บทที่ 2

แนวคิดทฤษฎีและเอกสารที่เกี่ยวข้อง

การศึกษาครั้งนี้ เป็นการศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนแรงงานที่มีงานทำรายภาคกับผลิตภัณฑ์มวลรวมภาคของประเทศไทย มีแนวคิด ทฤษฎีทางเศรษฐศาสตร์มหภาคได้แก่ ทฤษฎีฟังก์ชันการผลิต Cobb-Douglas, ทฤษฎีการเจริญเติบโตภายใน (Endogenous Growth Model) และทฤษฎีทางเศรษฐมิติที่เกี่ยวข้องกับการศึกษา โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

2.1 แนวคิดและทฤษฎีทางเศรษฐศาสตร์

2.1.1 ฟังก์ชันการผลิตแบบ Cobb-Douglas

ทฤษฎีฟังก์ชันการผลิตแบบ Cobb-Douglas เป็นทฤษฎีการผลิตในรูปแบบความสัมพันธ์ระหว่างปัจจัยการผลิตและผลผลิตที่นิยมใช้มากที่สุด โดยมีรูปแบบคือ

$$Q = AK^{\alpha} L^{\beta} \tag{2.1}$$

โดยที่ A คือ ค่าคงที่ที่เป็นบวก ซึ่ง $0 < \alpha < 1$ และ $0 < \beta < 1$ โดยลักษณะของฟังก์ชันการผลิตแบบ Cobb-Douglas มีดังนี้

1. ฟังก์ชันการผลิต Cobb-Douglas สามารถแปลงให้อยู่ในรูปฟังก์ชันเชิงเส้นตรงในรูป Logarithm ได้ดังนี้

$$\log Q = \log A + \alpha \log K + \beta \log L$$

ดังนั้น ฟังก์ชันการผลิต Cobb-Douglas จึงเป็นฟังก์ชันที่ง่ายต่อการคำนวณ และการประมาณทางเศรษฐมิติ

2. อัตราการทดแทนกันทางเทคนิคหน่วยสุดท้าย ($\mathrm{MRTS_{LK}}$)

$$MRTS_{LK} = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{\beta AK^{\alpha} L^{\beta-1}}{\alpha AK^{\alpha-1} L^{\beta}} = \frac{\beta K}{\alpha L} \tag{2.2}$$

3. ฟังก์ชันการผลิต Cobb-Douglas สอดคล้องกับกฎผลผลิตหน่วยสุดท้ายลดน้อยถอยลงเมื่อเทียบกับปัจจัยการผลิตแต่ละชนิด จากสมการ (2.1)

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = MP_K = \alpha AK^{\alpha-1} L^{\beta}$$

และ

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} = \frac{\partial MP_K}{\partial K} = \alpha(\alpha - 1)AK^{\alpha-2}L^{\beta}$$

เนื่องจาก $0 < \alpha < 1$ ดังนั้นค่า $(\alpha - 1) < 0$ นั่นคือ เมื่อมีการใช้ปัจจัยทุนเพิ่มมากขึ้น ค่า MP_K จะมีค่าค่อยๆ ลดลง ส่วน MP_L ก็มีคุณสมบัติและพิสูจน์ได้ด้วยวิธีเดียวกัน

4. ผลได้ต่อขนาดจะขึ้นอยู่กับค่า α และ β กล่าวคือ ถ้าเพิ่มปัจจัยการผลิตแรงงานและทุนเท่ากับ λ เท่า จะได้ว่าผลผลิตเพิ่มขึ้นเท่ากับ $\lambda^{\alpha+\beta}$ เท่า

$$Q = A(\lambda K)^{\alpha}(\lambda L)^{\beta} \tag{2.3}$$

$$Q = \lambda^{\alpha+\beta}(AK^{\alpha}L^{\beta}) = \lambda^{\alpha+\beta}Q \tag{2.4}$$

ดังนั้นหาก $\alpha + \beta = 1$ คือ ผลได้ต่อขนาดการผลิตมีลักษณะคงที่

$\alpha + \beta > 1$ คือ ผลได้ต่อขนาดการผลิตมีลักษณะเพิ่มขึ้น

$\alpha + \beta < 1$ คือ ผลได้ต่อขนาดการผลิตมีลักษณะลดลง

5. ค่าความยืดหยุ่นของการทดแทนกันระหว่างปัจจัยการผลิตมีลักษณะคงที่และเท่ากับ 1

6. ในฟังก์ชันการผลิต Cobb-Douglas การจะพิจารณาว่าเป็นการผลิตสินค้าที่ใช้ปัจจัยการผลิตแบบ Factor Intensive แบบใดนั้น จะพิจารณาที่อัตราส่วน $\frac{\beta}{\alpha}$ ถ้าหากอัตราส่วนนี้มีค่ามากแสดงว่าเป็นการผลิตที่ใช้ปัจจัยแรงงานแบบ Labor Intensive Technique ในทางตรงกันข้าม ถ้าอัตราส่วนนี้ค่าน้อยแสดงว่าเป็นการผลิตที่ใช้ปัจจัยทุนแบบ Capital Intensive Technique

2.1.2 ทฤษฎีการเจริญเติบโตภายใน (Endogenous Growth Model)

Endogenous Growth Theory เป็นทฤษฎีที่พัฒนาขึ้นในช่วงปลายของทศวรรษที่ 1990s โดยนักเศรษฐศาสตร์รางวัลโนเบล Robert E. Lucas และ Paul M. Romer โดย Endogenous Growth เป็นแนวคิดที่ขัดแย้งกับแนวความคิดของ Neoclassic Growth Model และ Solow – Type Growth Model โดยพยายามชี้ให้เห็นว่าทั้ง Neoclassic และ Solow ต่างก็ให้ความสำคัญกับปัจจัยด้านการออมและการลงทุน โดยเฉพาะการลงทุนทางกายภาพ เช่น การสร้างโรงงานเพิ่มและการลงทุนในโครงสร้างพื้นฐานทางเศรษฐกิจต่างๆ มากจนเกินไป ในความเป็นจริงแล้ว การเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจที่ยั่งยืนในระยะยาวไม่ได้ขึ้นอยู่กับการสะสมทุนทางกายเท่านั้น แต่ยังขึ้นอยู่กับปัจจัยอื่นด้วย โดยเฉพาะการพัฒนาด้านมนุษย์ (Human Capital) Endogenous Growth Theory จึงเป็นทฤษฎีที่พยายามชี้ให้เห็นถึงความสำคัญของปัจจัยด้านมนุษย์ต่อการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ (Phillippe Aghion and Peter Howitt, 2009)

แบบจำลอง Endogenous Growth เป็นแบบจำลองที่มีความแตกต่างจากแบบจำลองของ Solow คือ ไม่ปรากฏกฎการลดน้อยถอยลงของทุน (Diminishing return to capital) สำหรับการผลิตที่มีทุนมนุษย์ (Human capital) เช่น การศึกษา เป็นปัจจัยในการผลิตอย่างหนึ่ง ที่ซึ่งมนุษย์มีความรู้ ความสามารถที่จะวิจัยและพัฒนาความรู้และวิทยาการใหม่ ๆ ขึ้นตลอดเวลา (เกิดเทคโนโลยีใหม่ขึ้น) และมีการถ่ายทอดกันอย่างแพร่หลายด้วยนั้น ซึ่งนักเศรษฐศาสตร์มีสมมติฐานว่าผลประโยชน์จากภายนอก (External benefits) ของทุนมนุษย์นั้นเกิดขึ้นมากพอที่จะทำการพัฒนาในระยะยาว และไม่ปรากฏการลดน้อยถอยลงในผลผลิตส่วนเพิ่มของทุนมนุษย์ (Diminishing marginal product of human capital) ซึ่งถ้าหากเป็นจริง จะหมายถึงว่าในระยะยาวการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจจะอาศัยการเพิ่มทุนมนุษย์ การค้นคว้าวิจัยและการพัฒนา ทำให้เศรษฐกิจเติบโตขึ้นไปได้เรื่อยๆ (Barro and Sala-i-Martin, 2004)

สำหรับแบบจำลอง Endogenous Growth มีข้อสมมติคือ ทุกหน่วยธุรกิจสามารถเข้าถึงเทคโนโลยีได้ง่าย โดยมีปัจจัยการผลิต 2 ชนิด คือ ทุน (Capital) และแรงงาน (Labour) ดังนั้น ทุนและแรงงานจะเป็น Homogeneity of degree 1 โดยกำหนดให้เศรษฐกิจเป็นแบบกระจายอำนาจ (Decentralization economy)

$$F\left[\lambda K(t),\lambda L(t)\right]=\lambda F\left[K(t),L(t)\right]$$

จาก Euler’s theorem สามารถเขียนสมการได้ดังนี้

$$F\left[K(t),L(t)\right]=F_K K(t)+F_L L(t)$$

ลักษณะของแบบจำลอง Endogenous growth คือไม่มีกฎการลดน้อยถอยลงของทุนดังนั้น ฟังก์ชั่นการผลิตคือ AK model

$$Y(t) = AK(t) \tag{2.5}$$

โดยที่ A คือ ระดับของเทคโนโลยี

ผลผลิตต่อหัวคือ

$$y(t) = Ak(t) \tag{2.6}$$

ค่าเฉลี่ยและผลผลิตหน่วยสุดท้ายของทุนมีค่าคงที่ที่ระดับ $A>0$

สมมติให้ครัวเรือนมีฟังก์ชั่นความพอใจอยู่ในรูปความยืดหยุ่นของการทดแทนกันข้ามห้วงเวลาคงที่ (Constant Intertemporal Elasticity of Substitution: CIES) ดังนี้

$$U=\int_0^\infty\left[\frac{c(t)^{(1-\theta)}-1}{(1-\theta)}\right]dt \tag{2.7}$$

จากข้อสมมติที่ว่า ครัวเรือนเป็นเจ้าของปัจจัยการผลิตทุน (Capital) และแรงงาน (Labour) ที่ได้รับอัตราผลตอบแทนจากสินทรัพย์ $r(t)$ และอัตราผลตอบแทนจากแรงงาน $w(t)$ และจากการที่ทุนมีค่าเสื่อมที่อัตราคงที่คือ δ ดังนั้น อัตราค่าเช่าที่แท้จริงจะเท่ากับราคาค่าเช่าลบด้วยค่าเสื่อมของทุน $r(t) = R(t) - \delta$

สมการข้อจำกัดงบประมาณของครัวเรือนคือ

$$\dot{a}(t) = [r(t) - n]a(t) + w(t) - c(t) \tag{2.8}$$

โดยที่ $a(t)$ คือ สินทรัพย์สุทธิต่อบุคคล ณ เวลา t

$\dot{a}(t) = \frac{da(t)}{dt}$ คือ สินทรัพย์ที่เปลี่ยนแปลงไปเมื่อเวลาเปลี่ยนแปลง

$r(t)$ คือ ค่าเช่าที่แท้จริง ณ เวลา t

n คือ อัตราการเจริญเติบโตของประชากร

ซึ่งครัวเรือนจะแสวงหาความพอใจสูงสุดภายใต้ข้อจำกัดด้านงบประมาณ โดยสามารถสร้างสมการ Present value Hamiltonian ดังนี้

$$H = u[c(t)]e^{-(\rho-n)t} + v(t)[w(t) + (r(t) - n)a(t) - c(t)] \tag{2.9}$$

โดยที่ $v(t)$ คือ มูลค่าปัจจุบันของราคาเงา (Shadow Price) ของรายได้ในหน่วยความพอใจ

$$\frac{\partial H}{\partial c(t)} = 0 \quad \rightarrow \quad v(t) = u'[c(t)]e^{-(\rho-n)t} \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial H}{\partial a(t)} = -\dot{v}(t) \quad \rightarrow \quad \dot{v}(t) = -[r(t) - n]v(t) \tag{2.11}$$

$$\lim_{t\to\infty}[v(t)\cdot a(t)] = 0 \quad \rightarrow \quad \lim_{t\to\infty}\left\{a(t)\exp\left[-\int_0^t [r(v) - n]dv\right]\right\} = 0 \tag{2.12}$$

