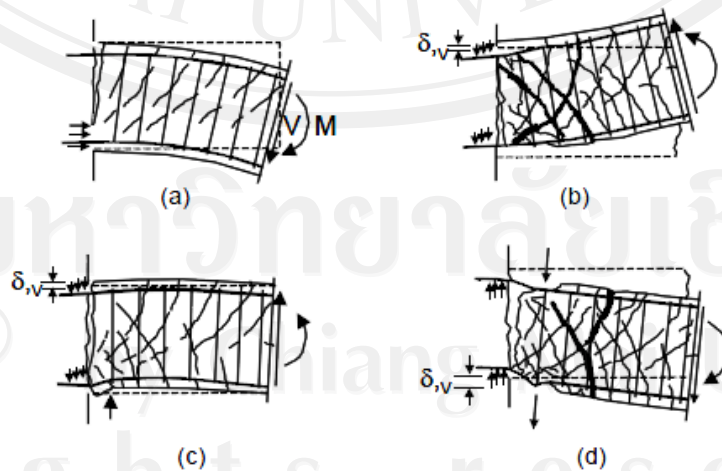
#### 2.1.4 พฤติกรรมของคานคอนกรีตเสริมเหล็กภายใต้แรงวัลจจักร

พฤติกรรมการรับแรงวัลจจักรของคานขึ้นอยู่กับอัตราส่วนช่วงการเหินต่อความลึกประสิทธิผล  $a/d$  ถ้ามีค่ามากคานก็จะได้รับผลของโมเมนต์ดัดมาก (Flexure-Dominated Beams) แต่หากอัตราส่วน  $a/d$  มีค่าน้อยคานก็จะได้รับผลของแรงเหินมาก (Shear-Dominated Beams) โดยพฤติกรรมของคานที่ได้รับผลจากโมเมนต์ดัดมากนั้นจะขึ้นกับปริมาณเหล็กเสริมรับแรงดัดทำให้

คานมีความเหนียวและความสามารถในการสลายพลังงานสูง ซึ่งรูปแบบการวิบัติแสดงไว้ดังรูปที่ 2.9 ส่วนพฤติกรรมของคานที่ได้รับผลของแรงเฉือนมากนั้นมีความเหนียวและความสามารถในการสลายพลังงานได้ต่ำ เนื่องจากรอยร้าวทแยงจากแรงเฉือนที่เกิดขึ้นในระหว่างให้น้ำหนักบรรทุกในทิศทางตรงข้ามยังเปิดอยู่ทำให้คอนกรีตไม่สามารถถ่ายแรงเฉือนได้ ความสามารถในการรับแรงเฉือนจึงมีเฉพาะในเหล็กปลอกเท่านั้น และเมื่อคานได้รับแรงวัฏจักรทำให้เกิดการโยกตัวในทิศไปกลับหลายรอบอาจทำให้เกิดการแตกร้าวของคอนกรีตบริเวณจุดรองรับของคาน รอยร้าวนี้ทำให้คอนกรีตขาดความต่อเนื่องกับจุดรองรับแรงเฉือนที่หน้าตัด จึงถูกรองรับด้วยเหล็กในแนวนอนของคาน โดยที่เหล็กปลอกไม่ได้ช่วยในการรับแรงเฉือน ซึ่งการวิบัติลักษณะนี้เรียกว่า Sliding Shear Failure มักเกิดกับคานที่มีอัตราส่วน  $a/d$  ต่ำมากๆ ซึ่งลักษณะการวิบัติจากแรงเฉือนแสดงไว้ดังรูปที่ 2.10



รูปที่ 2.9 รูปแบบการวิบัติของคานเนื่องจากได้รับผลของโมเมนต์ค้ด้มาก



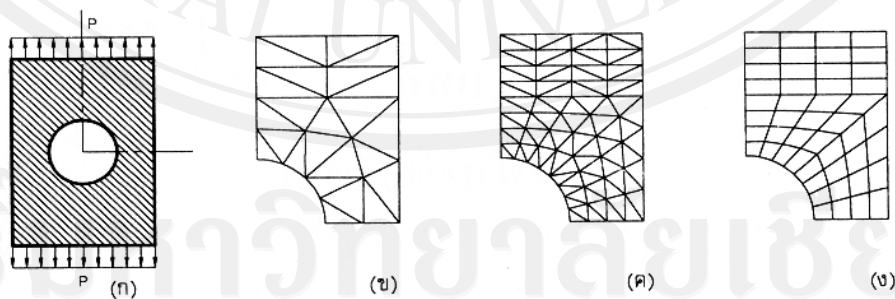
รูปที่ 2.10 รูปแบบการวิบัติของคานเนื่องจากได้รับผลของแรงเฉือนมาก

### 2.1.5 พฤติกรรมของเสาคอนกรีตเสริมเหล็กภายใต้แรงอัดจักร

ความแตกต่างระหว่างเสากับคาน คือเสามีแรงตามแนวแกนมากระทำซึ่งแรงตามแนวแกนเกิดจากน้ำหนักบรรทุกทุกแนวตั้งและน้ำหนักบรรทุกทุกแนวราบรวมทั้งความเร่งของผิวดินในแนวตั้งด้วย แรงตามแนวแกนซึ่งเป็นแรงอัดมีทั้งข้อดีและข้อเสียต่อพฤติกรรมการรับแรงอัดจักรของเสาข้อดี คือช่วยให้รอยร้าวไม่เปิดกว้างคอนกรีตจึงถ่ายแรงได้ดีขึ้น แต่ข้อเสียคือทำให้ความเหนียวลดลงเนื่องจากแรงอัดทำให้คอนกรีตหลุดร่อนออกมาได้ง่าย และยังมีผลของการขยายโมเมนต์เนื่องจากแรงตามแนวแกน หรือ P-  $\Delta$  Effect ดังนั้นถ้าระดับของแรงอัดตามแนวแกนมีค่าไม่มากนักจะเป็นผลดีต่อเสาแต่หากแรงอัดมีค่าสูงอาจเป็นผลเสียต่อเสามากกว่า

## 2.2 ทฤษฎีไฟไนต์เอลิเมนต์

ปัจจุบันการนำวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาใช้งานวิศวกรรมเป็นที่นิยมอย่างกว้างขวาง อาทิ เช่น การวิเคราะห์เกี่ยวกับการถ่ายเทความร้อน, การไหลของของเหลวตลอดจนงานที่เกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์โครงสร้างต่างๆ โดยวิธีการนี้ คือการแบ่งชิ้นส่วนขนาดใหญ่ออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ดังรูปที่ 2.11 และสมมุติให้มีการถ่ายเทคุณสมบัติระหว่างเอลิเมนต์ย่อยผ่านโหนดของแต่ละเอลิเมนต์ ซึ่งในแต่ละโหนดจะประกอบด้วยค่าต่างๆ เช่น ระยะเวลาเคลื่อนที่ หรือแรงภายในซึ่งเรียกค่าดังกล่าวนี้ว่า Degree of Freedom ซึ่งการวิเคราะห์โดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นั้นนิยมใช้เครื่องคอมพิวเตอร์เป็นเครื่องมือช่วยในการวิเคราะห์เนื่องจากต้องวิเคราะห์และเก็บข้อมูลจำนวนมาก โดยจำนวนข้อมูลขึ้นอยู่กับจำนวนการแบ่งเอลิเมนต์ย่อย ถ้ามีการแบ่งละเอียดมากผลลัพธ์ที่ได้ก็จะมีผลละเอียดและแม่นยำ แต่ก็ต้องใช้ระยะเวลาและพื้นที่ในการเก็บข้อมูลเพิ่มมากขึ้นตามไปด้วย

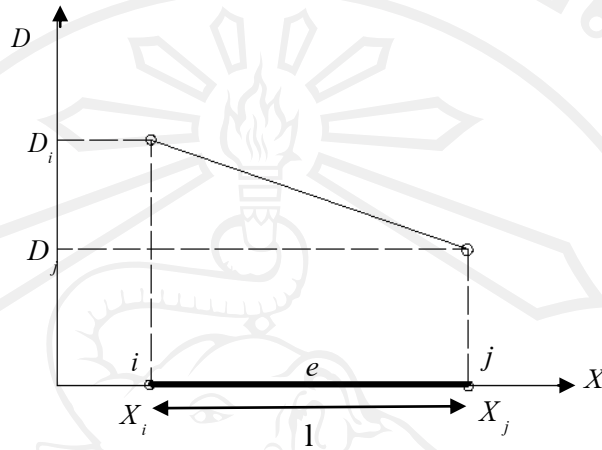


รูปที่ 2.11 การแบ่งชิ้นส่วนหลักออกเป็นชิ้นส่วนย่อย (เดช, 2538)

### 2.2.1 การวิเคราะห์เอลิเมนต์ชนิดหนึ่งมิติ

ในหัวข้อนี้จะอธิบายเกี่ยวกับรูปแบบของเอลิเมนต์และวิธีการสร้าง Shape Function ของเอลิเมนต์ชนิดหนึ่งมิติ โดยยกตัวอย่างการวิเคราะห์ที่เกี่ยวข้องกับการกระจัด (Displacement)

ของวัตถุ ซึ่งอิลิเมนต์ย่อยของวัตถุดังกล่าวแสดงได้ดัง รูปที่ 2.12 เมื่อ  $D$  คือ การกระจัดภายในอิลิเมนต์ และ  $X$  คือ ความยาวของอิลิเมนต์ที่ตำแหน่งใดๆ



รูปที่ 2.12 อิลิเมนต์หนึ่งมิติ และ เส้นแสดงการกระจัดของอิลิเมนต์

จากรูปที่ 2.12 สามารถสร้างสมการความสัมพันธ์ของการกระจัดภายในอิลิเมนต์ได้โดยใช้สมการเส้นตรง

$$D^{(e)} = c_1 + c_2 X \quad (2.8)$$

เมื่อโหนด  $i$  มี  $D = D_i$  ที่  $X = X_i$  และ โหนด  $j$  มี  $D = D_j$  ที่  $X = X_j$  แทนค่าของโหนด  $i$  และ  $j$  ลงในสมการที่ (2.8) จะได้สมการของโหนดทั้งสอง ดังสมการที่ (2.9) และ (2.10)

$$D_i = c_1 + c_2 X_i \quad (2.9)$$

$$D_j = c_1 + c_2 X_j \quad (2.10)$$

แก้สมการเพื่อหาค่า  $c_1$  และ  $c_2$  จะได้

$$c_1 = \frac{D_i X_j - D_j X_i}{X_j - X_i} \quad (2.11)$$

$$c_2 = \frac{D_j - D_i}{X_j - X_i} \quad (2.12)$$

เมื่อทราบค่า  $c_1$  และ  $c_2$  สามารถนำมาเขียนสมการของการกระจายภายในอิลิเมนต์ใน  
เทอมของโหนดที่ตำแหน่งต่างๆ ได้ดังสมการที่ (2.13)

$$D^{(e)} = \frac{D_i X_j - D_j X_i}{X_j - X_i} + \frac{D_j - D_i}{X_j - X_i} X \quad (2.13)$$

จัดกลุ่มระหว่าง  $D_i$  กับ  $D_j$  จะได้

$$D^{(e)} = \left( \frac{X_j - X}{X_j - X_i} \right) D_i + \left( \frac{X - X_i}{X_j - X_i} \right) D_j \quad (2.14)$$

จากสมการ (2.14) สามารถกำหนด Shape Function ได้ดังนี้

$$S_i = \frac{X_j - X}{X_j - X_i} = \frac{X_j - X}{l} \quad (2.15)$$

$$S_j = \frac{X - X_i}{X_j - X_i} = \frac{X - X_i}{l} \quad (2.16)$$

เมื่อ  $l$  คือ ความยาวของอิลิเมนต์

และสามารถเขียนสมการการกระจายภายในอิลิเมนต์ในเทอมของ Shape Function ได้

$$D^{(e)} = S_i D_i + S_j D_j \quad (2.17)$$

จากสมการที่ (2.17) สามารถเขียนในรูปเมทริกได้ คือ

$$D^{(e)} = [s_i \ s_j] \begin{Bmatrix} D_i \\ D_j \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

จากสมการที่ (2.18) นี้สามารถนำมาใช้หาค่าตัวแปรที่ไม่ทราบค่าอื่นๆได้ตามต้องการ เช่น ความเค้น, ความเครียดที่โหนด  $i$  และ  $j$  ดังกล่าว และสามารถเขียนสมการในรูปทั่วไปได้ดังสมการที่ (2.19)

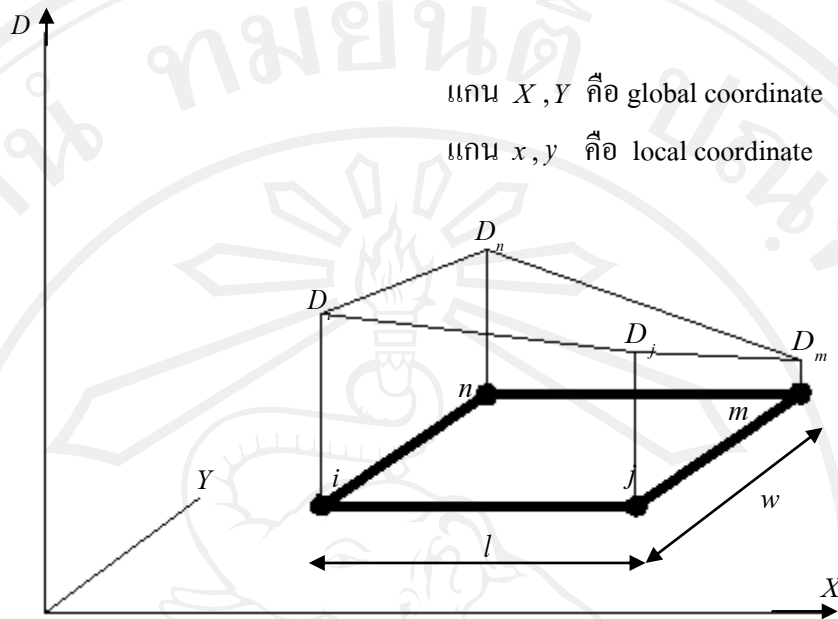
$$\psi^{(e)} = [s_i \ s_j] \begin{Bmatrix} \psi_i \\ \psi_j \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

เมื่อ  $\psi_i$  และ  $\psi_j$  คือตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของโหนด  $i$  และ  $j$  ตามลำดับ

นอกจากการวิเคราะห์อิลิเมนต์ชนิดหนึ่งมิติดังที่กล่าวมาข้างต้นแล้ว ยังสามารถเพิ่มความละเอียดในการวิเคราะห์ได้โดยการเพิ่มจำนวนของอิลิเมนต์ หรือการเพิ่มดีกรีของฟังก์ชัน โพลีโนเมียลที่ใช้ในการวิเคราะห์ เช่น การใช้ฟังก์ชันกำลังสอง หรือ กำลังสาม ตามต้องการ

### 2.2.2 การวิเคราะห์อิลิเมนต์ชนิดสองมิติ

อิลิเมนต์ชนิดสองมิติที่นิยมใช้มี 2 รูปแบบ คืออิลิเมนต์สี่เหลี่ยม และอิลิเมนต์สามเหลี่ยม ซึ่งการเลือกจะใช้จะขึ้นอยู่กับรูปร่างของวัตถุ และ ความละเอียดในการแบ่งอิลิเมนต์ โดยที่อิลิเมนต์สี่เหลี่ยมนิยมใช้กับวัตถุที่ไม่มีความซับซ้อน ส่วนอิลิเมนต์สามเหลี่ยมนั้นสามารถใช้สร้างแบบจำลองไฟไนต์อิลิเมนต์ที่มีความซับซ้อนหรือมีส่วนโค้งได้สะดวกกว่า ซึ่งในหัวข้อนี้ได้ยกตัวอย่างการวิเคราะห์ปัญหาการกระจัดเหมือนในหัวข้อการวิเคราะห์อิลิเมนต์ชนิดหนึ่งมิติในหัวข้อที่ผ่านมา ซึ่งสามารถใช้ฟังก์ชันเส้นตรงเพื่อประมาณการกระจัดของอิลิเมนต์ในทิศทางตามแกน  $X$  และแกน  $Y$  ได้ ดังรูปที่ 2.13



