

บทที่ 2

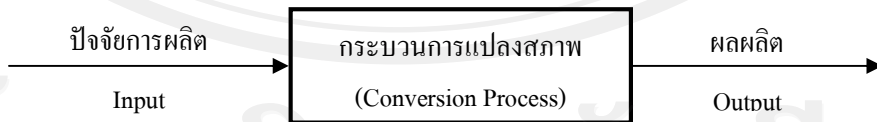
ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยต้องการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับการมอบหมายงานของสายการผลิตให้ตัดแต่งพิเศษ เพื่อลดระยะเวลาในการวางแผน และทำให้การวางแผนการมอบหมายงานมีประสิทธิภาพมากขึ้น มุ่งเน้นการใช้ประโยชน์ทรัพยากรสูงสุด โดยประยุกต์ใช้เทคนิคทางวิศวกรรมอุตสาหกรรมและแนวคิดจากงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

2.1. หลักการและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

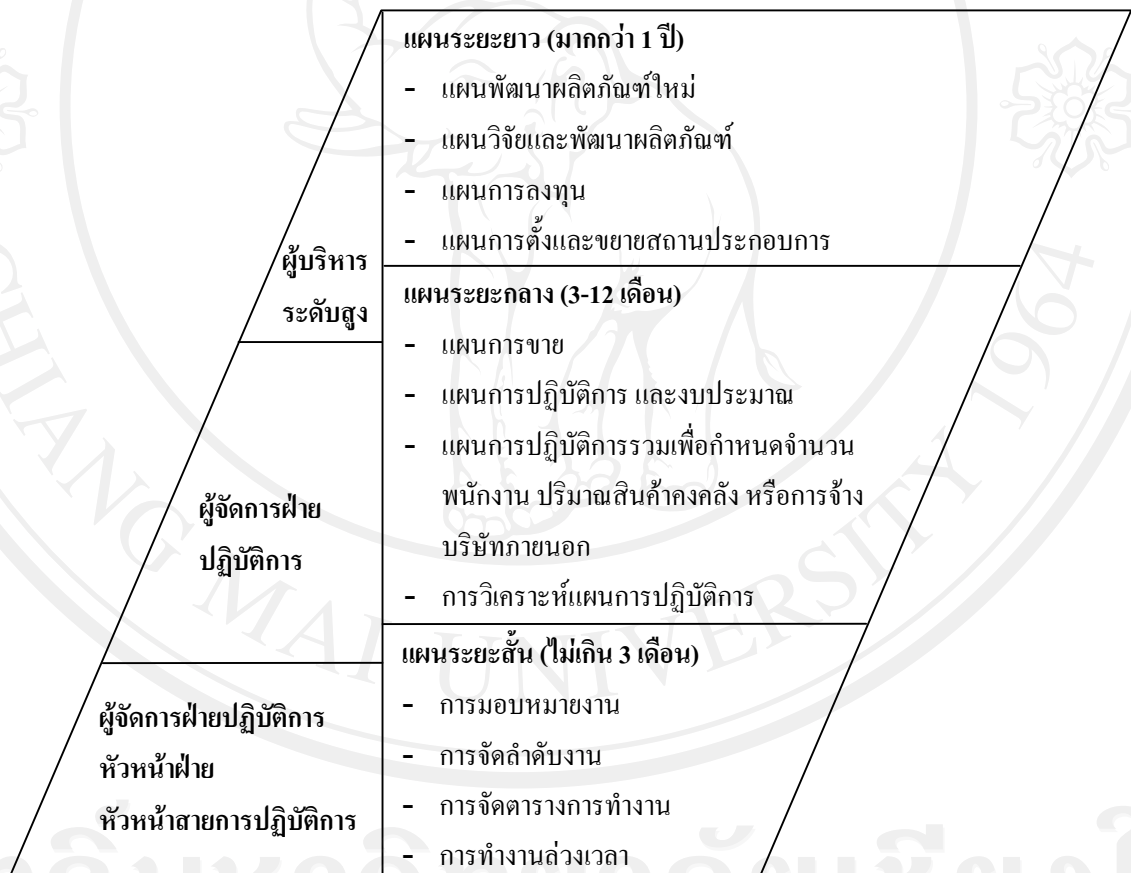
2.1.1. การวางแผนการผลิต (Production Planning)

การผลิตเป็นกระบวนการที่ทำให้เกิดการสร้างสรรค์สิ่งหนึ่งสิ่งใดขึ้นมา จากการใช้ทรัพยากรหรือปัจจัยการผลิตที่มีอยู่ การดำเนินการผลิตจะเป็นไปตามลำดับขั้นตอนของการกระทำก่อนหลัง กล่าวคือ จากวัตถุดิบที่มีอยู่จะถูกแปลงสภาพให้เป็นผลผลิตที่อยู่ในรูปตามต้องการ เพื่อให้การผลิตบรรลุวัตถุประสงค์ดังกล่าวนั้น จึงจำเป็นต้องมีการจัดการให้อยู่ในรูปของระบบการผลิต ซึ่งประกอบด้วยส่วนสำคัญ 3 ส่วนคือ ปัจจัยการผลิต (Input) กระบวนการแปลงสภาพ (Conversion Process) และผลผลิต (Output) ที่อาจเป็นสินค้าหรือบริการ (ชุมพล, 2552)

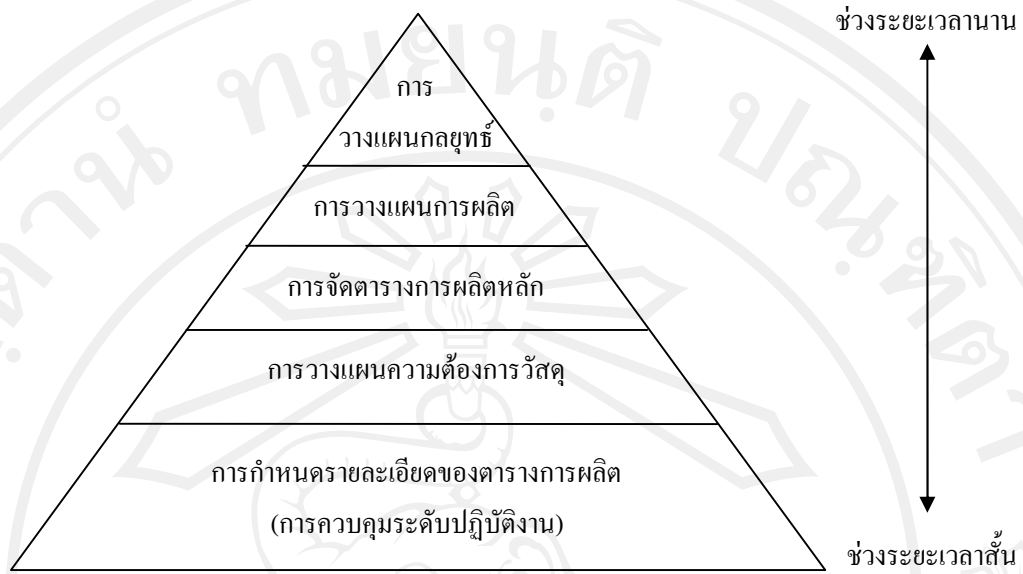


รูป 2.1 ระบบการผลิต

การวางแผนการผลิต (Production Planning) จะเกี่ยวข้องกับการดำเนินงานทั้งหมดขององค์กรตามระยะเวลาที่กำหนดขึ้นซึ่งแบ่งออกเป็น 3 ระดับคือ แผนระยะยาว แผนระยะกลาง และแผนระยะสั้น ดังรูป 2.2 โดยแผนแต่ละระดับมักจะเรียกชื่อต่าง ๆ กันเช่น การวางแผนการผลิตรวม (Aggregate Planning) การวางแผนการดำเนินงาน (Operation Planning) และการจัดการตารางการผลิตรวม (Aggregate Scheduling) โดยจะเริ่มวางแผนการผลิตโดยใช้ข้อมูลจากการพยากรณ์และคำสั่งซื้อจากลูกค้า จะถูกนำมาจัดทำเป็นแผนการใช้แรงงาน วัตถุดิบ และอุปกรณ์ให้เป็นไปอย่างมีประสิทธิภาพสูง ซึ่งจะเป็นลักษณะการวางแผนการผลิตจากบนลงล่างตามช่วงระยะเวลาของการวางแผน ดังรูป 2.3



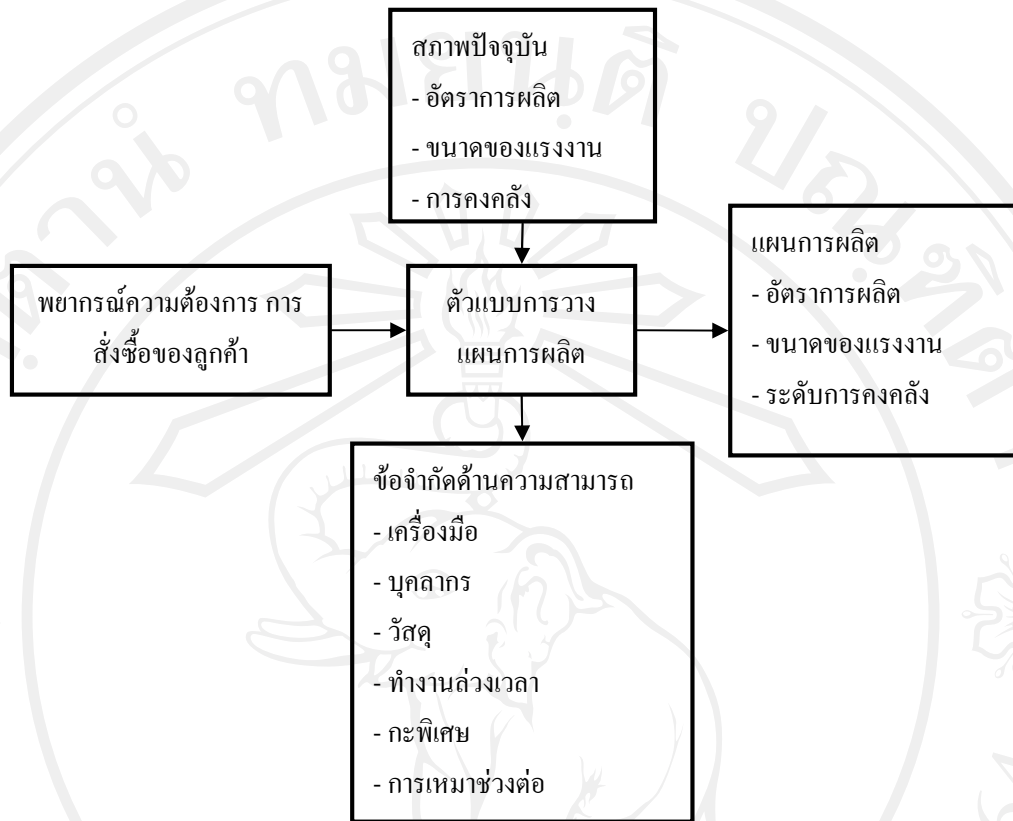
รูป 2.2 ระดับของการวางแผนและผู้รับผิดชอบ



รูป 2.3 การวางแผนจากบนลงล่าง

การวางแผนการผลิตโดยทั่วไปจะเกี่ยวกับผลผลิต (Output) จากการดำเนินการผลิต ซึ่งอาจจะวัดจากผลผลิตเดี่ยว (Single Output) หรือกลุ่มผลิตภัณฑ์ (Categories) เช่น เป็นจำนวนต้น จำนวนเวลา (ชั่วโมง) ที่ใช้ไปกับเครื่องจักร จำนวนเวลาของการให้บริการ หรือจำนวนลูกค้าที่รวมกันเป็นกลุ่ม เป็นต้น

หน้าที่ของการวางแผนการผลิต จากรูป 2.4 จะเป็นการกำหนดจุดยุทธศาสตร์ในการผลิตต่อระดับอุปสงค์ (Demand) ถ้าอุปสงค์ของผลิตภัณฑ์หรือบริการคงที่ การวางแผนสำหรับกิจกรรมต่างๆก็无需ความจำเป็นต้องเอาใจใส่มากนัก แต่ถ้ามีการแปรผันในอุปสงค์เกิดขึ้น การวางแผนการผลิตก็จะมีผลสำคัญและมีความจำเป็นอย่างยิ่ง



รูป 2.4 หน้าทีของการวางแผนการผลิต

ตัวแปรหลักที่เกี่ยวข้องกับการวางแผนการผลิตในกรณีที่อุปสงค์มีการเปลี่ยนแปลงก็คือ อัตราการผลิต (Production Rate) ระดับการคงคลัง (Inventory Level) ขนาดแรงงาน (Work Force) จำนวนกะพิเศษของการทำงาน (Extra Shift) ชั่วโมงทำงานล่วงเวลา (Overtime) ผลิตภัณฑ์ผสม (Production Mix) และการเหมาช่วงทำต่อ (Subcontract) ตัวแปรหลักเหล่านี้จะมีมากน้อยเพียงไร ขึ้นอยู่กับเหตุการณ์ในแต่ละขณะ หรือเป็นไปตามนโยบายขององค์กรนั้นๆ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับความ สลับซับซ้อน ความสัมพันธ์กันของแรงงาน อุปกรณ์และวัตถุดิบด้วย

2.1.2. ตัวแบบการจัดสรรทรัพยากร (Resource Allocation Model)

ทรัพยากร หมายถึง สิ่งที่มีไว้ใช้งานในองค์กรหรือบริษัทเพื่อเพิ่มผลิตหรือผลประโยชน์ ให้แก่องค์กร (พัชรภรณ์, 2552) ทรัพยากรนี้รวมถึงโรงงาน พนักงาน วัตถุดิบและทรัพย์สินต่างๆ โดยทั่วไปทรัพยากรในองค์กรมักมีอยู่อย่างจำกัดเช่น จำนวนพนักงานที่ควบคุมเครื่องจักร จำนวน รถบรรทุกที่มีไว้ขนส่งสินค้า เป็นต้น โดยทั่วไปทรัพยากรเหล่านี้มีอยู่อย่างจำกัดจึงต้องมีการจัดสรร ทรัพยากรให้เกิดประโยชน์สูงสุด ซึ่งประสิทธิภาพในการจัดสรรทรัพยากรอาจวัดในรูปของปริมาณ การผลิตสูงสุด หรือกำไรสูงสุด

การสร้างตัวแบบเพื่อการตัดสินใจ (Decision Model) ของปัญหาเป็นการประมวลผลในเชิงตัวเลข โดยไม่มีอคติของผู้ตัดสินใจหรืออารมณ์ของผู้ตัดสินใจ เรียกตัวแบบประเภทนี้ว่า ตัวแบบคณิตศาสตร์ (Mathematical Model) จะแสดงความสัมพันธ์เชิงคณิตศาสตร์ของสิ่งต่างๆ ที่สนใจหรือเงื่อนไขต่างๆ ที่จำเป็นต้องคำนึงถึงในสถานการณ์ของปัญหานั้น ตัวแบบคณิตศาสตร์ที่นำมาใช้ในการแก้ปัญหาการจัดสรรทรัพยากรที่มีอยู่อย่างจำกัดนี้เรียกว่า ตัวแบบการจัดสรรทรัพยากร (Resource Allocation Model) การใช้ตัวแบบคณิตศาสตร์เพื่อการตัดสินใจทำให้การตัดสินใจของผู้บริหารดีขึ้น หรือเพื่อให้เข้าใจสถานการณ์ปัจจุบันได้ดีขึ้น

โดยทั่วไปปัญหามักมีความซับซ้อน และอาจขัดแย้งในเชิงของนโยบาย หรือความรู้สึกของคน เป้าหมายของการนำตัวแบบจัดสรรทรัพยากรไปใช้จริงจะต้อง

- 1) ระบุวัตถุประสงค์ของการตัดสินใจที่ต้องการทำ
- 2) ตั้งเกณฑ์ที่จะใช้วัดประสิทธิผลของทางเลือกต่างๆ
- 3) ระบุข้อจำกัดหรือเงื่อนไขที่ผู้ตัดสินใจจะต้องเผชิญ

เป้าหมายที่สำคัญที่สุดของการใช้ตัวแบบจัดสรรทรัพยากรคือ เพื่อช่วยให้องค์กรและผู้บริหารให้สามารถตัดสินใจได้ดีขึ้น วิธีการนี้จะประสบความสำเร็จหรือไม่ขึ้นอยู่กับความซับซ้อนของปัญหา ประสิทธิภาพของผู้ประยุกต์ใช้ และสิ่งแวดล้อมต่างๆ ที่ผู้ตัดสินใจประยุกต์ใช้