จากสมการ (2.10), (2.11) และ (2.12) ดุลยภาพคือ

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\theta}[r(t) - \rho] \tag{2.13}$$

และ Transversality Condition ตามสมการ (2.16)

$$\lim_{t\to\infty}\left\{a(t)\exp\left[-\int_0^t [r(v) - n]dv\right]\right\} = 0 \tag{2.14}$$

จากแบบจำลอง AK model หน่วยธุรกิจจะมีฟังก์ชั่นการผลิตคือ

$$y(t) = f(k(t)) = Ak(t)$$

ซึ่ง $A > o$ และ $f'(k(t)) = A$ จากข้อสมมติที่กำหนดให้ทุนมีค่าเสื่อมโดยที่อัตราค่าเช่าที่แท้จริงจะเท่ากับราคาค่าเช่าลบด้วยค่าเสื่อมของทุนดังนั้นหน่วยธุรกิจจะทำกำไรสูงสุดภายใต้เงื่อนไข

$$R(t) = r(t) + \delta \tag{2.15}$$

$$r(t) = A - \delta \tag{2.16}$$

ถ้าผลผลิตส่วนเพิ่มของแรงงาน (Marginal product of labour) เท่ากับศูนย์แล้วอัตราค่าจ้าง $w(t)$ จะเท่ากับศูนย์ด้วย โดยสมมติให้ระบบเศรษฐกิจเป็นแบบปิดที่ไม่มีการกู้ยืม ดังนั้น ณ ดุลยภาพสินทรัพย์จะเท่ากับทุน $(a(t) = k(t))$

แทนค่า $a(t) = k(t),\ r(t) = A - \delta,\ w(t) = 0$ ในสมการ (2.16) จะได้

$$\dot{k}(t) = (A - \delta - n)k(t) - c(t) \tag{2.17}$$

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\theta}(A - \delta - \rho) \tag{2.18}$$

$$\lim_{t\to\infty}\{k(t)e^{-(A-\delta-n)t}\} = 0 \tag{2.19}$$

สมการ (2.18) แสดงการเจริญเติบโตของการบริโภค ซึ่งไม่ขึ้นอยู่กับการสะสมทุนต่อหัว $(k(t))$ หรือที่ระดับการบริโภคต่อหัว ณ จุดเริ่มต้น $c(0)$ ดังนั้นการบริโภคต่อต่อหัว ณ เวลา t คือ

$$c(t) = c(0)e^{(1/\theta)\cdot(A-\delta-\rho)\cdot t}$$

การเจริญเติบโตของทุนและผลผลิตต่อหัว สามารถหาได้โดยหารสมการ (2.17) ด้วย $(k(t))$ ดังนั้น จะได้สมการใหม่คือ

$$c(t)/k(t) = (A - \delta - n) - \dot{k}(t)/k(t) \tag{2.20}$$

ที่ Steady state ตัวแปรทุกตัวมีอัตราการเจริญเติบโตคงที่ จะได้พจน์ด้านขวา $(A-\delta-n)-\dot{k}(t)/k(t)$ คงที่ ดังนั้น c/k จะคงที่ และอัตราการเจริญเติบโตของทุนต่อหัวจะเท่ากับอัตราการเจริญเติบโตของการบริโภคต่อหัวในสมการ (14) (Barro and Sala-i-Martin, 2004)

ตามแนวความคิดของ Endogenous Growth นั้น การลงทุนในทุนมนุษย์จะเป็นประโยชน์ต่อสังคม โดยผ่านกระบวนการที่เรียกว่า Spill – over effects และ Learning – by – doing effects เพราะการที่มีการลงทุนในทุนมนุษย์เพิ่มมากขึ้น ทั้งด้านการศึกษาตลอดจนการพัฒนาทักษะฝีมือแรงงาน และการวิจัยและพัฒนา จะทำให้เกิด Spill – over effects กล่าวคือ การที่ประชากรหรือผู้ที่ใช้แรงงานมีการศึกษามากขึ้น บุคคลเหล่านี้นอกจากจะมีประสิทธิภาพในการผลิตที่สูงมากขึ้น โดยสามารถผลิตสินค้าหรือบริการได้มากขึ้นแล้ว บุคคลเหล่านี้ยังมีปฏิสัมพันธ์และแลกเปลี่ยนความรู้ที่ตนได้รับกับเพื่อนร่วมงานด้วย ซึ่งส่งผลให้ประสิทธิภาพในการผลิตของเพื่อนร่วมงานอื่นๆ เพิ่มขึ้น

ด้วย นอกจากนั้น การขยายตัวของการศึกษาของประชาชนโดยทั่วไปยังทำให้เกิดกระบวนการ Learning – by – doing effects อีกด้วย กล่าวคือ เมื่อคนมีการศึกษาหรือได้รับการฝึกฝนความรู้มาระดับหนึ่ง คนเหล่านี้ก็จะสามารถเรียนรู้และสะสมความรู้เพิ่มมากขึ้นเรื่อยๆ ทั้งๆที่อาจมีระดับการศึกษาที่เป็นทางการเท่าเดิม(Phillippe Aghion and Peter Howitt, 2009)

ดังนั้น กระบวนการ Spill – over effects และ Learning – by – doing effects นี้จึงเป็นกระบวนการที่สามารถเพิ่มประสิทธิภาพและศักยภาพของแรงงานให้สูงขึ้น และทำให้เศรษฐกิจสามารถขยายตัวได้โดยที่มีทรัพยากรและการลงทุนที่จำกัด นอกจากนั้น ความสามารถนาการพัฒนาความรู้และประสิทธิภาพในการผลิตของมนุษย์ ความสามารถในการเรียนรู้และพัฒนาเทคโนโลยีใหม่ๆ ล้วนแล้วแต่เป็นกระบวนการที่เกิดขึ้นภายในระบบเศรษฐกิจเอง ดังนั้น ตามแนวคิดของ Endogenous Growth Theory การเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจจึงเป็นกระบวนการที่เกิดขึ้นจากภายในโดยเมื่อมีการลงทุนในทุนมนุษย์แล้ว ทุนมนุษย์เหล่านี้ก็จะมีการสะสมและขยายตัวออกไปอย่างไม่มีที่สิ้นสุดผ่านกระบวนการ Spill – over effects และ Learning – by – doing effects และส่งผลให้เศรษฐกิจมีการเจริญเติบโตอย่างไม่มีวันสิ้นสุด (Phillippe Aghion and Peter Howitt, 2009)

2.2 ทฤษฎีการวิเคราะห์ทางเศรษฐมิติ

1. ข้อมูลพาแนล (Panel Data)

ข้อมูลพาแนลเป็นข้อมูลที่มีลักษณะของข้อมูลภาคตัดขวาง (Cross-sectional data) ร่วมกับข้อมูลอนุกรมเวลา (Time series data) เกิดจากการเก็บข้อมูลจากหน่วยของตัวอย่างชุดเดิมซ้ำ ๆ หลายครั้ง ภายในช่วงเวลาที่ทำการศึกษา จึงทำให้ข้อมูลพาแนลมีประโยชน์ในการศึกษามากกว่าการใช้ข้อมูลภาคตัดขวางหรืออนุกรมเวลาเพียงอย่างเดียว อันเนื่องจากความหลากหลายของข้อมูลทำให้ค่าความเป็นอิสระ (Degree of freedom) มากขึ้น และเป็นการลดปัญหาภาวะร่วมเส้นตรง (Collinearity) ค่าประมาณที่ได้จึงมีความน่าเชื่อถือมากขึ้น นอกจากนั้นแล้ว การใช้ข้อมูลพาแนลในการศึกษา ยังสามารถระบุและวัดผลกระทบที่ไม่สามารถพบได้เมื่อเทียบกับการใช้ข้อมูลภาคตัดขวางหรือข้อมูลอนุกรมเวลาเพียงอย่างเดียว

สำหรับการประมาณค่า ข้อมูลพาแนลสามารถใช้วิเคราะห์แบบจำลองที่มีความซับซ้อนได้ดีกว่าข้อมูลภาคตัดขวางและข้อมูลอนุกรมเวลาเพียงอย่างเดียว อีกทั้งยังสามารถใช้ศึกษาการปรับตัวหรือการเปลี่ยนแปลงแบบพลวัตรของข้อมูลที่เกิดจากการสังเกตซ้ำ ๆ ได้ดีอีกด้วย (Baltagi, 2001:

6-8) และเหตุผลที่สำคัญคือ ข้อมูลพาเนลไม่มีข้อจำกัดด้านสมมติฐาน และสามารถอธิบายการเปลี่ยนแปลงของข้อมูลแต่ละหน่วยข้ามช่วงเวลาได้

แบบจำลองข้อมูลพาเนลแบบทั่วไปในรูปเชิงเส้น สามารถเขียนได้ดังนี้ (Verbeek, 2004: 342)

$$y_{it} = \alpha_i + x'_{it}\beta_{it} + \varepsilon_{it} \qquad (2.21)$$

โดยที่ y_{it} คือ เวกเตอร์ 1×1 ของตัวแปรตาม

x_{it} คือ เวกเตอร์ $k \times 1$ ของตัวแปรอธิบาย

β_{it} คือ เวกเตอร์ $k \times 1$ ของค่าสัมประสิทธิ์

i คือ ข้อมูลภาคตัดขวาง $i = 1, \ldots, N$

t คือ ข้อมูลอนุกรมเวลา $t = 1, \ldots, T$

α_i คือ จำนวนจริง (ค่าคงที่)

ε_{it} คือ ค่าความคลาดเคลื่อน

แบบจำลองพาเนล สามารถทำการประมาณค่าความสัมพันธ์โดยขึ้นอยู่กับข้อสมมติเบื้องต้นของค่าสัมประสิทธิ์ (β_{it}) ค่าคงที่ (α_i) และค่าความคลาดเคลื่อน (ε_{it}) โดยสมมติให้ค่าความคลาดเคลื่อน (ε_{it}) มีการแจกแจงเหมือนกันในทุก ๆ หน่วยภาคตัดขวางและช่วงเวลา นั่นคือ ค่าความคลาดเคลื่อนมีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์และมีค่าความแปรปรวนเท่ากับ σ_ε^2 (Verbeek, 2004: 345)

2. การทดสอบพาเนลยูนิทรูท (Panel unit root test)

การทดสอบความนิ่ง (Stationary) ของข้อมูลเพื่อหลีกเลี่ยงข้อมูลที่มีค่าเฉลี่ย (Mean) และความแปรปรวน (Variance) เพื่อไม่ให้เกิดปัญหาความสัมพันธ์ที่ไม่แท้จริง (Spurious regression) จากสมการ AR (1) ของข้อมูลพาเนล

$$y_{it} = \alpha_i + \rho_i y_{it} + \varepsilon_{it} \qquad (2.22)$$

จะได้

$$\Delta y_{it} = \alpha_i + \pi_i y_{it-1} + \varepsilon_{it} \text{ โดยที่ } \pi_i = \rho_i - 1 \qquad (2.23)$$

โดย y_{it} คือ ตัวแปรภายนอก

i คือ ข้อมูลภาคตัดขวาง $i = 1, \ldots, N$

t คือ ข้อมูลอนุกรมเวลา $t = 1, \ldots, T$

ρ คือ ค่าสัมประสิทธิ์ของ Autoregressive

ε_{it} คือ ค่าความคลาดเคลื่อน

สมมติฐานที่ใช้ในการทดสอบ คือ

$$H_o : \rho = 0 \quad \text{(ข้อมูลพาแนลมียูนิทรูท)}$$

$$H_a : \rho < 0 \quad \text{(ข้อมูลพาแนลไม่มียูนิทรูท)}$$

การทดสอบพาแนลยูนิทรูทมีทั้งหมด 5 วิธี ดังต่อไปนี้ (Baltagi, 2005)

2.1 วิธีการทดสอบของ Levin, Lin and Chu (LLC Test)

จากสมการ Augmented Dickey-Fuller (ADF)

$$\Delta y_{it} = \rho y_{i,t-1} + \sum_{L=1}^{p_i} \theta_{iL} \Delta y_{it-L} + \alpha_{mi} d_{mt} + \varepsilon_{it} \qquad m = 1,2,3 \tag{2.24}$$