รูปที่ 2.13 อีลิเมนต์สองมิติแบบสี่เหลี่ยม และ เส้นแสดงการกระจัดภายในอีลิเมนต์

จากรูปที่ 2.13 สามารถเขียนสมการของการกระจัดโดยประมาณค่าการกระจัดกระจายภายในอีลิเมนต์ในรูปแบบของฟังก์ชันของแกน  $X$  และ  $Y$  ได้ดังนี้

$$D^{(e)} = b_1 + b_2x + b_3y + b_4xy \quad (2.20)$$

เมื่อ  $b_1, b_2, b_3, b_4$  ใช้แทนตัวแปรของโหนด  $i, j, m, n$  ตามลำดับ

$$D = D_i \text{ ที่ } x=0 \text{ และ } y=0$$

$$D = D_j \text{ ที่ } x=1 \text{ และ } y=0$$

$$D = D_m \text{ ที่ } x=1 \text{ และ } y=w$$

$$D = D_n \text{ ที่ } x=0 \text{ และ } y=w$$

เมื่อแทนค่าสภาวะของโหนดต่างๆ ลงในสมการที่ (2.20) แก้สมการหาค่า  $b_1, b_2, b_3,$

$b_4$  จะได้ว่า

$$b_1 = D_i, b_2 = \frac{1}{l}(D_j - D_i), b_3 = \frac{1}{w}(D_n - D_i), b_4 = \frac{1}{lw}(D_i - D_j + D_m - D_n) \quad (2.21)$$

แทนค่า  $b_1, b_2, b_3, b_4$  ลงในสมการที่ (2.21) แล้วทำการจัดกลุ่มของตัวแปร จะได้สมการของการกระจัดภายในอิเลิเมนต์ในเทอมของ Shape Function คือ

$$D^{(e)} = \left[ \begin{array}{cccc} S_i & S_j & S_m & S_n \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} D_i \\ D_j \\ D_m \\ D_n \end{array} \right\} \quad (2.22)$$

เมื่อ

$$S_i = \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left(1 - \frac{y}{w}\right)$$

$$S_j = \frac{x}{l} \left(1 - \frac{y}{w}\right)$$

$$S_m = \frac{xy}{lw}$$

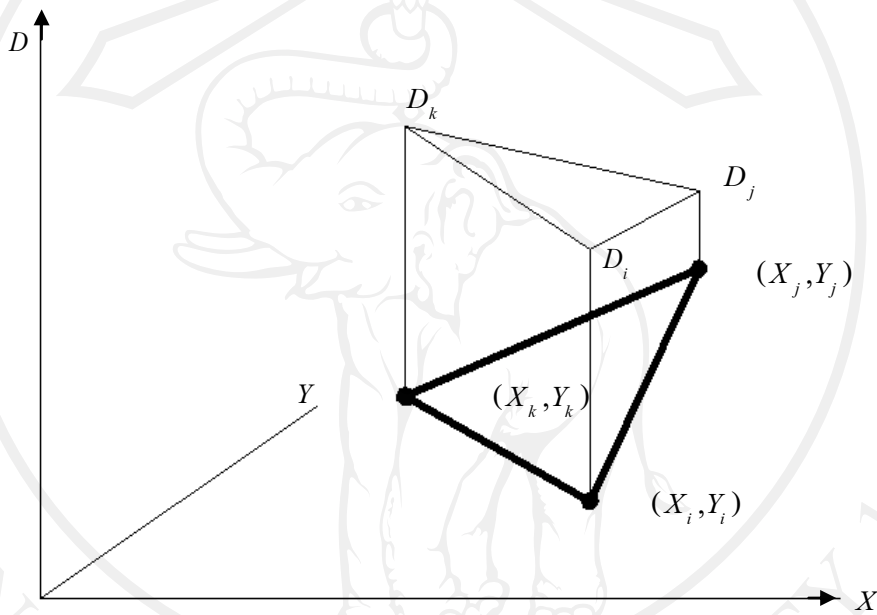
$$S_n = \frac{y}{w} \left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

สมการของ Shape Function ที่ได้มานี้สามารถนำไปใช้หาค่าตัวแปรอื่นที่ต้องการทราบได้ ดังนั้นจึงเขียนสมการที่ (2.22) ในรูปของตัวแปรที่ไม่ทราบค่าได้ดังสมการที่ (2.23)

$$\psi^{(e)} = \left[ \begin{array}{cccc} S_i & S_j & S_m & S_n \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \psi_i \\ \psi_j \\ \psi_m \\ \psi_n \end{array} \right\} \quad (2.23)$$

ในส่วนของอิลิเมนต์ชนิดสองมิติรูปแบบสามเหลี่ยม ดังรูปที่ 2.14 มีคุณสมบัติเหนือกว่าอิลิเมนต์สี่เหลี่ยมตรงที่สามารถสร้างแบบจำลองไฟไนต์อิลิเมนต์ที่มีส่วนโค้งได้สะดวกกว่านั้น มีวิธีการวิเคราะห์ที่เหมือนกับกับอิลิเมนต์สี่เหลี่ยม โดยมีสมการของการกระจัดที่อยู่ภายในอิลิเมนต์ ดังสมการที่ (2.24)

$$D^{(e)} = a_1 + a_2X + a_3Y \tag{2.24}$$



รูปที่ 2.14 อิลิเมนต์สองมิติแบบสามเหลี่ยม และ เส้นแสดงการกระจัดภายในอิลิเมนต์

พิจารณาการกระจัดที่โหนด  $i, j, k$

$$D = D_i \text{ ที่ } X = X_i \text{ และ } Y = Y_i$$

$$D = D_j \text{ ที่ } X = X_j \text{ และ } Y = Y_j$$

$$D = D_k \text{ ที่ } X = X_k \text{ และ } Y = Y_k$$

แทนตัวแปรของโหนดต่างๆลงในสมการที่ (2.24) จะได้

$$D_i = a_1 + a_2X_i + a_3Y_i$$

$$D_j = a_1 + a_2X_j + a_3Y_j \tag{2.25}$$

$$D_k = a_1 + a_2 X_k + a_3 Y_k$$

แก้สมการและจัดรูปแบบให้อยู่ในเทอมของ  $a_1, a_2, a_3$  จะได้

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2A} \left[ (X_j Y_k - X_k Y_j) D_i + (X_k Y_i - X_i Y_k) D_j + (X_i Y_j - X_j Y_i) D_k \right] \\ a_2 &= \frac{1}{2A} \left[ (Y_j - Y_k) D_i + (Y_k - Y_i) D_j + (Y_i - Y_j) D_k \right] \\ a_3 &= \frac{1}{2A} \left[ (X_k - X_j) D_i + (X_i - X_k) D_j + (X_j - X_i) D_k \right] \end{aligned} \quad (2.26)$$

เมื่อ  $A$  คือพื้นที่ของอิไลเมนต์สามเหลี่ยม ซึ่งคำนวณจาก

$$2A = X_i (Y_j - Y_k) + X_j (Y_k - Y_i) + X_k (Y_i - Y_j) \quad (2.27)$$

แทนค่า  $a_1, a_2, a_3$  ลงในสมการ (2.27) และทำการจัดกลุ่มให้อยู่ในเทอมของ  $D_i, D_j, D_k$  จะได้

$$D^{(e)} = \begin{bmatrix} S_i & S_j & S_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_i \\ D_j \\ D_k \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

เมื่อ  $S_i, S_j, S_k$  คือ Shape Function ดังสมการที่ (2.29) ถึง (2.31)

$$S_i = \frac{1}{2A} (\alpha_i + \beta_i X + \delta_i Y) \quad (2.29)$$

$$S_j = \frac{1}{2A} (\alpha_j + \beta_j X + \delta_j Y) \quad (2.30)$$

$$S_k = \frac{1}{2A}(\alpha_k + \beta_k X + \delta_k Y) \quad (2.31)$$

เมื่อ

$$\alpha_i = X_j Y_k - X_k Y_j, \beta_i = Y_j - Y_k, \delta_i = X_k - X_j$$

$$\alpha_j = X_k Y_i - X_i Y_k, \beta_j = Y_k - Y_i, \delta_j = X_i - X_k$$

$$\alpha_k = X_i Y_j - X_j Y_i, \beta_k = Y_i - Y_j, \delta_k = X_j - X_i$$

### 2.2.3 การวิเคราะห์อีลิเมนต์ชนิดสามมิติ

ในหัวข้อนี้กล่าวถึงการวิเคราะห์อีลิเมนต์ชนิดสามมิติ เริ่มด้วยการวิเคราะห์อีลิเมนต์สามมิติที่มีจำนวน โหนด 4 โหนด หลังจากนั้นจึงทำการวิเคราะห์อีลิเมนต์สามมิติที่มีความละเอียดซับซ้อนมากขึ้น คือการวิเคราะห์อีลิเมนต์สามมิติที่มี 8 โหนด ซึ่งเป็นอีลิเมนต์ที่มีจำนวนมากที่สุดในงานวิจัยครั้งนี้

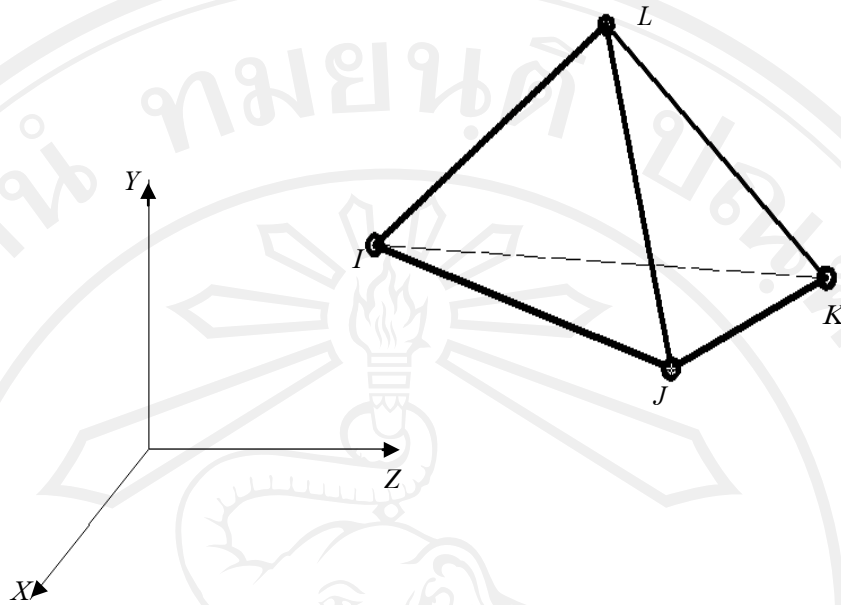
อีลิเมนต์สามมิติที่มีจำนวน โหนดเท่ากับ 4 โหนด ในแต่ละ โหนด ประกอบด้วย 3 Degree of Freedom ในทิศทาง  $X, Y, Z$  ดังรูปที่ 2.15 โดยอีลิเมนต์ชนิดนี้ คืออีลิเมนต์พื้นฐานที่ใช้ในงานวิเคราะห์ปัญหาเกี่ยวกับกลศาสตร์ของแข็ง ซึ่งการหา Shape Function คล้ายกับการวิเคราะห์อีลิเมนต์สองมิติชนิดสามเหลี่ยม

เริ่มต้นการวิเคราะห์โดยการพิจารณาสมการระยะเคลื่อนที่ ดังสมการที่ (2.32) ถึง (2.34)

$$u = C_{11} + C_{12}X + C_{13}Y + C_{14}Z \quad (2.32)$$

$$v = C_{21} + C_{22}X + C_{23}Y + C_{24}Z \quad (2.33)$$

$$w = C_{31} + C_{32}X + C_{33}Y + C_{34}Z \quad (2.34)$$



รูปที่ 2.15 อลิเมนต์สามมิติชนิดสี่โหนด

พิจารณาการเคลื่อนที่ของโหนดในสภาวะต่างๆ เมื่อ

$$u = u_I \text{ ที่ } X = X_I, Y = Y_I, Z = Z_I$$

$$u = u_J \text{ ที่ } X = X_J, Y = Y_J, Z = Z_J$$

$$u = u_K \text{ ที่ } X = X_K, Y = Y_K, Z = Z_K$$

$$u = u_L \text{ ที่ } X = X_L, Y = Y_L, Z = Z_L$$

ในการทำงานเดียวกันเมื่อพิจารณา  $v$  และ  $w$  คือ

$$v = v_I \text{ ที่ } X = X_I, Y = Y_I, Z = Z_I$$

$$v = v_J \text{ ที่ } X = X_J, Y = Y_J, Z = Z_J$$

$$v = v_K \text{ ที่ } X = X_K, Y = Y_K, Z = Z_K$$

$$v = v_L \text{ ที่ } X = X_L, Y = Y_L, Z = Z_L$$

$$w = w_I \text{ ที่ } X = X_I, Y = Y_I, Z = Z_I$$

$$w = w_J \text{ ที่ } X = X_J, Y = Y_J, Z = Z_J$$

$$w = w_K \text{ ที่ } X = X_K, Y = Y_K, Z = Z_K$$

$$w = w_L \text{ ที่ } X = X_L, Y = Y_L, Z = Z_L$$

แทน  $u$  ,  $v$  และ  $w$  ลงในสมการที่ (2.32) ถึง (2.34) จะได้สมการทั้งหมด 12 สมการ และ 12 ตัวแปร หลังจากนั้นทำการแก้สมการหาค่าคงที่  $C$  และนำค่าคงที่นั้นกลับไปแทนลงในสมการที่ (2.32) ถึง (2.34) อีกครั้ง จะได้

$$u = S_1 u_I + S_2 u_J + S_3 u_K + S_4 u_L \quad (2.35)$$

$$v = S_1 v_I + S_2 v_J + S_3 v_K + S_4 v_L \quad (2.36)$$

$$w = S_1 w_I + S_2 w_J + S_3 w_K + S_4 w_L \quad (2.37)$$

โดยที่ shape function คือ

$$S_1 = \frac{1}{6V} (a_I + b_I X + c_I Y + d_I Z)$$

$$S_2 = \frac{1}{6V} (a_J + b_J X + c_J Y + d_J Z)$$

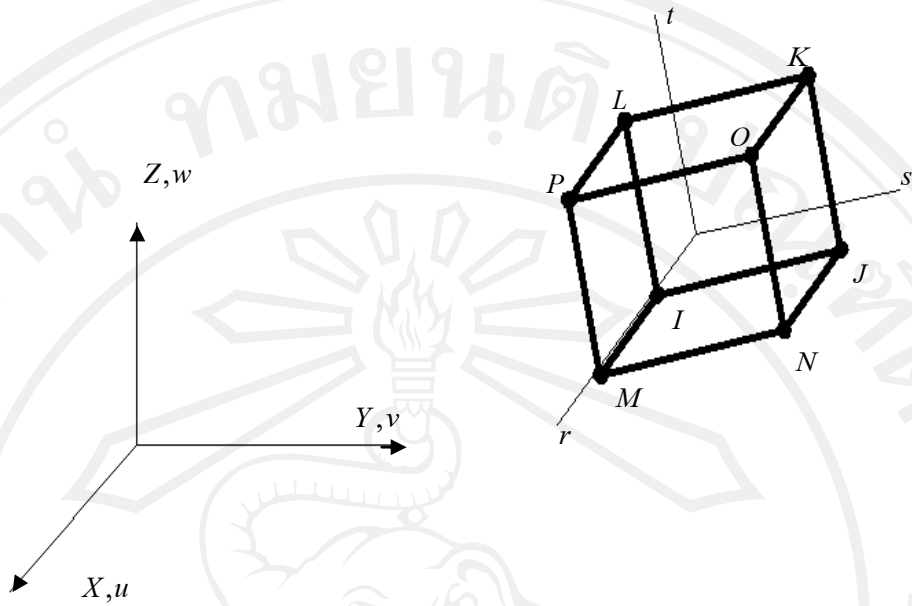
$$S_3 = \frac{1}{6V} (a_K + b_K X + c_K Y + d_K Z)$$

$$S_4 = \frac{1}{6V} (a_L + b_L X + c_L Y + d_L Z)$$

เมื่อ  $V$  คือปริมาตรของอีลิเมนต์สามมิติแบบ 4 โหนด ซึ่งสามารถคำนวณได้จาก

$$6V = \det \begin{vmatrix} 1 & X_I & Y_I & Z_I \\ 1 & X_J & Y_J & Z_J \\ 1 & X_K & Y_K & Z_K \\ 1 & X_L & Y_L & Z_L \end{vmatrix} \quad (2.38)$$