2.1.2.1. องค์ประกอบของตัวแบบการจัดสรรทรัพยากร

ตัวแบบการจัดสรรทรัพยากร มีองค์ประกอบสำคัญ 3 ส่วนคือ

1) ตัวแปรตัดสินใจ (Decision Variables)

ตัวแปรที่แทนกิจกรรมต่างๆ ของปัญหาที่สนใจ การหาค่าของตัวแปรตัดสินใจ เป็นการหาว่า ควรกระทำกิจกรรมมากน้อยในระดับใดเพื่อแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นเช่น การผลิตสินค้าในโรงงานแห่งหนึ่ง ผู้ที่มีหน้าที่รับผิดชอบในการวางแผนการผลิตต้องการทราบว่าควรผลิตสินค้าแต่ละชนิดจำนวนเท่าใดในแต่ละสัปดาห์ สำหรับปัญหาการขนส่งสินค้าจากโรงงานไปยังลูกค้า ผู้รับผิดชอบต้องการทราบว่า จะส่งสินค้าไปตามเส้นทางใด จำนวนเท่าใด เป็นต้น

2) ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (Objective Function)

การตัดสินใจแก้ปัญหาหนึ่งๆ อาจมีผลเฉลย (Solution) ของปัญหาได้หลายผลเฉลย ผู้ตัดสินใจต้องการเลือกผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด ซึ่งเกณฑ์ในการเลือกผลเฉลยนี้จะสอดคล้องกับวัตถุประสงค์ของการจัดสรรทรัพยากร ฟังก์ชันวัตถุประสงค์เป็นฟังก์ชันที่แสดงความสัมพันธ์

ระหว่างตัวแปรตัดสินใจต่างๆกับวัตถุประสงค์ของปัญหา ฟังก์ชันวัตถุประสงค์จะสะท้อนว่าผลเฉลยนั้นมีความสอดคล้องกับวัตถุประสงค์มากน้อยเพียงใด เช่น

ปัญหาการจัดสรรเงินทุน 5 ล้านบาท สำหรับการลงทุนในธุรกิจ 4 ประเภท โดยกำหนดให้ตัวแปรตัดสินใจ x_i แทนปริมาณเงินทุนในธุรกิจที่ i โดย $i = 1, 2, 3, 4$ การลงทุนนี้ผู้ตัดสินใจต้องการให้ผลตอบแทนรายปีมีค่าสูงสุด ฟังก์ชันวัตถุประสงค์จะเป็นฟังก์ชันที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณเงินลงทุนในธุรกิจทั้ง 4 ประเภทกับร้อยละของผลตอบแทนรายปีของธุรกิจแต่ละประเภท สำหรับการหาผลเฉลยจะเลือกจากผลเฉลยที่ทำให้ผลรวมของผลตอบแทนรายปีมีค่าสูงสุด จะเรียกทิศทางของฟังก์ชันวัตถุประสงค์นี้ว่าเป็น ค่าสูงสุด (Maximization)

ในทางกลับกัน ถ้าปัญหาการขนส่งสินค้าจากโรงงานไปยังลูกค้า อาจกำหนดตัวแปรตัดสินใจให้ x_j แทนปริมาณสินค้าที่ส่งผ่านเส้นทาง j โดย $j = 1, 2, \dots, 5$ ฟังก์ชันวัตถุประสงค์จะเป็นฟังก์ชันที่แสดงความสัมพันธ์ของค่าขนส่งสินค้ากับปริมาณในแต่ละเส้นทาง โดยต้องการให้ผลรวมค่าขนส่งต่ำที่สุด ผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดจะเลือกผลเฉลยที่ทำให้ผลรวมค่าขนส่งต่ำที่สุด เรียกทิศทางของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ในลักษณะนี้ว่า ค่าต่ำที่สุด (Minimization)

นอกจากนี้ยังสามารถกำหนดฟังก์ชันวัตถุประสงค์ได้มากกว่าหนึ่งวัตถุประสงค์ ถ้าปัญหาที่ต้องการศึกษามีเป้าหมายหรือวัตถุประสงค์หลายประการเช่น ธุรกิจแห่งหนึ่งต้องการให้ได้ทั้งกำไรสูงสุด ส่วนแบ่งการตลาดเพิ่มขึ้นสูงสุด และต้องการในจำนวนวงเงินสำรองต่ำที่สุด เป็นต้น

3) ข้อจำกัด (Constraints)

เงื่อนไขหรือข้อจำกัดของปัญหา บอกให้ผู้วิเคราะห์ทราบว่าจะทำอะไรได้บ้าง ไม่ได้บ้างเช่น ในการวางแผนการผลิตสินค้าที่กล่าวไว้ข้างต้น อาจมีข้อจำกัดด้านแรงงานที่ใช้ในการผลิตในแต่ละสัปดาห์ หรือปริมาณความต้องการสูงสุดของสินค้าแต่ละชนิด ในตัวอย่างการลงทุน อาจมีนโยบายในการลงทุนว่า การลงทุนในธุรกิจที่ 2 มีความเสี่ยงสูงผู้บริหารอาจไม่ต้องการที่จะลงทุนเกิน 1 ล้านบาท เป็นต้น

2.1.2.2. ประเภทของตัวแบบ

การแบ่งประเภทของตัวแบบการจัดสรรทรัพยากรนั้นมีหลายแบบ ขึ้นอยู่กับเกณฑ์ในการแบ่งตัวแบบ Balakrishnan (2007) ได้เสนอการแบ่งตัวแบบโดยเกณฑ์ต่างๆดังนี้

1) ตัวแบบเชิงเส้นและไม่เป็นเชิงเส้น

ตัวแบบเชิงเส้น (Linear Model) เป็นตัวแบบที่ตัวแปรตัดสินใจมีความสัมพันธ์ในเชิงเส้นตรง เช่น ให้ x_1 และ x_2 แทนปริมาณการขายสินค้าชนิดที่ 1 และ 2 โดยที่ Z แทนผลกำไรจากการขายสินค้าทั้งสองชนิด ความสัมพันธ์ของตัวแปรทั้งสามคือ

$$Z = 50x_1 + 40x_2 \quad (2.1)$$

ส่วนตัวแบบไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear Model) เป็นตัวแบบที่ตัวแปรตัดสินใจมีความสัมพันธ์แบบไม่เป็นเชิงเส้นเช่น การผลิตยางรถยนต์ต้องทดสอบความต้านแรงดึง (Tensile Strength) แทนด้วย T และ Q แทนจำนวนปอนด์ของน้ำมันที่เป็นส่วนผสมของยางรถยนต์ซึ่ง

$$T = 12.5 - 0.10Q - 0.001Q^2 \quad m \quad (2.2)$$

2) ตัวแบบเชิงจำนวนเต็มและไม่เป็นจำนวนเต็ม

บางปัญหาตัวแปรที่ตัดสินใจจำเป็นต้องมีค่าเป็นตัวเลขจำนวนเต็มเท่านั้นเช่น การศึกษาที่ตั้งของคลังสินค้าเพื่อกระจายสินค้าสู่จังหวัดต่างๆในประเทศไทย อาจกำหนดตัวแปร x_i แทน การตั้งคลังสินค้าที่บริเวณ i หรือไม่ ถ้า $x_i = 1$ แสดงว่าควรตั้งคลังสินค้าที่บริเวณ i ถ้า $x_i = 0$ แสดงว่าไม่ควรตั้งคลังสินค้าที่บริเวณ i ตัวแบบที่มีตัวแปรตัดสินใจต้องเป็นค่าจำนวนเต็มเรียกว่า ตัวแบบเชิงจำนวนเต็ม (Integer Model) ถ้าหากตัวแบบที่ไม่มีข้อกำหนดเรื่องค่าของตัวแปรตัดสินใจเป็นจำนวนเต็มจะเรียกว่า ตัวแบบไม่เป็นจำนวนเต็ม (Non-Integer Model)

3) ตัวแบบเชิงกำหนดและตัวแบบความน่าจะเป็น

ตัวแบบเชิงกำหนด (Deterministic Model) เป็นตัวแบบที่ประกอบด้วยค่าข้อมูลนำเข้าเป็นค่าคงที่ที่ทราบค่าแน่นอน โดยมีสมมติฐานว่าข้อมูลนำเข้าหรือพารามิเตอร์ของตัวแบบต้องมีค่าคงที่และสามารถทราบค่าที่แท้จริงนี้ได้ สำหรับตัวแบบความน่าจะเป็น (Stochastic Model) เป็นตัวแบบที่มีค่าข้อมูลนำเข้าไม่ทราบค่าแน่นอนแต่มีการแจกแจงอย่างใดอย่างหนึ่ง

4) ตัวแบบเชิงสถิติและตัวแบบเชิงพลวัต

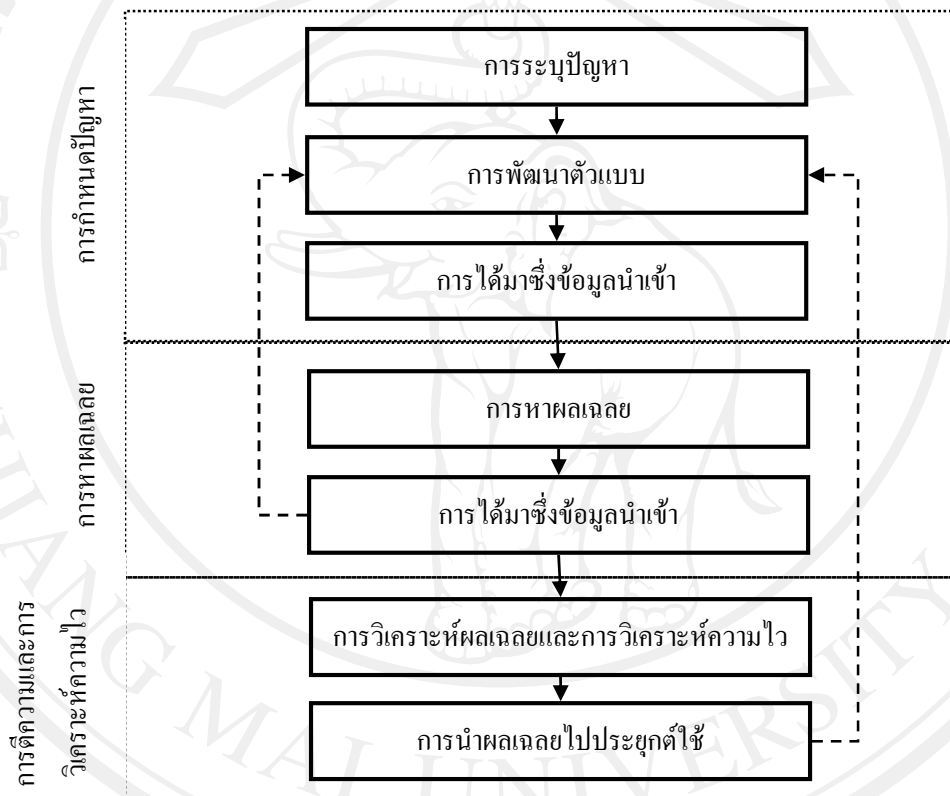
ตัวแบบเชิงสถิติ (Static Model) เป็นตัวแบบที่ตัวแปรตัดสินใจไม่เกี่ยวข้องกับลำดับของการตัดสินใจที่มีหลายช่วงเวลา เช่น ต้องการทราบการผลิตต่อปีในปีหน้า เป็นต้น ส่วนตัวแบบเชิงพลวัต (Dynamic Model) เป็นตัวแบบที่ตัวแปรตัดสินใจมีความเกี่ยวข้องกับลำดับของการตัดสินใจที่มีหลายช่วงเวลา เช่น จะผลิตสินค้าเท่าไรในแต่ละเดือนในอีกสี่เดือนข้างหน้า ในกรณีนี้ ปริมาณการผลิตสินค้าในเดือนที่หนึ่งจะส่งผลต่อการตัดสินใจผลิตสินค้าในเดือนถัดไป

2.1.2.3. ขั้นตอนการแก้ปัญหาโดยใช้ตัวแบบการจัดสรรทรัพยากร

การสร้างตัวแบบเพื่อการตัดสินใจเป็น 3 ขั้นตอนใหญ่ๆ ดังนี้ (พัชราภรณ์, 2552)

1. การกำหนดปัญหา (Formulation)
2. การหาคำตอบ (Solving)
3. การตีความหมายและการวิเคราะห์ความไวของพารามิเตอร์ (Interpretation and

Sensitivity Analysis)



รูป 2.5 ขั้นตอนย่อยในการแก้ปัญหาโดยใช้ตัวแบบการจัดสรรทรัพยากร

2.1.2.3.1. การกำหนดปัญหา (Formulation)

เป็นกระบวนการในการพิจารณาสถานการณ์ของปัญหาแล้วแปลงไปสู่ตัวแบบคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นส่วนที่สำคัญที่สุด เนื่องจากขั้นตอนนี้อาจทำให้ได้ตัวแบบที่ไม่ดี ซึ่งจะส่งผลทำให้ผลเฉลยนั้นผิดไป ความสามารถของผู้สร้างตัวแบบจึงมีสำคัญมาก ถึงแม้ในปัจจุบันจะมีโปรแกรมสำเร็จรูป (Software Program) ที่ช่วยในการแก้ปัญหาตัวแบบคณิตศาสตร์ แต่โปรแกรมเหล่านั้นไม่สามารถสร้างตัวแบบของปัญหาต่างๆ ได้อย่างอัตโนมัติ วัตถุประสงค์ของการ

กำหนดปัญหานี้เพื่อให้แน่ใจว่าตัวแบบคณิตศาสตร์นี้สามารถกล่าวถึงปัญหาในประเด็นที่สำคัญได้อย่างครบถ้วน ดังนั้นการกำหนดปัญหาจึงสามารถแบ่งได้ 3 ส่วนคือ

1) การระบุปัญหา (Defining the Problem)

กำหนดวัตถุประสงค์เพื่อสร้างคำจำกัดความที่สั้น กระชับและได้ใจความ การระบุปัญหาเป็นส่วนที่สำคัญที่สุดและยากที่สุด ในบางกรณีอาจไม่ได้คำนึงถึงเฉพาะลักษณะปัญหาที่เกิดขึ้น แต่ต้องพิจารณาถึงสาเหตุของปัญหาที่แท้จริง ปัญหาหนึ่งอาจมีความสัมพันธ์กับอีกปัญหาหนึ่ง หากแก้ปัญหาใดปัญหาหนึ่งเพียงปัญหาเดียว ผลเฉลยที่ได้อาจไม่เหมาะสมกับสถานการณ์จริง ดังนั้นจึงควรมีการวิเคราะห์ว่าผลลัพธ์จากปัญหาหนึ่งมีผลต่อปัญหาอื่นๆที่เกี่ยวข้องอย่างไร

2) การพัฒนาตัวแบบ (Developing a Model)

เป็นการสร้างตัวแบบตัดสินใจในรูปความสัมพันธ์เชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งความสัมพันธ์นี้สามารถแสดงในรูปสมการหรืออสมการ โดยทั่วไปตัวแบบมักจะมีตัวแปรตัดสินใจและพารามิเตอร์มากกว่าหนึ่งตัว ค่าตัวแปรตัดสินใจคือ ปริมาณของสิ่งของหรือกิจกรรมที่ต้องการทราบ ขณะที่พารามิเตอร์เป็นปริมาณที่ทราบค่าจากนโยบายขององค์กรหรือสภาพปัจจุบัน

3) การได้มาซึ่งข้อมูลนำเข้า (Acquiring Input Data)

หลังจากที่สร้างตัวแบบแล้ว ทำให้ทราบว่าข้อมูลอะไรบ้างที่จำเป็นต้องรวบรวมเพื่อนำมาใช้เป็นข้อมูลนำเข้าในตัวแบบ โดยทั่วไปคือ พารามิเตอร์ต่างๆนั่นเอง การรวบรวมข้อมูลเหล่านี้มีความสำคัญมาอีกประการหนึ่ง ถ้าได้ข้อมูลที่ไม่เหมาะสม ไม่ถูกต้องแม่นยำก็ย่อมจะส่งผลให้ผลเฉลยที่ได้ผิดพลาดไป

2.1.2.3.2. การหาคำตอบ (Solving)

ปัจจุบันการหาผลเฉลยอาจใช้โปรแกรมสำเร็จรูป (Software Package) ดังนั้นในขั้นตอนนี้ประกอบด้วยขั้นตอนย่อย 2 ขั้นตอนคือ

1) การหาผลเฉลย (Developing a Solution)