โดย Δy_{it} คือ ผลต่างของ y_{it}

p_i คือ จำนวน Lag order สำหรับผลต่างของ y_{it}

d_{1m} คือ เซ็ทว่าง

d_{2m} คือ $\{1\}$

d_{3m} คือ $\{1, t\}$

α_{mi} คือ เวกเตอร์ค่าสัมประสิทธิ์

d_{mt} คือ เวกเตอร์ของ Deterministic variable

ε_{it} คือ ค่าความคลาดเคลื่อน

สมมติฐานของการทดสอบคือ

$$H_0 : \rho = 0 \quad \text{(ข้อมูลพาแนลมียูนิทรูท)}$$

$$H_a : \rho < 0 \quad \text{(ข้อมูลพาแนลไม่มียูนิทรูท)}$$

ค่าสถิติที่ใช้ในการทดสอบคือ

$$t_\rho = \frac{\hat{\rho}}{\hat{\sigma}(\hat{\rho})} \tag{2.25}$$

โดยที่

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=2+p_i}^{T} \tilde{v}_{i,t-1} \tilde{e}_{it}}{\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=2+p_i}^{T} \tilde{v}_{i,t-1}^2} \tag{2.26}$$

$$\hat{\sigma}(\hat{\rho}) = \frac{\hat{\sigma}_{\tilde{\varepsilon}}}{\left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=2+p_i}^{T} \tilde{v}_{i,t-1}^2\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{2.27}$$

และค่าความแปรปรวนของค่า $\tilde{\varepsilon}_{it}$ คือ

$$\hat{\sigma}_{\tilde{\varepsilon}}^2 = \frac{1}{N\tilde{T}} \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=2+p_i}^{T} (\tilde{e}_{it} - \hat{\rho}\tilde{v}_{it-1})^2 \tag{2.28}$$

คำนวณการปรับค่า t-statistic จาก

$$t_{\rho}^{*} = \frac{t_{\rho} - N\tilde{T}\hat{S}_{N}\hat{\sigma}_{\tilde{\varepsilon}}^{-2}\hat{\sigma}(\hat{\rho})\mu_{m\tilde{T}}^{*}}{\sigma_{m\tilde{T}}^{*}} \tag{2.29}$$

โดยที่ $\hat{\sigma}_{\tilde{\varepsilon}}^{-2}$ คือ ค่าความแปรปรวนของค่าความคลาดเคลื่อน $\tilde{\varepsilon}_{it}$

$\hat{\sigma}(\hat{\rho})$ คือ ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของ $(\hat{\rho})$

$\hat{S}_{N}$ คือ ค่าเฉลี่ยของค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน

$\mu_{m\tilde{T}^{*}}$ และ $\sigma_{m\tilde{T}^{*}}$ คือ Adjustment Term ของค่าเฉลี่ย (Mean) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard deviation)

โดยการทดสอบประกอบด้วย 3 ขั้นตอน คือ

ขั้นที่หนึ่ง ถดถอยสมการ Augmented Dickey-Fuller (ADF) ในแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง

$$\Delta y_{it} = \rho_{i} y_{i,t-1} + \sum_{L=1}^{p_i} \theta_{iL} \Delta_{it-L} + \alpha_{mi} d_{mt} + \varepsilon_{it} \qquad m = 1,2,3 \tag{2.30}$$

โดยให้ Lag order ของ p_i มีการเปลี่ยนแปลงไปในแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง และทำการเลือกค่า Lag order ที่ $p_{\max}$ โดยใช้ค่าสถิติ t (t-statistic) ของ $\hat{\theta}_{iL}$ ในการเลือก หลังจากนั้นทำการถดถอยสมการเสริม (Auxiliary) ทั้งสองสมการเพื่อหาค่าส่วนที่เหลือโดย

ทำการประมาณค่าสมการ Δy_{it} กับ $\Delta y_{i,t-L}\left(L = 1,\ldots,p_i\right)$ และ d_{mt} ได้ค่า $\hat{e}_{it}$

และทำการประมาณค่าสมการ $y_{i,t-1}$ กับ $\Delta y_{i,t-L}\left(L = 1,\ldots,p_i\right)$ และ d_{mt} ได้ค่า $\hat{v}_{i,t-1}$

แล้วปรับค่าส่วนที่เหลือ โดยการหารด้วยความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน เพื่อควบคุมความแปรปรวนระหว่างข้อมูลภาคตัดขวางจะได้

$$\tilde{e}_{it} = \frac{\hat{e}_{it}}{\hat{\sigma}_{\varepsilon t}}, \tilde{v}_{i,t-1} = \frac{\hat{v}_{it}}{\hat{\sigma}_{\varepsilon t}} \tag{2.31}$$

โดย $\hat{\sigma}_{\varepsilon t}$ คือ ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน (Standard Error) ที่มาจากการถดถอยสมการ ADF ในแต่ละหน่วยของข้อมูลภาคตัดขวาง

ขั้นที่สอง ทำการคำนวณอัตราส่วนของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานระยะสั้นกับระยะยาวภายใต้ข้อสมมติฐานหลักของยูนิทรูท ซึ่งความแปรปรวนระยะยาวสามารถหาได้จาก

$$\hat{\sigma}_{yi}^{2} = \frac{1}{T-1}\sum_{t=2}^{T}\Delta y_{it}^{2} + 2\sum_{L=1}^{\bar{K}} w_{\bar{K}L}\left[\frac{1}{T-1}\sum_{t=2+L}^{T}\Delta y_{it}\Delta y_{i,t-L}\right] \tag{2.32}$$

โดย $\bar{K}$ คือ Truncations lag และ $w_{\bar{K}L} = 1-\left(L/\bar{K}+1\right)$ ในแต่ละหน่วยภาคตัดขวางค่าอัตราส่วนของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานระยะยาวจะคำนวณจาก $\hat{s}_i = \hat{\sigma}_{yi}/\hat{\sigma}_{\varepsilon i}$ ส่วนค่าเฉลี่ยของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานคำนวณจาก $\hat{S}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\hat{s}_i$

ขั้นที่สาม ทำการคำนวณค่าสถิติที่ใช้ในการทดสอบข้อมูลพาแนล คำนวณโดยการถดถอยแบบ Pooled (The pooled regression)

$$\tilde{e}_{it} = \rho \tilde{v}_{i,t-1} + \tilde{\varepsilon}_{it} \tag{2.33}$$

โดยจำนวนค่าสังเกตมีจำนวนเท่ากับ $N\tilde{T}$ โดยที่ $\tilde{T} = T - \bar{p} - 1$ คือ ค่าเฉลี่ยของค่าสังเกตต่อหน่วยของข้อมูลพาแนล ซึ่ง $\bar{p} = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i}{N}$ คือค่าเฉลี่ยของ Lag order แต่ละหน่วยของ ADF

การพิจารณาว่าข้อมูลมียูนิทรูทหรือไม่ จะดูที่ค่าสถิติ t_ρ^* ถ้าค่าการประมาณมีค่ามากกว่าค่าวิกฤติ (Critical) แสดงว่าปฏิเสธสมมติฐานหลัก นั่นคือข้อมูลพาแนลไม่มียูนิทรูท แต่ถ้าค่าสถิติ t_ρ^* ที่ได้น้อยกว่าค่าวิกฤติแสดงว่ายอมรับสมมติฐานหลัก นั่นคือข้อมูลพาแนลมียูนิทรูท

2.2 วิธีการทดสอบของ Im, Pesaran and Shin (IPS)

เป็นการทดสอบโดยใช้ Augmented Dickey-Fuller (ADF) เช่นเดียวกันกับการทดสอบของ Levin, Lin and Chu (LLC Test)

$$\Delta y_{it} = \rho_i y_{i,t-1} + \sum_{L=1}^{p_i} \theta_{iL} \Delta y_{it-L} + \alpha_{mi} d_{mt} + \varepsilon_{it} \tag{2.34}$$

สมมติฐานการทดสอบคือ

$$H_0 : \rho_i = 0 \quad for \quad , \forall i \qquad \text{(ข้อมูลพาแนลมียูนิทรูท)}$$

$$H_a : \begin{cases} \rho_i < 0 & for \quad i = 1, 2, \ldots, N_1 \\ \rho_i = 0 & for \quad i = N_1 + 1, \ldots N \end{cases} \qquad \text{(ข้อมูลพาแนลไม่มียูนิทรูท)}$$

ค่าสถิติที่ใช้ในการทดสอบคือ

$$\bar{t} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} t_{\rho_i} \tag{2.35}$$

โดย $\bar{t} \sim N(0,1)$ และ $t_{\rho_i} \Rightarrow \left(\int_0^1 W_{iZ}\, dW_{iZ} \right) \Big/ \left[\int_0^1 W_{iZ}^2 \right] = t_{iT}$ เมื่อ $T \to \infty$ จากข้อสมมติกำหนดให้ t_{iT} เป็น i.i.d ดังนั้นสามารถปรับสมการได้

$$\frac{\sqrt{N}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_{iT} - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E\left[t_{iT} \middle| \rho_i = 0 \right] \right)}{\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \operatorname{var}\left[t_{iT} \middle| \rho_i = 0 \right]}} \Rightarrow N(0,1) \tag{2.36}$$

เมื่อ $N \to \infty$ จากทฤษฎีลิมิตสู่เข้าสู่ศูนย์กลาง (Central limit theorem) สามารถเขียนสมการใหม่ได้

$$t_{IPS} = \frac{\sqrt{N}\left(\bar{t} - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E\left[t_{iT} \middle| \rho_i = 0\right]\right)}{\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \operatorname{var}\left[t_{iT} \middle| \rho_i = 0\right]}} \Rightarrow N(0,1) \tag{2.37}$$

การพิจารณาว่าข้อมูลมียูนิทรูทหรือไม่จะดูจากค่าสถิติ t_{IPS} ที่ได้จากการประมาณ ถ้ามีค่ามากกว่าค่าวิกฤติ (Critical) แสดงว่าปฏิเสธสมมติฐานหลัก นั่นคือข้อมูลพาแนลไม่มียูนิทรูท แต่ถ้าค่าสถิติ t_{IPS} ที่ได้น้อยกว่าค่าวิกฤติแสดงว่ายอมรับสมมติฐานหลัก นั่นคือข้อมูลพาแนลมียูนิทรูท

2.3 วิธีการทดสอบของ Breitung

การทดสอบด้วยวิธีนี้ เป็นการทดสอบค่าสถิติซึ่งไม่ได้พิจารณาในเรื่องของการปรับค่าความเอนเอียง (Bias adjustment) โดยมีขั้นตอนการทดสอบดังนี้

ขั้นที่หนึ่ง วิธีการเหมือนกับวิธีของ Levin, Lin and Chu (LLC Test) ต่างกันตรงที่ค่า $\Delta y_{i,t-L}$ ที่ใช้ในการหาค่า $\hat{e}_{it}$ และ $\hat{v}_{i,t-1}$

ขั้นที่สอง ค่าส่วนที่เหลือ (Residual) $\hat{e}_{it}$ ถูกปรับเปลี่ยนโดยการใช้ Forward orthogonalization transformation จะได้สมการ

$$e_{it}^{*} = \sqrt{\frac{T-t}{(T-t+1)}}\left(\tilde{e}_{it} - \frac{\tilde{e}_{i,t+1} + \ldots \tilde{e}_{i,T}}{T-t}\right) \tag{2.38}$$

และ

$$v_{i,t-1}^{*} = \tilde{v}_{i,t-1} - \tilde{v}_{i,1} - \frac{t-1}{T}\tilde{v}_{iT} \quad \text{มีค่าคงที่และแนวโน้ม}$$

$$v_{i,t-1}^{*} = \tilde{v}_{i,t-1} - \tilde{v}_{i,1} \quad \text{มีค่าคงที่}$$

$$v_{i,t-1}^{*} = \tilde{v}_{i,t-1} \quad \text{ไม่มีค่าคงที่และแนวโน้ม}$$

ขั้นตอนสุดท้าย ประมาณค่า Pooled regression

$$e_{it}^{*} = \rho v_{i,t-1}^{*} + \varepsilon_{it}^{*} \tag{2.39}$$

ดังนั้น ค่าสถิติที่ใช้ในการประมาณคือ

$$B_{nT} = \left[\left(\frac{\hat{\sigma}^2}{nT^2}\right)\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=2}^{T-1}(v_{it-1}^{*})^2\right]^{\frac{-1}{2}}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=2}^{T-1}\left(e_{it}^{*}\right)\left(v_{it-1}^{*}\right)\right)\right] \tag{2.40}$$