ในการวิเคราะห์อีลิเมนต์ 3 มิติสามารถเพิ่มความละเอียดและความแม่นยำได้โดยวิเคราะห์อีลิเมนต์ชนิด 8 โหนด ในแต่ละโหนดประกอบด้วย 3 Degree of Freedom ในทิศทาง X,Y,Z ดังรูปที่ 2.16



รูปที่ 2.16 อลิเมนต์สามมิติชนิดแปดโหนด

โดยสมการการเคลื่อนที่ และ Shape Function ของโอลิเมนต์ชนิดนี้ คือ

$$u = \frac{1}{8}(u_I(1-s)(1-t)(1-r) + u_J(1+s)(1-t)(1-r))$$

$$+ \frac{1}{8}(u_K(1+s)(1+t)(1-r) + u_L(1-s)(1+t)(1-r))$$

$$+ \frac{1}{8}(u_M(1-s)(1-t)(1+r) + u_N(1+s)(1-t)(1+r))$$

$$+ \frac{1}{8}(u_O(1+s)(1+t)(1+r) + u_P(1-s)(1+t)(1+r))$$
(2.39)

$$v = \frac{1}{8}(v_I(1-s)(1-t)(1-r) + v_J(1+s)(1-t)(1-r))$$

$$+ \frac{1}{8}(v_K(1+s)(1+t)(1-r) + v_L(1-s)(1+t)(1-r))$$

$$+ \frac{1}{8}(v_M(1-s)(1-t)(1+r) + v_N(1+s)(1-t)(1+r))$$

$$+ \frac{1}{8}(v_O(1+s)(1+t)(1+r) + v_P(1-s)(1+t)(1+r))$$
(2.40)

$$\begin{aligned}
w = & \frac{1}{8}(w_I(1-s)(1-t)(1-r) + w_J(1+s)(1-t)(1-r)) \\
& + \frac{1}{8}(w_K(1+s)(1+t)(1-r) + w_L(1-s)(1+t)(1-r)) \\
& + \frac{1}{8}(w_M(1-s)(1-t)(1+r) + w_N(1+s)(1-t)(1+r)) \\
& + \frac{1}{8}(w_O(1+s)(1+t)(1+r) + w_P(1-s)(1+t)(1+r))
\end{aligned} \tag{2.41}$$

## 2.3 การวิเคราะห์ไร้เชิงเส้น

### 2.3.1 การวิเคราะห์ไร้เชิงเส้นเบื้องต้น

โครงสร้างในงานวิศวกรรมโยธาโดยส่วนใหญ่มีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น (Linear Elastic) อย่างไรก็ตามโครงสร้างทุกประเภทมีการตอบสนองแบบไร้เชิงเส้น (Nonlinear) ก่อนเกิดการวิบัติ ซึ่งการวิเคราะห์โครงสร้างแบบไร้เชิงเส้นนี้ทำให้ได้ผลลัพธ์ใกล้เคียงกับโครงสร้างจริงมากขึ้น แต่ในการสร้างแบบจำลองโครงสร้างและการคำนวณก็มีความยุ่งยากมากขึ้นตามไปด้วย นอกจากนี้ผู้คำนวณต้องเลือกวิธีการแก้สมการแบบไร้เชิงเส้นให้เหมาะสมเพื่อให้ได้ผลการคำนวณที่ถูกต้องและไม่ใช้ระยะเวลาในการคำนวณมากเกินไป

การวิเคราะห์โครงสร้างแบบไร้เชิงเส้นจะลดข้อจำกัดเนื่องจากสมมุติฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้างแบบเชิงเส้นลง โดยสามารถวิเคราะห์โครงสร้างแบบไร้เชิงเส้นได้ 3 รูปแบบดังต่อไปนี้

- พิจารณาพฤติกรรมของวัสดุเป็นแบบยืดหยุ่น (Elastic) และพิจารณาผลของการเปลี่ยนแปลงรูปร่างในสมการสมดุล ซึ่งเรียกว่าวิธี Geometric Nonlinearity Analysis การวิเคราะห์ในลักษณะนี้นิยมใช้กับโครงสร้างที่ไม่มีความสมบูรณ์ก่อนได้รับแรงกระทำ และโครงสร้างที่ไวต่อ P- $\Delta$  Effect ซึ่งเป็นโมเมนต์ที่ทำให้โครงสร้างเสียเสถียรภาพ

- พิจารณาเฉพาะผลของการเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติของวัสดุภายใต้แรงกระทำแต่ไม่พิจารณาผลของการเปลี่ยนแปลงรูปร่างในสมการความสมดุลซึ่งเรียกว่าวิธี Material Nonlinearity Analysis วิธีนี้นิยมใช้กับโครงสร้างมีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างแบบพลาสติก (Plastic Deformation) และโครงสร้างที่มีการแตกหรือการคืบ (Creep)

- พิจารณาทั้งผลของการเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติของวัสดุและผลของการเปลี่ยนแปลงรูปร่างพร้อมกัน ซึ่งเรียกว่าวิธี Geometric and Material Nonlinearity Analysis โดยโครงสร้างที่ใช้การวิเคราะห์ในลักษณะนี้ คือโครงสร้างที่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างแบบพลาสติกเกิดขึ้นร่วมกับ

$P-\Delta$  Effect และ  $P-\delta$  Effect รวมถึงโครงสร้างที่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของจุดเชื่อมต่อ และโครงสร้างที่มี Panel Zone Deformation

### 2.3.2 การวิเคราะห์โครงสร้างที่มีพฤติกรรมแบบไร้เชิงเส้นโดยวิธีเมตริกซ์

ในการวิเคราะห์โครงสร้างแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น (Linear Elastic) ถ้ากำหนดให้ Linear Elastic Global Stiffness Matrix อยู่ในรูป  $[K_e]$  ดังแสดงในสมการที่ (2.42)

$$[K_e]\{\Delta\} = \{P\} \quad (2.42)$$

เนื่องจากการวิเคราะห์โครงสร้างแบบ Nonlinear มีความยุ่งยากในการแก้สมการหลายชั้นแบบไร้เชิงเส้น (Simultaneous Nonlinear Equation) จึงใช้วิธีการแบ่งสมการสมดุลเส้นตรงออกเป็นเส้นย่อย เพื่อที่สามารถประมาณสมการดังกล่าวว่าเป็นเส้นตรงได้โดย Global Stiffness Matrix ของเส้นย่อยนั้นสามารถเขียนได้ในรูปแบบของเมตริกซ์ดังนี้

$$[K_t]\{d\Delta\} = \{dP\} \quad (2.43)$$

เมื่อ  $[K_t]$  คือ Tangent Stiffness Matrix ส่วน  $\{d\Delta\}$  คือ Vector ของการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของโหนดที่เปลี่ยนแปลงตามขั้นตอนการวิเคราะห์ และ  $\{dP\}$  คือ Vector ของแรงกระทำและแรงปฏิกิริยาของโหนดที่เปลี่ยนแปลงตามขั้นตอนการวิเคราะห์

โดยทั่วไปแล้ว  $[K_t]$  จะประกอบด้วยส่วนที่เป็นแบบ Linear Elastic และส่วนที่เป็นฟังก์ชันกับแรงกระทำหรือการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งในจุดที่ทำการวิเคราะห์ ทำให้เขียนสมการ (2.43) ในรูปของ

$$[K_t + K_g]\{d\Delta\} = \{dP\} \quad (2.44)$$

เมื่อ  $[K_g]$  คือ Geometric Stiffness Matrix ซึ่งแสดงการเปลี่ยนแปลงของความแข็งของโครงสร้างเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงรูปร่างและการเปลี่ยนแปลงตำแหน่ง

ในการทำ First Order Inelastic Analysis จะเขียนสมการความสมดุลของจากโครงสร้างที่ยังไม่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง ดังนั้นสมการ (2.43) จะอยู่ในรูปของ

$$[K_e + K_m]\{d\Delta\} = \{dP\} \quad (2.45)$$

เมื่อ  $[K_m]$  คือ Plastic Reduction Matrix ซึ่งแสดงการเปลี่ยนแปลงความแข็งของโครงสร้างเนื่องจากพฤติกรรมแบบ Inelastic

ในการทำ Second Order Inelastic Analysis ต้องพิจารณาทั้ง Geometric Nonlinearity และ Material Nonlinearity โดยใช้สมการความสมดุลของโครงสร้างที่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างไปแล้ว ดังนั้น สมการ (2.43) จะอยู่ในรูป

$$[K_e + K_g + K_m]\{d\Delta\} = \{dP\} \quad (2.46)$$

การคำนวณ Elastic Critical Load ของโครงสร้างสมการ Global Stiffness Equation จะถูกจัดอยู่ในรูป Eigen value Problem โดยที่สมการความสมดุลที่จุดวิกฤตอยู่ในรูป

$$[K_e + \lambda K_g^*]\{\Delta\} = \{0\} \quad (2.47)$$

เมื่อ  $[K_g^*]$  คือ Geometric Stiffness Matrix ซึ่งมาจาก Reference Load  $\{P_{ref}\}$ ,  $\lambda$  คือ Load Factor ของ  $\{P_{ref}\}$  และ  $\{\Delta\}$  คือรูปร่างที่เกิดจากการโก่งเดาะ

ค่า Elastic Critical Load จะเท่ากับค่าต่ำสุดของ  $\lambda$  ที่สอดคล้องกับในสมการที่ (2.47) ในกรณีที่  $\{\Delta\} \neq 0$  คู่กับ  $\{P_{ref}\}$  หรือ  $\lambda \{P_{ref}\}$  และค่า  $\{\Delta\}$  ที่สอดคล้องกับ  $\lambda \{P_{ref}\}$  คือการโก่งเดาะของโครงสร้าง

การปรับเปลี่ยนค่า Material Constants ใน  $[k_e]$  สามารถใช้สมการ (2.47) ในการหา Inelastic Critical Load ได้ โดยการลดรูปสมการให้อยู่ในรูปของ

$$\frac{1}{\lambda}\{\Delta_f\} = -[k_{ef}]^{-1}[k_{gf}^*]\{\Delta_f\} \quad (2.48)$$

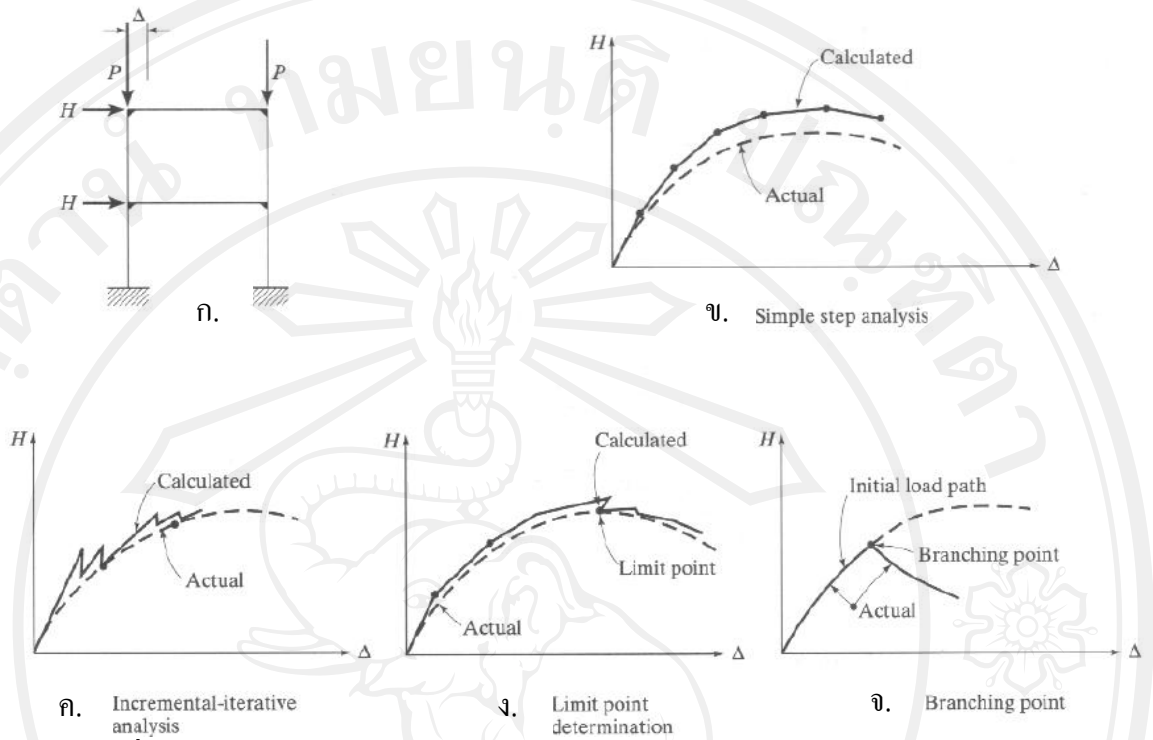
โดย Subscript,  $f$  แทนเมตริกซ์ที่สัมพันธ์กับ Degree of Freedom อิสระเนื่องจากเมตริกซ์  $[k_{ef}]$  ต้องถูกนำมา Inverse ดังนั้นเมตริกซ์ดังกล่าวต้องเป็น Nonsingular Matrix แต่โดยทั่วไปแล้วผลคูณของ  $[k_{ef}]^{-1}[k_{gf}^*]$  จะไม่สมมาตร (Un-symmetric Matrix)

### 2.3.3 สมการที่ใช้ในการวิเคราะห์และผลลัพธ์ที่ได้

ในการวิเคราะห์โครงสร้างแบบ Linear Elastic นั้นสามารถหาการตอบสนองของโครงสร้างได้โดยตรงโดยการแก้สมการความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่างแรงและการเปลี่ยนตำแหน่งของโครงสร้าง แต่ในการวิเคราะห์โครงสร้างแบบ Nonlinear การตอบสนองของโครงสร้างเป็นฟังก์ชันกับแรงกระทำซึ่งยากต่อการแก้สมการหลายชั้นแบบไร้เชิงเส้น ดังนั้นจึงทำการวิเคราะห์โครงสร้างตามขั้นตอนดังนี้

1. ทำการแก้สมการอนุพันธ์ของชิ้นส่วน โครงสร้างและทำการตัดทอนที่มี Order สูงๆ ที่ไม่มีความสำคัญออกเพื่อลดระดับความเป็น Nonlinear ของสมการ
2. ทำการสมมุติ Shape Function ซึ่งเป็นความสัมพันธ์เชิงเส้นตรงระหว่างแรงกระทำและการเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลายของชิ้นส่วนของโครงสร้างให้เหมาะสมกับโครงสร้างที่พิจารณาอยู่
3. ทำการรวมสมการ Linear Global Stiffness Matrix เข้าด้วยกัน
4. ทำการหาคำตอบของสมการโดยการหาคำตอบของ Simultaneous Nonlinear Equation ในขั้นตอนนี้สามารถทำได้หลายวิธี ดังที่แสดงในรูปที่ 2.17 ซึ่งวิธีที่นิยมคือวิธี Euler หรือวิธี Simple-Step ดังที่แสดงในรูปที่ 2.17(ข) โดยมีขั้นตอนการทำได้ดังนี้
  1. ทำการหา Tangent Stiffness Matrix โดยใช้ค่าแรงกระทำที่มีค่าน้อย
  2. ทำการกำหนด Increment ของแรงหรือการเปลี่ยนตำแหน่งและทำการแก้สมการที่ได้เพื่อหาค่าตัวแปรที่ไม่ทราบค่าในที่นี้คือค่าการเปลี่ยนตำแหน่งหรือค่าแรงปฏิกิริยา
  3. นำค่าการเปลี่ยนตำแหน่งหรือค่าแรงที่ได้แทนกลับไปยัง Element Stiffness Equation เพื่อหาค่าแรงภายใน
  4. ทำการหา Tangent Stiffness Matrix ใหม่จากค่าแรงภายในและค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่ได้
  5. ขั้นตอนการวิเคราะห์จะถูกกระทำจนถึงค่าแรงหรือค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่กำหนด
  6. นำค่าแรงกระทำค่า, แรงภายใน และค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่จุดสิ้นสุดของแต่ละ Increment มารวมกัน เพื่อหาค่าแรงกระทำ, ค่าแรงภายในและค่าการเปลี่ยนตำแหน่งรวม