เป็นการหาคำตอบที่ดีที่สุดให้กับปัญหา บางกรณีอาจใช้การลองผิดลองถูกวิธีการต่างๆ เพื่อกำหนดผลเฉลยที่เป็นไปได้จำนวนหนึ่ง แล้วเลือกผลเฉลยที่ดีที่สุด สำหรับปัญหาบางอย่างอาจต้องทดลองทุกค่าของตัวแปรในตัวแบบเพื่อให้การตัดสินใจดีที่สุด ซึ่งวิธีการนี้เรียกว่า วิธีการแจงนับ (Enumerative Method) สำหรับปัญหาที่ซับซ้อนและยาก อาจต้องใช้

อัลกอริทึมเข้ามาช่วยแก้ไขปัญห อัลกอริทึมหนึ่งอาจประกอบด้วยอนุกรมของขั้นตอนที่มีการทำซ้ำจนกระทั่งสามารถหาคำตอบที่ดีที่สุด

2) การทดสอบผลเฉลย (Testing a Solution)

เป็นการทดสอบผลเฉลยจากข้อมูลนำเข้าและตัวแบบ ซึ่งทั้งสองส่วนนี้ต้องมีการทดสอบความถูกต้อง การทดสอบข้อมูลนำเข้าทำได้หลายวิธี วิธีการหนึ่งคือ การเก็บรวบรวมข้อมูลเพิ่มเติมจากแหล่งอื่นๆและใช้สถิติในการทดสอบเพื่อเปรียบเทียบว่า ข้อมูลที่เก็บได้ใหม่กับข้อมูลเดิมมีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญหรือไม่ หากมีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญแสดงว่ามีความจำเป็นต้องหาแหล่งข้อมูลที่มีความถูกต้องมากกว่านี้ ถ้าข้อมูลนำเข้ามีความถูกต้องแต่ผลเฉลยมีความไม่แน่นอน แสดงว่าตัวแบบอาจไม่เหมาะสม ในกรณีนี้ควรตรวจสอบตัวแบบว่าสามารถแสดงถึงสถานการณ์จริงหรือไม่

2.1.2.3.3. การตีความหมายและการวิเคราะห์ความไวของพารามิเตอร์

(Interpretation and Sensitivity Analysis)

การแปลความหมายและการวิเคราะห์ความไว มี 2 ขั้นตอนย่อยคือ

1) การวิเคราะห์ผลเฉลยและการวิเคราะห์ความไว

เนื่องจากตัวแบบคณิตศาสตร์เป็นเพียงการประมาณความจริง การวิเคราะห์ความไวของการเปลี่ยนแปลงในตัวแบบ หรือข้อมูลนำเข้าจะเป็นส่วนสำคัญของการวิเคราะห์ผลเฉลย ซึ่งการวิเคราะห์นี้เรียกว่า การวิเคราะห์ความไว (Sensitivity Analysis) หรือการวิเคราะห์หลังได้ค่าที่เหมาะสมแล้ว (Post - Optimality) การวิเคราะห์ความไวนำมาใช้เพื่อระบุการเปลี่ยนแปลงของผลเฉลยเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงค่าของพารามิเตอร์หรือเงื่อนไขของตัวแบบ การวิเคราะห์ความไวเป็นการทดสอบเพิ่มเติมที่จะนำมาใช้เพื่อให้มั่นใจว่า ผลเฉลยยังคงเหมาะสมหรือไม่เมื่อค่าพารามิเตอร์เปลี่ยนไป

2) การนำผลเฉลยไปประยุกต์ใช้

ส่วนนี้เป็นส่วนที่สำคัญอีกส่วนหนึ่งสำหรับนักวิเคราะห์ เมื่อนำผลเฉลยไปใช้แล้วจะต้องคอยตรวจสอบอย่างใกล้ชิด บ่อยครั้งเมื่อเวลาเปลี่ยนไป ค่าพารามิเตอร์ต่างๆต้องเปลี่ยนไปเช่น การเปลี่ยนแปลงทางเศรษฐศาสตร์ ความต้องการสินค้า เป็นต้น ทำให้ผู้วิเคราะห์ต้องมีการปรับเปลี่ยนตัวแบบให้เหมาะสมอยู่เสมอ

2.1.3. ตัวแบบลิเนียโปรแกรมมิง (Linear Programming Model)

ลิเนียโปรแกรมมิงเป็นเทคนิคที่ใช้ในการแก้ปัญหาทางการจัดสรรปัจจัยและทรัพยากรที่มีความสัมพันธ์ของตัวแปรต่างๆเป็นเชิงเส้นตรง โดยมีจุดหมายเพื่อแก้ปัญหาและตัดสินใจให้เกิดการดำเนินงานที่ดีที่สุดเช่น กำไรสูงสุด ค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด ปริมาณการผลิตมากที่สุด เป็นต้น โดยมีเงื่อนไขเช่น ภาวะตลาด วัตถุดิบ กำลังคน เครื่องจักร เงินทุน เป็นต้น

เทคนิคลิเนียโปรแกรมมิงนี้พัฒนามาจากความก้าวหน้าทางวิทยาศาสตร์ ปัจจุบันเป็นที่ยอมรับกันอย่างแพร่หลายในการนำไปใช้ประโยชน์อย่างมากเช่น ทางเกษตรกรรมได้ใช้เทคนิคนี้กับงานเศรษฐศาสตร์เกษตรกรรมและการจัดการทางเกษตรกรรม โดยใช้วิเคราะห์ปัญหาการจัดสรรปัจจัยที่มีอยู่อย่างจำกัดเช่น ที่ดิน ปุ๋ย น้ำ แรงงานและเงินทุน ช่วยให้สามารถตัดสินใจจัดการให้เกิดผลผลิตเก็บเกี่ยวที่สูงที่สุด เพาะปลูกชนิดของพืชผลให้เหมาะสมกับฤดูกาล ตามความต้องการของตลาด จึงมีผลให้ขายได้กำไรสูงขึ้นเพราะราคาดีขึ้น อันเนื่องมาจากผลผลิตที่ได้มีไม่มากเกินความต้องการ ในจังหวะเวลาที่เหมาะสม

ในทางอุตสาหกรรมได้ใช้เทคนิคนี้มาช่วยในการจัดการเกี่ยวกับการผลิต อุตสาหกรรมที่ใช้เทคนิคนี้แล้วประสบความสำเร็จอย่างงดงาม ได้แก่ อุตสาหกรรมถ่านหิน เหล็กกล้า กระดาษ น้ำมัน เป็นต้น ในวงการธุรกิจ เช่น เส้นทางเดินทางรถประจำทาง การขนส่งทางน้ำ และทางอากาศ ก็ได้พัฒนาเทคนิคดังกล่าว เพื่อลดค่าใช้จ่ายในการขนส่ง ช่วยให้ดำเนินงานขนถ่ายบุคคลและสิ่งของเป็นไปอย่างมีประสิทธิภาพ แม้แต่ทางการทหารก็มีนำมาใช้เพื่อการจัดสรรนักบินที่ได้รับการฝึกบินและเครื่องบินที่ผลิตออกมาใหม่ จะเห็นว่า ลิเนียโปรแกรมมิงนี้มีบทบาทต่อส่วนงานต่างๆมากมาย และสามารถนำไปใช้งานในส่วนที่มีปัญหาคล้ายกันให้เกิดประโยชน์ต่อไปอย่างมาก

2.1.3.1. ข้อตกลง (Assumption) เบื้องต้นที่สำคัญของลิเนียโปรแกรมมิง

1) ความแน่นอน (Certainty) หมายความว่า ต้องทราบข้อมูลต่างๆที่มีความแน่นอน เช่น จำนวนทรัพยากรที่มีอยู่ จำนวนการใช้ทรัพยากรในการผลิตสินค้า กำไรต่อหน่วย ต้นทุนต่อหน่วย เป็นต้น ซึ่งในความเป็นจริงแล้วข้อมูลบางอย่างได้มาจากการคาดคะเน หรือเป็นตัวเลขโดยประมาณอันอาจจะคลาดเคลื่อนได้ ดังนั้นจึงมีความไม่แน่นอนแฝงอยู่บ้าง

2) แบ่งแยกได้ (Divisibility) หมายความว่า ตัวแปรในลิเนียโปรแกรมมิงสามารถมีค่าเป็นเศษส่วนหรือทศนิยมได้ เช่น ผลิตสินค้าชนิด 1 เป็นจำนวน 30.68 หน่วย ในกรณีที่ต้องการคำตอบของค่าตัวแปรต่างเป็นตัวเลขจำนวนเต็ม อาจทำได้โดยการปิดเศษหรือใช้วิธีการของตัวแบบเชิงปริมาณที่เรียกว่า โปรแกรมเชิงจำนวนเต็ม (Integer Programming Model) ได้

3) ความเป็นสัดส่วน (Proportionality) หมายความว่า การเปลี่ยนแปลงค่าตัวแปร จะมีผลกระทบที่แน่นอน ทั้งในสมการวัตถุประสงค์ และเงื่อนไขบังคับเช่น ผลผลิตสินค้าชนิดที่ 1 ได้กำไรหน่วยละ 100 บาท ถ้าผลิตได้ 15 หน่วยจะได้กำไร $(100 \times 15) = 1500$ บาท

4) บวกเข้าด้วยกันได้ (Addition) หมายความว่า ผลรวมได้มาจากการบวกกันของ กิจกรรมต่างๆ เช่น บริษัทแห่งหนึ่งมีกำไรรวม คือ กำไรจากการผลิตสินค้าชนิดที่ 1 คือ $100x_1$ บาท รวมกับกำไรจากสินค้าชนิดที่ 2 คือ $200x_2$ บาทดังนั้น

$$\text{กำไรรวม } Z = 100x_1 + 200x_2 \quad (2.3)$$

5) ตัวแปรไม่ติดลบ (Non negativity) หมายความว่า ตัวแปรในลิเนียโปรแกรมมิง ทุกตัวจะต้องมีค่าไม่ต่ำกว่าศูนย์

6) ความเป็นเส้นตรง (Linearity) หมายความว่า ฟังก์ชันเป้าหมายและเงื่อนไข จะต้องเป็นสมการหรืออสมการที่มีความสัมพันธ์เป็นเส้นตรง นั่นคือตัวแปรทุกตัวจะยกกำลังหนึ่ง เท่านั้น

2.1.3.2. โครงสร้างของลิเนียโปรแกรมมิง

การนำลิเนียโปรแกรมมิงมาใช้ในการแก้ไขปัญหา จำเป็นจะต้องสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์ขึ้นมาแทนปัญหาที่เกิดขึ้นจริง โดยตัวแบบทางคณิตศาสตร์ของลิเนียโปรแกรมมิง ประกอบด้วยโครงสร้างดังนี้

1) ตัวแปรตัดสินใจ (Decision Variables) คือ ตัวแปรที่ต้องการตัดสินใจเพื่อให้ได้ค่าที่เหมาะสม มักกำหนดเป็นตัวอักษรเช่น $x_1, x_2, \dots, x_n$ หรือ A, B, C, ...

2) สมการวัตถุประสงค์หรือสมการเป้าหมาย (Objective Function) คือ สมการแสดงความสัมพันธ์ของต้นทุน กำไร เพื่อให้สามารถกำหนดเป้าหมายสูงสุด (Maximize) หรือต่ำสุด (Minimize)

3) เงื่อนไขบังคับ (Constraints) คือสมการหรืออสมการที่แสดงถึงขีดจำกัดของทรัพยากร ความต้องการ หรือเงื่อนไขต่างๆของปัญหา โดยมีความสัมพันธ์ของตัวแปรต่างๆในเงื่อนไขบังคับแต่ละข้อเป็นเส้นตรง

4) ข้อจำกัด (Restriction) ข้อจำกัดแสดงถึงเงื่อนไขของผลลัพธ์ที่ได้ว่าตัวแปรที่ต้องตัดสินใจทุกตัวต้องมีค่าไม่ติดลบหรือ $x_j = 0 \ (j = 1, 2, \dots, n)$

สรุปรูปแบบของลิเนียโปรแกรมมิง

สมการวัตถุประสงค์:

$$\text{Maximize } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \text{ หรือ}$$

$$\text{Minimize } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (2.4)$$

เงื่อนไขบังคับ:

$$c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n \leq L_1 \quad (2.5)$$

$$c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \dots + c_{mn}x_n \leq L_m \quad (2.6)$$

$$x_i \geq 0 \quad ; i = 1, 2, \dots, n \quad (2.7)$$

โดยที่

$Z = F(x_i)$ ผลรวมของฟังก์ชันวัตถุประสงค์

x_i ตัวแปรที่ต้องตัดสินใจ

c_i สัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัวที่ i ในฟังก์ชันวัตถุประสงค์ซึ่งอาจหมายถึงกำไรต่อหน่วยหรือต้นทุนต่อหน่วย เป็นต้น

a_{ij} เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัวที่ j ในเงื่อนไขบังคับที่ i

L_i ค่าทางขวามือของเงื่อนไขบังคับที่ i

ค่า a_{ij} จะเป็นค่าคงที่ที่แสดงอัตราการใช้ทรัพยากร ในขณะที่ค่า L_i จะเป็นค่าคงที่ที่แสดงจำนวนทรัพยากรที่มีอยู่ ประการสำคัญคือ a_{ij} และ L_i จะต้องมีหน่วยเหมือนกันเช่น นาที ชั่วโมง กิโลกรัม หน่วย โหล ฟุต นิ้ว เป็นต้น

เครื่องหมายของเงื่อนไขบังคับสามารถแสดงในรูป $\geq$ หรือ $\leq$ หรือ $=$ โดยเลือกใช้ให้เหมาะสมกับเงื่อนไขบังคับนั้นๆ

2.1.4. ปัญหาการมอบหมายงาน (Assignment Problem)

ปัญหาการมอบหมายงาน เป็นการจัดสรรงานให้เหมาะสมกับคนงานที่สุด เป็นสิ่งที่จะทำให้เกิดผลต่อการทำงาน ทั้งนี้เพราะทักษะในการทำงานของแต่ละคนไม่เท่ากันในงานแต่ละงาน โดยจูลิน (2551) กล่าวว่า ลิเนียร์โปรแกรมมิงเป็นวิธีที่สามารถแก้ปัญหาการมอบหมายงาน เพื่อให้เกิดประสิทธิภาพสูงสุดตามเป้าหมายที่ต้องการ

ตัวแบบพื้นฐานของปัญหาการมอบหมายงาน มีลักษณะสำคัญดังนี้

- 1) จำนวนงานและคนงานมีจำนวนเท่ากัน
- 2) งาน 1 ชิ้นถูกกำหนดให้มีผู้ทำงาน 1 คน
- 3) งานแต่ละชิ้นจะมีผู้ทำงานเพียง 1 คน (ความสัมพันธ์หนึ่งต่อหนึ่งระหว่างงานกับผู้ทำงาน)

4) ค่าใช้จ่ายในการทำงานของผู้ทำงาน i ในการทำงาน j เขียนแทนด้วย c_{ij}

5) ฟังก์ชันวัตถุประสงค์คือ ให้มีค่าใช้จ่ายต่ำที่สุด

ตัวแบบทางคณิตศาสตร์

กำหนดให้ i คือผู้ทำงาน ($i = 1, 2, \dots, m$) และ j คืองาน ($j = 1, 2, \dots, n$)

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ถ้ากำหนดให้ผู้ทำงาน } i \text{ ทำงาน } j \\ 0 & \text{ถ้าไม่เป็นไปตามเงื่อนไขข้างต้น} \end{cases}$$

c_{ij} คือ ค่าใช้จ่ายในการให้ผู้ทำงานที่ i ทำงาน j

สมการวัตถุประสงค์:

$$\text{Minimize } Z = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_{ij} x_{ij} \quad (2.8)$$

เงื่อนไขบังคับ:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1 \quad \square j = 1, 2, \dots, n \quad (2.9)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \square i = 1, 2, \dots, m \quad (2.10)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \square i, \square j \quad (2.11)$$

ตาราง 2.1 รูปแบบทั่วไปในการมอบหมายงานสำหรับผู้ทำงาน n คนและงาน m งาน

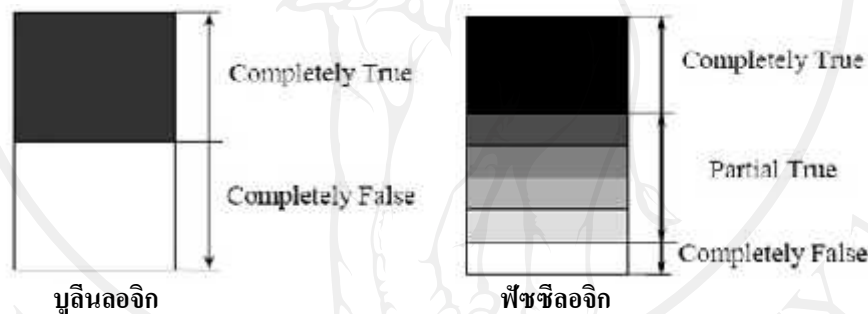
		งาน					Sum	
		1	2	.	.	.		n
ผู้ทำงาน	1	c_{1j}	c_{1j}	.	.	.	c_{1j}	1
	2	c_{1j}	c_{1j}	.	.	.	c_{1j}	1
	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.
	m	c_{1j}	c_{1j}	.	.	.	c_{1j}	1
Sum		1	1	.	.	.	1	