การทดสอบได้กำหนดสมมติฐานคือ

$H_0 : \rho = 0$ (ข้อมูลพาแนลมียูนิทรูท)

$H_a : \rho < 0$ (ข้อมูลพาแนลไม่มียูนิทรูท)

การพิจารณาว่าข้อมูลมียูนิทรูทหรือไม่ จะดูที่ค่าสถิติ B_{nT} ที่ได้จากการประมาณ ถ้ามีค่ามากกว่าค่าวิกฤติ (Critical) แสดงว่าปฏิเสธสมมติฐานหลัก นั่นคือข้อมูลพาแนลไม่มียูนิทรูท แต่ถ้าค่าสถิติ B_{nT} ที่ได้น้อยกว่าค่าวิกฤติแสดงว่ายอมรับสมมติฐานหลัก นั่นคือข้อมูลพาแนลมียูนิทรูท

2.4 วิธีการทดสอบของ Fisher-type

จากสมการ Augmented Dickey-Fuller (ADF)

$$\Delta y_{it} = \rho y_{i,t-1} + \sum_{L=1}^{p_i} \theta_{iL} \Delta y_{it-L} + \alpha_{mi} d_{mt} + \varepsilon_{it} \qquad m = 1,2,3 \tag{2.41}$$

สมมติฐานของการทดสอบคือ

$H_0:$ ข้อมูลพาแนลมียูนิทรูท

$H_a:$ ข้อมูลพาแนลไม่มียูนิทรูท

ทำการทดสอบโดยการรวมค่า p-value ของค่าสถิติที่ใช้ทดสอบความนิ่งของข้อมูลแต่ละหน่วยภาคตัดขวางที่ได้จากสมการ ADF มาใช้ในการทดสอบพาแนลยูนิทรูท

$$P = -2\sum_{i=1}^{N} \ln p_i \rightarrow \chi^2_{2N} \tag{2.42}$$

โดย p คือ ค่าที่ใช้ทดสอบความนิ่งของข้อมูลแต่ละภาคตัดขวาง และค่า $-2\ln p_i$ มีการแจกแจงแบบ χ^2 มีระดับความเป็นอิสระเท่ากับ 2 ดังนั้น P จึงมีการแจกแจงแบบ χ^2 และมีระดับความเป็นอิสระเท่ากับ $2N$

จากการที่ Choi เสนอวิธีการทดสอบคือ The inverse normal test (Z) และ The logit test (L) ซึ่งก็คือ

$$Z = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} \Phi^{-1}(p_i) \tag{2.43}$$

โดย $0 \le p_i \le 1$ และ $\Phi^{-1}(p_i) \sim N(0,1)$ จึงส่งผลให้ $Z \sim N(0,1)$ และ

$$L = \sum_{i=1}^{N} \ln\left(\frac{p_i}{1-p_i}\right) \tag{2.44}$$

ซึ่ง $\ln\left(\frac{p_i}{1-p_i}\right)$ มีการแจกแจงแบบโลจิสติคที่ค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และความแปรปรวนเท่ากับ $\pi^2/3$

ถ้าค่าการทดสอบทั้งสองของ Fisher's (P) Test และ Z - Statistic ที่ได้จากการประมาณถ้ามีค่ามากกว่าค่าวิกฤติ (Critical) แสดงว่าปฏิเสธสมมติฐานหลัก นั่นคือข้อมูลพาแนลไม่มียูนิทรูท แต่ถ้าทั้ง Fisher's (P) Test และ Z – Statistic ที่ได้น้อยกว่าค่าวิกฤติแสดงว่ายอมรับสมมติฐานหลัก นั่นคือข้อมูลพาแนลมียูนิทรูท

2.5 วิธีการทดสอบของ Hadri

เป็นวิธีการทดสอบโดยการประมาณค่าส่วนที่เหลือ (Residual) ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Ordinary least square: OLS) เพื่อประมาณค่าตัว y_{it} ซึ่งคงที่ (Constant) หรือมีทั้งค่าคงที่และแนวโน้ม (Trend) โดยทำการพิจารณาจาก 2 สมการคือ

$$y_{it} = r_{it} + \varepsilon_{it} \qquad i = 1,\ldots,N \ ; \ t = 1,\ldots,T \tag{2.45}$$

และ

$$y_{it} = r_{it} + \beta_i t + \varepsilon_{it} \tag{2.46}$$

โดยที่ $r_{it} = r_{i,t-1} + u_{it}$ คือ Random walk และ $\varepsilon_{it} \sim INN\left(0, \sigma_\varepsilon^2\right)$, $u_{it} \sim INN\left(0, \sigma_\mu^2\right)$ มีคุณสมบัติ i.i.d. ระหว่างข้อมูลภาคตัดขวางที่ i และช่วงเวลาที่ t แทนค่าเข้าไปในสมการ (2.41) เขียนสมการใหม่คือ

$$y_{it} = r_{io} + \beta_i t + \sum_{s=1}^{t} u_{is} + \varepsilon_{it} \tag{2.47}$$

$$y_{it} = r_{io} + \beta_i t + v_{it} \tag{2.48}$$

โดยที่ $v_{it} = \sum_{s=1}^{t} u_{is} + \varepsilon_{it}$ จะได้ค่าสถิติ LM ที่ใช้ในการประมาณ ซึ่งมีค่าดังนี้

$$LM_1 = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^{T} S_{it}^2\right) \Big/ \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \tag{2.49}$$

โดยที่ $S_{it} = \sum_{s=1}^{t} \hat{\varepsilon}_{is}$ คือผลรวมของส่วนที่เหลือ ด้วยวิธีการ OLS

และ
$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{NT}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} \hat{\varepsilon}_{it}^2$$

ปัญหาค่าความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ (Heteroskedasticity) ระหว่างข้อมูลภาคตัดขวางที่ i , $\hat{\sigma}_{\varepsilon i}^2$ ใช้ค่าสถิติที่ใช้ในการทดสอบคือ

$$LM_2 = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^{T} S_{it}^2 \big/ \hat{\sigma}_{\varepsilon i}^2\right)\right) \tag{2.50}$$

ดังนั้นจึงใช้ LM_1 ในกรณีเป็น Homoskedasticity และใช้ LM_2 ในกรณีที่เป็น Heteroskedasticity

สมมติฐานที่ใช้ในการทดสอบคือ

H_0 : ข้อมูลพาแนลไม่มียูนิทรูท

H_a : ข้อมูลพาแนลมียูนิทรูท

ค่าสถิติที่ใช้ในการทดสอบสมมติฐานคือ ค่าสถิติ Z ดังนี้

$$Z = \sqrt{N}\left(LM - \xi_1\right)/\zeta \rightarrow N(0,1) \tag{2.51}$$

โดยที่ $\xi = 1/6$ และ $\zeta = 1/45$ ถ้าแบบจำลองประกอบด้วยค่าคงที่เพียงอย่างเดียว

$\xi = 1/15$ และ $\zeta = 11/6300$ สำหรับกรณีอื่น

ถ้าค่าสถิติ Z ที่ได้จากการประมาณ ถ้ามีค่ามากกว่าค่าวิกฤติ (Critical) แสดงว่าปฏิเสธสมมติฐานหลัก นั่นคือข้อมูลพาแนลมียูนิทรูท แต่ถ้าค่าสถิติ Z ที่ได้น้อยกว่าค่าวิกฤติแสดงว่ายอมรับสมมติฐานหลัก นั่นคือข้อมูลพาแนลไม่มียูนิทรูท

3. การประมาณค่าความสัมพันธ์ของแบบจำลองพาแนล

คือเป็นการประมาณค่าข้อมูลพาแนล โดยแยกความแตกต่างระหว่างแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง (Individual) และช่วงเวลา (Time) ซึ่งมีข้อสมมติว่าค่าคงที่และค่าสัมประสิทธิ์แตกต่างกัน แบ่งออกเป็นการประมาณค่าแบบจำลอง Fixed effect, แบบจำลอง Random effect และ Pooled estimator

3.1 รูปแบบ Fixed effects

คือแบบจำลองการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายซึ่งค่าคงที่ (Intercept term) มีการผันแปรตามแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง i หรือเรียกแบบจำลอง Fixed effect ว่าคือแบบจำลองการถดถอย Lest-Squares Dummy Variable (LSDV) โดยเป็นไปตามสมการ (2.52)

$$y_{it} = \alpha_i + x'_{it}\beta + \varepsilon_{it} \qquad \varepsilon_{it} \sim IID\left(0, \sigma_\varepsilon^2\right) \tag{2.52}$$

ข้อสมมติคือ x_{it} และ ε_{it} ทุกค่าเป็นอิสระต่อกัน สามารถเขียนรูปแบบการถดถอยที่รวมเอาตัวแปรหุ่น (Dummy variable) สำหรับแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง i ในแบบจำลองได้ดังนี้

$$y_{it} = \sum_{j=1}^{N} \alpha_i d_{ij} + x'_{it}\beta + \varepsilon_{it} \tag{2.53}$$

โดยที่ $d_{ij} = 1$ ถ้า $i = j$ และ $d_{ij} = 0$ ถ้า $i \neq j$

ดังนั้น ทำการประมาณค่าโดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Ordinary least squares: OLS) ของเซตของตัวแปรจำนวน N ในแบบจำลอง, ค่าพารามิเตอร์ $\alpha_1,...,\alpha_N$ และค่า β ได้โดยทำการประมาณสมการ (2.53) ซึ่งค่า β ที่คำนวณโดยใช้ (Least Squares Dummy Variable: LSDV) นี้มีการเบี่ยงเบน จึงต้องกำจัดผลกระทบแต่ละหน่วยของ α_{it} โดยการเปลี่ยนแปลงข้อมูล ดังนั้นสามารถเขียนสมการได้เป็น

$$\bar{y}_i = \alpha_i + \bar{x}'\beta + \bar{\varepsilon}_i \tag{2.54}$$

โดยที่ $\bar{y}_i = T^{-1}\sum_t y_{it}$

$$y_{it} - \bar{y} = \left(x_{it} - \bar{x}_i\right)'\beta + \left(\varepsilon_{it} - \bar{\varepsilon}_i\right) \tag{2.55}$$

สมการ (2.55) คือแบบจำลองการถดถอยที่เบี่ยงเบนออกจากค่าเฉลี่ยของแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง โดยไม่รวมผลกระทบแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง α_{it} การสร้างค่าสังเกตในรูปการ

เบี่ยงเบนจากค่าเฉลี่ยของแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง เรียกว่า “Within transformation” และตัวประมาณ OLS สำหรับค่า β ที่คำนวณได้จากแบบจำลองนี้เรียกว่า “Within estimator” หรือ “Fixed effect estimator” ซึ่งให้ผลที่ถูกต้องแม่นยำเช่นเดียวกับตัวประมาณแบบ LSDV (Verbeek, 2004: 346)

กำหนดโดย

$$\hat{\beta}_{FE} = \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} (x_{it} - \bar{x}_i)(x_{it} - \bar{x}_i)' \right)^{-1} \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} (x_{it} - \bar{x}_i)(y_{it} - \bar{y}_i)' \qquad (2.56)$$