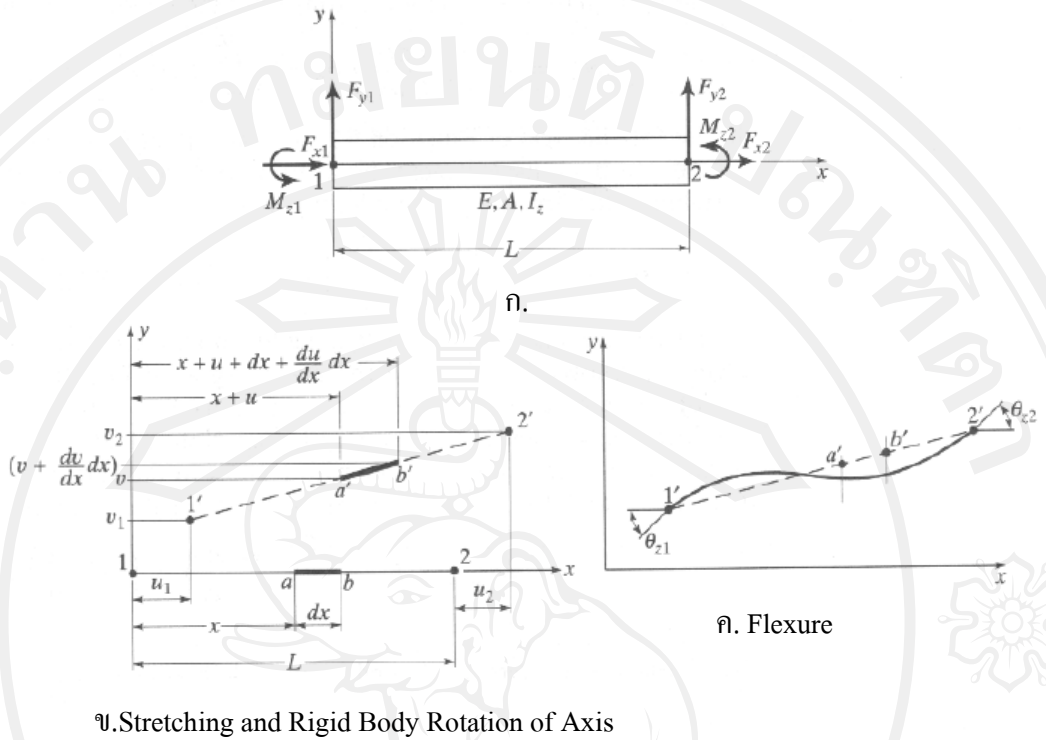
เนื่องจากวิธีนี้ไม่มีการตรวจสอบความสมดุลของแรงกระทำภายนอกและแรงที่เกิดขึ้นภายในดังนั้นในบางกรณีกราฟแสดงการตอบสนองของโครงสร้างที่ได้ อาจแตกต่างจากการตอบสนองจริงของโครงสร้างอย่างไรก็ตามการเพิ่ม Increment ทีละน้อยและโครงสร้างนั้นมีพฤติกรรมแบบ Nonlinear ไม่สูงมากนัก ดังเช่นโครงสร้างส่วนใหญ่ในงานวิศวกรรมโยธาแล้วการวิเคราะห์โครงสร้างโดยวิธีนี้สามารถหาคำตอบที่มีความละเอียดเพียงพอ



รูปที่ 2.17 การหาคำตอบ Simultaneous Nonlinear Equation (ลีทิชชัย, 2545)

2.3.4 การวิเคราะห์โครงสร้างที่มีพฤติกรรมไร้เชิงเส้นทางเรขาคณิต

วิธี Matrix Stiffness Method ใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้างที่มีพฤติกรรมไร้เชิงเส้นทางเรขาคณิต (Geometrical Nonlinear) ซึ่งการหา Geometric Stiffness Matrix  $[K_g]$  ของชิ้นส่วนโครงสร้างดังกล่าว ทำได้โดยพิจารณาชิ้นส่วนของโครงสร้างที่มีหน้าตัดสมมาตรรอบแกนสองแกนหลัก (แกน y และ แกน z ) ซึ่งถูกกระทำโดยแรงในแนวแกน (Axial Force) และโมเมนต์ดัด (Bending Moment) รอบแกน z ดังแสดงในรูปที่ 2.18(ก) โดยภายใต้แรงกระทำดังกล่าวชิ้นส่วนของโครงสร้างอาจเกิดการเปลี่ยนตำแหน่ง, การยืดหดตัว และการดัดในเวลาเดียวกัน ทำให้อาจมีอิทธิพลต่อกันได้



รูปที่ 2.18 ชิ้นส่วนของโครงสร้างที่มีพฤติกรรมไร้เชิงเส้นทางเรขาคณิต (สิทธิชัย, 2545)

ซึ่ง Geometrical Stiffness Matrix ของชิ้นส่วนของโครงสร้างที่ต้องการหา สามารถแบ่งออกเป็นสองรูปแบบคือ Geometrical Stiffness Matrix ที่ถูกกระทำโดยแรงในแนวแกนและ Geometrical Stiffness Matrix ที่ถูกกระทำโดยแรงในแนวแกนและโมเมนต์ดัดร่วมกัน

**2.3.4.1 Geometric Stiffness Matrix ของชิ้นส่วนโครงสร้างรับแรงในแนวแกน**

การวิเคราะห์โครงสร้างแบบ Linear Elastic กำหนดให้ความเครียด (Strain) ที่เกิดขึ้นในโครงสร้างมีค่าน้อยมาก (Infinitesimal Strains) แต่ในการวิเคราะห์โครงสร้างแบบ Nonlinear กำหนดให้ความเครียดที่เกิดขึ้นในโครงสร้างมีค่าที่น้อยแต่ยังสามารถวัดได้ (Finite Small Strains)

รูปที่ 2.18(ข) แสดง Differential Element ของชิ้นส่วนของโครงสร้าง  $ab$  ซึ่งมีความยาว  $dx$  หลังจาก que ชิ้นส่วนโครงสร้างเกิดการเปลี่ยนตำแหน่งแบบวัตถุแกร่งและเกิดความเครียดในแนวแกนความยาวของส่วนเล็กๆ  $ab$  เปลี่ยนเป็น

$$a'b' = \left[ 1 + 2 \frac{du}{dx} + \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} dx$$

กำหนดให้

$$2\frac{du}{dx} + \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 = d_{ad}$$

ดังนั้น

$$a'b' = [1 + d_{ab}]^{1/2} dx$$

ใช้ Binomial Theorem และการกำจัดเทอมที่มี Order สูงออกได้

$$\frac{a'b'}{dx} = 1 + \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left[ \frac{du^2}{dx} + \frac{dv^2}{dx} \right]$$

จากนิยามของความเครียดตั้งฉาก (Normal Strain) สามารถเขียน Finite Strain ได้ในรูป

$$e_{fin} = \frac{a'b' - ab}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 \right] \quad (2.49)$$

ใช้ Principle of Virtual Displacement สามารถเขียนสมการ Internal Virtual Work เนื่องจาก Virtual Displacement ของชิ้นส่วนของโครงสร้างจาก Reference Configuration ได้ในรูป

$$\delta W_{int} = \int_{vol} \sigma_x \delta e_{fin} d(vol) \quad (2.50)$$

แทนสมการที่ (2.49) ลงในสมการที่ (2.50) แล้วทำการ Integration ตลอดความยาวของชิ้นส่วนของโครงสร้างจะได้

$$\delta W_{int} = \int_0^L \sigma_x A \left( \frac{d\delta u}{dx} \right) dx + \frac{1}{2} \int_0^L \sigma_x A \left[ \delta \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \delta \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 \right] dx \quad (2.51)$$

เนื่องจากกำหนดให้  $\delta(du/dx) = (d\delta u)dx$  ใน Integral เทอมแรกของสมการที่ (2.51) ดังนั้นสมการดังกล่าวจะใช้ได้ในกรณีที่โครงสร้างมีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างน้อยมากเท่านั้น

และเมื่อแทนความสัมพันธ์ของหน่วยแรงและความเครียด  $\sigma_x = E(du/dx)$  ลงใน Integral แรก และกำหนดให้  $\sigma_x A$  ใน Integral ที่สองเท่ากับ  $F_{x2}$  จะได้

$$\delta W_{int} = \int_0^L \left( \frac{du}{dx} \right) EA \left( \frac{d\delta u}{dx} \right) dx + \frac{1}{2} F_{x2} \int_0^L \left[ \delta \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \delta \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 \right] dx \quad (2.52)$$

จากสมการที่ (2.52) ได้ว่า Integral เทอมแรกให้ผลลัพธ์เป็น Linear Elastic Stiffness matrix  $[K]$  ของชิ้นส่วนของโครงสร้างที่ถูกกระทำโดยแรงในแนวแกนในรูป

$$[K] = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

และ Integral เทอมที่สองจะให้ผลลัพธ์เป็น Geometric Stiffness Matrix  $[K_g]$

เนื่องจาก Virtual Operator ถูกพิจารณาเป็น Differential Operator เทียบกับตัวแปร  $du/dx$  และ  $dv/dx$  ได้ ดังนั้น Internal Virtual Work ของ Integral เทอมที่สองเขียนใหม่ได้ในรูป

$$\delta W_{int,g} = F_{x2} \int_0^L \left[ \left( \frac{d\delta u}{dx} \frac{du}{dx} \right) + \left( \frac{d\delta v}{dx} \frac{dv}{dx} \right) \right] dx \quad (2.53)$$

หา Element Stiffness Matrix โดยใช้ Principle of Virtual Displacement และ Shape Function จะได้ว่า

$$[K_g] = F_{x2} \int_0^L \left[ \{N'_u\} \{N'_u\}^T + \{N'_v\} \{N'_v\}^T \right] dx \quad (2.54)$$

เมื่อ  $\{N'_u\}^T$  และ  $\{N'_v\}^T$  คือ Shape Function ในกรณีของชิ้นส่วนโครงสร้างรับแรงในแนวแกนของการเปลี่ยนตำแหน่ง  $u$  และ  $v$  ตามลำดับ และ  $\{N'_u\}^T$  และ  $\{N'_v\}^T$  คือ Derivatives ของ Shape Function ดังกล่าวและจาก  $\xi = x/L$

จะได้ว่า

$$u = (1 - \zeta)u_1 + \zeta u_2 \quad \text{และ} \quad v = (1 - \zeta)v_1 + \zeta v_2 \quad (2.55)$$

ดังนั้น

$$\{N'_u\}^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{pmatrix} \quad \text{และ} \quad \{N'_v\}^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

แทนสมการที่ (2.55) และ (2.56) ลงในสมการที่ (2.54) จะได้ว่า

$$[K_g] = \frac{F_{x2}}{L} \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (2.57)$$

ดังนั้นจึงพบได้ว่า Geometric Stiffness Matrix เป็นฟังก์ชันกับแรงในแนวแกนที่กระทำอยู่บนชิ้นส่วนของโครงสร้าง

#### 2.3.4.2 Geometric Stiffness Matrix ของชิ้นส่วนโครงสร้างรับแรงแนวแกน และ โมเมนต์ดัด

ผลของการดัดถูกนำมาพร้อมกับ Geometric Stiffness Matrix ได้โดยการนำความเครียด เนื่องจากการดัดมารวมเข้ากับความเครียดเนื่องจากแรงในแนวแกนจาก Elastic Beam Theory ความเครียดเนื่องจากการดัดอยู่ในรูป

$$e_{bending} = -\frac{y}{\rho} = -y \frac{d^2 v}{dx^2}$$

เมื่อนำความเครียดเนื่องจากการดัดมารวมกับความเครียดเนื่องจากแรงตามแนวแกนจะได้ Finite Strain  $e_{fin}$  อยู่ในรูป

$$e_{fin} = \frac{du}{dx} - y \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 \right] \quad (2.58)$$

แทนสมการ (2.58) ในสมการที่ (2.50) และให้  $\sigma_x = -y(M_z / I_z)$  โดยที่  $I_z = \int_A y^2 dA$  จากนั้นทำการ Integrate ตลอดความยาวของคาน และให้  $\delta(d^2 v / dx^2) = (d^2 \delta v / dx^2)$  ทำให้สมการของ Internal Virtual Work เนื่องจาก Virtual Displacement ของชิ้นส่วนของโครงสร้างจาก Reference Configuration อยู่ในรูป

$$\delta W_{int} = \int_0^L \sigma_x A \left( \frac{d\delta u}{dx} \right) dx + \int_0^L M_z \left( \frac{d^2 \delta v}{dx^2} \right) dx + \frac{1}{2} \int_0^L \sigma_x A \left[ \delta \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \delta \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 \right] dx \quad (2.59)$$

แทนความสัมพันธ์ของหน่วยแรงและความเคี้ยว  $\sigma_x = E(du / dx)$  ลงใน Integral แรกจากนั้นแทนความสัมพันธ์ของโมเมนต์คัตและควมโค้ง (Curvature)  $M = E I_z (d^2 v / dx^2)$  ลงใน integral ที่สอง สุดท้ายทำการกำหนด  $\sigma_x A$  ใน Integral ที่สามเท่ากับ  $F_{x2}$  จะได้

$$\delta W_{int} = \int_0^L \left( \frac{du}{dx} \right) EA \left( \frac{d\delta u}{dx} \right) dx + \int_0^L \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right) EI_z \left( \frac{d^2 \delta v}{dx^2} \right) dx + \frac{1}{2} F_{x2} \int_0^L \left[ \delta \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \delta \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 \right] dx \quad (2.60)$$

Integral เทอมแรกให้ผลลัพธ์เป็น Linear Elastic Stiffness Matrix ของชิ้นส่วนของโครงสร้างที่ถูกกระทำโดยแรงในแนวแกนในรูป

$$[k] = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

Integral เทอมที่สองให้ผลลัพธ์เป็น Linear Elastic Stiffness Matrix ของชิ้นส่วนของโครงสร้างที่ถูกกระทำโดยโมเมนต์คัตในรูป

$$[k] = \frac{EI_z}{L} \begin{pmatrix} \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 4 & -\frac{6}{L} & 2 \\ -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 2 & -\frac{6}{L} & 4 \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

Integral ในเทอมที่สามหาได้โดยใช้ Shape Function ของชิ้นส่วนโครงสร้างรับแรงในแนวแกนและชิ้นส่วนโครงสร้างรับแรงดัดในรูป

$$u = (1 - \xi)u_1 + \xi u_2$$

$$v = (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)v_1 + (1 - 2\xi + \xi^2)x\theta_{z1} + (3\xi^2 - 2\xi^3)v_2 - (-\xi - \xi^2)\theta_{z2}$$

เมื่อ  $\xi = x/L$  จากนั้นแทน Derivatives ของ Shape Function ดังกล่าวลงในสมการที่ (2.54) จะได้ Geometric Stiffness Matrix เป็นฟังก์ชันกับแรงในแนวแกนกระทำร่วมกับโมเมนต์ดัดของชิ้นส่วนโครงสร้างในรูป

$$[k_g] = \frac{F_{x2}}{L} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & \theta_{z1} & u_2 & v_2 & \theta_{z2} \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{L}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{L}{10} \\ 0 & \frac{L}{10} & \frac{2L^2}{15} & 0 & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{L}{10} & 0 & \frac{6}{5} & -\frac{L}{10} \\ 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} & 0 & -\frac{L}{10} & \frac{2L^2}{15} \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

### 2.3.5 การวิเคราะห์โครงสร้างที่มีพฤติกรรมของวัสดุไร้เชิงเส้น

Matrix Stiffness Method คือวิธีที่ใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้างที่มีพฤติกรรมของวัสดุแบบไร้เชิงเส้น (Material Nonlinear) ซึ่งโครงสร้างที่ศึกษาเป็นโครงสร้างที่ทำด้วยวัสดุเหนียว (Ductile Material) ที่สามารถเปลี่ยนแปลงรูปร่างได้มากโดยไม่มีการแตกหักและไม่เกิดการเสียเสถียรภาพ โดยวัสดุเหนียวจะถูกสมมุติให้มีพฤติกรรมแบบ Elastic-Perfectly Plastic อย่างไรก็ตามวิธีการวิเคราะห์โครงสร้างที่ทำการศึกษาได้ใช้วิธีข้อหมุนพลาสติก (Plastic Hinge Method) เท่านั้น เนื่องจากเป็นวิธีที่สามารถวิเคราะห์โครงสร้างทางวิศวกรรมโยธาได้เป็นส่วนใหญ่