2.1.5. ฟัซซีลอจิก (Fuzzy Logic)

ฟัซซีลอจิกหรือตรรกะแบบคลุมเครือ (Fuzzy Logic) ศาสตร์ด้านการคำนวณที่เข้ามามีบทบาทมากขึ้นในวงการวิจัยด้านคอมพิวเตอร์ และได้ถูกนำไปประยุกต์ใช้ในงานต่างๆ มากมาย เช่น ด้านการแพทย์ ด้านการทหาร ด้านธุรกิจ ด้านอุตสาหกรรม เป็นต้น (พยุง, 2547)

2.1.5.1. พื้นฐานแนวคิดแบบฟัซซี

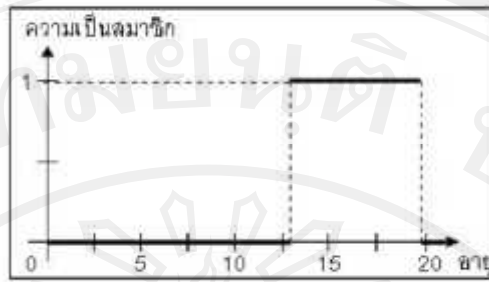
ฟัซซีลอจิก (Fuzzy Logic) เป็นเครื่องมือที่ช่วยในการตัดสินใจภายในได้ความไม่แน่นอนของข้อมูลโดยยอมให้มีความยืดหยุ่นได้ ใช้หลักเหตุผลที่คล้ายการเลียนแบบวิธีความคิดที่ซับซ้อนของมนุษย์ ฟัซซีลอจิกมีลักษณะที่พิเศษกว่าตรรกะแบบจริงเท็จหรือบูลีนลอจิก (Boolean Logic) เป็นแนวคิดที่มีการต่อขยายในส่วนของความจริง (Partial True) โดยค่าความจริงจะอยู่ในช่วงระหว่างจริง (Completely True) กับเท็จ (Completely False) ส่วนตรรกศาสตร์เดิมจะมีค่าเป็นจริงกับเท็จเท่านั้น แสดงดังรูป 2.6



รูป 2.6 บูลีนลอจิก (Boolean Logic) กับฟัซซีลอจิก (Fuzzy Logic)

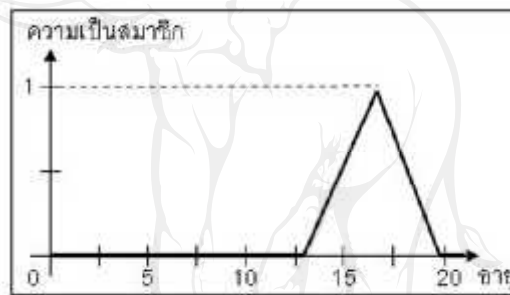
2.1.5.2. ทฤษฎีฟัซซีเซต (Fuzzy Set Theory)

โดยทั่วไปการจัดสิ่งของเข้าเป็นสมาชิกของเซตใดๆ คุณสมบัติของเซตจะสามารถบอกว่สิ่งของนั้นๆ เป็นหรือไม่เป็นสมาชิกของเซตนั้นอย่างชัดเจน โดยมีโอกาสเป็นไปได้ 2 แนวทางเท่านั้นคือ เป็นหรือไม่เป็น (สุพจน์, 2548) เราเรียกเซตแบบนี้ว่า เซตแบบฉบับ (Classical Set) หรือเรียกว่า เซตแบบดั้งเดิม (Crisp Set) ในทางตรรกศาสตร์จะกำหนดค่าเป็น 0 หรือ 1 เพื่อบอกความเป็นสมาชิกของเซตหรือไม่เป็นสมาชิกเท่านั้น เช่น เซตของวัยรุ่นตามทฤษฎีเซตดั้งเดิมจะสามารถบอกได้ว่าวัยรุ่นจะมีอายุอยู่ในช่วง 13-20 ปี นอกนั้นไม่ใช่วัยรุ่น ดังรูป 2.7 แสดงกราฟของฟังก์ชันของระดับความเป็นสมาชิกของเซตของวัยรุ่นตามทฤษฎีเซตดั้งเดิม



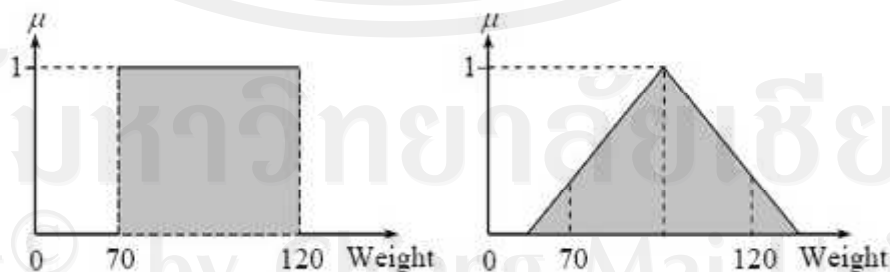
รูป 2.7 ฟังก์ชันความเป็นสมาชิกในเซตของวัยรุ่นแบบดั้งเดิม

ทฤษฎีฟัซซีเซต (Fuzzy Set Theory) มีหลักสำคัญคือ ขอมรับสมาชิกที่มีลักษณะตามกำหนดของเซตนั้นๆ แม้เพียงบางส่วนเข้ามาเป็นสมาชิก โดยสมาชิกทุกค่ามีการให้น้ำหนักค่าระดับความเป็นสมาชิกกำกับไว้ด้วย ดังรูป 2.8 แสดงกราฟของฟังก์ชันระดับความเป็นสมาชิกของฟัซซีเซตของเซตวัยรุ่น ซึ่งจะยอมรับสมาชิกที่มีลักษณะที่ถูกบางส่วนและผิดบางส่วนเข้ากลุ่มด้วย



รูป 2.8 ฟังก์ชันความเป็นสมาชิกในเซตของวัยรุ่นแบบฟัซซีเซต

ยกตัวอย่างเกี่ยวกับความอ้วน นิยามคำว่าคนอ้วนในเซตแบบดั้งเดิมอาจกำหนดเป็นคนที่มีน้ำหนักตั้งแต่ 70 ถึง 120 กิโลกรัม โดยนิยามแบบฟัซซีเซตอาจกำหนดเป็นคนที่มีความอ้วนประมาณ 80 กิโลกรัม ซึ่งเป็นการให้นิยามที่ไม่แสดงถึงขอบเขตที่แน่นอน



รูป 2.9 ฟังก์ชันความเป็นสมาชิกของเซตแบบดั้งเดิมและเซตแบบฟัซซี

นิยามของฟัซซีเซต กำหนดให้ X เป็นเซตที่ไม่ว่าง ฟัซซีเซต A สามารถแสดงฟังก์ชันความเป็นสมาชิกได้ดังนี้

$$\mu_A(x) : X \rightarrow [0, 1]$$

เมื่อ $\mu_A(x)$ เป็นฟังก์ชันความเป็นสมาชิก (Membership Function) ของตัวประกอบ x ในฟัซซีเซต A (อ่านว่า “ x เป็นสมาชิกของ X ”)

สามารถเขียนเป็นเซตของคู่ลำดับ (Tuples) ได้ดังนี้

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_A(x)) | x \in X\}$$

เมื่อ $\tilde{A}$ หมายถึง ฟัซซีเซต A

x หมายถึง สมาชิกของเซต (Set Membership)

$\mu_A(x)$ หมายถึง ฟังก์ชันความเป็นสมาชิก (Membership Function) บางครั้ง $\mu_A(x)$ เขียนแทนด้วย $\tilde{A}(x)$

X หมายถึง เอกภพสัมพัทธ์ (Universe) หรือประชากร

ตัวอย่างเช่น ต้องการระบุกลุ่มของรถยนต์ที่มีราคาแพง จากยี่ห้อรถเหล่านี้คือ BMW, Rolls Royce, Mercedes, Ferrari, Fiat, Honda และ Renault ซึ่งยี่ห้อ Ferrari, Rolls Royce เป็นรถยนต์ที่มีราคาแพง ส่วนยี่ห้อ Fiat และ Renault เป็นรถยนต์ที่มีราคาไม่แพง และที่เหลือไม่ได้อยู่ในเซต จากตัวอย่างสามารถใช้ฟัซซีเซตได้ดังนี้

$$\text{รถที่มีราคาแพง} = \{(Ferrari, 1), (Rolls Royce, 1), (Mercedes, 0.8), (BMW, 0.7), (Honda, 0.4)\}$$

โดย Ferrari และ Rolls Royce เป็นรถยนต์ที่มีราคาแพง ให้มีค่าความเป็นสมาชิกเป็น 1 ส่วน BMW ราคาแพงน้อยลงมาให้มีค่าความเป็นสมาชิกเท่ากับ 0.7 และ Honda เท่ากับ 0.4

ฟัซซีเซตยังสามารถเขียนในรูปอื่นได้อีก โดยถ้า $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ เป็นเซตแบบดั้งเดิมและ $\tilde{A}$ เป็นฟัซซีเซตใน X และเอกภพสัมพัทธ์เป็นแบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete) เขียนได้เป็น

$$\tilde{A} = \left\{ \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \dots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} \right\} = \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\mu_A(x_i)}{x_i} \right\}$$

ถ้าเอกภพสัมพัทธ์เป็นแบบต่อเนื่อง จะเขียนได้เป็น

$$\tilde{A} = \left\{ \frac{\mu_A(x)}{x} \right\}$$

จากตัวอย่างเดิมสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\text{รถที่มีราคาแพง} = \left(\frac{1}{\text{Ferrari}} + \frac{1}{\text{RollsRoyce}} + \frac{0.8}{\text{Mercedes}} + \frac{1}{\frac{0.7}{\text{BMW}} + \frac{0.4}{\text{Honda}} + \frac{0}{\text{Fiat}} + \frac{0}{\text{Renault}}} \right)$$

หรืออีกตัวอย่าง พิจารณาเซตของคนแก่ โดยเอกภพสัมพัทธ์คือ คนที่มีอายุตั้งแต่ 0 ถึง 120 ปี ($X = [0, 120]$)

สามารถเขียนฟังก์ชันความเป็นสมาชิกได้ดังนี้

$$\mu_{old} = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 60 \\ \frac{x-60}{20}, & 60 \leq x < 80 \\ 1, & x \geq 80 \end{cases}$$

และสามารถเขียนได้ในรูปเซตได้เป็น

$$\tilde{old} = \int_0^{120} \frac{\mu_{old}(x)}{x}$$

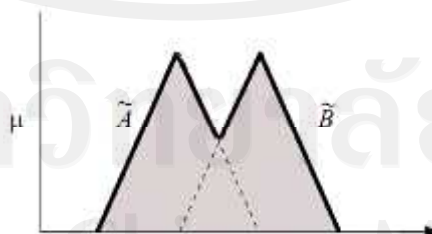
2.1.5.3. การดำเนินการของฟัซซีเซต (Operation on Fuzzy Set)

การดำเนินการของฟัซซีเซตมีคุณสมบัติเหมือนกับเซตโดยทั่วไป คือ

1) ยูเนียน (Union)

ยูเนียนเซต คือ เซตที่ประกอบไปด้วยสมาชิกของทั้งสองเซต

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \sqcup \mu_B(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$$



รูป 2.10 ยูเนียนของฟัซซีเซต A และ B

ตัวอย่าง เซตของคนที่สูงและเซตของคนที่สูงธรรมดา

$$\text{คนแล้วสูง} = \left(\frac{0}{165} + \frac{0}{175} + \frac{0}{180} + \frac{0.25}{182.5} + \frac{0.5}{185} + \frac{1}{190} \right)$$

$$\text{คนสูงธรรมดา} = \left(\frac{0}{165} + \frac{1}{175} + \frac{0.5}{180} + \frac{0.25}{182.5} + \frac{0}{185} + \frac{0}{190} \right)$$

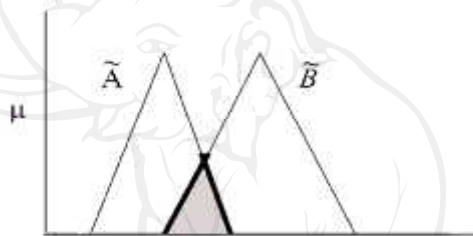
ยูเนียนของทั้งสองเซต

$$\text{คนแล้วสูง} \cup \text{คนสูงธรรมดา} = \left(\begin{array}{l} \frac{0}{165} + \frac{1}{175} + \frac{0.5}{180} \\ + \frac{0.25}{182.5} + \frac{0.5}{185} + \frac{1}{190} \end{array} \right)$$

2) อินเตอร์เซกชัน (Intersection)

อินเตอร์เซกชันเซต คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ในเซตทั้งสองเซต

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \cap \mu_B(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$$



รูป 2.11 อินเตอร์เซกชันเซตของฟัซซีเซต A และ B

ตัวอย่าง เซตของคนที่สูงและเซตของคนที่สูงธรรมดา

$$\text{คนแล้วสูง} = \left(\frac{0}{165} + \frac{0}{175} + \frac{0}{180} + \frac{0.25}{182.5} + \frac{0.5}{185} + \frac{1}{190} \right)$$

$$\text{คนสูงธรรมดา} = \left(\frac{0}{165} + \frac{1}{175} + \frac{0.5}{180} + \frac{0.25}{182.5} + \frac{0}{185} + \frac{0}{190} \right)$$

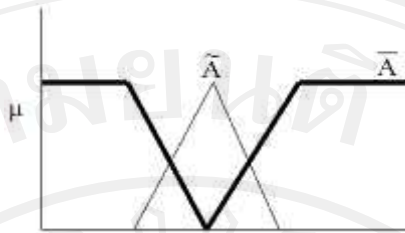
อินเตอร์เซกชันของทั้งสองเซต

$$\text{คนแล้วสูง} \cap \text{คนสูงธรรมดา} = \left(\begin{array}{l} \frac{0}{165} + \frac{0}{175} + \frac{0}{180} \\ + \frac{0.25}{182.5} + \frac{0}{185} + \frac{0}{190} \end{array} \right)$$

3) คอมพลิเมนต์ (Complement)

คอมพลิเมนต์คือ ค่าตรงข้ามของเซต คอมพลิเมนต์ของฟัซซีเซต A แทนด้วย $\bar{A}$

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$



รูป 2.12 คอมพลิเมนต์ของฟัซซีเซต A และ B

ตัวอย่าง คอมพลิเมนต์ของเซตของคนที่สูงคือ เซตของคนที่ไม่สูง

$$\text{คนตัวสูง} = \left(\frac{0}{165} + \frac{0}{175} + \frac{0}{180} + \frac{0.25}{182.5} + \frac{0.5}{185} + \frac{1}{190} \right)$$

$$\text{คนที่ไม่สูง} = \left(\frac{1}{165} + \frac{1}{175} + \frac{1}{180} + \frac{0.75}{182.5} + \frac{0.5}{185} + \frac{0}{190} \right)$$

2.1.5.4. คุณสมบัติของฟัซซีเซต (Properties of Fuzzy Set)

ฟัซซีเซตมีคุณสมบัติตามเซตแบบดั้งเดิม ได้แก่

1. Commutativity

$$\begin{aligned}\tilde{A} \cup \tilde{B} &= \tilde{B} \cup \tilde{A} \\ \tilde{A} \cap \tilde{B} &= \tilde{B} \cap \tilde{A}\end{aligned}$$

2. Associativity

$$\begin{aligned}\tilde{A} \cup (\tilde{B} \cap \tilde{C}) &= (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cap \tilde{C} \\ \tilde{A} \cap (\tilde{B} \cup \tilde{C}) &= (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup \tilde{C}\end{aligned}$$

3. Distributivity

$$\begin{aligned}\tilde{A} \cup (\tilde{B} \cap \tilde{C}) &= (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cap (\tilde{A} \cup \tilde{C}) \\ \tilde{A} \cap (\tilde{B} \cup \tilde{C}) &= (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup (\tilde{A} \cap \tilde{C})\end{aligned}$$

4. Idempotency

$$\begin{aligned}\tilde{A} \cup \tilde{A} &= \tilde{A} \\ \tilde{A} \cap \tilde{A} &= \tilde{A}\end{aligned}$$