จากข้อสมมติที่ให้ x_{it} เป็นอิสระจาก ε_{it} ทุกค่า ตัวประมาณ Fixed effect สามารถแสดงในรูปที่ค่า β ไม่มีการเบี่ยงเบน และถ้ากำหนดให้ ε_{it} มีการกระจายแบบปกติ ค่า $\hat{\beta}_{FE}$ จะมีการกระจายตัวแบบปกติ นั่นคือ

$$E\{(x_{it} - \bar{x}_{it})\varepsilon_{it}\} = 0 \qquad (2.57)$$

สมการ (2.57) แสดงข้อสมมติ x_{it} ไม่สัมพันธ์กับ ε_{it} และ $\bar{x}_i$ จะไม่สัมพันธ์กับค่าความคลาดเคลื่อน (Error term) ดังนี้

$$E\{x_{it}\varepsilon_{it}\} = 0 \quad \text{สำหรับทุก ๆ ค่าของ } s,t \qquad (2.58)$$

เรียก x_{it} ว่า “Strictly exogenous” ที่กำหนดให้ไม่มีความสัมพันธ์กับค่าปัจจุบัน, อดีต และอนาคตของค่าความคลาดเคลื่อน

ตัวแปรอธิบาย N เป็นอิสระต่อค่าความคลาดเคลื่อนทุกตัว ดังนั้น ตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงคือ

$$\hat{\alpha}_i = \bar{y}_i - \bar{x}_i\hat{\beta}_{FE} \qquad i = 1,.., N \qquad (2.59)$$

α_{it} ของ Fixed effects ไม่มีการเปลี่ยนแปลงภายใต้ข้อสมมติตามสมการ (2.57) เพราะที่ค่า T คงที่ค่าเฉลี่ยของแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง $\bar{y}_i$ และ x_{it} นั้นจะไม่เบนเข้าหาค่าใดเลย

เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม (Covariance matrix) สำหรับตัวประมาณค่า Fixed effects $\left(\hat{\beta}_{FE}\right)$ ที่มีข้อสมมติให้ ε_{it} นั้นมีลักษณะ i.i.d. ระหว่างแต่ละหน่วยภาคตัดขวางและช่วงเวลา เมื่อค่าความแปรปรวน $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ กำหนดโดย

$$V\{\hat{\beta}_{FE}\} = \sigma_\varepsilon^2 \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} (x_{it} - \bar{x}_i)(x_{it} - \bar{x}_i)' \right)^{-1} \qquad (2.60)$$

ภายใต้การถดถอยตามสมการ (2.55) ถ้าค่า T มีจำนวนมากจะใช้ OLS ในการประมาณเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม จะได้ผลการประมาณที่ต่ำกว่าตัวแปรที่แท้จริง และค่าความแปรปรวนของ $\varepsilon_{it} - \bar{\varepsilon}_i$ คือ $(T-1)/T\sigma_\varepsilon^2$ จะมีค่าค่อนข้างมากกว่า σ_ε^2 โดยตัวประมาณค่าที่ไม่มีเปลี่ยนแปลง

(Consistent) ของ σ_ε^2 สามารถหาได้จากค่าผลรวมของผลต่างกำลังสอง (Residual sum of squares: RSS) หารด้วย $N(T-1)$ นั้นคือ

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{N(T-1)}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left(y_{it}-\hat{\alpha}_{it}-x_{it}'\hat{\beta}_{FE}\right)^2$$

$$= \frac{1}{N(T-1)}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left(y_{it}-\bar{y}_i-(x_{it}-\bar{x}_{it})'\hat{\beta}_{FE}\right)^2 \quad (2.61)$$

ในการที่จะทำให้ค่าระดับความเป็นอิสระ (Degree of freedom) มีความถูกต้องมากขึ้น จะทำโดยการนำค่า K ไปลบที่ตัวหารในสมการ (2.61) เพราะค่าระดับความเป็นอิสระที่ถูกต้องนั้นจะทำให้ค่าพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าสอดคล้องกับ Individual intercept term

ดังนั้น แบบจำลอง Fixed effect ได้รวบรวมข้อแตกต่างภายในแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง คือ อธิบายขนาดความแตกต่างของ y_{it} และ $\bar{y}_i$ แต่ไม่อธิบายว่าทำไม $\bar{y}_i$ ถึงแตกต่างจาก $\bar{y}_j$ (Verbeek, 2004: 345-347)

3.2 รูปแบบ Random Effects

ในการวิเคราะห์การถดถอยโดยทั่วไปนั้นมีข้อสมมติว่าทุกตัวแปรมีอิทธิพลต่อตัวแปรตาม ซึ่งสามารถแสดงในรูปค่าความคลาดเคลื่อนเชิงสุ่ม (Random error term) โดยให้ α_i เป็นตัวแปรสุ่ม (Random Factors) ที่เป็นอิสระและมีการแจกแจงในแต่ละหน่วย ดังนั้นสามารถเขียนแบบจำลอง Random effects ดังนี้

$$y_{it} = \mu + \beta x_{it}' + \alpha_i + \varepsilon_{it}, \qquad \varepsilon_{it} \sim IID(0,\sigma_\varepsilon^2)\,;\ \alpha_i \sim IID\left(0,\sigma_\alpha^2\right) \quad (2.62)$$

โดยที่ $\alpha_i + \varepsilon_{it}$ คือ ค่าความคลาดเคลื่อน (Error Term) ประกอบด้วย ส่วนประกอบเฉพาะแต่ละหน่วยภาคตัดขวางที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงตามเวลาและส่วนที่เหลือ ซึ่งสมมติให้ไม่มีความสัมพันธ์กันตลอดช่วงเวลา

จากข้อสมมติที่ α_i และ ε_i สัมพันธ์กันอย่างอิสระแสดงว่า $\alpha_i + \varepsilon_{it}$ เป็นรูปแบบของอัตสหสัมพันธ์ (Autocorrelation) ดังนั้นการคำนวณค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานสำหรับตัวประมาณ OLS และตัวประมาณค่าด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดทั่วไป (Generalized Least square: GLS) ซึ่งเป็นตัวประมาณค่าที่มีประสิทธิภาพ สามารถหาได้จาก Error covariance matrix

การหาตัวประมาณ GLS สำหรับทุก ๆความคลาดเคลื่อนของแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง i คือ $\alpha_i \iota_T + \varepsilon_i$ โดยที่ $\iota_T = (1,1,\ldots,1)'$ มีขนาด (Dimension) เท่ากับ T และ $\varepsilon_i = \left(\varepsilon_{i1},\ldots,\varepsilon_{iT}\right)'$

เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของเวคเตอร์นี้คือ

$$V\{\alpha_i \iota_T + \varepsilon_i\} = \Omega = \sigma_\alpha^2 \iota_T \iota_T' + \sigma_\alpha^2 I_T \quad (2.63)$$

โดยที่ I_t คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์ที่มีขนาดเท่ากับ T

สามารถหาค่าตัวประมาณ GLS สำหรับค่าพารามิเตอร์ในสมการ (2.58) โดยการแปลงข้อมูลแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง คือคูณเวคเตอร์ $y_i = (y_{i1},..., y_{iT})'$ ด้วย Ω^{-1}

กำหนดโดย

$$\Omega^{-1} = \sigma_\varepsilon^{-2}\left[I_T - \frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_\varepsilon^2 + T\sigma_\alpha^2}\iota_T\iota_T' \right] \tag{2.64}$$

หรือเขียนในรูป

$$\Omega^{-1} = \sigma_\varepsilon^{-2}\left[\left(I_T - \frac{1}{T}\iota_T\iota_T' \right) + \psi\frac{1}{T}\iota_T\iota_T' \right] \tag{2.65}$$

โดยที่ $$\psi = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2 + T\sigma_\alpha^2}$$

ตัวประมาณ GLS สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\hat{\beta}_{GLS} = \left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(x_{it}-\bar{x}_i)' + \psi T\sum_{i=1}^{N}(\bar{x}_i-\bar{x})(\bar{x}_i-\bar{x})'\right]^{-1}$$
$$\times\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(x_{it}-\bar{x}_i)(y_{it}-\bar{y}_i) + \psi T\sum_{i=1}^{N}(\bar{x}_i-\bar{x})(\bar{y}_i-\bar{y})\right] \tag{2.66}$$

โดยที่ $\bar{x}$ คือค่าเฉลี่ยของ x_{it} ทั้งหมดที่ $\bar{x} = (1/(NT))\sum_{i,t} x_{it}$

ที่ $\psi = 0$ ตัวประมาณค่า Fixed effects จะเพิ่มขึ้น เพราะ $\psi \to 0$ ถ้า $T \to \infty$ นั้นเป็นไปตามที่ว่าตัวประมาณค่า Fixed effect และ Random effects จะมีค่าเท่ากันเมื่อค่า T มีจำนวนมาก แต่ถ้า $\psi = 1$ ตัวประมาณค่า GLS จะเท่ากับตัวประมาณ OLS (และ Ω เป็นเมทริกซ์ Diagonal)

จากสูตรการคำนวณตัวประมาณ GLS โดยทั่วไป คือ

$$\hat{\beta}_{GLS} = \Delta\hat{\beta}_B + (I_k - \Delta)\hat{\beta}_{FE} \tag{2.67}$$

โดยที่

$$\hat{\beta}_B = \left(\sum_{i=1}^{N}(\bar{x}_i-\bar{x})(\bar{x}_i-\bar{x})'\right)\sum_{i=1}^{N}(\bar{x}_i-\bar{x})(\bar{y}_i-\bar{y}) \tag{2.68}$$

ดังนั้นจะเรียกค่า β ของตัวประมาณ OLS ในแบบจำลองสำหรับค่าเฉลี่ยของแต่ละหน่วยภาคตัดขวางว่า "Between estimator"

$$\bar{y}_i = \mu + \bar{x}_i'\beta + \alpha_i + \bar{\varepsilon}_i \qquad i = 1,..., N \tag{2.69}$$

ซึ่งเมทริกซ์ Δ คือเมทริกซ์ที่มีการถ่วงน้ำหนัก ที่ตัวประมาณ GLS เป็นเมทริกซ์ค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักของ Between estimator และ Within estimator โดยที่ตัวถ่วงน้ำหนักขึ้นอยู่กับค่าความสัมพันธ์ของความแปรปรวนระหว่างตัวประมาณค่าทั้งสอง

สำหรับตัวประมาณ GLS นั้นเป็นการรวมกันของตัวประมาณ Between estimator และ Within estimator ซึ่งโดยทั่วไปตัวประมาณ GLS จะมีประสิทธิภาพมากกว่าตัวประมาณ OLS ถ้าตัว

แปรอธิบายเป็นอิสระต่อ ε_{it} และ α_i ทุกตัว และตัวประมาณ GLS จะไม่มีการเอนเอียง (Unbiased) และไม่เปลี่ยนแปลง (Consistent) ที่ค่า N หรือ T (หรือทั้ง N และ T) มีค่าเข้าสู่อนันต์ (Infinity) ภายใต้ $E\{\bar{x}_i\varepsilon_{it}\}=0$ และ

$$E\{\bar{x}_i\alpha_i\}=0 \tag{2.70}$$

โดยจะใช้เงื่อนไขดังกล่าวเพื่อทำให้ Between estimator ไม่มีการเปลี่ยนแปลง (Consistent)

วิธีการคำนวณหาตัวประมาณ GLS จะมีการเปลี่ยนแปลงแบบจำลองดังนี้

$$(y_{it}-\vartheta\bar{y}_i)=\mu(1-\vartheta)+(x_{it}-\bar{x}_i)'\beta+u_{it} \tag{2.71}$$

โดยที่ $\vartheta=1-\psi^{1/2}$ ซึ่งค่าความคลาดเคลื่อนในรูปแบบการเปลี่ยนแปลงนี้เป็น i.i.d ที่ค่า $\psi=0$ นั้นจะสอดคล้องกับ Within estimator $(\vartheta=1)$ และสัดส่วนที่คงที่ (ϑ) ของค่าเฉลี่ยแต่ละหน่วยภาคตัดขวางคือการลบข้อมูลที่ได้จากแบบจำลองที่มีการเปลี่ยนแปลงข้อมูล $(0\le\vartheta\le1)$

การใช้ตัวประมาณ GLS ที่มีความเหมาะสมจะต้องคำนวณหาค่าความแปรปรวนก่อน ซึ่งตัวประมาณ σ_ε^2 สามารถหาได้จากสมการ (2.61) ดังนั้นค่าความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน $\sigma_\alpha^2+(1/T)\sigma_\varepsilon^2$ สามารถประมาณค่าได้จาก

$$\hat{\sigma}_B^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\bar{y}_i-\hat{\mu}_B-\bar{x}_i'\hat{\beta}_B\right)^2 \tag{2.72}$$