#### 2.3.5.1 พฤติกรรมแบบไม่เชิงเส้นของวัสดุ (Material Nonlinear Behavior)

การตอบสนองของโครงสร้างแบบ Geometric Nonlinear มีพื้นฐานก่อนข้างคล้ายกัน ดังนั้น Geometric Stiffness Matrix ที่กล่าวผ่านมาจึงสามารถใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้างได้ทั้งแบบไร้เชิงเส้นยืดหยุ่น (Elastic Nonlinear) และไร้เชิงเส้นไม่ยืดหยุ่น (Inelastic Nonlinear) แต่พฤติกรรมของวัสดุแบบไร้เชิงเส้นมีพื้นฐานแตกต่างกันมากขึ้นอยู่กับวัสดุที่ใช้ในโครงสร้างเช่น พฤติกรรมการคราก (Yielding) ของเหล็กแตกต่างอย่างสิ้นเชิงกับพฤติกรรมการแตกร้าวของคอนกรีตเป็นต้นนอกจากนั้นในพฤติกรรม Material Nonlinear แต่ละแบบอาจใช้วิธีในการวิเคราะห์แตกต่างกันได้หลายวิธี เช่น ในกรณีพฤติกรรมการ Yielding ของเหล็กอาจถูกวิเคราะห์ในรูปแบบข้อหมุนพลาสติก (Plastic Hinge Analysis) จนถึงขั้นการวิเคราะห์โดยใช้วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ (Finite Element Analysis) แบบสามมิติ ที่มีพื้นฐานมาจากทฤษฎีกลศาสตร์ความต่อเนื่อง (Continuum Mechanics) และทฤษฎีพลาสติก (Plasticity Theory) ส่วนในกรณีพฤติกรรมการแตกร้าวของคอนกรีตอาจถูกพิจารณาอย่างละเอียดมากในระดับของการพิจารณาทุกรอยแตกจนถึงอย่างง่ายโดยการทำ “Smearing” รอยแตกเข้าด้วยกันแล้วพิจารณาผลทั้งหมดที่เกิดจากการแตกร้าว

ในการวิเคราะห์โครงสร้างแบบ Linear Elastic ไม่นิยมพิจารณาหน่วยแรงที่จุดเล็กมากบนโครงสร้างแต่จะไปหาการกระจายของหน่วยแรงลัพธ์ (Stress Resultant) บนหน้าตัดของโครงสร้างซึ่งถูกใช้ในการหาสมการความแข็งแกร่งของชิ้นส่วนโครงสร้าง (Element Stiffness Equation) หรือสมการความยืดหยุ่นของชิ้นส่วนของโครงสร้าง (Element Flexibility Equation) ที่นำไปสู่การวิเคราะห์โครงสร้างทั้งระบบได้โดยตรง แต่ในกรณีของการวิเคราะห์โครงสร้างแบบ Nonlinear นั้นในแต่ละระดับของการพิจารณาอาจมีทางเลือกในการจำลองโครงสร้างหลายแบบเพื่อศึกษาพฤติกรรมของโครงสร้าง ดังนั้นการแปลความหมายที่ได้จากการวิเคราะห์จึงต้องใช้ความรู้เกี่ยวกับการสร้างแบบจำลองนั้นด้วย

### 2.3.5.2 ทฤษฎีพลาสติก (Plasticity Theory)

พิจารณาชิ้นส่วนของโครงสร้าง Plastic ขนาดเล็กที่จุดใดๆ (Differential Element) ซึ่งใช้วัสดุที่มีพฤติกรรมแบบ Elastic-Perfectly Plastic และถูกกระทำโดยหน่วยแรงต่างๆ กำหนดให้ความสัมพันธ์ของหน่วยแรงและความเครียดของวัสดุมีลักษณะดังแสดงใน รูปที่ 2.19(ก) และสภาวะของหน่วยแรงหลัก (Principal Stresses) ที่จุดพิจารณามีลักษณะดังที่แสดงใน รูปที่ 2.19(ข)

ในทฤษฎีพลาสติกมีทอมสองทอมที่ต้องทราบ คือ Yield Function และ Flow Rule นิยมหาโดยใช้ Von Mises Criterion และ Normality Criterion ตามลำดับ โดยกล่าวว่าชิ้นส่วนขนาดเล็กของโครงสร้างจะมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นเมื่อ Yield Function  $f$  มีค่าน้อยกว่า  $2\sigma_y^2$  โดยที่

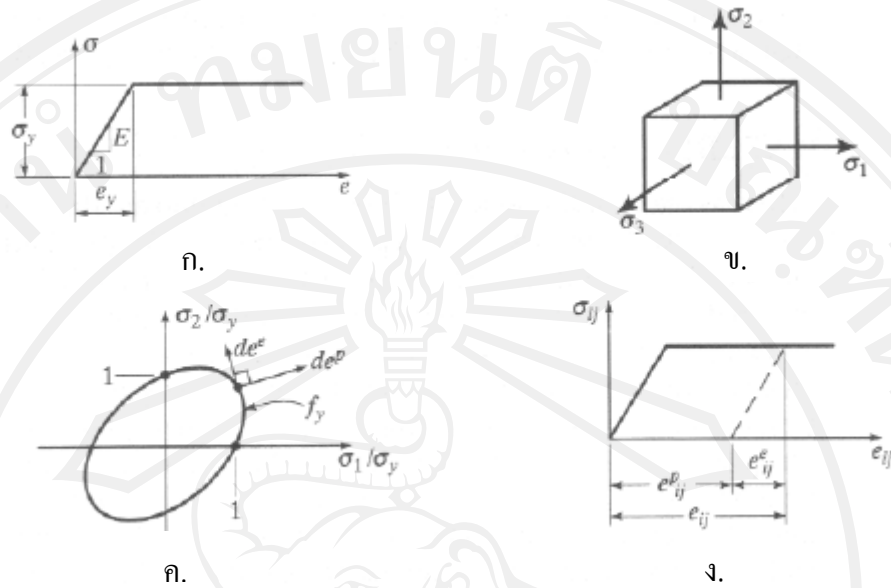
$$f = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \quad (2.64)$$

การ Yielding ของวัสดุจะเกิดขึ้นเมื่อ Yield Function ( $f$ ) มีค่าเท่ากับ  $2\sigma_y^2$

สำหรับวัสดุที่มีพฤติกรรมแบบพลาสติกโดยสมบูรณ์แล้ว Yield Function ( $f$ ) มีค่ามากกว่า  $2\sigma_y^2$  ไม่ได้

การตอบสนองของชิ้นส่วนของโครงสร้างในสภาวะ Yielding ขึ้นกับลำดับการกระทำของแรงโดยถูกแบ่งออกเป็นสามรูปแบบ คือ

1. การเครียดแบบพลาสติกอย่างง่าย (Simple Plastic Straining)
2. การเครียดแบบพลาสติกและการเครียดแบบยืดหยุ่น (Elastic Straining) ร่วมกัน
3. การเครียดแบบยืดหยุ่นอย่างง่าย (Simple Elastic Straining) ซึ่งเป็นการกลับมาอยู่ในสภาวะยืดหยุ่นอีกครั้งหลังจากผ่านสภาวะการเครียดแบบพลาสติก



รูปที่ 2.19 พฤติกรรม Elastic-Perfectly Plastic ของชิ้นส่วน โครงสร้าง (สิทธิชัย, 2545)

พิจารณาสถานะหน่วยแรงในระนาบ (Plane Stress) เมื่อ  $\sigma_3 = 0$  ซึ่งสามารถเขียน Yield Function ( $f$ ) ได้ในรูป

$$\frac{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}{\sigma_y^2} = 1 \quad (2.65)$$

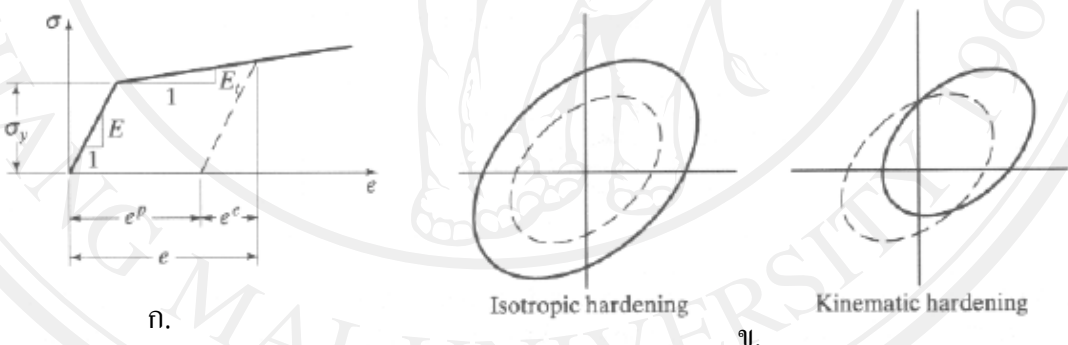
สมการ (2.65) คือ สมการรูปร่างรี ดังรูปที่ 2.19(ค) ซึ่งมักถูกเรียกว่า Yield Locus สำหรับในกรณีของสถานะหน่วยแรงในสองมิติหรือ Yield Surface สำหรับในกรณีของสถานะหน่วยแรงในสามมิติอาจเรียกความสัมพันธ์ของ Plastic Strain ที่เพิ่มขึ้นกับหน่วยแรงที่เพิ่มขึ้นได้ว่า Flow Rule ซึ่งเกิดจากแนวคิดที่ว่าความเครียดเกิดขึ้นในเนื้อวัสดุ  $e_{ij}$  จะเท่ากับผลรวมของความเครียดยืดหยุ่นที่คืนตัวได้  $e_{ij}^e$  (Recoverable Elastic Strain) กับความเครียดพลาสติกที่คืนตัวไม่ได้  $e_{ij}^p$  (Irrecoverable Plastic Strain) ดังที่แสดงในรูปที่ 2.19(ง) หรือ  $e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p$

เมื่อหน่วยแรงที่กระทำต่อเนื้อวัสดุอยู่บน Von Mises Yield Surface และเกิด Plastic Strain ขึ้นในเนื้อวัสดุดังกล่าวแล้ว Plastic Strain ลัพธ์ต้องตั้งฉากกับ Von Mises Yield Surface ที่จุดเกิด Plastic Strain ดังนั้นในกรณีของรูปที่ 2.19(ค) และ Incremental Component ของ Plastic Strain ลัพธ์อยู่ในรูป

$$de_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f_y}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.66)$$

โดยที่  $\lambda$  มีค่าได้ไม่จำกัด (Indefinite) ถ้า Plastic Flow ไม่ถูกยึดรั้งแล้ว  $\lambda$  จะขึ้นอยู่กับความต้านทานของเนื้อวัสดุรอบจุดที่พิจารณาแต่ถ้า Plastic Flow ถูกยึดรั้งจากสมการที่ (2.66) จะเห็นได้ว่าถ้าไม่มี Plastic Strain พุ่งเข้าแล้ว Incremental Elastic Strain จะต้องสัมผัส (Tangent) กับ Yield Surface ที่จุดดังกล่าว

สำหรับวัสดุที่ไม่มีพฤติกรรมแบบพลาสติกโดยสมบูรณ์ในช่วง Yielding เช่นวัสดุที่มีพฤติกรรมแบบ Bilinear Elasto-Plastic ดังแสดงในรูปที่ 2.20(ก) สามารถใช้ Flow Rule ในการวิเคราะห์โครงสร้างได้ แต่ต้องเพิ่ม Hardening Rule เข้าไปเพื่อระบุว่า Yielding Surface ควรปรับแก้อย่างไรในช่วงที่เกิด Plastic Flow ซึ่ง Hardening Rule ที่นิยมนำมาใช้คือ Isotropic Hardening Rule ซึ่งสมมุติให้ Yielding Surface เกิดการขยายตัวสม่ำเสมอและ Kinematic Hardening Rule ซึ่งสมมุติให้ Yielding Surface เกิดการเลื่อนได้ดังที่แสดงในรูปที่ 2.20(ข)



รูปที่ 2.20 พฤติกรรมวัสดุที่ไม่มีพฤติกรรมแบบพลาสติกโดยสมบูรณ์ (สิทธิชัย, 2545)

### 2.3.5.3 การวิเคราะห์โครงสร้างแบบพลาสติก (Plastic Analysis)

ในการวิเคราะห์โครงสร้างแบบ Plastic Analysis ถูกนำมาใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้างที่ทำด้วยวัสดุที่มีพฤติกรรมแบบ Elastic-Plastic โดยมีแนวคิดพื้นฐานในการวิเคราะห์แบบข้อหมุนพลาสติก (Plastic Hinge) และ Mechanism Formation

Plastic Hinge Concept กล่าวว่าหน้าตัดของชิ้นส่วนของโครงสร้างเช่นหน้าตัดแกนเหล็กที่ถูกกระทำโดยแรงในแนวแกน (Axial Force) และโมเมนต์คด (Bending Moment) จะมีพฤติกรรมตอบสนองต่อแรงกระทำสองแบบ คือ

1.แบบยืดหยุ่นอย่างสมบูรณ์ (Completely Elastic) กรณีที่หน่วยแรงสูงสุดที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดดังกล่าวมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับหรือ Yielding Stress  $\sigma_y$

2.แบบพลาสติกทั้งหน้าตัด (Fully Plastic) โดยมีหน่วยแรงดึงและหน่วยแรงอัดเท่ากับ  $\sigma_y$  พฤติกรรมการตอบสนองต่อแรงกระทำแบบที่สอง คือรูปแบบของพฤติกรรมแบบ Plastic Hinge ซึ่งหน้าตัดของโครงสร้างที่มีพฤติกรรมนี้จะมีผลของความเครียดพลาสติก (Plastic Strain) เกิดขึ้นได้อย่างไม่จำกัดถ้าหน้าตัดดังกล่าวไม่ถูกยึดหรือดึงโดยส่วนอื่นของโครงสร้างอื่นแล้วสมการ Bilinear Formula ที่นิยมใช้ในการวิเคราะห์แบบพลาสติก (Plastic Analysis) ของคานหน้าตัด Wide Flange ที่ถูกกดอัดและถูกดึงพร้อมกันรอบแกนหลัก คือ

$$M = 1.18 \left( 1 - \frac{P}{P_y} \right) M_p \leq M_p \quad (2.67)$$

เมื่อ  $P_y$  เป็น Squash Load ซึ่งมีค่าเท่ากับพื้นที่หน้าตัดคูณด้วย  $\sigma_y$  ส่วน  $M_p$  คือ พลาสติกโมเมนต์ (Plastic Moment) ซึ่งมีค่าเท่ากับ Plastic Section Modulus  $Z$  คูณด้วย  $\sigma_y$

ส่วน Mechanism Formation คือ การวิเคราะห์โครงสร้างโดยสมมุติให้วัสดุของโครงสร้างมีพฤติกรรมแบบเกร็ง-พลาสติก (Rigid-Plastic Analysis) โดยเป็นการวิเคราะห์ค่าแรงที่น้อยที่สุดที่ทำให้เกิด Plastic Hinge Mechanism ซึ่งเรียกว่า Plastic Limit Load และไม่พิจารณาถึงการเปลี่ยนแปลงรูปร่างแบบยืดหยุ่น (Elastic) ของโครงสร้าง

#### 2.4 การเสริมกำลังอาคารด้วยวัสดุคอมโพสิตประเภทโพลีเมอร์เสริมเส้นใย (Fiber Reinforced Polymer)

อาคารที่ตั้งอยู่ในบริเวณในพื้นที่เสี่ยงต่อแผ่นดินไหวควรได้รับการออกแบบเพื่อให้สามารถทนต่อแรงแผ่นดินไหวได้ในระดับหนึ่ง ซึ่งอาคารในประเทศไทยที่ตั้งอยู่ในบริเวณที่มีความเสี่ยงเช่น จังหวัดเชียงใหม่ส่วนมากไม่ได้ออกแบบโครงสร้างให้รองรับแผ่นดินไหว ทำให้มีความจำเป็นที่ต้องเสริมกำลังขึ้นส่วนอาคารนั้นเพื่อเพิ่มประสิทธิภาพในการรับแรงแผ่นดินไหวที่อาจเกิดขึ้นได้ ซึ่งการเสริมกำลังให้กับอาคารเดิมที่ไม่ได้รับการออกแบบเพื่อรองรับแผ่นดินไหวมีอยู่หลายวิธี เช่น การพอกเสาหรือคานให้มีขนาดใหญ่ขึ้น และ การเสริมเหล็กทแยง (Bracing) แต่วิธีที่ได้รับความนิยมในปัจจุบัน คือการเสริมกำลังด้วยวัสดุคอมโพสิตประเภทโพลีเมอร์เสริมเส้นใย