5. Identity

$$\begin{aligned}\tilde{A} \cup \square &= \tilde{A} & \tilde{A} \cap \square &= \square \\ \tilde{A} \cup X &= X & \tilde{A} \cap X &= \tilde{A}\end{aligned}$$

6. $\square$ เป็นเซตว่าง

7. X เป็นเซตที่มีสมาชิกเป็น 1 ทั้งหมด

8. Transitivity

$$\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \subseteq \tilde{C} \text{ แล้ว } \tilde{A} \subseteq \tilde{C}$$

9. Involution

$$\tilde{\tilde{A}} = \tilde{A}$$

2.1.5.5. ฟังก์ชันความเป็นสมาชิก (Membership Function)

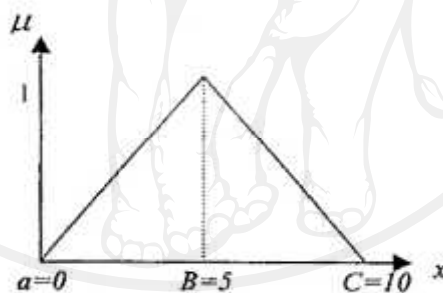
ฟังก์ชันความเป็นสมาชิก (Membership Function) เป็นฟังก์ชันที่มีการกำหนดระดับความเป็นสมาชิกของตัวแปรที่ต้องการใช้งาน โดยเริ่มจากการแทนที่กับตัวแทนที่มีความไม่ชัดเจน ไม่แน่นอน และคลุมเครือ รูปร่างของฟังก์ชันความเป็นสมาชิกมีความสำคัญต่อกระบวนการคิดและแก้ไขปัญหา โดยฟังก์ชันความเป็นสมาชิกจะไม่สมมาตรกันหรือสมมาตรกันทุกประการก็ได้

ฟังก์ชันความเป็นสมาชิกมีหลายชนิด ยกตัวอย่าง 6 ชนิดดังนี้

1) ฟังก์ชันสามเหลี่ยม (Triangular Membership Function)

ฟังก์ชันสามเหลี่ยมมีทั้งหมด 3 พารามิเตอร์คือ $\{a, b, c\}$ เขียนแสดงด้วยสมการคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$\text{Triangular}(x; a, b, c) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{(x-a)}{(b-a)}, & a \leq x \leq b \\ \frac{(c-x)}{(c-b)}, & b \leq x \leq c \\ 0, & x > c \end{cases} \quad (2.12)$$

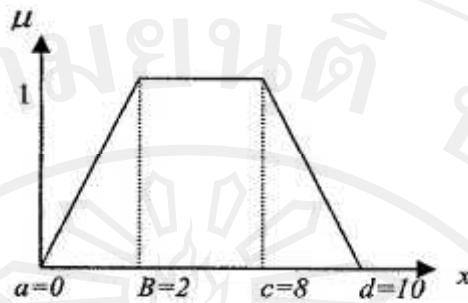


รูป 2.13 ฟังก์ชันความเป็นสมาชิกแบบสามเหลี่ยม

2) ฟังก์ชันสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Membership Function)

ฟังก์ชันสี่เหลี่ยมคางหมูมีทั้งหมด 4 พารามิเตอร์คือ $\{a, b, c, d\}$ เขียนแสดงด้วยสมการคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$\text{Trapezoidal}(x; a, b, c, d) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{(x-a)}{(b-a)}, & a \leq x \leq b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ \frac{(d-x)}{(d-c)}, & c \leq x \leq d \\ 0, & x > d \end{cases} \quad (2.13)$$

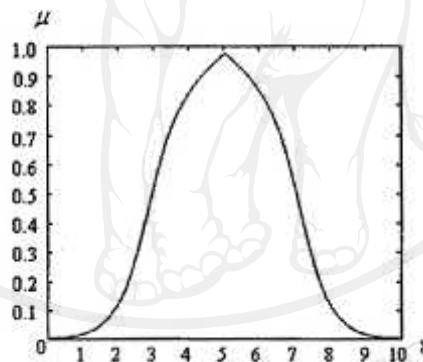


รูป 2.14 ฟังก์ชันความเป็นสมาชิกแบบสี่เหลี่ยมคางหมู

3) ฟังก์ชันเกาส์เซียน (Gaussian Membership Function)

ฟังก์ชันเกาส์เซียนมีทั้งหมด 2 พารามิเตอร์คือ $\{m, \sigma\}$ ซึ่ง m หมายถึงค่าเฉลี่ย และ σ หมายถึงค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน เขียนแสดงด้วยสมการคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$\text{gaussian}(x; m, \sigma) = \exp\left[-\frac{(x - m)^2}{\sigma^2}\right] \quad (2.14)$$

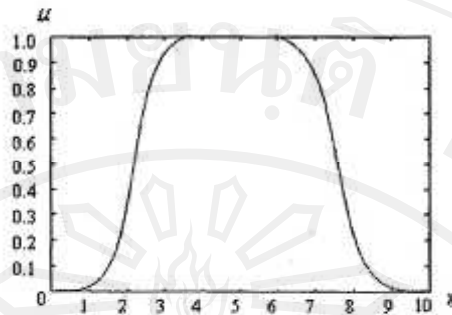


รูป 2.15 ฟังก์ชันความเป็นสมาชิกแบบเกาส์เซียน

4) ฟังก์ชันระฆังคว่ำ (Bell-Shaped Membership Function)

ฟังก์ชันระฆังคว่ำมีทั้งหมด 3 พารามิเตอร์คือ $\{a, b, c\}$ เขียนแสดงด้วยสมการคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$\text{bell-shaped}(x; a, b, c) = \left[\frac{1}{1 + \left| \frac{x - c}{a} \right|^{2b}} \right] \quad (2.15)$$

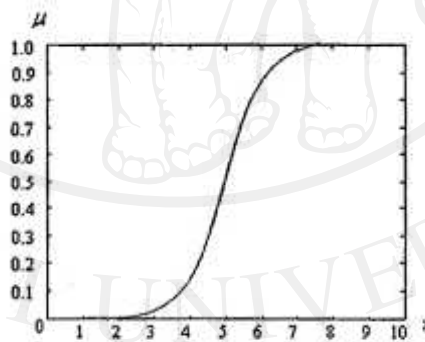


รูป 2.16 ฟังก์ชันความเป็นสมาชิกแบบประฆังคว่ำ

5) ฟังก์ชันตัวเอส (Smooth Membership Function)

ฟังก์ชันตัวเอสมีทั้งหมด 2 พารามิเตอร์คือ $\{a, b\}$ เขียนแสดงด้วยสมการคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$S(x; a, b) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 2\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2, & a \leq x \leq \frac{a+b}{2} \\ 1 - 2\left(\frac{x-b}{b-a}\right)^2, & \frac{a+b}{2} \leq x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases} \quad (2.16)$$

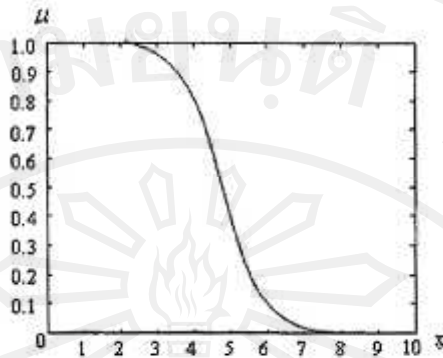


รูป 2.17 ฟังก์ชันความเป็นสมาชิกแบบตัวเอส

6) ฟังก์ชันตัวแซด (Z - Membership Function)

ฟังก์ชันตัวแซดมีทั้งหมด 2 พารามิเตอร์คือ $\{a, b\}$ เขียนแสดงด้วยสมการคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$Z(x; a, b) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1 - 2\left(\frac{x-b}{b-a}\right)^2, & a \leq x \leq \frac{a+b}{2} \\ 2\left(\frac{x-b}{b-a}\right)^2, & \frac{a+b}{2} \leq x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases} \quad (2.17)$$



รูป 2.18 ฟังก์ชันความเป็นสมาชิกแบบตัวแซด

การเลือกใช้ฟังก์ชันความเป็นสมาชิกจะต้องเลือกตามความเหมาะสมและครอบคลุมข้อมูลที่จะรับเข้ามาและฟังก์ชันความเป็นสมาชิกนั้นสามารถเปลี่ยนแปลงแก้ไขให้เหมาะสมกับงานที่กำลังปฏิบัติ

2.1.5.6. การดำเนินการทางคณิตศาสตร์ของตัวเลขฟัซซี

(Arithmetic on Fuzzy Number)

การดำเนินการทางคณิตศาสตร์ของตัวเลขฟัซซี ในฟังก์ชันความเป็นสมาชิกแบบต่าง ๆ มีดังนี้

1) ฟังก์ชันความเป็นสมาชิกแบบสามเหลี่ยม

กำหนดให้ฟัซซีเซต $\tilde{A} = (c_1, c_2, c_3)$ และฟัซซีเซต $\tilde{B} = (l_1, l_2, l_3)$ เป็นฟัซซีเซตที่มีฟังก์ชันความเป็นสมาชิกแบบสามเหลี่ยมทั้งคู่

การบวกกันของฟัซซีเซต $\tilde{A}$ และ $\tilde{B}$ เขียนแทนด้วย $\tilde{A} \oplus \tilde{B}$ มีค่าเท่ากับ

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = (c_1 + l_1, c_2 + l_2, c_3 + l_3)$$

การคูณกันของฟัซซีเซต $\tilde{A}$ และ $\tilde{B}$ เขียนแทนด้วย $\tilde{A} \otimes \tilde{B}$ มีค่าเท่ากับ

$$\tilde{A} \otimes \tilde{B} = (c_1 l_1, c_2 l_2, c_3 l_3)$$

2) ฟังก์ชันความเป็นสมาชิกแบบสี่เหลี่ยมคางหมู

กำหนดให้ฟัซซีเซต $\tilde{A} = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ และฟัซซีเซต $\tilde{B} = (l_1, l_2, l_3, l_4)$ เป็นฟัซซีเซตที่มีฟังก์ชันความเป็นสมาชิกแบบสี่เหลี่ยมคางหมูทั้งคู่

การบวกกันของฟัซซีเซต $\tilde{A}$ และ $\tilde{B}$ เขียนแทนด้วย $\tilde{A} \oplus \tilde{B}$ มีค่าเท่ากับ

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = (c_1 + l_1, c_2 + l_2, c_3 + l_3, c_4 + l_4)$$

การคูณกันของฟัซซีเซต $\tilde{A}$ และ $\tilde{B}$ เขียนแทนด้วย $\tilde{A} \otimes \tilde{B}$ มีค่าเท่ากับ

$$\tilde{A} \otimes \tilde{B} = (c_1 l_1, c_2 l_2, c_3 l_3, c_4 l_4)$$

2.1.6. ตัวแบบพีชชีลีเนียโปรแกรมมิง (Fuzzy Linear Programming Model)

2.1.6.1. การจัดประเภทของพีชชีลีเนียโปรแกรมมิง

ลีเนียโปรแกรมมิงเป็นกลไกที่เป็นธรรมชาติมากที่สุดสำหรับการสร้างปัญหาที่ไม่ยากมากนัก ซึ่งได้รับความนิยมเนื่องจาก 2 สาเหตุหลัก คือ

1. สามารถใช้ได้กับปัญหาจริงได้หลายปัญหา
2. มีวิธีการแก้ปัญหาที่มีประสิทธิภาพ

ปัญหาลีเนียโปรแกรมมิงแบบดั้งเดิม เป็นการหาคำตอบของตัวแปรที่ไม่ทราบค่า เช่น การหาคำตอบที่ดีที่สุดตามสมการเป้าหมายแบบเชิงเส้น ภายใต้เงื่อนไขบังคับ โดยรูปแบบของปัญหาลีเนียโปรแกรมมิงมาตรฐาน คือ

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & cx \\ \text{subject to} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

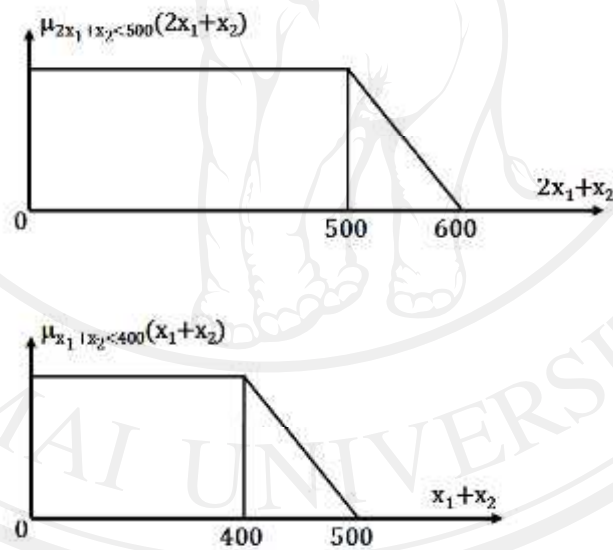
เมื่อ $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in R^n$	เป็นตัวแปรตัดสินใจ
$c = (c_1, \dots, c_n)$	เป็นสัมประสิทธิ์ของวัตถุประสงค์
$A = [a_{ij}] \in R^{m \times n}$	เป็นเมตริกซ์ของเงื่อนไข
a_{ij}	สัมประสิทธิ์ของเงื่อนไขบังคับ
$b = (b_1, \dots, b_m)^T$	เป็นทรัพยากร

การประยุกต์ใช้พีชชีร่วมกับลีเนียโปรแกรมมิง เพื่อให้สมการเป้าหมาย และเงื่อนไขบังคับถูกต้อง แม่นยำ และมีกรอบที่ชัดเจน จะต้องเข้าใจว่าจะมีประยุกต์ใช้พีชชีเข้ากับลีเนียโปรแกรมมิงตรงไหนและอย่างไร ดังตัวอย่างต่อไปนี้

บริษัทของเล่น ผลิตตุ๊กตา 2 ชนิด ตุ๊กตาชนิด A เป็นตุ๊กตาที่มีคุณภาพสูง ทำกำไร \$0.4/หน่วย และตุ๊กตาชนิด B มีคุณภาพต่ำกว่า ทำกำไร \$0.3/หน่วย สมมติให้ x_1 (ตุ๊กตาชนิด A) และ x_2 (ตุ๊กตาชนิด B) ถูกผลิตในแต่ละวัน จะทำกำไรเท่ากับ $0.4x_1 + 0.3x_2$ ดังนั้น ตุ๊กตาชนิด A ต้องการแรงงานเป็นสองเท่าของตุ๊กตาชนิด B ถ้าจำนวนชั่วโมงแรงงานรวมเป็น 500 ชั่วโมง/วัน ดังนั้นจะได้เงื่อนไขบังคับเพิ่มเติมเป็น $2x_1 + x_2 \leq 500$ วัตถุดิบจะมีพอสำหรับทำตุ๊กตาได้ 400 ตัวต่อวัน (ตุ๊กตาชนิด A และ B รวมกัน) ดังนั้นจะมีเงื่อนไขบังคับเพิ่มขึ้นอีกเป็น $x_1 + x_2 \leq 400$ สรุปแล้วจะสร้างปัญหาดารางการผลิตได้ดังนี้

$$\begin{array}{ll}
 \text{maximize} & 0.4x_1 + 0.3x_2 \quad (\text{กำไร}) \\
 \text{subject to} & 2x_1 + x_2 \leq 500 \quad (\text{จำนวนชั่วโมงแรงงาน}) \\
 & x_1 + x_2 \leq 400 \quad (\text{วัตถุดิบ}) \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{array}$$

อย่างไรก็ตามในสถานการณ์จริง จำนวนชั่วโมงแรงงานและวัตถุดิบ อาจไม่คงที่ เนื่องจาก ผู้จัดการสามารถสั่งให้พนักงานทำงานล่วงเวลาและต้องการวัตถุดิบจากผู้ส่งมอบมากขึ้น ดังนั้นในบางครั้งอาจต้องมีการเพิ่มช่วงของเงื่อนไขบังคับเช่น เมื่อเวลาทำงานจริงของพนักงาน $2x_1 + x_2$ มากกว่า 600 จะถือว่าเงื่อนไขบังคับ $2x_1 + x_2 \leq 500$ ไม่เป็นไปตามกฎอย่างแท้จริง ซึ่งถ้าค่า $2x_1 + x_2$ อยู่ระหว่าง 500 ถึง 600 จะใช้สมการเชิงเส้นแบบลดลงต่อเนื่องในการแสดงระดับความพึงพอใจ ซึ่งสามารถอธิบายฟังก์ชันความเป็นสมาชิกเพื่อแสดงลักษณะพิเศษของระดับความพึงพอใจสำหรับเงื่อนไขบังคับ $x_1 + x_2 \leq 400$ รูป 2.19 ซึ่งสรุปได้ว่า ฟัซซีชนิดแรกแสดงค่าในกลุ่มทรัพยากร โดยจะเรียกปัญหานี้ว่า ลิเนียโปรแกรมมิงแบบทรัพยากรฟัซซี