โดยที่ $\hat{\mu}_B$ คือ Between estimatior ของ μ

จากสมการ (2.72) ตัวแปรที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงของ σ_α^2 จะเป็นไปตาม

$$\hat{\sigma}_\alpha^2=\hat{\sigma}_B^2-\frac{1}{T}\hat{\sigma}_\varepsilon^2 \tag{2.73}$$

ซึ่งสามารถปรับค่าตัวประมาณนี้โดยการปรับปรุงค่าระดับความเป็นอิสระ (Degree of freedom) ให้ถูกต้อง โดยนำ $K+1$ ลบกับตัวหารในสมการ (2.72) ผลของตัวประมาณ EGLS จะเป็นตัวประมาณ Random effect ของ β (และ μ) คือแทนค่า β เท่ากับ $\hat{\beta}_{RE}$ หรือที่รู้จักในชื่อของตัวประมาณ Balestra-Nerlove (Verbeek, 2004: 347-350)

3.3 รูปแบบ Pooled Estimator

เป็นการวิเคราะห์ที่สมมติให้ค่าคงที่และสัมประสิทธิ์ของตัวแปรในสมการมีค่าเท่ากันทุกหน่วยภาคตัดขวาง (Individual) และช่วงเวลา (Time) ที่พิจารณา ซึ่งไม่ได้ประมาณค่าความแตกต่างระหว่างแต่ละหน่วยภาคตัดขวางและช่วงเวลาที่พิจารณา โดยมีแบบจำลองพื้นฐานตามสมการ

แบบจำลองของ Pooled OLS คือ

$$y_{it}=\alpha_i+x_{it}'\beta_{it}+\varepsilon_{it} \tag{2.74}$$

โดยที่ i คือ ข้อมูลภาคตัดขวาง $i=1,\ldots,N$

t คือ ข้อมูลอนุกรมเวลา $t=1,\ldots,T$

y_{it} คือ เวกเตอร์ 1×1 ของตัวแปรตาม

α_i คือ จำนวนจริง (ค่าคงที่)

x_{it} คือ เวกเตอร์ $k\times1$ ของตัวแปรอธิบาย

β_{it} คือ เวกเตอร์ $k\times1$ ของค่าสัมประสิทธิ์

ε_{it} คือ ค่าความคลาดเคลื่อน

สมมติฐานที่แตกต่างระหว่างแบบจำลอง Fixed effects, แบบจำลอง Random effects และ Pooled OLS แสดงได้ดังตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1 แสดงความแตกต่างระหว่าง แบบจำลอง Fixed effects, แบบจำลอง Random effects และ Pooled OLS

วิธีการ	**สมมติฐานเกี่ยวกับค่า** β
Fixed Effects	$\beta_{it}=\beta_i$ โดยที่ $E(\beta_i, X_{it})\neq 0$
Random Effects	$\beta_{it}=\beta+\varepsilon_i$ โดยที่ $E(\varepsilon_i, X_{it})=0$
Pooled OLS	$\beta_{it}=\beta$

4. การทดสอบสมการพาแนล (Panel equation testing)

การทดสอบสมการพาแนล เป็นการทดสอบว่าควรทำการประมาณแบบจำลองในรูปแบบใด ระหว่าง Pooled estimator, Fixed effects หรือ Random effects โดยทำการทดสอบ 3 วิธี คือ Lagrange multiplier test (LM-Test), Hausman test และ Redundant Fixed effects test ดังต่อไปนี้ (Baltagi, 2008)

4.1 วิธีการทดสอบแบบ Lagrange multiplier (LM-test)

Baltagi et al. เสนอการทดสอบเงื่อนไขผลกระทบแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง (Individual effects condition) เกี่ยวกับผลกระทบที่เกิดเฉพาะช่วงเวลา (Time-specific effects) ที่ $\sigma_\lambda^2>0$

ที่มีสมมติฐานหลักในการทดสอบคือ

$$H_0^d:\sigma_\mu^2=0$$

ค่าสถิติการทดสอบด้วยวิธี Lagrange multiplier คือ

$$LM_\mu=\frac{\sqrt{2}\tilde{\sigma}_2^2\tilde{\sigma}_2^2}{\sqrt{T(T-1)\left[\tilde{\sigma}_v^4+(N-1)\tilde{\sigma}_v^4\right]}}\tilde{D}_\mu \tag{2.75}$$

และ

$$\tilde{D}_\mu=\frac{T}{2}\left\{\frac{1}{\tilde{\sigma}_2^2}\left[\frac{\tilde{u}'(\bar{J}_N\otimes\bar{J}_T)\tilde{u}}{\tilde{\sigma}_2^2}-1\right]+\frac{(N-1)}{\tilde{\sigma}_v^2}\left[\frac{\tilde{u}'(E_N\otimes\bar{J}_T)\tilde{u}}{(N-1)\tilde{\sigma}_v^2}-1\right]\right\} \tag{2.76}$$

โดยที่ $\tilde{\sigma}_2^2 = \tilde{u}'\left(\bar{J}_N \otimes I_T\right)\tilde{u}/T$ และ $\tilde{\sigma}_v^2 = \tilde{u}'\left(E_N \otimes I_T\right)\tilde{u}/T\left(N-1\right)$ ซึ่ง LM_μ มีการกระจายตัวแบบ Asymptotically $N\left(0,1\right)$ และการประมาณค่าตัวรบกวน $\tilde{u}$ หาได้จากส่วนที่เหลือจากการประมาณ GLS ในทิศทางเดียวโดยใช้ Maximum likelihood ประมาณ $\tilde{\sigma}_v^2$ และ $\tilde{\sigma}_2^2$

ในการทดสอบด้วยวิธี Lagrange multiplier ภายใต้สมมติฐาน $H_0^e : \sigma_\lambda^2 = 0$ ที่ $\sigma_\mu^2 > 0$ คือ

$$LM_\lambda = \frac{\sqrt{2}\tilde{\sigma}_1^2\tilde{\sigma}_2^2}{\sqrt{N(N-1)\left[\tilde{\sigma}_v^4 + (T-1)\tilde{\sigma}_1^4\right]}}\tilde{D}_\lambda \tag{2.77}$$

และ

$$\tilde{D}_\lambda = \frac{N}{2}\left\{\frac{1}{\tilde{\sigma}_2^2}\left[\frac{\tilde{u}'(\bar{J}_N \otimes \bar{J}_T)\tilde{u}}{\tilde{\sigma}_1^2} - 1\right] + \frac{(T-1)}{\tilde{\sigma}_v^2}\left[\frac{\tilde{u}'(\bar{J}_N \otimes E_T)\tilde{u}}{(T-1)\tilde{\sigma}_v^2} - 1\right]\right\} \tag{2.78}$$

โดยที่ $\tilde{\sigma}_1^2 = \tilde{u}'\left(I_N \otimes \bar{J}_T\right)\tilde{u}/N$ และ $\tilde{\sigma}_v^2 = \tilde{u}'\left(I_N \otimes E_T\right)\tilde{u}/N\left(T-1\right)$ ซึ่ง LM_λ มีการกระจายตัวแบบ Asymptotically distributed ภายใต้สมมติฐานหลัก H_0^e (Baltagi 2005: 62-63)

ถ้าผลการทดสอบยอมรับสมมติฐานหลัก แสดงว่าควรทำการประมาณค่าแบบจำลองโดยใช้ Pooled Estimator แต่ถ้าปฏิเสธสมมติฐานหลักควรทำการประมาณโดยใช้ Random Effects

4.2 วิธีทดสอบแบบ Hausman

มีสมมติฐานที่สำคัญคือ ส่วนประกอบของค่าความคลาดเคลื่อนในแบบจำลองการถดถอยไม่มีความสัมพันธ์กับ X_{it} คือ $E\left(u_{it}/X_{it}\right) = 0$ ที่มีการกำหนดให้พจน์รบกวน $\left(\mu_i\right)$ มีผลต่อแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง (Individual) ซึ่งไม่สามารถหาค่าได้และมีความสัมพันธ์กับ X_{it}

ในกรณีที่ $E\left(u_{it}/X_{it}\right) \neq 0$ และตัวประมาณ GLS $\left(\hat{\beta}_{\mathrm{GLS}}\right)$ จะมีความเอนเอียง (Biased) และมีการเปลี่ยนแปลง (Inconsistent) สามารถกำจัดค่า μ_i ได้โดยใช้ Within estimator $\left(\tilde{\beta}_{\mathrm{Within}}\right)$ ที่ไม่เอนเอียง (Unbiased) และไม่มีการเปลี่ยนแปลง (Consistent) (Baltagi, 2008: 72-73)

Hausman ทำการเปรียบเทียบ $\hat{\beta}_{\mathrm{GLS}}$ และ $\tilde{\beta}_{\mathrm{Within}}$ ได้ผลว่าตัวประมาณทั้งสองมีความแตกต่างกันในข้อจำกัดของความน่าจะเป็นคือ $\tilde{\beta}_{\mathrm{Within}}$ จะไม่มีการเปลี่ยนแปลง (Consistent) ทั้งในกรณีที่ยอมรับสมมติฐานหลัก $H_0 : E\left(u_{it}/X_{it}\right) = 0$ และปฏิเสธสมมติฐานหลัก แต่ $\hat{\beta}_{\mathrm{GLS}}$ ในกรณีที่ปฏิเสธสมมติฐานหลักตัวประมาณจะมีการเปลี่ยนแปลง (Unconsistent)

ดังนั้นการทดสอบโดยทั่วไปจะเป็นไปตาม $\hat{q}_1 = \hat{\beta}_{\mathrm{GLS}} - \tilde{\beta}_{\mathrm{Within}}$ ซึ่ง $\operatorname{plim}\hat{q}_1 = 0$ ถ้า $\operatorname{cov}\left(\hat{q}_1, \hat{\beta}_{\mathrm{GLS}}\right) = 0$

โดยที่ $\hat{\beta}_{\mathrm{GLS}} - \beta = \left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1}X'\Omega^{-1}u$

$\tilde{\beta}_{\mathrm{Within}} - \beta = \left(X'QX\right)^{-1}X'Qu$

จะได้ค่า $E\left(\hat{q}_1\right) = 0$ และ

$$\operatorname{cov}\left(\hat{\beta}_{GLS},\hat{q}_1\right)=\operatorname{var}\left(\hat{\beta}_{GLS}\right)-\operatorname{cov}\left(\hat{\beta}_{GLS},\tilde{\beta}_{Within}\right)$$
$$=\left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1}-\left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1}X'\Omega^{-1}E(uu')QX\left(X'QX\right)^{-1} \quad (2.79)$$
$$\left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1}-\left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1}=0$$

จาก $\tilde{\beta}_{\text{Within}}=\hat{\beta}_{\text{GLS}}-\hat{q}_1$ และ $\operatorname{var}\left(\tilde{\beta}_{\text{Within}}\right)=\operatorname{var}\left(\hat{\beta}_{\text{GLS}}\right)+\operatorname{var}\left(\hat{q}_1\right)$ ที่ค่า $\operatorname{cov}\left(\hat{\beta}_{\text{GLS}},\hat{q}_1\right)=0$ จะได้

$$\operatorname{var}(\hat{q}_1)=\operatorname{var}\left(\tilde{\beta}_{Within}\right)-\operatorname{var}\left(\hat{\beta}_{GLS}\right)=\sigma_v^2\left(X'QX\right)^{-1}-\left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1} \quad (2.80)$$

ดังนั้นค่าสถิติการทดสอบ Hausman คือ

$$m_1=\hat{q}_1'\left[\operatorname{var}(\hat{q}_1)\right]^{-1}\hat{q}_1 \quad (2.81)$$

ถ้าผลการทดสอบยอมรับสมมติฐานหลัก แสดงว่าควรทำการประมาณค่าแบบจำลองโดยใช้ Random effects แต่ถ้าปฏิเสธสมมติฐานหลักควรทำการประมาณโดยใช้ Fixed effects