เนื่องจากมีความทน, น้ำหนักเบา และติดตั้งง่าย ซึ่งวัสดุดังกล่าวสามารถนำมาใช้ประโยชน์กับงานอาคารได้ เช่น

- เพิ่มความสามารถทางด้านกำลัง และความเหนียวให้กับชิ้นส่วนอาคาร
- ซ่อมแซมชิ้นส่วนของอาคารที่เกิดการเสียหาย
- ลดและควบคุมรอยร้าวของคอนกรีต
- เพิ่มระยะเวลาการเสื่อมสภาพของโครงสร้าง
- ปกป้องชิ้นส่วนอาคารจากสภาพแวดล้อมภายนอก

#### 2.4.1 คุณสมบัติของเส้นใยและแผ่นโพลีเมอร์เสริมเส้นใย

ปัจจุบันการเสริมกำลังโครงสร้างในงานวิศวกรรมโยธาด้วยวัสดุคอมโพสิต (Composites) ประเภท Fiber Reinforced Polymer (FRP) เป็นที่รู้จักและนิยมใช้งานกันอย่างกว้างขวางทั้งในประเทศไทยและต่างประเทศ เนื่องจากวัสดุดังกล่าวมีความสะดวกในการติดตั้งและสามารถประยุกต์ใช้ได้หลากหลายรูปแบบโดยทั่วไปที่นิยมใช้งานวิศวกรรมโยธามีอยู่ 3 ประเภท คือ

- ใยแก้ว (Glass Fibers) คือ เส้นใยที่นิยมใช้งานในด้านวิศวกรรมโยธาเนื่องจากความเหมาะสมในด้านราคา และกำลังรับน้ำหนักที่ต้องการ เส้นใยแก้วที่มีขายในท้องตลาดมีหลายรูปแบบเช่นรูปแบบ E-Glass (Electrical Grade) นิยมใช้ทั่วไปสำหรับการเสริมกำลังด้วยวัสดุคอมโพสิตส่วนรูปแบบ High Strength S-2<sup>®</sup> Glass และ ECR-Glass ใช้งานที่ทนต่อกรด นอกจากนี้ยังมีรูปแบบที่ปรับปรุงส่วนผสมเส้นใยชนิดต่างๆ เพื่อให้มีกำลังรับน้ำหนักและโมดูลัสมากขึ้นแต่ก็ทำให้ราคาของวัสดุคอมโพสิตนั้นสูงตามไปด้วย

- เส้นใยคาร์บอน (Carbon Fibers) สามารถแบ่งออกได้เป็น 2 ชนิดได้แก่ เส้นใยชนิดที่มีโมดูลัสสูง (High Modulus) และเส้นใยชนิดกำลังสูง (High Strength) ความแตกต่างของคุณสมบัติระหว่างเส้นใยทั้งสองชนิดเกิดจากความแตกต่างของโครงสร้างจุลภาคของเส้นใยนั้น

- เส้นใยอะรามิด (Aramid Fibers) คุณสมบัติที่สำคัญของเส้นใยชนิด คือ ความเหนียวและความสามารถในการทนต่อการขีดขูดสูง อีกทั้งยังสามารถใช้งานได้ในช่วงอุณหภูมิ -200 ถึง 200 องศาเซลเซียส โดยคุณสมบัติของเส้นใยชนิดต่างๆสามารถสรุปได้ดัง ตารางที่ 2.2

จากที่กล่าวมาข้างต้นว่าวัสดุคอมโพสิตประกอบด้วยวัสดุอย่างน้อยสองชนิด ดังนั้นการนำเส้นใยดังกล่าวมาใช้ในการเสริมกำลังโครงสร้างคอนกรีตเสริมเหล็กนั้น จึงต้องมีเรซินเพื่อช่วยในการถ่ายแรงระหว่างเส้นใยกับโครงสร้าง และยังช่วยป้องกันเส้นใยจากสภาวะแวดล้อม

ตลอดจนป้องกันเส้นใยจากสภาวะเชิงกลต่างๆ หลังจากนำเส้นใยมาเคลือบด้วยเรซินแล้ว จะได้วัสดุคอมโพสิตเสริมใยเป็นที่มีลักษณะเป็นแผ่นที่มีคุณสมบัติทางกลดังตารางที่ 2.3

ตารางที่ 2.2 คุณสมบัติของเส้นใย (มยผ.1508-51, 2551)

ชนิดของเส้นใย	ความ ถ่วงจำเพาะ	กำลังรับแรงดึง		โมดูลัสแรงดึง	
		เมกา ปาสกาล	กิโลปอนด์ /ตร.นิ้ว	จิกะปาส กาล	(10 <sup>3</sup> กิโลปอนด์ /ตร.นิ้ว)
เส้นใยแก้ว E-Glass	2.58	2,689	390	72.4	10.5
เส้นใยแก้ว S-2-Glass®	2.48	4,280	620	86.0	13.0
เส้นใยแก้ว ECR-Glass	2.62	3,625	525	72.5	10.5
เส้นใยอะรามิด K-49	1.44	3,620	525	131.0	19.0
เส้นใยคาร์บอน AS4	1.8	3,790	550	234.0	34.0

ตารางที่ 2.3 คุณสมบัติของแผ่นคอมโพสิตเสริมเส้นใย (มยผ.1508-51, 2551)

ระบบ FRP	มอดูลัสยืดหยุ่น (GPa.)		กำลังรับแรงดึง (MPa.)		ความเครียด ประลัย ทิศ 0 องศา (%)
	ทิศ 0 องศา	ทิศ 90 องศา	ทิศ 0 องศา	ทิศ 90 องศา	
เส้นใย คาร์บอนกำลัง สูงในอีพ็อกซี	100-140	2-7	1,020-2,080	35-70	1.0-1.5
เส้นใยแก้ว เอนกประสงค์ ในอีพ็อกซี	20-40	2-7	520-1,400	35-70	1.5-3.0
เส้นใย อะรามิด ประสิทธิภาพ สูงในอีพ็อกซี	48-68	2-7	700-1,720	35-70	2.0-3.0

คุณสมบัติของแผ่นคอมโพสิตเสริมเส้นใยในตารางที่ 2.3 นี้คำนวณจากพื้นที่หน้าตัดของแผ่น FRP ซึ่งมีความหนา 2.5 มิลลิเมตร และมีปริมาณเส้นใยประมาณร้อยละ 40 ถึง 60 ของปริมาตรแผ่น FRP

เนื่องจากคุณสมบัติของเส้นใยแต่ละชนิดแตกต่างกันอย่างเห็นได้ชัดทำให้เส้นใยสมรรถนะสูงจึงมีราคาสูงซึ่งวัสดุเหล่านี้สามารถนำประสานกันเป็นชั้นในทิศทางการเรียงตัวเดียวกันเพื่อให้ได้คุณสมบัติตามที่ต้องการในราคาที่ยอมรับได้โดยเรียกวัดคอมโพสิตในลักษณะนี้ว่าวัสดุคอมโพสิตแบบไฮบริด ตัวอย่าง เช่น การประสานกันระหว่างเส้นใยคาร์บอนกับเส้นใยแก้วเพื่อพัฒนามาใช้ในงานโครงสร้างพื้นฐาน (Infrastructure) ดังตารางที่ 2.4

ตาราง 2.4 คุณสมบัติของวัสดุคอมโพสิตแบบไฮบริดเสริมเส้นใย (มยพ.1508-51, 2551)

อัตราส่วน CFRP/GFRP	แรงดึง (MPa)	โมดูลัสแรงดึง (GPa)	แรงดัด (MPa)	โมดูลัสแรงดัด (GPa)	ความหนาแน่น (กรัม/ลบ.ซม.)
0 : 100	604.7	40.1	944.6	35.4	1.91
25 : 75	641.2	63.9	1061.8	63.4	1.85
50 : 50	689.5	89.6	1220.4	78.6	1.80
75 : 25	806.7	123.4	1261.7	1261.7	1.66

#### 2.4.2 การติดตั้งระบบแผ่นโพลีเมอร์เสริมเส้นใย

วิธีการทั่วไปสำหรับติดตั้งระบบนี้มีอยู่ 3 รูปแบบ คือแบบขึ้นรูปเปียก, แบบบ่มสำเร็จ และแบบฝังใต้อิฐ โดยแต่ละรูปแบบอาจมีวิธีการเฉพาะของผู้ผลิตในการติดตั้งที่แตกต่างกัน

##### 2.4.2.1 การติดตั้งระบบขึ้นรูปเปียก

การติดตั้งแบบขึ้นรูปเปียกทำได้โดยนำเรซินลงเคลือบเส้นใยในสถานที่ก่อสร้าง โดยมีวิธีการดังนี้

-การผสมเรซิน (Resin) ต้องผสมทุกส่วนผสมของเรซินทั้งตัวสารหลักและสารที่ทำให้แข็งตัวโดยใช้สัดส่วนและระยะเวลาที่เหมาะสมจนได้ความข้นเหลวที่สม่ำเสมอ โดยระหว่างการผสมห้ามทำการเจือจางเรซิน เนื่องจากอาจมีผลเสียด้านกำลังตลอดจนการยึดเกาะได้ การใช้เรซินใน

แต่ละครั้งควรผสมเรซินในปริมาณที่เหมาะสมเพื่อไม่ให้เรซินที่ผสมแล้วมีอายุเกินช่วงเวลาที่ยังทำงานได้

-วัสดุรองพื้น (Primer) และวัสดุฉาบ (Putty) ปกติการติดตั้งระบบคอมโพสิตจำเป็นต้องมีชั้นรองพื้นโดยการทาวัดรองพื้น 1 ถึง 2 ชั้น บนผิวของชิ้นงานเพื่อให้ซึมลงไปในรูปแบบผิว และต้องทำการป้องกันผิวของชั้นรองพื้นและวัสดุฉาบจากฝุ่นความชื้นและสิ่งปนเปื้อนอื่นๆ

-สารเคลือบเส้นใย (Saturant) การลงสารเคลือบเส้นใยชั้นแรกต้องลงอย่างสม่ำเสมอทั่วบริเวณที่ติดตั้ง โดยความหนืดของสารที่ใช้ต้องต่ำเพียงพอที่สามารถแทรกซึมไปเคลือบทั่วแผ่นเส้นใยก่อนการบ่มในอุณหภูมิห้อง

-การลงแผ่นเส้นใยและสารเคลือบเส้นใย หลังจากลงสารเคลือบเส้นใยชั้นแรกอย่างสม่ำเสมอแล้วจึงทำการติดตั้งแผ่นเส้นใยโดยตัดแผ่นเส้นใยไว้ล่วงหน้าตามความยาวที่ผู้ออกแบบกำหนดและทำการกดแผ่นเส้นใยอย่างนุ่มนวลลงบนสารเคลือบเส้นใยที่ทาไว้ หลังจากนั้นจึงทำการรีดอากาศที่ถูกขังอยู่ระหว่างชิ้นงานและแผ่นเส้นใย โดยการรีดต้องทำนานทิศของเส้นใยและทำให้เรซินยังคงเคลือบทั่วเส้นใยและแนบสนิทกับผิวโดยไม่ควรรีดในทิศตั้งฉากกับเส้นใย ในส่วนกรณีเป็นแผ่นเส้นใยมีการเรียงใน 2 ทิศทางให้ทำการรีดจากหัวถึงท้ายในทิศเส้นขวางก่อนจึงค่อยรีดในทิศเส้นยืน หลังจากนั้นจึงลงสารเคลือบเส้นใยทับแผ่นเส้นใยอีกชั้นให้ชุ่มตัวเส้นใยอย่างทั่วถึง ทั้งการลงสารเคลือบเส้นใยชั้นแรก การติดตั้งแผ่นเส้นใย และการลงสารเคลือบเส้นใยทับหน้าให้กระทำอย่างต่อเนื่อง

-กรณีเส้นใยหลายชั้นในกรณีทำการติดตั้งระบบที่ใช้เส้นใยหลายชั้นการติดตั้งแต่ละชั้นให้ทำตามการลงแผ่นใยขั้นต้น แต่ปริมาณของเรซินที่ใช้ทับหน้าแผ่นเส้นใยแต่ละชั้นควรมากกว่ากรณีของแผ่นเส้นใยชั้นเดียวอยู่ประมาณร้อยละ 15 ถึงร้อยละ 20 เนื่องจากเรซินต้องเป็นทั้งทับหน้าของแผ่นเส้นใยชั้นก่อนหน้าและต้องเป็นรองพื้นของแผ่นเส้นใยชั้นถัดมาด้วย การจัดเรียงทิศของเส้นใยและลำดับการจัดวางให้ทำตามกำหนดในการออกแบบ ซึ่งการลงแผ่นเส้นใยแต่ละชั้นให้ลงก่อนที่เรซินชั้นก่อนหน้าจะเริ่มแข็งตัว

-การต่อทาบแผ่นเส้นใยกรณีที่เส้นใยมีการขาดช่วงในทิศของเส้นใยต้องทำการต่อทาบโดยความยาวของการต่อทาบให้เป็นไปตามแบบกำหนดแต่ต้องไม่ต่ำกว่า 150 มิลลิเมตร เมื่อใช้แผ่นเส้นใยหลายแถบขนานกันจำเป็นต้องจัดรอยต่อของแต่ละแถบไม่ให้อยู่ในแนวเดียวกัน และในกรณีที่ใช้แผ่นเส้นใยหลายชั้นต้องจัดให้รอยต่อของแต่ละชั้นเยื้องกันซึ่งไม่จำเป็นต้องต่อทาบแผ่นเส้นใยในทิศขวางนอกจากมีการระบุในแบบ

-แนวของวัสดุเส้นใยต้องจัดแนวของชั้นเส้นใยบนชิ้นส่วนโครงสร้างตามแบบกำหนด โดยการเบี่ยงเบนของแนวเส้นใยห้ามเกิน 5 องศาเมื่อติดตั้งแล้วเสร็จเส้นใยต้องไม่หักหรือเป็นคลื่น

#### 2.4.2.2 การติดตั้งระบบบ่มสำเร็จ

การติดตั้งแผ่น โพลีเมอร์เสริมเส้นใยนี้คล้ายกับการติดตั้งระบบขึ้นรูปเป็ยกชั้นเดียว โดยระบบนี้เป็นการติดตั้งชิ้นส่วนแบบบ่มสำเร็จที่เคลือบเส้นใยด้วยเรซินไว้ล่วงหน้าและได้รับการบ่มเรียบร้อยแล้ว รูปแบบของชิ้นส่วนมีทั้งแบบเป็นแผ่น แฉก และเป็นเปลือกบาง โดยปกติใช้วัสดุยึดประสานเป็นตัวยึดติดแผ่นเส้นใยแบบบ่มสำเร็จเข้ากับผิวคอนกรีต ในการติดตั้งต้องทำความสะอาดแผ่นไฟเบอร์และตัดให้ได้ขนาดตามที่แบบกำหนด หลังจากนั้นจึงวางลงบนวัสดุยึดประสานที่ทาไว้ซึ่งยังมีอายุไม่เกินช่วงเวลาที่ยังทำงานได้ และทำการไล่อากาศที่ขังอยู่ระหว่างแผ่นไฟเบอร์กับคอนกรีตโดยห้ามรบกวนระบบของวัสดุคอมโพสิตจนกว่าวัสดุยึดประสานจะได้รับการบ่มเต็มที่

#### 2.4.2.3 การติดตั้งระบบฝังใกล้ผิว

ระบบฝังใกล้ผิวสามารถฝังแผ่น โพลีเมอร์เสริมเส้นใยเข้าในชิ้นส่วนโครงสร้างที่อยู่ติดกัน ทำให้สามารถปรับปรุงกำลังรับน้ำหนักของชิ้นส่วนบริเวณที่ต้องรับ โมเมนต์ และป้องกันความเสียหายที่อาจเกิดจากการกระแทกหรือการขีดสีโดยตรง ในระหว่างติดตั้งต้องทำความสะอาดแท่งหรือแถบ โพลีเมอร์เสริมเส้นใยและตัดให้ได้ความยาวตามแบบกำหนด แล้วจึงวางลงในร่องและกดให้วัสดุยึดประสานไหลออกมารอบชิ้นส่วนจนเต็มช่องว่าง จากนั้นจึงเติมวัสดุยึดประสานให้เต็มร่องและจึงปาดผิวให้เรียบ