รูป 2.19 ฟังก์ชันสมาชิกสำหรับชั่วโมงแรงงานและวัตถุดิบในตัวอย่าง

ฟัซซีชนิดที่สองจะแสดงค่าในกลุ่มสัมประสิทธิ์ของวัตถุประสงค์คือ 0.4 และ 0.3 เนื่องจากการตลาดมีการเปลี่ยนแปลง จึงไม่มีความแน่นอนว่ากำไรต่อหน่วยผลิตภัณฑ์ของตุ๊กตาชนิด A และ B จะเป็น \$0.4 และ \$0.3 ตามลำดับ ตัวเลขอาจจะมากกว่านี้ ดังนั้นสัมประสิทธิ์ของวัตถุประสงค์จะเป็นตัวเลขฟัซซี ดังนั้นจะได้ปัญหานี้ที่สองคือ ลิเนียโปรแกรมมิงแบบสัมประสิทธิ์ของวัตถุประสงค์ฟัซซี

ฟัซซีชนิดที่สามจะแสดงค่าในกลุ่มสัมประสิทธิ์ของเงื่อนไขบังคับ เนื่องจากความไม่เท่ากันของแรงงาน อัตราส่วนชั่วโมงแรงงานในการทำตุ๊กตาชนิด A และ B จะมีค่าประมาณ 2 และ ตุ๊กตาชนิด A และ B ต้องการวัตถุดิบที่แตกต่างกัน ดังนั้นจึงต้องเขียนสัมประสิทธิ์ในรูปของฟัซซี จะได้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่สาม เรียกว่า ลิเนียโปรแกรมมิงแบบสัมประสิทธิ์ของเงื่อนไขบังคับฟัซซี

สรุปจากตัวอย่าง จะได้ปัญหาลิเนียโปรแกรมมิงเชิงเส้นแบบฟัซซี 3 แบบ คือ

- 1) ลิเนียโปรแกรมมิงแบบทรัพยากรฟัซซี

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & cx \\ \text{subject to} & Ax \lesseqgtr b \\ & x \geq 0 \end{array} \quad (2.18)$$

เมื่อ เครื่องหมายอสมการแบบฟัซซี ($\lesseqgtr$) ถูกแสดงโดยฟังก์ชันสมาชิกในรูป 2.19

- 2) ลิเนียโปรแกรมมิงแบบสัมประสิทธิ์ของวัตถุประสงค์ฟัซซี

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \tilde{c}x \\ \text{subject to} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array} \quad (2.19)$$

เมื่อ $\tilde{c} = (\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_n)$ เป็นเวกเตอร์ของตัวเลขฟัซซี (Vector of Fuzzy Number)

- 3) ลิเนียโปรแกรมมิงแบบสัมประสิทธิ์ของเงื่อนไขบังคับฟัซซี

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & cx \\ \text{subject to} & \tilde{A}x \leq b \\ & x \geq 0 \end{array} \quad (2.20)$$

เมื่อ $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]$ เป็นเมทริกซ์ประกอบด้วยตัวเลขฟัซซี

2.1.6.2. ลิเนียโปรแกรมมิงแบบทรัพยากรฟัซซี

(Linear Programming with Fuzzy Resource)

พิจารณาลิเนียโปรแกรมมิงแบบทรัพยากรฟัซซีจากตัวอย่างในสมการ (2.18) ให้ $t_i (> 0)$ เป็นช่วงของทรัพยากรที่ i (t_i)

ดังนั้นสมการฟัซซี $(Ax)_i \lesseqgtr t_i$ จะหมายถึง $(Ax)_i \leq t_i + \theta t_i$ เมื่อ $\theta \in [0, 1]$ อธิบายอีกอย่างว่า เงื่อนไขบังคับฟัซซี $(Ax)_i \lesseqgtr t_i$ ถูกอธิบายด้วยฟัซซีเซต i ด้วยฟังก์ชันสมาชิก ดังนี้

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } (Ax)_i < l_i \\ 1 - |(Ax)_i - b_i|/t_i & \text{if } l_i \leq (Ax)_i \leq l_i + t_i \\ 0 & \text{if } (Ax)_i > l_i + t_i \end{cases} \quad (2.21)$$

ดังนั้น ปัญหาจะกลายเป็นการหา x สูงสุดของ cx และ $\mu_i(x)$ สำหรับ $i = 1, 2, \dots, m$ ซึ่งเป็นปัญหาการหาค่าที่เหมาะสมหลายวัตถุประสงค์

Werner (1987) ได้เสนอวิธีการแก้ปัญหานี้ โดยในขั้นแรก เริ่มจากการแก้ปัญหามาตรฐาน 2 ปัญหาดังต่อไปนี้ก่อน

$$\begin{aligned} &\text{maximize } cx \\ &\text{subject to } (Ax)_i \leq l_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ &\quad x \geq 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} &\text{maximize } cx \\ &\text{subject to } (Ax)_i \leq l_i + t_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ &\quad x \geq 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

ให้ x^0 และ x^1 เป็นคำตอบของ (2.22) และ (2.23) ตามลำดับ และกำหนดให้ $z^0 = cx^0$ และ $z^1 = cx^1$ ดังนั้น ฟังก์ชันสมาชิกต่อไปนี้จะถูกกำหนดเพื่อจำเพาะระดับของความเหมาะสม

$$\mu_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } cx > z^1 \\ \frac{z^1 - cx}{z^1 - z^0} & \text{if } z^0 \leq cx \leq z^1 \\ 0 & \text{if } cx < z^0 \end{cases} \quad (2.24)$$

เมื่อ $cx \geq z^1$ จะได้ $\mu_0(x) = 1$ ที่ให้ระดับความเหมาะสมสูงสุด
 $cx \leq z^0$ จะได้ $\mu_0(x) = 0$ ที่ให้ระดับความเหมาะสมต่ำสุด
 cx อยู่ระหว่าง z^1 และ z^0 ค่าระดับความเหมาะสมจะอยู่ระหว่าง 1 ถึง 0

เนื่องจากเงื่อนไขบังคับและสมการวัตถุประสงค์ถูกแสดงในรูปของฟังก์ชันสมาชิก (2.21) และ (2.24) ตามลำดับ ดังนั้นจึงสามารถใช้วิธี max-min ในการแก้ปัญหาค่าที่เหมาะสมหลายวัตถุประสงค์ เพราะฉะนั้น ปัญหาจะกลายเป็น

$$\max_{x \geq 0} [\mu_0(x), \mu_1(x), \dots, \mu_m(x)] \quad (2.25)$$

หรือเท่ากับ

$$\begin{aligned} &\text{maximize } \alpha \\ &\text{subject to } \mu_0(x) \geq \alpha \\ &\quad \mu_i(x) \geq \alpha, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ &\quad \alpha \in [0, 1], \quad x \geq 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

แทนที่ (2.21) และ (2.24) ลงไปใน (2.26) สรุปได้ว่าปัญหาลิเนียโปรแกรมมีแบบ
ทรัพยากรฟัซซี สามารถแก้ได้ตามปัญหาลิเนียโปรแกรมมีมาตรฐานดังต่อไปนี้

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \alpha \\ \text{subject to} & cx \geq z^1 - (1 - \alpha)(z^1 - z^0) \\ & (Ax)_i \leq t_i + (1 - \alpha)t_i, i = 1, 2, \dots, m \\ & \alpha \in [0, 1], x \geq 0 \end{array} \quad (2.27)$$

จากตัวอย่างของ Lai and Hwang (1992) พิจารณาปัญหาการเลือกผสมผลิตภัณฑ์
ต่อไปนี้

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 \quad (\text{กำไร}) \\ \text{subject to} & g_1(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15 \quad (\text{แรงงาน - สัปดาห์}) \\ & g_2(x) = 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 30 \quad (\text{วัตถุดิบ Y}) \\ & g_3(x) = 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 100 \quad (\text{วัตถุดิบ Z}) \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array} \quad (2.28)$$

เมื่อช่วงของแรงงาน-สัปดาห์ และวัตถุดิบ Y และ Z เป็น $t_1 = 5, t_2 = 40$ และ $t_3 = 30$ ตามลำดับ แก้ปัญหา (2.22) และ (2.23) พบว่า $z^0 = 99.29$ และ $z^1 = 130$ จาก (2.27) จะได้
ปัญหาดังนี้

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \theta \\ \text{subject to} & z = 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 \geq 130 - 30.71\theta \\ & g_1(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15 + 5\theta \\ & g_2(x) = 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 80 + 40\theta \\ & g_3(x) = 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 100 + 30\theta \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, \theta \in [0, 1] \end{array} \quad (2.29)$$

เมื่อ $\theta = 1 - \alpha$ จะได้คำตอบ $z^* = 114.65$ ที่ $\theta = 0.5$

2.1.6.3. ลิเนียโปรแกรมมีแบบสัมประสิทธิ์ของวัตถุดิบฟัซซี

(Linear Programming with Fuzzy Objective Coefficients)

พิจารณาปัญหาลิเนียโปรแกรมมีแบบสัมประสิทธิ์วัตถุดิบฟัซซีที่กำหนดใน
(2.19) เพื่อให้เข้าใจง่ายจะสมมติว่า $\tilde{c}_i$ เป็นตัวเลขฟัซซีที่มีฟังก์ชันความเป็นสมาชิกแบบสามเหลี่ยม
 $\mu_{\tilde{c}_i}(x; c_i^-, c_i^0, c_i^+)$ กำหนดให้ $\tilde{c}_i = (c_i^-, c_i^0, c_i^+)$ ดังนั้นสมการ (2.19) จะเปลี่ยนเป็น

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & (c^-x, c^0x, c^+x) \\ \text{subject to} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array} \quad (2.30)$$

เมื่อ $c^- = (c_1^-, \dots, c_n^-)$, $c^0 = (c_1^0, \dots, c_n^0)$ และ $c^+ = (c_1^+, \dots, c_n^+)$ ดังนั้นปัญหานี้เป็นปัญหาการหาค่าที่ดีที่สุดแบบหลายวัตถุประสงค์ มีวิธีการมากมายที่ถูกเสนอเพื่อแก้ปัญหาลักษณะนี้ ซึ่งจะยกตัวอย่างวิธีการ 2 วิธีการดังนี้

วิธีการแรก เป็นการรวมอย่างง่ายจากสมการวัตถุประสงค์ 3 สมการ เป็นสมการวัตถุประสงค์เดียว ตัวอย่างเช่น c^-x , c^0x และ c^+x สามารถรวมเป็น $\frac{(4c^0 + c^- + c^+)x}{6}$ (Lai and Hwang, 1992) ดังนั้นสมการ (2.30) จะถูกเปลี่ยนเป็นปัญหาหาค่าเหมาะเชิงโปรแกรมมีมาตรฐาน ดังนี้

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \frac{(4c^0 + c^- + c^+)x}{6} \\ \text{subject to} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array} \quad (2.31)$$

วิธีการที่สอง เริ่มด้วยการหาคำตอบสูงสุดจากแต่ละสมการวัตถุประสงค์ของตัวเลขวัดชี้แบบสามเหลี่ยม c^-x , c^0x และ c^+x ดังนั้นจะหาคำตอบสูงสุดของ c^0x (ค่ากลาง) และหาคำตอบน้อยสุดของ $c^0x - c^-x$ (ขาซ้าย) และหาคำตอบมากสุดของ $c^+x + c^0x$ (ขาขวา) แทนวิธีการนี้ จะใส่ฟังก์ชันสมาชิกแบบสามเหลี่ยมทางด้านขวา ดังนั้นสมการ (2.30) จะถูกเปลี่ยนเป็นปัญหาหาค่าเหมาะเชิงโปรแกรมมีมาตรฐานอีกแบบ ดังนี้

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & z_1 = (c^0 - c^-)x \\ \text{maximize} & z_2 = c^0x \\ \text{maximize} & z_3 = (c^+ + c^0)x \\ \text{subject to} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array} \quad (2.32)$$

วิธีการแก้ปัญหานี้ทำเพื่อแสดงลักษณะพิเศษของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ทั้ง 3 ด้วยฟังก์ชันสมาชิก และหาคำตอบสูงสุดของ α -cut ดังนั้น จะได้คำตอบแรกดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} z_1^P &= \min_{x \in X} (c^0 - c^1)x & z_1^N &= \max_{x \in X} (c^0 - c^1)x \\ z_2^P &= \max_{x \in X} c^0x & z_2^N &= \min_{x \in X} c^0x \\ z_3^P &= \max_{x \in X} (c^+ - c^0)x & z_3^N &= \min_{x \in X} (c^+ - c^0)x \end{aligned} \quad (2.33)$$

เมื่อ $X = \{x | Ax \leq b, x \geq 0\}$ เรียกคำตอบ z_i^P ว่า คำตอบในอุดมคติเชิงบวก (Positive Ideal Solution) และ เรียกคำตอบ z_i^N ว่า คำตอบในอุดมคติเชิงลบ (Negative Ideal Solution) ดังนั้น กำหนด 3 ฟังก์ชันความเป็นสมาชิกเพื่อกำหนดลักษณะเฉพาะของ 3 วัตถุประสงค์ดังต่อไปนี้

$$\mu_{z_1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } (c^0 - c^-)x < z_1^P \\ \frac{z_1^N - (c^0 - c^-)x}{z_1^N - z_1^P} & \text{if } z_1^P \leq (c^0 - c^-)x \leq z_1^N \\ 0 & \text{if } (c^0 - c^-)x > z_1^N \end{cases} \quad (2.34)$$

$$\mu_{z_2}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } c^C x > z_2^P \\ \frac{c^C x - z_2^N}{z_2^P - z_2^N} & \text{if } z_2^N \leq c^C x \leq z_2^P \\ 0 & \text{if } c^C x < z_2^N \end{cases} \quad (2.35)$$

$$\mu_{z_3}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } (c^+ - c^0)x > z_3^P \\ \frac{(c^+ - c^0)x - z_3^N}{z_3^P - z_3^N} & \text{if } z_3^N \leq (c^+ - c^0)x \leq z_3^P \\ 0 & \text{if } (c^+ - c^0)x < z_3^N \end{cases} \quad (2.36)$$

สุดท้ายปัญหาจะถูกแก้ด้วยการหาคำตอบของปัญหาลิเนียโปรแกรมมีมาตรฐาน

ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} & \text{maximize} \quad \alpha \\ & \text{subject to} \quad \mu_{z_i}(x) \geq \alpha, i = 1, 2, 3 \\ & \quad \quad \quad Ax \leq b, x \geq 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

2.1.6.4. ลิเนียโปรแกรมมีแบบสัมประสิทธิ์ของเงื่อนไขบังคับฟัซซี

(Linear Programming with Fuzzy Constraint Coefficients)

พิจารณาปัญหาลิเนียโปรแกรมมีแบบสัมประสิทธิ์ของเงื่อนไขบังคับฟัซซี ในสมการ (2.20) เพื่อให้เข้าใจง่ายจะสมมติว่า $\tilde{A} = [c_{ij}^-]$ ซึ่งประกอบด้วยตัวเลขฟัซซีแบบสามเหลี่ยม คือ $c_{ij}^- = (c_{ij}^-, c_{ij}^0, c_{ij}^+)$ และ $\tilde{A} = (A^-, A^0, A^+)$ เมื่อ $A^- = |c_{ij}^-|$, $A^0 = |c_{ij}^0|$ และ $A^+ = |c_{ij}^+|$ เพราะฉะนั้น ปัญหาจะเปลี่ยนเป็น

$$\begin{aligned} & \text{maximize} \quad cx \\ & \text{subject to} \quad (A^-x, A^C x, A^+x) \leq b \\ & \quad \quad \quad x \geq 0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

ใช้เกณฑ์เดียวกับสมการ (2.31) สำหรับการเปลี่ยนสมการ (2.38) ให้เป็นปัญหาลิเนียโปรแกรมมีมาตรฐานจะได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} & \text{maximize} \quad cx \\ & \text{subject to} \quad \frac{(4A^0 + A^- + A^+)}{6}x \leq b \\ & \quad \quad \quad x \geq 0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