4.3 วิธีการทดสอบแบบ Redundant fixed effects

Moulton and Randolph ได้เสนอว่า Anova F-test ที่ใช้ทดสอบ Fixed Effects เหมาะสำหรับทดสอบแบบจำลอง One-way Error Component โดยมีสมมติฐานหลักในการทดสอบคือ

$$H_0^a:\sigma_\mu^2=0$$

ดังนั้นสมการในรูปทั่วไปคือ

$$F=\frac{y'MD\left(D'MD\right)-D'My/\left(p-r\right)}{y'Gy/\left[NT-\left(\tilde{k}+p-r\right)\right]} \quad (2.82)$$

ภายใต้สมมติฐานหลักที่มีการกระจายตัวแบบ F-distribution มีระดับความเป็นอิสระ $p-r$ และ $NT-\left(\tilde{k}+p-r\right)$ และ $D=I_N\otimes\iota_T$, $M=\bar{P}_Z$, $\tilde{k}=K'$, $p=N$, $r=K'+N-\operatorname{rank}\left(Z,D\right)$ และ $G=\bar{P}_{(Z,D)}$ โดยที่ $\bar{P}_Z=I-P_Z$ และ $P_Z=Z\left(Z'Z\right)^{-1}Z'$

การทดสอบ One-side likelihood ration (LR) จะมีการทดสอบดังนี้

$$LR=-2\log\frac{l(res)}{l(unres)} \quad (2.83)$$

โดยที่ $l\left(res\right)$ คือ ค่า Maximum likelihood ที่มีข้อจำกัด และ $l\left(unres\right)$ คือค่า Maximum likelihood ที่ไม่มีข้อจำกัด ภายใต้สมมติฐานหลักที่ทำการทดสอบ LR test มีการกระจายตัวแบบ Asymptotic distribution (Batagi 2005: 63-64)

5. การประมาณแบบจำลองพาแนล (Panel estimation)

5.1 วิธีการประมาณค่าแบบกำลังสองน้อยที่สุด (Ordinary Least Square: OLS)

เป็นการประมาณค่าเส้นถดถอยที่ได้จากการประมาณค่าด้วยวิธี OLS โดยการทำให้ผลบวกของกำลังสองของค่าความคลาดเคลื่อน (Error term) มีค่าน้อยที่สุด จากสมการ OLS

$$\hat{\beta}_{OLS} = \left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left(X_{it}-\bar{X}_i\right)^2\right]^{-1}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left(X_{it}-\bar{X}_i\right)\left(Y_{it}-\bar{Y}_i\right) \quad (2.84)$$

โดยที่ i คือ ข้อมูลภาคตัดขวาง $i = 1,\ldots,N$

t คือ ข้อมูลอนุกรมเวลา $t = 1,\ldots,T$

Y_{it} คือ ตัวแปรตาม

X_{it} คือ ตัวแปรอธิบาย

$\bar{Y}_{it}$ คือ ค่าเฉลี่ยของ Y_{it}

$\bar{X}_i$ คือ ค่าเฉลี่ยของ X_{it}

5.2 วิธีกำลังสองน้อยที่สุดเชิงพลวัตร (Dynamic Ordinary Least Square: DOLS)

เป็นการประมาณการแบบ OLS ที่มีการเพิ่มการประมาณแบบพลวัตรเข้าไปในสมการ OLS จึงเรียกว่าการประมาณค่าการเปลี่ยนแปลงเชิงพลวัตรแบบกำลังสองน้อยที่สุด (DOLS) จากสมการ

จากสมการพื้นฐาน

$$y_{it} = x'_{it}\beta + \sum_{k=K_i}^{K_i}\gamma_{ik}\Delta x_{it-k} + \varepsilon_{it} \quad (2.85)$$

สมการประมาณค่า จากวิธีกำลังสองน้อยที่สุดเชิงพลวัตร (DOLS) ได้จาก

$$\hat{\beta}_{OLS} = \left[N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{t=1}^{T} z_{it}z'_{it}\right)^{-1}\left(\sum_{t=1}^{T} z_{it}\tilde{y}_{it}\right)\right] \quad (2.86)$$

โดยที่ $z_{it} = 2(K+1)x1$ และ $\tilde{y}_{it}{}' = y_{it} - \bar{y}_{it}$

5.3 วิธีการโมเมนต์ในรูปทั่วไป (Generalized method of moments: GMM)

วิธีการโมเมนต์ในรูปทั่วไป หรือ Generalized method of moments เสนอโดย Hansen เป็นการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยตรงจาก Moment condition ที่ใส่ในแบบจำลอง

จากสมการพื้นฐาน

$$y_{it} = x'_{it}\beta + z'_{it}\gamma + u_{it} \quad (2.87)$$

จากสมการ (2.87) สามารถเขียนได้เป็น

$$y_{it} - y_{it-1} = \beta'(x_{it} - x_{it-1}) + \gamma'(z_{it} - z_{it-1}) + (u_{it} - u_{it-1}) \quad (2.88)$$

โดยที่ $i = 1,\ldots,n$ และ $t = 2,\ldots,T_i$

สมการ (2.88) ถ้า $y_{it-1} - y_{it-2}$ มีความสัมพันธ์กับค่าความคลาดเคลื่อน $(u_{it} - u_{it-1})$ จะทำให้การประมาณมีความเอนเอียงมากขึ้น ดังนั้นในกรณีนี้การประมาณค่าด้วยวิธี DOLS จะมีความเหมาะสมกว่า

แต่ถ้ามีการใช้เครื่องมือ (Instrument) ที่ถูกต้องการประมาณด้วยวิธี GMM จะมีประสิทธิภาพกว่าในการประมาณค่าสมการ โดยทั่วไปจะมีการใส่ค่าความล่าช้า (Lag) ของตัวแปรตามสองช่วงเวลาที่ y_{it-2} นั้นจะไม่มีความสัมพันธ์กับ $(u_{it}-u_{it-1})$ ดังนั้น ค่าของ y_{it-k} , $k \geq 2$ จึงเป็นเครื่องมือ ที่เหมาะสม

6. การทดสอบพาแนลโคอินทิเกรชัน (Panel Cointegration Test)

การทดสอบพาแนลโคอินทิเกรชันเป็นการทดสอบหาความสัมพันธ์ในระยะยาวของตัวแปรของตัวอธิบายและตัวแปรตาม โดยการทดสอบที่ใช้มีทั้งหมด 2 วิธีดังนี้ (Baltagi, 2008)

6.1 การทดสอบพาแนลโคอินทิเกรชันแบบ Residual-Based DF and ADF หรือแบบ Kao (Kao test)

จากสมการถดถอยแบบพาแนล

$$y_{it} = x_{it}'\beta + z_{it}'\gamma + e_{it} \tag{2.89}$$

โดยที่ y_{it} และ x_{it} เป็น $I(1)$ และ $z_{it} = \{\mu_i\}$ การทดสอบแบบ DF-type สามารถคำนวณได้จากส่วนที่เหลือของ Fixed effects

$$\hat{e}_{it} = \rho\hat{e}_{it-1} + v_{it} \tag{2.90}$$

โดยที่ $\hat{e}_{it} = \tilde{y}_{it} - \tilde{x}_{it}\hat{\beta}$ และ $\tilde{y}_{it} = y_{it} - \bar{y}_i$ ในการทดสอบนี้ใช้วิธีประมาณค่าด้วย OLS ประมาณค่าสัมประสิทธิ์ ρ และ t-statistic จากสมการ

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\hat{e}_{it}\hat{e}_{it-1}}{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=2}^{T}\hat{e}_{it}^2} \tag{2.91}$$

และ

$$t_\rho = \frac{(\hat{\rho}-1)\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}e_{it-1}^2}}{s_e} \tag{2.92}$$

ซึ่ง

$$s_e^2 = \frac{1}{NT}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=2}^{T}\left(\hat{e}_{it} - \hat{\rho}\hat{e}_{it-1}\right)^2$$

ค่าสถิติที่ใช้ในการทดสอบแบบ DF มีทั้งหมด 4 แบบ โดยสมมติฐานหลักของการทดสอบ คือ $H_0 : \rho = 1$ (ไม่มีโคอินทิเกรชัน)

$$DF_\rho = \frac{\sqrt{N}T(\hat{\rho}-1)+3\sqrt{N}}{\sqrt{10.2}} \tag{2.93}$$

$$DF_t = \sqrt{1.25}t_\rho + \sqrt{1.875N} \tag{2.94}$$

$$DF_{\rho}^{*} = \frac{\sqrt{N}T(\hat{\rho}-1)+\dfrac{3\sqrt{N}\hat{\rho}_{v}^{2}}{\hat{\rho}_{0v}^{2}}}{\sqrt{3+\dfrac{36\hat{\rho}_{v}^{4}}{\hat{\rho}_{0v}^{4}}}} \tag{2.95}$$

$$DF_{t}^{*} = \frac{t_{\rho}+\dfrac{\sqrt{6N}\hat{\sigma}_{v}}{2\hat{\sigma}_{0v}}}{\sqrt{\dfrac{\hat{\sigma}_{0v}^{2}}{2\sigma_{v}^{2}}+\dfrac{3\hat{\sigma}_{v}^{2}}{10\sigma_{0v}^{2}}}} \tag{2.96}$$

โดยที่ $\hat{\sigma}_{v}^{2} = \hat{\Sigma}_{yy} - \hat{\Sigma}_{yx}\Sigma_{xx}^{-1}$ และ $\sigma_{0v}^{2} = \hat{\Omega}_{yy} - \hat{\Omega}_{yx}\hat{\Omega}_{xx}^{-1}$

ค่าสถิติ DF_{ρ}, DF_{t} จะพิจารณาจากความสัมพันธ์จากภายนอกของตัวถดถอยกับค่าความคลาดเคลื่อนและค่าสถิติ DF_{ρ}^{*}, DF_{t}^{*} จะพิจารณาจากความสัมพันธ์ภายในของตัวถดถอยกับค่าความคลาดเคลื่อน สำหรับค่าสถิติที่ใช้ในการทดสอบแบบ ADF สามารถประมาณค่าได้จากการถดถอยดังนี้

$$\hat{e}_{it} = \rho\hat{e}_{it-1} + \sum_{j=1}^{p}\vartheta_{j}\Delta\hat{e}_{it-j} + v_{itp} \tag{2.97}$$

ดังนั้นค่าสถิติ ADF คือ

$$ADF = \frac{t_{ADF}+\dfrac{\sqrt{6N}\hat{\sigma}_{v}}{2\hat{\sigma}_{0v}}}{\sqrt{\dfrac{\hat{\sigma}_{0v}^{2}}{2\sigma_{v}^{2}}+\dfrac{3\hat{\sigma}_{v}^{2}}{10\sigma_{0v}^{2}}}} \tag{2.98}$$

โดยที่ t_{ADF} คือ t-statistic ของ ρ จากสมการ $\hat{e}_{it} = \rho\hat{e}_{it-1} + \sum_{j=1}^{p}\vartheta_{j}\Delta\hat{e}_{it-j} + v_{itp}$ โดยสมมติฐานหลักของการทดสอบคือ $H_0 : \rho = 1$ (ไม่มีโคอินทิเกรชัน)

6.2 การทดสอบพาแนลโคอินทิเกรชันแบบ Pedroni (Engle-Granger based)

Pedroni และ Kao ได้ทำการศึกษาการทดสอบพาแนลโคอินทิเกรชันตามแบบของ Engle-Granger โดยจะทำการทดสอบจากส่วนที่เหลือ (Residual) ถ้าตัวแปรมีโคอินทิเกรชัน ซึ่ง Residual ที่ได้จะเป็น I(0) แต่ถ้าตัวแปรไม่มีโคอินทิเกรชันแล้ว Residual ที่ได้จะเป็น I(1) Pedroni เสนอวิธีการทดสอบโคอินทิเกรชันที่สมมติให้ค่าคงที่ (Intercept) และค่าแนวโน้ม (Trend) มีความแตกต่างกันระหว่างข้อมูลแต่ละหน่วย จากสมการ

$$y_{it} = \alpha_{i} + \delta_{i}t + \beta_{1i}x_{1i,t} + \beta_{2i}x_{2i,t} + \ldots + \beta_{Mi}x_{Mi,t} + e_{i,t} \tag{2.99}$$