#### 2.4.3 การออกแบบชิ้นส่วนโครงสร้างคอนกรีตเสริมเหล็กเสริมกำลังโดยการหุ้มแผ่นไฟเบอร์

การเสริมกำลังให้กับชิ้นส่วนโครงสร้างคอนกรีตเสริมเหล็กโดยวิธีการหุ้มแผ่นไฟเบอร์นี้ สามารถช่วยเพิ่มประสิทธิภาพในด้านกำลัง เช่น ความสามารถด้านแรงดัด, แรงเฉือน และยังช่วยป้องกันผิวคอนกรีตจากสภาพแวดล้อมที่ไม่ปกติให้กับชิ้นส่วนนั้น และเนื่องจากปัจจุบันการเสริมกำลังโดยวิธีนี้ได้รับความนิยมเพิ่มมากขึ้นเนื่องจากการติดตั้งง่ายและใช้ระยะเวลาไม่มาก แต่การที่จะสามารถติดตั้งได้อย่างถูกต้องและตรงต่อความต้องการในเรื่องกำลังจำเป็นต้องได้รับการออกแบบให้แผ่นไฟเบอร์นั้นมีประสิทธิภาพในการทำงานได้อย่างเหมาะสม

หลักการออกแบบชิ้นส่วนคอนกรีตเสริมเหล็กเสริมกำลังโดยการหุ้มแผ่นไฟเบอร์ใช้ตามข้อกำหนดของ ACI318-99 ซึ่งพิจารณาไม่ให้เกิดรอยแตกร้าว, การแอ่นตัว ตลอดจนกำลังที่เกิดขึ้น ต้องไม่เกินค่าที่ออกแบบไว้

### 2.4.3.1 ขีดจำกัดในการเสริมกำลัง (Strengthening Limit)

เพื่อป้องกันการวิบัติของโครงสร้างจากการที่ระบบคาร์บอนไฟเบอร์เกิดความเสียหายจากสาเหตุของไฟไหม้, การใช้งาน ตลอดจนสาเหตุอื่นๆ ต้องกำหนดให้ชิ้นส่วนโครงสร้างคอนกรีตเสริมเหล็กที่ไม่ได้รับการเสริมกำลังสามารถรับน้ำหนักได้ตาม สมการที่ (2.68)

$$(\phi R_n)_{existing} \geq (1.2S_{DL} + 0.885S_{LL})_{new} \quad (2.68)$$

เมื่อ  $\phi$  คือ ตัวคูณลดกำลัง  
 $R_n$  คือ กำลังของชิ้นส่วน  
 $S_{DL}$  คือ น้ำหนักบรรทุกคงที่  
 $S_{LL}$  คือ น้ำหนักบรรทุกจร

### 2.4.3.2 การติดตั้งแผ่นไฟเบอร์ในสถานะแวดล้อมที่ต่างกัน

สภาพแวดล้อมมีผลกระทบต่อแผ่นไฟเบอร์ เช่นทำให้ความสามารถในการรับแรงดึงมีค่าลดลง เพราะฉะนั้นในการออกแบบการติดตั้งระบบไฟเบอร์ให้กับชิ้นส่วนโครงสร้างคอนกรีตเสริมเหล็กนั้นจึงต้องกำหนดตัวคูณลดกำลัง ( $C_E$ ) ดังตารางที่ 2.5

ตาราง 2.5 ตัวคูณลดกำลัง ( $C_E$ ) ที่สถานะแวดล้อมต่างกัน

สถานะแวดล้อม	ชนิดของ ไฟเบอร์/เรซิน	ตัวคูณลดกำลัง ( $C_E$ )
ภายในอาคาร	Carbon/epoxy	0.95
	Glass/epoxy	0.75
	Aramid/epoxy	0.85
ภายนอก/สภาวะปกติ (สะพาน , ตอม่อ)	Carbon/epoxy	0.85
	Glass/epoxy	0.65
	Aramid/epoxy	0.75
ภายนอก/สภาวะรุนแรง	Carbon/epoxy	0.85
	Glass/epoxy	0.50
	Aramid/epoxy	0.70

### 2.4.3.3 คุณสมบัติของแผ่นไฟเบอร์ที่ใช้ในการออกแบบ

คุณสมบัติของวัสดุที่ทางผู้ผลิตได้แสดงไว้ เช่น กำลังรับแรงดึงสูงสุด, วิธีการติดตั้ง และการดูแลรักษาจากสภาพแวดล้อม จำเป็นต้องนำมาพิจารณาในการออกแบบเนื่องจากมีผลทำให้กำลังของวัสดุลดลงในระยะยาวได้ ดังนั้นความเค้นที่ใช้ในการออกแบบ ( $f_{fu}$ ) จึงต้องคูณด้วยตัวคูณลดกำลังใน ตารางที่ 2.6 เข้ากับความเค้นสูงสุดที่ทางผู้ผลิตระบุมา ( $f_{fu}^*$ ) ดังสมการที่ (2.69) และ (2.70)

$$f_{fu} = C_E f_{fu}^* \quad (\text{MPa}) \quad (2.69)$$

$$\mathcal{E}_{fu} = C_E \mathcal{E}_{fu}^* \quad (\text{mm/mm}) \quad (2.70)$$

เนื่องจากรูปแบบการวิบัติของแผ่นไฟเบอร์นั้นเป็นการวิบัติแบบเปราะ ทำให้สามารถหาค่ามอดูลัสได้ตามกฎของฮุก (Hooke's Law) ได้ดังสมการที่ (2.71)

$$E_f = \frac{f_{fu}}{\mathcal{E}_{fu}} \quad (\text{Mpa}) \quad (2.71)$$

### 2.4.3.4 การออกแบบชิ้นส่วนคอนกรีตเสริมเหล็กเสริมกำลังโดยการหุ้มแผ่นไฟเบอร์รับแรงดัด

การติดตั้งแผ่นไฟเบอร์เพื่อเสริมกำลังรับแรงดัดจะทำการติดตั้งแผ่นในบริเวณพื้นที่รับแรงดัดตลอดความยาวของชิ้นส่วน โดยสามารถเพิ่มกำลังแรงดัดได้ถึง 160% และยังช่วยเพิ่มความเหนียวได้ระหว่าง 5 ถึง 40% ซึ่งในหัวข้อนี้ได้อธิบายเกี่ยวกับการเสริมกำลังให้กับหน้าตัดคานรูปสี่เหลี่ยม ที่มีสมมุติฐานดังต่อไปนี้

- ใช้คุณสมบัติจริงของชิ้นส่วนในการออกแบบ เช่น ขนาดของหน้าตัด, รายละเอียดการเรียงเหล็กเสริม ตลอดจนคุณสมบัติของวัสดุที่ใช้

- ความเครียดของแผ่นไฟเบอร์และคอนกรีตยังคงอยู่ในระนาบทั้งก่อนและหลังการรับน้ำหนัก

- ไม่มีการเลื่อนไถลระหว่างผิวสัมผัสของแผ่นไฟเบอร์กับคอนกรีต

- ไม่เกิดผลของแรงเฉือนระหว่างชั้นของแผ่นไฟเบอร์

- ความเครียดการหดตัวสูงสุดของคอนกรีตเท่ากับ 0.003

- คอนกรีตไม่สามารถรับแรงดึงได้

- คุณสมบัติของแผ่นไฟเบอร์เป็นแบบ Linear Elastic

ในการออกแบบเพื่อรับแรงคั้นนั้นต้องออกแบบให้โมเมนต์คั้นที่ใช้ออกแบบ ( $\phi M_n$ ) มากกว่าโมเมนต์คั้นที่ต้องการ ( $M_u$ ) โดยโมเมนต์คั้นที่ใช้ออกแบบนั้นได้จากการคูณตัวคูณลดกำลังตามคำแนะนำของ ACI318-99 เข้ากับกำลังรับโมเมนต์คั้นของชิ้นส่วน ดังสมการที่ (2.72)

$$\phi M_n \geq M_u \quad (2.72)$$

รูปแบบการวิบัติของชิ้นส่วน โครงสร้างคอนกรีตเสริมเหล็กเสริมกำลัง โดยการหุ้มแผ่นไฟเบอร์ที่พบทั่วไปมีด้วยกัน 5 รูปแบบ ประกอบด้วย

- การวิบัติของคอนกรีตก่อนที่เหล็กเสริมถึงจุดคราก
- เหล็กเสริมถึงจุดครากตามด้วยการขาดของแผ่นไฟเบอร์
- เหล็กเสริมถึงจุดครากก่อนคอนกรีตวิบัติ
- เกิดการแตกของคอนกรีตในบริเวณรับแรงเฉือน หรือแรงดิ่ง
- การหลุดร่อนของแผ่นไฟเบอร์ โดยที่สมมุติให้คอนกรีตเกิดการแตกเนื่องจากแรงกด

เมื่อความเครียดของคอนกรีต ( $\mathcal{E}_c$ ) มีค่าเท่ากับ 0.003 และแผ่นไฟเบอร์เกิดการฉีกขาดเมื่อความเครียดของแผ่นไฟเบอร์มีค่าถึงความเครียดที่ใช้ออกแบบก่อนที่จะถึงความเครียดสูงสุดของคอนกรีต ซึ่งการป้องกันไม่ให้เกิดการหลุดร่อนของแผ่นไฟเบอร์จำเป็นต้องควบคุมความเครียดที่เกิดขึ้นในแผ่นไฟเบอร์โดยใช้ตัวคูณที่เรียกว่า Bond-Dependent Coefficient ( $K_m$ ) ดังสมการที่ (2.73)

$$K_m = \begin{cases} \frac{1}{60\mathcal{E}_{fu}} \left( 1 - \frac{nE_f t_f}{360,000} \right) & \leq 0.90 \text{ เมื่อ } nE_f t_f \leq 180,000 \\ \frac{1}{60\mathcal{E}_{fu}} \left( 1 - \frac{90,000}{nE_f t_f} \right) & \leq 0.90 \text{ เมื่อ } nE_f t_f > 180,000 \end{cases} \quad (2.73)$$

เมื่อ	$\mathcal{E}_{fu}$	คือ ความเครียดของแผ่นไฟเบอร์ที่ใช้ออกแบบ (mm/mm)
	$n$	คือ จำนวนชั้นของแผ่นไฟเบอร์
	$E_f$	คือ มอดูลัสของแผ่นไฟเบอร์ (MPa)
	$t_f$	คือ ความหนาของแผ่นไฟเบอร์ 1 แผ่น (mm)

ค่า  $K_m$  ในสมการดังกล่าวกำหนดให้มีค่าไม่เกิน 0.90 เพื่อควบคุมไม่ให้ความเครียดของแผ่นไฟเบอร์ถึงจุดสูงสุดซึ่งอาจเป็นสาเหตุให้เกิดการหลุดร่อนของแผ่นไฟเบอร์ได้

เนื่องจากการกำหนดคุณสมบัติของแผ่นไฟเบอร์ให้อยู่ในรูปแบบของ Linear Elastic จนถึงจุดเสียหาย ดังนั้นความเครียดในแผ่นไฟเบอร์จึงเป็นตัวกำหนดค่าความเค้นที่เกิดขึ้นด้วย ซึ่งสามารถหาค่าความเครียด และความเค้นที่เกิดขึ้นในแผ่นไฟเบอร์ได้จาก สมการที่ (2.74) ถึง (2.75)

$$\mathcal{E}_{fe} = \mathcal{E}_{cu} \left( \frac{h-c}{c} \right) - \mathcal{E}_{bi} \leq K_m \mathcal{E}_{fu} \quad (2.74)$$

$$f_{fe} = E_f \mathcal{E}_{fe} \quad (2.75)$$

เมื่อ

$\mathcal{E}_{fe}$	คือ ความเครียดของแผ่นไฟเบอร์จุดที่หน้าตัดเสียหาย
$\mathcal{E}_{cu}$	คือ ความเครียดสูงสุดของคอนกรีต
$\mathcal{E}_{bi}$	คือ ความเครียดของคอนกรีตระหว่างติดตั้งแผ่นไฟเบอร์
$\mathcal{E}_{fu}$	คือ ความเครียดของแผ่นไฟเบอร์ที่ใช้ออกแบบ
$h$	คือ ความหนาทั้งหมดของหน้าตัด
$c$	คือ ระยะจากจุดที่รับแรงอัดสูงสุดของไฟเบอร์ถึงแกนสะเทิน
$f_{fe}$	คือ ความเค้นของแผ่นไฟเบอร์จุดที่หน้าตัดเสียหาย

การเสริมความสามารถในการรับแรงค้ำ โดยการติดตั้งแผ่นไฟเบอร์ในพื้นที่รับแรงค้ำ นั้นมีผลให้ความเหนียวของหน้าเดิมลดลง โดยความเหนียวที่เพียงพอต้องเกิดที่ความเครียดในเหล็กเสริมรับแรงค้ำมีค่าน้อยกว่า 0.005 ตามข้อแนะนำของ ACI318-99 และยังคงกล่าวอีกว่าในกรณีของหน้าตัดแบบเปราะจะใช้ตัวคูณลดกำลังเท่ากับ 0.70 ส่วนในหน้าตัดที่มีความเหนียวใช้ตัวคูณลดกำลังเท่ากับ 0.90 โดยสามารถหาตัวคูณลดกำลังที่ความเครียดต่างๆได้จาก สมการที่ (2.76)

$$\phi = \begin{cases} 0.9 & \text{เมื่อ } \mathcal{E}_s \geq 0.005 \\ 0.70 + \frac{0.20(\mathcal{E}_s - \mathcal{E}_{sy})}{0.005 - \mathcal{E}_{sy}} & \text{เมื่อ } \mathcal{E}_{sy} < \mathcal{E}_s < 0.005 \\ 0.70 & \text{เมื่อ } \mathcal{E}_s \leq \mathcal{E}_{sy} \end{cases} \quad (2.76)$$

เมื่อ  $\mathcal{E}_s$  คือ ความเครียดของเหล็กเสริม  
 $\mathcal{E}_{sy}$  คือ ความเครียดที่จุดครากของเหล็กเสริม

และเพื่อหลีกเลี่ยงพฤติกรรมการเสียรูปแบบ Inelastic ของหน้าตัดคอนกรีตเสริมเหล็กเสริมกำลังรับแรงคดโดยการติดตั้งแผ่นไฟเบอร์นั้น จึงได้กำหนดให้ใช้ความเค้นในเหล็กเสริมเพียงร้อยละ 80 ของกำลังคราก ดังสมการที่ (2.77)

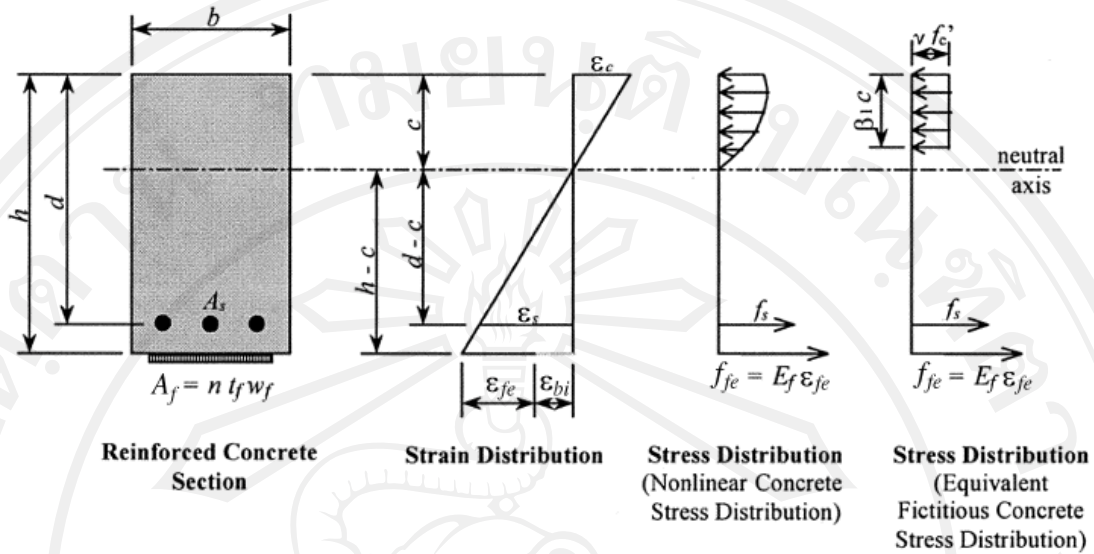
$$f_{s,s} = 0.80 f_y \quad (2.77)$$

ในกรณีที่โครงสร้างต้องรับแรงสลับทิศที่เกิดจากแผ่นดินไหว อาจทำให้แผ่นไฟเบอร์ที่ติดตั้งให้กับชิ้นส่วนของโครงสร้างนั้นเกิดการล้า (Creep) และเกิดการฉีกขาดได้ เพราะฉะนั้นจึงได้กำหนดให้ความเค้นของแผ่นไฟเบอร์ภายใต้แรงสลับทิศต้องมีค่าน้อยกว่าความเค้นของแผ่นไฟเบอร์ในช่วง Elastic ซึ่งความเค้นของแผ่นไฟเบอร์ภายใต้แรงสลับทิศได้แสดงใน ตารางที่ 2.6