จากการแก้ปัญหาลิขสิทธิ์โปรแกรมพื้นฐาน 3 ปัญหาตั้งแต่สมการ (2.18) ถึง (2.20) สำหรับการแก้ปัญหาลิขสิทธิ์โปรแกรมพื้นฐานชนิดอื่นๆ ที่เป็นการรวมกันของปัญหาพื้นฐานทั้ง 3 ปัญหา สามารถแก้ปัญหาลิขสิทธิ์ได้โดยใช้วิธีการที่คล้ายกันนี้ได้ ตัวอย่างเช่น เมื่อสัมประสิทธิ์ทุกตัวเป็นตัวเลขวลิขสิทธิ์ คือ

$$\begin{aligned} &\text{maximize} \quad \tilde{c}x \\ &\text{subject to} \quad \tilde{A}x \leq \tilde{b} \\ &\quad \quad \quad x \geq 0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

สมมติว่า $\tilde{c}, \tilde{A}$ และ $\tilde{b}$ ประกอบด้วยตัวเลขวลิขสิทธิ์ดังนี้ $\tilde{c} = (c^-, c^0, c^+)$, $\tilde{A} = (A^-, A^0, A^+)$ และ $\tilde{b} = (b^-, b^0, b^+)$ ดังนั้นจะเปลี่ยนสมการ (2.40) เป็นปัญหาลิขสิทธิ์โปรแกรมพื้นฐานหลายวัตถุประสงค์ ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad z_1 = (c^0 - c^-)x \\ &\text{maximize} \quad z_2 = c^0x \\ &\text{maximize} \quad z_3 = (c^+ + c^0)x \\ &\text{subject to} \quad A^-x \leq b^-, A^0x \leq b^0, A^+x \leq b^+ \\ &\quad \quad \quad x \geq 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

สามารถใช้วิธีการแก้ปัญหาลิขสิทธิ์เดียวกับสมการ (2.32)

2.1.7. การเปรียบเทียบสโตแคสติกลิขสิทธิ์โปรแกรมพื้นฐานและลิขสิทธิ์โปรแกรมพื้นฐาน

(Comparison of Stochastic and Fuzzy Linear Programming)

สโตแคสติกลิขสิทธิ์โปรแกรมพื้นฐานสามารถจัดการกับสถานการณ์ที่สัมประสิทธิ์ c และ A และทรัพยากร b มีความคลุมเครือและถูกอธิบายด้วยตัวแปรสุ่ม ถึงแม้ว่าสโตแคสติกลิขสิทธิ์โปรแกรมพื้นฐานได้ถูกศึกษากันอย่างแพร่หลายตั้งแต่ปี 1950 แต่การประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาลิขสิทธิ์จริงยังมีข้อจำกัดอยู่ ซึ่งปัญหาลิขสิทธิ์ของสโตแคสติกลิขสิทธิ์โปรแกรมพื้นฐาน (Lai and Hwang, 1992) คือ

- 1) การขาดประสิทธิภาพในการคำนวณ
- 2) ความไม่ยืดหยุ่นของทฤษฎีความน่าจะเป็นที่ไม่สามารถสร้างแบบจำลองที่ไม่ชัดเจนจากการตัดสินใจได้

แต่สำหรับลิขสิทธิ์โปรแกรมพื้นฐานสามารถจัดการกับสองปัญหาดังกล่าวได้ในบางขอบเขต ซึ่งในหัวข้อนี้จะเปรียบเทียบรายละเอียดของแนวทางของสโตแคสติกลิขสิทธิ์โปรแกรมพื้นฐานด้วยแนวทางของลิขสิทธิ์โปรแกรมพื้นฐานที่สอดคล้องกัน

ตัวแบบโปรแกรมเงื่อนไขโอกาส (Chance-Constrained Programming Model) ที่พัฒนาโดย Carnes and Cooper (1959) ถูกกำหนดไว้ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{maximize } z &= \sum_j \bar{c}_j x_j \\ \text{subject to } P\left\{ \sum_j \bar{a}_{ij} x_j \leq \bar{b}_i \right\} &\geq 1 - \alpha_i, \forall i \\ x_j &\geq 0, \forall j \end{aligned} \quad (2.42)$$

เมื่อ $\bar{c}_j, \bar{a}_{ij}$ และ $\bar{b}_i$ เป็นตัวแปรสุ่ม, $P\{\}$ ใช้แทนความน่าจะเป็นที่วัดได้ และ α_i เป็นค่าคงที่บวกขนาดเล็ก ส่วนชื่อ เงื่อนไขโอกาส (Chance-Constrained) เรียกตามแต่ละเงื่อนไขบังคับ $\sum_j \bar{a}_{ij} x_j \leq \bar{b}_i$ ที่จะถูกทำให้เสมือนจริงด้วยความน่าจะเป็นน้อยสุด $1 - \alpha_i$ สมมติว่า $\bar{a}_{ij}$ และ $\bar{b}_i$ มีการกระจายตัวแบบเกาส์เซียน (Gaussian) ซึ่งรู้ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวน และให้ $\bar{g}_i = \sum_j \bar{a}_{ij} x_j - \bar{b}_i$ เพราะฉะนั้น ความเป็นไปได้ของเงื่อนไขบังคับจะถูกแก้ดังนี้

$$P\{\bar{g}_i \leq 0\} = P\left\{ \frac{\bar{g}_i - E[\bar{g}_i]}{\text{Var}[\bar{g}_i]^{1/2}} \leq \frac{0 - E[\bar{g}_i]}{\text{Var}[\bar{g}_i]^{1/2}} \right\} \geq 1 - \alpha_i \quad (2.43)$$

หรือเท่ากับ

$$P\{\bar{g}_i \leq 0\} = \Phi\left(\frac{0 - E[\bar{g}_i]}{\text{Var}[\bar{g}_i]^{1/2}} \right) \geq 1 - \alpha_i \quad (2.44)$$

เมื่อ Φ คือ CDF ของการกระจายตัวแบบเกาส์เซียน เนื่องจาก $\bar{g}_i = \sum_j \bar{a}_{ij} x_j - \bar{b}_i$ ตัวแปรสุ่มเกาส์เซียน ส่วน $\bar{g}_i$ มีการกระจายตัวแบบปกติ ดังนี้

$$E[\bar{g}_i] = \sum_j \bar{a}_{ij} x_j - \bar{b}_i \quad (2.45)$$

$$\text{Var}[\bar{g}_i] = x^T T_i x \quad (2.46)$$

เมื่อ $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ และ

$$T_i = \begin{bmatrix} \text{Var}[\bar{a}_{i1}] & \dots & \text{Cov}[\bar{a}_{i1}, \bar{a}_{in}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}[\bar{a}_{in}, \bar{a}_{i1}] & \dots & \text{Var}[\bar{a}_{in}] \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

ให้ z_i เป็นค่าปกติ ที่ $\Phi(z_i) = 1 - \alpha_i$ ดังนั้นเงื่อนไขบังคับ $\{ \sum_j \bar{a}_{ij} x_j \leq \bar{b}_i \} \geq 1 - \alpha_i$ จะถูกแก้ถ้า

$$\frac{0 - E[\tilde{c}_i]}{Var[\tilde{c}_i]^{1/2}} \geq S_{ci} \quad (2.48)$$

แทนสมการ (2.45) ถึง (2.46) ลงไปในสมการ (2.48) และแทนที่ $\tilde{c}_i$ ด้วยค่าเฉลี่ย c_j จะทำให้เปลี่ยนปัญหาสโตแคสติกลิเนียโปรแกรมมิงให้กลายเป็นปัญหาดีเทอร์มินิสติกโปรแกรมมิง ดังนี้

$$\begin{aligned} & \text{maximize} \quad z = \sum_j c_j x_j \\ & \text{subject to} \quad \sum_j E[\tilde{a}_{ij}]x_j - E[\tilde{b}_i] + S_{ci}x^T E_i x \leq 0, \forall i \\ & \quad x_j \geq 0, \forall j \end{aligned} \quad (2.49)$$

สังเกตว่าสมการ (2.49) เป็นปัญหอนอกลิเนียโปรแกรมมิง ซึ่งกระบวนการแก้ปัญหานี้ค่อนข้างยาก ส่วนปัญหาที่เป็นฟิชซีลิเนียโปรแกรมมิงนั้นจะแทนที่สัมประสิทธิ์และทรัพยากรด้วยตัวเลขฟิชซีแบบสามเหลี่ยม ซึ่งหมายความว่า ฟิชซีลิเนียโปรแกรมมิงสามารถถูกเปลี่ยนให้เป็นปัญหาลิเนียโปรแกรมมิงมาตรฐานที่ง่ายต่อการแก้มากกว่าปัญหอนอกลิเนียโปรแกรมมิง เพราะฉะนั้น ฟิชซีลิเนียโปรแกรมมิงมีประสิทธิภาพมากกว่าสโตแคสติกลิเนียโปรแกรมมิงในแง่ของการคำนวณ

2.2. บรรณกรรมที่เกี่ยวข้อง

การวางแผนการผลิตเป็นสิ่งสำคัญที่องค์กรธุรกิจไม่ควรมองข้าม การวางแผนการผลิตที่มีประสิทธิภาพจะเป็นสิ่งที่ช่วยทำให้องค์กรมีความสามารถในการตอบสนองความต้องการของลูกค้า และสามารถใช้ประโยชน์จากทรัพยากรที่มีสูงสุด ช่วยลดเวลาในการรอคอยงาน การว่างงาน ลดความสูญเสียเนื่องจากการส่งสินค้าและบริการล่าช้า และยังสามารถลดความคลาดเคลื่อนในการวางแผนการผลิตได้อีก มีการวิจัยมากมายที่มุ่งเน้นพัฒนากระบวนการวางแผนโดยนำเทคนิควิธีการต่างๆ มาประยุกต์ใช้เพื่อให้กระบวนการเหล่านั้นมีประสิทธิภาพมากขึ้น ได้แก่ การนำตัวแบบทางคณิตศาสตร์มาประยุกต์ใช้ในการวางแผนการจัดตารางผลิต โดยใช้อินทิเจอร์ลิเนียโปรแกรมมิง (Integer Linear Programming; ILP) ในการจัดลำดับงานให้แก่สายการผลิตพลาสติกขึ้นรูป ด้วยวิธีการ Branch and Bound (อภิชาติ, 2551) การจัดลำดับการผลิตในระบบเครื่องจักรแบบขนาน โดยการดัดแปลงตัวแบบพื้นฐานปัญหาการขนส่ง (กัญชลลา, 2552) เพื่อให้สามารถผลิตสินค้าได้เสร็จเร็วขึ้น ลดจำนวนรายการที่เลื่อนส่ง ทำให้สามารถลดค่าใช้จ่ายในการขนส่งและลดต้นทุนในการผลิตได้อย่างมีประสิทธิภาพ

การวางแผนการมอบหมายงานในกระบวนการผลิตขนาดใหญ่ มีผลิตภัณฑ์จำนวนมาก และพนักงานมีทักษะความชำนาญแตกต่างกัน ซึ่งมีความซับซ้อน ขาดต่อการวางแผน การนำมิกซ์-อินทิเจอร์ลิเนียโปรแกรมมิง (Mixed-Integer Linear Programming; MILP) เข้ามาประยุกต์ใช้จะช่วยให้การวางแผนมอบหมายงานมีประสิทธิภาพมากขึ้น ใช้ทรัพยากรให้เกิดประโยชน์สูงสุด ซึ่งอาจจะใช้สมการวัตถุประสงค์แตกต่างกันเช่น เพิ่มความสมดุลบนสายการผลิตเพื่อสำเร็จรูป (นิพนธ์, 2543) ต้นทุนแรงงานพนักงานต่ำที่สุดในกระบวนการประกอบแบบตามคำสั่งที่มีขนาดใหญ่และจำนวนผลิตภัณฑ์มาก (Niemi, 2009)

รวมไปถึงการวางแผนการผลิตรวม ซึ่งเป็นการวางแผนในระยะยาว เป็นการกำหนดปริมาณงานในที่จะต้องผลิต ปริมาณสินค้าคงคลังเพื่อให้สอดคล้องกับความต้องการของลูกค้าและพื้นที่การจัดเก็บ จากงานวิจัยที่ผ่านมาการนำเทคนิคลิเนียโปรแกรมมิงและระบบคอมพิวเตอร์เข้ามาช่วยในการวางแผนและการคำนวณในอุตสาหกรรมหลากหลายชนิด เช่น อุตสาหกรรมการผลิตน้ำมันหล่อลื่น (จาตุรรัตน์, 2541) อุตสาหกรรมผลิตกระดาษ (ทวิชัยพร, 2551) อุตสาหกรรมโรงแยกอากาศ (จตุรรัตน์, 2552) อุตสาหกรรมการผลิตหินแกรนิตและหินอ่อน (มณีรัตน์, 2552) สามารถวางแผนกำหนดปริมาณงานที่จะต้องผลิต ปริมาณสินค้าคงคลังในแต่ละเดือน แต่ละสัปดาห์ บนพื้นฐานต้นทุนต่ำที่สุด การนำเทคนิคเหล่านี้เข้ามาช่วยในการวางแผนจะสามารถช่วยลดเวลาในการวางแผนอันเนื่องมาจากความซับซ้อน และทำให้การวางแผนมีประสิทธิภาพมากขึ้นได้ การหาปริมาณการสั่งซื้อวัตถุดิบที่เหมือนกัน มีการนำลิเนียโปรแกรมมิงเข้ามาใช้เพื่อหาปริมาณการสั่งซื้อวัตถุดิบแต่ละชนิดให้เหมาะสมเพื่อให้ต้นทุนการจัดเก็บต่ำที่สุด (วรินทร์, 2548) รวมไปถึงการประยุกต์ใช้กับวางแผนร่วมกันตลอดทั้งองค์กร เช่น อุตสาหกรรมปิโตรเคมี โดยตลอดทั้งองค์กรจะมีความสัมพันธ์ของค่าต่างๆมากมายอาทิเช่น วัตถุดิบ ผลิตภัณฑ์ รูปแบบการผลิต ค่าทางเทคนิคในกระบวนการกลั่น ปริมาณสินค้าคงคลัง การขนส่งกระจายสินค้า จึงได้มีการประยุกต์ใช้มิกซ์-อินทิเจอร์ลิเนียโปรแกรมมิง มาช่วยในวางแผนการจัดซื้อวัตถุดิบ การจัดตารางการผลิต การกระจายสินค้า ทำให้สามารถวางแผนการผลิตที่เหมาะสมสำหรับผลิตภัณฑ์ที่หลากหลายของอุตสาหกรรมปิโตรเคมีได้ (Kuo, 2008)

นอกจากการวางแผนแล้วตัวแบบคณิตศาสตร์ยังสามารถประยุกต์ใช้กับงานอื่นๆได้อีก ไม่ที่จะเป็นการหาตำแหน่งที่เหมาะสมในการวางเครื่องไม่ถ่านหินในเหมือง (ชูกิจ, 2545) โดยการใช้อินทิเจอร์ลิเนียโปรแกรมมิงมาช่วยตัดสินใจในการกำหนดตำแหน่งที่เหมาะสมที่ทำให้ค่าใช้จ่ายในการขนส่งลำเลียงถ่านหินต่ำที่สุด, การเลือกพื้นที่ที่เหมาะสมในการขุดถ่านหินจากหลายบริเวณมาผสมกันเพื่อให้ได้ถ่านหินที่มีคุณภาพและปริมาณตามความต้องการ (จิราภรณ์, 2546), การผลิตน้ำมันไบโอดีเซล โดยการหาอัตราส่วนระหว่างน้ำมันดีเซลกับน้ำมันพืชชนิดต่างๆ เพื่อให้มี

คุณสมบัติทางเชื้อเพลิงที่เหมาะสม และมีราคาต่ำที่สุดเนื่องจากราคาน้ำมันพืชแต่ละชนิดเปลี่ยนแปลงไปตามฤดูกาล (ดำรง, 2546)