ตาราง 2.6 ความเค้นของแผ่นไฟเบอร์ภายใต้แรงสลับทิศ

ชนิดของความเค้น	ชนิดของแผ่นไฟเบอร์		
ความเค้นของแผ่นไฟเบอร์ภายใต้แรงสลับทิศ	ใยแก้ว	อะรามิด	คาร์บอน
	$0.20 f_{fu}$	$0.30 f_{fu}$	$0.55 f_{fu}$

การหาค่าสูงสุดของหน้าตัดคอนกรีตเสริมเหล็กรูปสี่เหลี่ยมเสริมความสามารถในการรับแรงคดโดยการหุ้มแผ่นไฟเบอร์นั้น สามารถอธิบายได้ดังรูปที่ 2.21 และสามารถคำนวณหาความเครียดในแผ่นไฟเบอร์จากการสมมุติระยะห่างถึงแกนสะเทิน ( $c$ ) ได้ดังสมการที่ (2.78)



รูปที่ 2.21 ความเค้น และความเครียดภายในหน้าตัดสี่เหลี่ยมเสริมกำลังรับแรงคด

$$\epsilon_{fe} = \epsilon_{cu} \left( \frac{h-c}{c} \right) - \epsilon_{bi} \leq k_m \epsilon_{fu} \tag{2.78}$$

เมื่อได้ค่าความเครียดแล้วสามารถนำมาคำนวณความเค้นของแผ่นไฟเบอร์ได้โดยสมมุติพฤติกรรมของแผ่นไฟเบอร์ให้เป็นแบบ Perfectly Elastic ได้ดัง สมการที่ (2.79)

$$f_{fe} = E_f \epsilon_{fe} \tag{2.79}$$

และจากความเครียดของแผ่นไฟเบอร์สามารถคำนวณหาความเครียด ( $\epsilon_s$ ) และความเค้น ( $\epsilon_s$ ) ในเหล็กเสริมได้ ดังสมการที่ (2.80) และ (2.81)

$$\epsilon_s = (\epsilon_{fe} + \epsilon_{bi}) \left( \frac{d-c}{h-c} \right) \tag{2.80}$$

$$f_s = E_s \epsilon_s \leq f_y \tag{2.81}$$

เมื่อทราบความเค้น, ความเครียดของแผ่นไฟเบอร์และเหล็กเสริมแล้ว จึงกลับไปตรวจสอบระยะของแกนสะเทิน ( $c$ ) ที่ได้สมมุติไว้ในตอนแรกโดยใช้สมการที่ 2.82

$$c = \frac{A_s f_s + A_f A_{fe}}{\gamma f_c \beta_1 b} \quad (2.82)$$

โดยตัวแปร  $\beta_1$  และ  $\gamma$  ได้จากการวิเคราะห์การกระจายของความเค้นในหน้าตัดคอนกรีตรูปสี่เหลี่ยม (Whitney Stress Block)

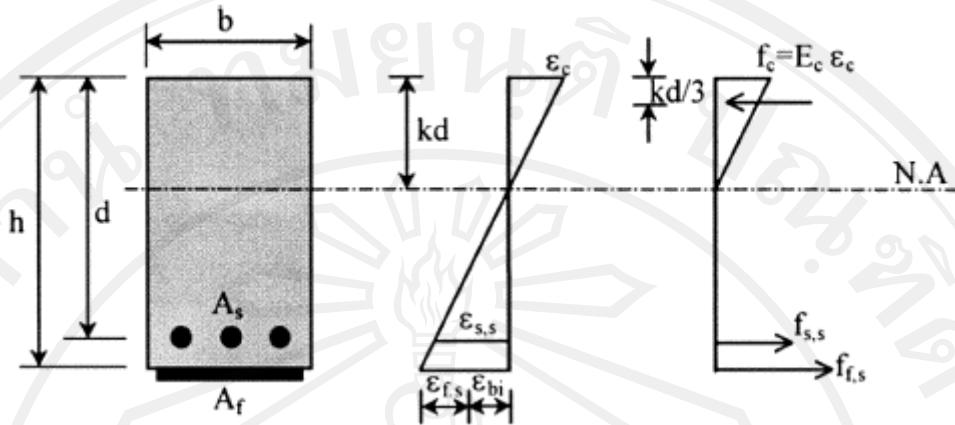
ความสามารถในการรับแรงคดของหน้าตัดเสริมกำลังโดยการหุ้มแผ่นไฟเบอร์คำนวณได้โดยใช้สมการที่ (2.83) และเพิ่มตัวคูณลดกำลังในกรณีที่แผ่นไฟเบอร์ต้องรับแรงคด ( $\psi_f$ ) ซึ่งตัวคูณลดกำลังดังกล่าว มีค่าเท่ากับ 0.85

$$M_n = A_s f_s \left( d - \frac{\beta_1 c}{2} \right) + \psi_f A_f f_{fe} \left( h - \frac{\beta_1 c}{2} \right) \quad (2.83)$$

การหาความเค้นในเหล็กเสริมที่สภาวะใช้งานสามารถหาได้โดยใช้ทฤษฎี Cracked Elastic Analysis ของหน้าตัดคอนกรีตเสริมเหล็กเสริมกำลังโดยการหุ้มแผ่นไฟเบอร์ ดังสมการที่ (2.84) โดยความเค้น และความเครียดของเหล็กเสริมที่สภาวะใช้งานแสดงได้ ดังรูปที่ 2.22 และในส่วนของความเค้นของแผ่นไฟเบอร์ที่สภาวะใช้งานสามารถคำนวณได้โดยใช้สมการที่ (2.85)

$$f_{s,s} = \frac{[M_s + \mathcal{E}_{bi} A_f E_f \left( h - \frac{kd}{3} \right)] (d - kd) E_s}{A_s E_s \left( d - \frac{kd}{3} \right) (d - kd) + A_f E_f \left( h - \frac{kd}{3} \right) (h - kd)} \quad (2.84)$$

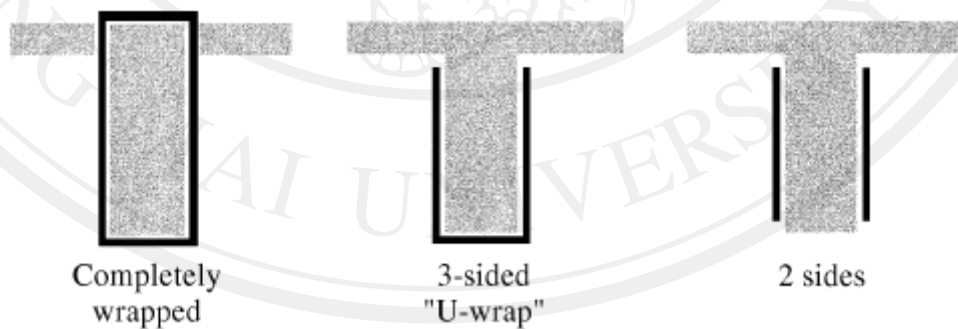
$$f_{f,s} = f_{s,s} \left( \frac{E_f}{E_s} \right) \frac{h - kd}{d - kd} - \mathcal{E}_{bi} E_f \quad (2.85)$$



รูปที่ 2.22 การกระจายความเค้น และความเครียดในเหล็กเสริมของหน้าตัดเสริมกำลังรับแรงคด

### 2.4.3.5 การออกแบบชิ้นส่วนคอนกรีตเสริมเหล็กเสริมกำลังโดยการหุ้มแผ่นไฟเบอร์รับแรงเฉือน

การเสริมกำลังโดยการหุ้มแผ่นไฟเบอร์นอกจากจะช่วยเสริมกำลังรับแรงคดตามหัวข้อที่ผ่านมาแล้ว ยังสามารถเพิ่มความสามารถในการรับแรงเฉือนได้ โดยการติดตั้งแผ่นไฟเบอร์ให้แนวเรียงตัวเส้นใยตั้งฉากกับแนวของรอยแตกที่ร้าวที่เกิดขึ้นของคอนกรีต ดังตัวอย่างในรูปที่ 2.23 ซึ่งการเสริมกำลังโดยการหุ้มแผ่นไฟเบอร์รอบหน้าตัดคานทำให้ประสิทธิภาพสูง และเป็นที่ยอมรับมากที่สุด ส่วนการติดตั้งแผ่นไฟเบอร์ที่ข้างคานให้ประสิทธิภาพน้อยที่สุด



รูปที่ 2.23 การติดตั้งแผ่นไฟเบอร์เสริมความสามารถรับแรงเฉือน

ความสามารถในการรับแรงเฉือนของหน้าตัดคอนกรีตเสริมกำลังโดยการหุ้มแผ่นไฟเบอร์ที่ใช้ออกแบบ ( $\phi V_n$ ) ต้องมีค่ามากกว่าแรงเฉือนสูงสุด ( $V_u$ ) ดังสมการที่ 2.86 โดยใช้ตัวคูณลดกำลังใช้ตามข้อแนะนำของ ACI318-99

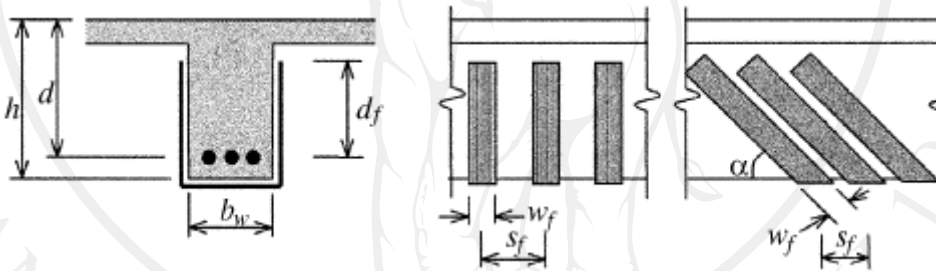
$$\phi V_n \geq V_u \quad (2.86)$$

ความสามารถในการรับแรงเฉือนของหน้าตัดคอนกรีตเสริมกำลังโดยการหุ้มแผ่นไฟเบอร์ที่ใช้ออกแบบ ( $\phi V_n$ ) สามารถคำนวณได้โดยการเพิ่มตัวคูณลดกำลังของระบบไฟเบอร์ ( $\psi_f$ ) ดังสมการที่ (2.87)

$$\phi V_n = \phi (V_c + V_s + \psi_f V_f) \quad (2.87)$$

การเลือกใช้ค่า  $\psi_f$  ขึ้นอยู่กับรูปแบบการติดตั้งแผ่นไฟเบอร์ ในกรณีติดตั้งแผ่นไฟเบอร์โดยการหุ้มรอบหน้าตัด แนะนำให้ใช้เท่ากับ 0.95 ส่วนการติดตั้งในรูปแบบตัวยู (U-Wraps) หรือติดตั้งที่สองด้านของหน้าตัด (Bonded Face) แนะนำให้ใช้ค่า  $\psi_f$  เท่ากับ 0.85

ความสามารถในการรับแรงเฉือนของแผ่นไฟเบอร์ ( $V_f$ ) สามารถคำนวณได้ดังสมการที่ (2.88) ซึ่งค่าดังกล่าวขึ้นอยู่กับรูปแบบการติดตั้งแผ่นไฟเบอร์ ดังรูปที่ 2.24



รูปที่ 2.24 รูปแบบการติดตั้งแผ่นไฟเบอร์เสริมกำลังรับแรงเฉือน

$$V_f = \frac{A_{fv} f_{fe} (\sin \alpha + \cos \alpha) d_f}{s_f} \quad (2.88)$$

เมื่อ

$$A_{fv} = 2nt_f w_f$$

ความเค้นแรงดึง (Tensile Stress) ของแผ่นไฟเบอร์รับแรงเฉือนบริเวณที่วิบัติ ( $f_{fe}$ ) สามารถคำนวณได้โดยการคูณความเครียดบริเวณที่เกิดการวิบัติ ( $\epsilon_{fe}$ ) เข้ากับมอดูลัสของแผ่นไฟเบอร์ ( $E_f$ ) ดังแสดงในสมการที่ (2.89)

$$f_{fe} = \epsilon_{fe} E_f \quad (2.89)$$

ในส่วนของคุณค่าความเครียดของแผ่นไฟเบอร์บริเวณที่เกิดการวิบัติ ( $\mathcal{E}_{fe}$ ) ต้องควบคุมไม่ให้เกินค่าที่กำหนด ซึ่งการหุ้มแผ่นไฟเบอร์ทั้งหน้าตัด (Completely Wrap) กำหนดให้ใช้ค่า  $\mathcal{E}_{fe}$  ได้ไม่เกินค่าในสมการที่ (2.90) และในรูปแบบการหุ้มแผ่นไฟเบอร์แบบรูปตัวยู (U-Wrap) รวมทั้งการหุ้มแผ่นไฟเบอร์ด้านข้าง (Side Wrap) กำหนดให้ใช้  $\mathcal{E}_{fe}$  ไม่เกินค่าที่คำนวณได้จากสมการที่ (2.91)

$$\mathcal{E}_{fe} = 0.004 \leq 0.75 \mathcal{E}_{fu} \quad (\text{Completely Wrap}) \quad (2.90)$$

$$\mathcal{E}_{fe} = k_v \mathcal{E}_{fu} \leq 0.004 \quad (\text{U-Wrap และ Side Wrap}) \quad (2.91)$$

เมื่อ  $k_v$  คือ สัมประสิทธิ์แรงยึดเหนี่ยว (Bond-Reduction Coefficient) เป็นฟังก์ชันของกำลังคอนกรีต, รูปแบบการติดตั้งแผ่นไฟเบอร์ และความแข็งแรงของแผ่นไฟเบอร์สามารถคำนวณได้จากสมการที่ (2.92)

$$k_v = \frac{k_1 k_2 L_e}{11,900 \mathcal{E}_{fu}} \leq 0.75 \quad (2.92)$$

$L_e$  คือ ความยาวของการหุ้มแผ่นไฟเบอร์ มีค่าเท่ากับ

$$L_e = \frac{23,300}{(n_f E_f)^{0.58}} \quad (2.93)$$

$k_1$  และ  $k_2$  คือ สัมประสิทธิ์แรงยึดเหนี่ยว (Bond-Reduction Coefficient) ซึ่งแยกออกมาในเทอมของกำลังคอนกรีต และรูปแบบของการติดตั้งแผ่นไฟเบอร์ตามลำดับ สามารถคำนวณได้จากสมการที่ (2.94) และ (2.95)

$$k_1 = \left(\frac{f_c}{27}\right)^{2/3} \quad (2.94)$$

$$k_2 = \begin{cases} \frac{d_f - L_e}{d_f} & \text{(U-Wrap)} \\ \frac{d_f}{d_f - 2L_e} & \text{(Side Wrap)} \\ d_f & \end{cases} \quad (2.95)$$

ขีดจำกัดของการเสริมความสามารถในการรับแรงเฉือน คือผลรวมของกำลังรับแรงเฉือนของแผ่นไฟเบอร์กับกำลังรับแรงเฉือนของเหล็กเสริมต้องไม่เกินค่าที่คำนวณได้จากสมการที่ (2.96)

$$V_s + V_f \leq 0.66 \sqrt{f'_c} b_w d \quad (2.96)$$