นอกเหนือจากการประยุกต์ใช้ในอุตสาหกรรมแล้ว ก็ยังสามารถกับงานประเภทอื่นได้ เช่น ด้านการเกษตรกรรม มีการนำเทคนิคลิเนียโปรแกรมมิงมาใช้ในการวางแผนการจัดการสวนป่าไม้สัก ซึ่งเป็นการวางแผนระยะยาว 30 ปี เพื่อให้สามารถจัดสรรปริมาณการผลิตไม้ออกมาให้มีผลกำไรสูงสุดและสามารถปรับโครงสร้างสวนป่าให้มีขนาดพื้นที่ที่สามารถให้ผลผลิตรายคาบในปริมาณที่ใกล้เคียงกันได้ (ทิชานันท์, 2551) หรืองานด้านทรัพยากรบุคคล การมอบหมายงานให้แก่พนักงานถือเป็นงานที่ยาก การมอบหมายงานที่ผิดพลาดทำให้เกิดผลตามมา เช่น ประสิทธิภาพลดลงเนื่องจากการขาดงาน การขาดความพอใจในงาน ความไม่พอใจในระเบียบ และความสัมพันธ์ของแรงงานเสื่อมลง จึงนำตัวแบบคณิตศาสตร์เข้ามาช่วยในการมอบหมายแก่เจ้าหน้าที่ธุรการในคณะวิศวกรรมศาสตร์ตามความถนัด ระยะเวลาของงานที่เหมาะสมเพื่อหลีกเลี่ยงความน่าเบื่อ เพิ่มความสมดุลระหว่างปริมาณงานของพนักงานแต่ละคน และต้นทุนต่ำที่สุด (Eiselt, 2008) และได้ประยุกต์ใช้มิกซ์-อินทิเจอร์ลิเนียโปรแกรมมิง (Mixed-Integer Linear Programming; MILP) ในการจัดตารางงานและการกำหนดงานให้กับพยาบาลที่จะต้องไปดูแลคนไข้ตามบ้านของบริษัท Home Health Care โดยวัตถุประสงค์ในการกำหนดงานให้มีความสมดุลของภาระงานมากที่สุด (Bachouch, 2010)

ตัวแบบคณิตศาสตร์ยังสามารถประยุกต์ใช้ร่วมกับเทคนิคอื่นๆ ได้หลากหลายชนิดเช่น การประยุกต์ใช้ลิเนียโปรแกรมมิงร่วมกับการจำลองสถานการณ์ในการวางแผนการผลิตในอุตสาหกรรมสารกึ่งตัวนำไฟฟ้า โดยลิเนียโปรแกรมมิงจะกำหนดตารางการผลิตขึ้นมาและนำค่าที่ได้เป็นข้อมูลนำเข้าในแบบจำลองสถานการณ์ ผลลัพธ์ทางสถิติของเวลาต่างๆจะถูกนำไปปรับปรุงลิเนียโปรแกรมมิงให้มีความน่าเชื่อถือมากขึ้น โดยการทำซ้ำอย่างต่อเนื่องจะช่วยให้ได้ผลลัพธ์ที่น่าพอใจมากยิ่งขึ้น (Hung, 1996) หรือการประยุกต์ใช้ร่วมกับเทคนิคกระบวนการลำดับชั้นเชิงวิเคราะห์ (Analytical Hierarchy Process; AHP) ในตัดสินใจเลือกการวางแผนการผลิตรวมภายใต้แผนกลยุทธ์ที่ต่างกัน (สุนาริน, 2548) และการประเมินผู้แทนจำหน่ายเบตเตอร์รี่เครือข่ายและคำนวณหาปริมาณการสั่งซื้อที่เหมาะสมโดยให้มีต้นทุนต่ำที่สุด (นริศ, 2550)

แต่ในความเป็นจริงแล้วข้อมูลที่ใช้ในการตัดสินใจบางข้อมูลเป็นข้อมูลที่มีความไม่แน่นอนหรือมีความคลุมเครือทำให้ยากต่อการตัดสินใจ อย่างไรก็ตามหลังจากที่ได้คิดค้นทฤษฎีฟัซซีเซต (Zedeh, 1996) ซึ่งสามารถการแก้ปัญหาข้อมูลที่มีความคลุมเครือได้เป็นอย่างดี จึงมีการนำทฤษฎีฟัซซีเซตไปประยุกต์ใช้ในงานวิจัยต่างๆ ได้แก่ การนำทฤษฎีฟัซซีเซตมาประยุกต์ใช้ร่วมกับการแปลงหน้าที่ทางคุณภาพ (Quality Function Deployment; QFD) ในการคัดเลือกผู้ส่งมอบวัตถุดิบ

สำหรับโรงงานผลิตท่อพลาสติก โดยทฤษฎีฟัซซีเซตถูกนำมาใช้ในส่วนของการการประเมินปัจจัยเชิงคุณภาพด้วยค่าทางภาษาแทนการประเมินแบบเดิมที่ใช้การประเมินด้วยตัวเลข ซึ่งสามารถลดความคลุมเครือที่เกิดจากการประเมินของกลุ่มบุคคลได้ (สิทธิชัย, 2550) เช่นเดียวกับการคัดเลือกผู้ส่งมอบของอุตสาหกรรมยานยนต์และอิเล็กทรอนิกส์ ซึ่งมีการประยุกต์ใช้กระบวนการลำดับชั้นเชิงวิเคราะห์ความคลุมเครือ (Fuzzy Analytic Hierarchy Process; FAHP) มาช่วยในการพิจารณาหลักเกณฑ์ในการคัดเลือกผู้ส่งมอบ เพื่อช่วยในการตัดสินใจที่ซับซ้อน เพิ่มความแม่นยำเที่ยงตรง และลดความลำเอียง ทำให้กระบวนการตัดสินใจมีความน่าเชื่อถือมากยิ่งขึ้น (สุรกฤษฎ์, 2551) หรือแม้กระทั่งการคัดเลือกวิธีการแก้ไขปัญหาในกระบวนการตรวจสอบการ์ด จากการระดมสมองของผู้ที่ชำนาญที่รับผิดชอบในกระบวนการ โดยข้อมูลเชิงคุณภาพที่ได้จะเกิดจากความรู้สึก ประสบการณ์ หรือความรู้ควบคู่กับการพิจารณาด้วยเหตุผลซึ่งจัดอยู่ในรูปของข้อมูลที่คลุมเครือ จึงได้นำเทคนิคฟัซซีเข้ามาประยุกต์ใช้เพื่อให้ข้อมูลสามารถแปลงสู่ข้อมูลแบบตัวเลขเพื่อง่ายต่อการคำนวณ (สุรรัชย์, 2551) ทฤษฎีฟัซซียังมีการประยุกต์ใช้กับการออกแบบระบบผู้เชี่ยวชาญแบบฟัซซีสำหรับการกำหนดทางออกเครื่องบินสำหรับการแก้ปัญหาที่มีสาเหตุมาจากการเปลี่ยนแปลงเวลาในการเดินทางของเครื่องบินเนื่องจากความล่าช้าหรือปัญหาทางเทคนิค (ภาณุพันธ์, 2551)

สำหรับการวางแผนการผลิตก็เช่นเดียวกัน ในกรณีที่ข้อมูลสำหรับการตัดสินใจในการวางแผนมีความคลุมเครือเช่น ปริมาณความต้องการสินค้า เงินลงทุน เวลาในกระบวนการผลิต เป็นต้น ทำให้การใช้ลิเนียร์โปรแกรมมิงปกติในการแก้ปัญหาวางแผนนั้นมีความไม่เหมือนจริง จึงมีงานวิจัยที่นำทฤษฎีฟัซซีมาประยุกต์ใช้ร่วมกับลิเนียร์โปรแกรมมิงในการแก้ปัญหาดังกล่าวเช่น การวางแผนการผลิตรวมในอุตสาหกรรมที่มีความคลุมเครือของข้อมูลได้แก่ ปริมาณความต้องการสินค้า กำลังการผลิต และต้นทุนการผลิต เป็นต้น การแก้ปัญหาลำนี้สามารถแก้ได้ด้วยการประยุกต์ใช้ฟัซซีลิเนียร์โปรแกรมมิง (Fuzzy Linear Programming) โดยข้อมูลที่คลุมเครือจะอยู่ภายใต้ฟังก์ชันความเป็นสมาชิกแบบต่างๆ ตัวแบบสำหรับการวางแผนการผลิตรวมสำหรับหลายผลิตภัณฑ์ที่มีความคลุมเครือของความต้องการสินค้า และกำลังการผลิตได้ถูกนำเสนอ โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อให้มีต้นทุนรวมต่ำที่สุด ทำการสร้างสมการสำหรับฟัซซี (Soft Equation) ผู้ตัดสินใจจะต้องเลือกระดับความเป็นไปได้ (Possibility Level; θ) ในการกำหนดช่วงของความต้องการสินค้า โดยตัวแบบที่นำเสนอนี้สามารถปรับปรุงการวางแผนการผลิตรวมได้อย่างมีประสิทธิภาพ และได้ผลลัพธ์ของแผนการที่แตกต่างกันตามระดับความคลุมเครือของความต้องการและกำลังการผลิตที่กำหนด (Fung, 2003) จากนั้นได้มีการนำเสนอตัวแบบสำหรับการวางแผนการผลิตรวมแบบฟัซซีตามหลักทฤษฎีข้อจำกัด โดยมีวัตถุประสงค์คือ ผลกำไรสูงสุด ซึ่งตัวแบบที่สร้างขึ้นได้พิจารณาความต้องการที่ไม่แน่นอน (Fuzzy Demand) ซึ่งจะทำให้ตัวแบบมีความเหมือนจริง

มากยิ่งขึ้นและได้นำการลงทุนในเรื่องของเครื่องมือและอุปกรณ์เข้าไปพิจารณาด้วย ซึ่งสามารถช่วยเพิ่มประสิทธิภาพของระบบการผลิตได้ ลดการเสียโอกาสในการขายสินค้าและการส่งสินค้าล่าช้าได้เป็นอย่างดี (Phruksaphanrat, 2006) สำหรับการวางแผนการผลิตในการบรรจุมะเขือเทศสด ซึ่งมีความคลุมเครือของค่าบางค่าได้แก่ ระยะเวลาในการเก็บเกี่ยว อัตราเร็วในการบรรจุ ต้นทุน ได้มีการประยุกต์ใช้ฟัซซีลิเนียโปรแกรมมิงเปรียบเทียบกับลิเนียโปรแกรมมิงแบบธรรมดา จากผลลัพธ์ที่ได้พบว่า ฟัซซีลิเนียโปรแกรมมิงให้ต้นทุนที่ต่ำกว่า และมีความยืดหยุ่นมากกว่า (Miller, 1997)

สำหรับการวางแผนสำหรับห่วงโซ่อุปทาน เป็นการวางแผนการผลิตและการกระจายสินค้า ซึ่งในอุตสาหกรรมจะประกอบไปด้วยสายการผลิต โรงงาน และศูนย์กระจายสินค้าที่หลากหลาย และข้อมูลมีความคลุมเครือ ได้มีการสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์แบบฟัซซีมิกซ์-อินทิเจอร์ลิเนียโปรแกรมมิง (Fuzzy Mixed-Integer Linear Programming; FMILP) ซึ่งพิจารณาถึงความไม่แน่นอนของอุปสงค์ อุปทานและกระบวนการผลิต ซึ่งข้อมูลที่คลุมเครือนี้จะใช้ฟังก์ชันความเป็นสมาชิกแบบสามเหลี่ยม ตัวแบบที่นำเสนอสามารถสร้างทางเลือกในการตัดสินใจเลือกการวางแผนที่แตกต่างกันตามระดับความพึงพอใจ (Peidro, 2009) และมีการนำเสนอตัวแบบการตัดสินใจสำหรับการวางแผนการผลิตและการกระจายสินค้าในห่วงโซ่อุปทาน โดยมีการใช้ตัวแปรแบบฟัซซีพารามิเตอร์ ซึ่งจะมีความใกล้เคียงกับความเป็นจริงมากกว่าเนื่องจากมีความไม่แน่นอน ทั้งในด้านกำลังการผลิต ความต้องการสินค้า ค่าใช้จ่ายในการผลิต ตัวแบบที่นำเสนอสามารถช่วยตัดสินใจวางกลยุทธ์ในการกำหนดงานให้กับสายการผลิตว่าจะผลิตสินค้าใด ปริมาณของสินค้าที่จะจัดส่ง และจำนวนยานพาหนะที่ใช้ในแต่ละเส้นทางการขนส่งได้ มีความยืดหยุ่นสามารถประยุกต์ใช้กับสถานการณ์จริงได้เป็นอย่างดี (Bilgen, 2010) และยังมีการเปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างฟัซซีมิกซ์-อินทิเจอร์ลิเนียโปรแกรมมิง (Fuzzy Mixed-Integer Linear Programming; FMILP) และมิกซ์-อินทิเจอร์ลิเนียโปรแกรมมิง (Mixed-Integer Linear Programming; MILP) ในการวางแผนการผลิตในห่วงโซ่อุปทานซึ่งมีความต้องการสินค้าที่ไม่แน่นอน ซึ่งพบว่า ฟัซซีมิกซ์-อินทิเจอร์ลิเนียโปรแกรมมิงให้ผลลัพธ์ที่ดีกว่า (Mula, 2009)

Vasan (2006) ได้นำเสนอฟัซซีลิเนียโปรแกรมมิงสำหรับการวางแผนการผลิตในการเลือกส่วนผสมของการผลิตช็อกโกแลต ซึ่งมีความคลุมเครือของข้อมูลได้แก่ ปริมาณวัตถุดิบ แรงงาน กำลังการผลิต โดยใช้ฟังก์ชันความเป็นสมาชิกแบบตัวเอสในการแก้ปัญหาดังกล่าวเพื่อให้ได้ผลกำไรสูงสุดและเกิดความพึงพอใจในระดับสูงได้ Mukherjee (2010) ได้ประยุกต์ใช้วิธีการจัดลำดับฟัซซี (Yager's Ranking Method) ในการแก้ปัญหาการมอบหมายงานที่ต้นทุนมีความคลุมเครือ ซึ่งสามารถเปลี่ยนตัวแบบปัญหาการมอบหมายงานแบบฟัซซีเป็นตัวแบบปัญหาการมอบหมายงานธรรมดาซึ่งสามารถหาคำตอบได้โดยใช้โปรแกรม LINGO

กระบวนการตัดสินใจในการวางแผนที่ข้อมูลมีความคลุมเครือนั้นบางกรณีอาจมีวัตถุประสงค์หลายวัตถุประสงค์ ก็สามารถประยุกต์ใช้ทฤษฎีฟัซซีร่วมกับการตัดสินใจแบบหลายวัตถุประสงค์ (Fuzzy Multiple Objective Decision) เช่น Baykasoglu (2010) ได้นำเสนอตัวแบบวางแผนการผลิตแบบหลายวัตถุประสงค์ ภายใต้พารามิเตอร์แบบฟัซซี โดยสมการวัตถุประสงค์ของการวางแผนได้แก่ผลกำไรสูงสุด ต้นทุนจากการเสียโอกาสในการขายต่ำที่สุด และต้นทุนสินค้าคงคลังต่ำที่สุด หรือการแก้ปัญหาการมอบหมายงานแบบหลายวัตถุประสงค์ซึ่งต้องการให้ค่าใช้จ่ายเวลาและคุณภาพมีค่าเหมาะสมที่สุด โดยเทคนิคฟัซซีสามารถลดรูปของการตัดสินใจแบบหลายวัตถุประสงค์เป็นตัวแบบฟัซซีลิเนียร์โปรแกรมมิ่งสำหรับ 1 วัตถุประสงค์ ซึ่งสามารถแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ (Chih-Hung, 1999) หรือการตัดสินใจหลายวัตถุประสงค์แบบฟัซซีสำหรับการแก้ปัญหาการกระจายสินค้าแบบหลายคลังสินค้า (Multi-Depot Distribution; MDDP) ซึ่งโดยทั่วไปจะใช้วิธีการแก้แบบสองขั้นตอนคือ วิธีการมอบหมายงานเป็นลำดับแรกและการกำหนดเส้นทางเป็นลำดับที่สอง (Assignment First - Routing Second; AFRS) โดยในขั้นตอนแรกจะใช้ตัวแบบการขนส่งขั้นพื้นฐานในการแก้ปัญหาการมอบหมายงาน หลังจากนั้นจะใช้ตัวแบบการจัดเส้นทางขนส่งของยานพาหนะ (Vehicle Routing Problem; VRP) เพื่อคำนวณหาค่าใช้จ่ายของแต่ละเส้นทางขนส่งที่เหมาะสม แต่ในการแก้ปัญหาลำดับการขนส่งขั้นพื้นฐานจะพิจารณาเฉพาะความสัมพันธ์ระหว่างคลังและลูกค้าเท่านั้น ซึ่งยังรวมไม่ได้พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างลูกค้าและลูกค้า ซึ่งทั้งสองแบบเป็นเป้าหมายที่มีความคลุมเครือ Nunkaew (2010) จึงได้นำเสนอวิธีการแก้ปัญหาโดยพิจารณาความสัมพันธ์ทั้งสองด้วยตัวแบบโปรแกรมเป้าหมายแบบฟัซซีสำหรับการมอบหมายงาน โดยผลจากการเปรียบเทียบตัวแบบที่ได้ผลที่นำเสนอกับตัวแบบเดิมพบว่าสามารถลดค่าใช้จ่ายในการขนส่งและลดเวลาคำนวณในขั้นตอนการกำหนดเส้นทางได้อย่างมีประสิทธิภาพ