โดยที่ $t = 1,\ldots,T$, $i = 1,\ldots,N$, $m = 1,\ldots M$ และกำหนดให้ x, y นิ่งที่ I(1) ค่า α_{i}, δ_{i} คือค่าคงที่และค่าสัมประสิทธิ์ของแนวโน้ม (Intercept and Trend) ตามลำดับ เมื่อถดถอยสมการ

(2.99) จะได้ส่วนที่เหลือ (Residual) จากนั้นทำการทดสอบส่วนที่เหลือดังกล่าวว่าเป็น I(1)โดยการถดถอยจากสมการ

$$e_{it} = \rho_i e_{it-1} + u_{it} \tag{2.100}$$

หรือ

$$e_{it} = \rho_i e_{it-1} + \sum_{j=1}^{p_i} \psi_{it} \Delta e_{it-j} + \upsilon_{it} \tag{2.101}$$

ซึ่งในแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง มีการแบ่งสมมติฐานทางรอง (Alternative hypothesis) ออกเป็น 2 อย่างคือ

กรณีที่ข้อมูลภาคตัดขวางทุกหน่วยมีลักษณะเหมือนกัน (Homogeneous)

$H_0 : \rho_i = 1$ (ไม่มีโคอินทิเกรชัน)

$H_a : (\rho_i = \rho) < 1$ (มีโคอินทิเกรชัน)

กรณีที่ข้อมูลภาคตัดขวางแต่ละหน่วยมีลักษณะแตกต่างกัน (Heterogeneous)

$H_0 : \rho_i = 1$ (ไม่มีโคอินทิเกรชัน)

$H_a : \rho_i < 1$ (มีโคอินทิเกรชัน)

โดยค่าสถิติในการทดสอบพาแนลโคอินทิเกรชัน $\aleph_{N,T}$ คำนวณจากส่วนที่เหลือในสมการ (2.100) และ (2.101) Pedroni แสดงให้เห็นว่าค่าสถิติมีการแจกแจงแบบ Asymptotically ดังนี้

$$\frac{\aleph_{N,T} - \mu\sqrt{N}}{\sqrt{\upsilon}} \Rightarrow N(0,1) \tag{2.102}$$

โดยที่ μ และ υ คือ Adjustment term ที่สร้างโดยวิธี Monte Carlo

2.3 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างแรงงานผู้มีงานทำและการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจของประเทศไทยในแต่ละจังหวัด ได้รวบรวมเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ประกอบด้วย เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับแรงงานผู้มีงานทำและการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

จิตมณี ศรีชรากุล (2542) ศึกษาผลิตภาพแรงงานของสาขาอุตสาหกรรมบริการในประเทศไทย ในช่วงปี พ.ศ. 2523 – 2539 โดยใช้การวิเคราะห์การถดถอยอย่างง่าย (Simple regression analysis) และทำการทดสอบค่าสัมประสิทธิ์ความยืดหยุ่นของปัจจัยแต่ละตัว โดยพิจารณาจากค่า t-statistics ว่าตัวแปรอิสระสามารถอธิบายตัวแปรตามได้อย่างมีนัยสำคัญหรือไม่และใช้วิธีการวิเคราะห์การถดถอยเชิงซ้อน (Multiple regression analysis) รวมทั้งทดสอบค่าสัมประสิทธิ์ของ

ปัจจัยแต่ละตัว โดยพิจารณาค่า t-statistics เพื่อหานัยสำคัญทางสถิติของตัวแปรแต่ละตัวกับผลิตภาพแรงงาน

ผลการศึกษาพบว่า ค่าผลิตภาพแรงงานนี้มีแนวโน้มเพิ่มขึ้นตลอดช่วงที่ทำการศึกษา สาขาอุตสาหกรรมบริการที่มีระดับผลิตภาพแรงงานในรูปตัวเงินสูงสุดคือ สาขาสาธารณูปโภค รองลงมาได้แก่ สาขาบริการอื่นๆ และสาขาคมนาคมและการขนส่ง ตามลำดับ สาขาที่มีระดับผลิตภาพแรงงานต่ำ คือสาขาพาณิชยกรรมและสาขาก่อสร้าง ซึ่งดัชนีผลิตภาพแรงงานที่แท้จริงกับดัชนีค่าจ้างที่แท้จริงมีแนวโน้มเปลี่ยนแปลงไปในทิศทางเดียวกัน โดยดัชนีผลิตภาพแรงงานที่แท้จริงมีค่าสูงกว่าดัชนีค่าจ้างที่แท้จริง ซึ่งคาดว่าจะมีผลทำให้ดัชนีการจ้างงานในปีถัดไปมีค่าเพิ่มขึ้น ซึ่งสอดคล้องกับภาวะตลาดแรงงานในระหว่างที่ศึกษา เนื่องจากอุตสาหกรรมบริการของไทยมีโครงสร้างการผลิตที่ใช้ปัจจัยแรงงานเป็นสำคัญ ดังนั้นคาดว่าอนาคตอุตสาหกรรมบริการจะมีแนวโน้มของดัชนีผลิตภาพแรงงานที่แท้จริงลดลงเนื่องจากผลตอบแทนแรงงานอยู่ในระยะที่ลดน้อยลงในขณะที่ดัชนีค่าจ้างที่แท้จริงนั้นกลับมีแนวโน้มเพิ่มขึ้น อย่างไรก็ตามกระบวนการผลิตของภาคบริการมีการใช้ปัจจัยทุนเพิ่มมากขึ้นซึ่งมีผลทำให้ผลิตภาพของแรงงานเพิ่มขึ้นได้ทางหนึ่ง โดยอัตราค่าจ้างจะเปลี่ยนแปลงไปในทิศทางเดียวกันกับผลิตภาพแรงงานในช่วงที่ทำการศึกษา

เพ็ญสุรางค์ วันทอง (2550) ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างการศึกษาของแรงงานกับการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ ข้อมูลที่ใช้เป็นข้อมูลทุติยภูมิในช่วงปี พ.ศ. 2515 – 2546 โดยใช้สมการการผลิตแบบ Cobb-Douglas และใช้วิธีการประมาณค่ากำลังสองน้อยที่สุดมาใช้ในการทดสอบสมการถดถอยเพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์ต่างๆ ของฟังก์ชันการผลิต พร้อมทั้งวิเคราะห์ผลได้ต่อขนาดของปัจจัยการผลิต โดยจะทำการศึกษาในภาคเศรษฐกิจโดยรวมและในรายสาขาการผลิตของประเทศไทย

ผลการศึกษาพบว่า แรงงานที่สำเร็จการศึกษาระดับประถมศึกษามีอิทธิพลต่อการเพิ่มผลผลิตในสาขาการก่อสร้าง ซ่อม และรื้อถอนทำลาย และสาขาพาณิชยกรรม แต่ทำให้ผลผลิตในสาขาเกษตรกรรม การผ่าไม้ การล่าสัตว์ และการประมง และสาขาอุตสาหกรรม หัตถกรรมลดลง แรงงานที่สำเร็จการศึกษาระดับมัธยมศึกษา มีอิทธิพลต่อการเพิ่มผลผลิตในสาขาเกษตรกรรม การป่าไม้ การล่าสัตว์ และการประมงและสาขาอุตสาหกรรม หัตถกรรม แต่ทำให้ผลผลิตในสาขาพาณิชยกรรม และสาขาบริการลดลง แรงงานที่สำเร็จการศึกษาระดับอาชีวศึกษา มีอิทธิพลต่อการ

เพิ่มผลผลิตในภาคเศรษฐกิจ โดยรวมสาขาการขนส่ง คลังสินค้าและการคมนาคม สาขาพาณิชย-กรรม และสาขาบริการ แต่ทำให้ผลผลิตในสาขาอุตสาหกรรม หัตถกรรมลดลง แรงงานที่สำเร็จการศึกษาระดับอุดมศึกษา มีอิทธิพลต่อการเพิ่มผลผลิตในภาคเศรษฐกิจโดยรวมสาขาการขุดแร่ โลหะ และอโลหะ และสาขาบริการ แต่ทำให้ผลผลิตในสาขาการก่อสร้าง ซ่อมและรื้อถอนทำลายลดลง และการศึกษายังพบว่า แรงงานที่มีการศึกษาระดับสูงทำให้ผลผลิตของประเทศเพิ่มขึ้นได้มากกว่าแรงงานที่มีระดับการศึกษาต่ำกว่า

อนุพันธ์ สมบูรณ์วงศ์ (2554) ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างทุนมนุษย์และการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจในแต่ละภาคการผลิตของประเทศไทย โดยใช้แบบจำลองแสดงความสัมพันธ์ระหว่างทุนมนุษย์และการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจในสองรูปแบบคือ แบบจำลองที่เป็นทุนมนุษย์เป็นปัจจัยโดยตรงในฟังก์ชันการผลิตและแบบจำลองที่ทุนมนุษย์ส่งผลต่อตัวแปรเทคโนโลยี ซึ่งทุนมนุษย์วัดจากจำนวนปีของการศึกษาของแรงงาน และการใช้จ่ายของภาครัฐบาลด้านการศึกษา การวิเคราะห์ความสัมพันธ์ใช้เทคนิคโคอินทิเกรชันและเออเรอร์คอเรคชัน ตามแนวทางของโจแฮนเซนและจูซีเรียต ข้อมูลที่ใช้เป็นข้อมูลทุติยภูมิรายปี ในช่วงปี พ.ศ. 2523 ถึง พ.ศ. 2551 ตามภาคการผลิตทั้งหมด 8 ภาคการผลิต

ผลการศึกษาในแบบจำลองที่ 1 พบว่า แรงงานที่มีระดับการศึกษาสูงขึ้น จะทำให้เกิดความเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ โดยเฉพาะในภาคการก่อสร้างและการสาธารณูปโภค และการสาธารณสุข ทั้งนี้เนื่องจากในภาคการผลิตเหล่านี้ต้องใช้แรงงานที่มีระดับความรู้สูงเพื่อให้สามารถเข้าใจและใช้เทคโนโลยีระดับสูงในภาคการผลิตเหล่านี้ได้ และแบบจำลองที่ 2 พบว่า การใช้จ่ายของภาครัฐบาลด้านการศึกษาจะทำให้เกิดความเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ โดยเฉพาะในภาคการขุดแร่โลหะ และอโลหะ ทั้งนี้เนื่องจากต้องใช้ความรู้ในการปรับเปลี่ยนชนิดของแร่ที่ขุดอยู่เดิมไปเป็นแร่ที่ใช้เป็นวัตถุดิบในภาคอุตสาหกรรม

Ramesh Chandra Paudel และ Nelson Perera (2009) ศึกษาหนี้ต่างประเทศ, การเปิดกว้างทางการค้าและกำลังแรงงานต่อการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจในศรีลังกา โดยใช้ข้อมูลอนุกรมเวลา (Time series) ในช่วง 1950 – 2006 ทำการทดสอบยูนิทรูทโดยใช้ OF และ ADF โดยข้อมูลอนุกรมเวลาระบุถึงว่าถูกอินทิเกรตที่ระดับแรก และตัวแปร PIs aff the seleaed อินทิเกรตที่ระดับแรกเช่นกัน โดยการทำโคอินทิเกรชัน Johansen ระบุว่าแรงงานผู้มีงานทำมีความสัมพันธ์ในระยะ

ยาวกับตัวแปรอื่นๆ พบว่า การเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ หนี้ต่างประเทศ การเปิดกว้างทางการค้า และกำลังแรงงาน มีความสัมพันธ์กันในระยะยาว ผลการศึกษาแสดงให้เห็นว่าในระยะยาว กำลังแรงงานเป็นตัวแปรหลักที่มีต่อการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจของศรีลังกา ส่วนการเปิดกว้างทางการค้าและหนี้ต่างประเทศมีความสัมพันธ์เชิงบวกต่อการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจด้วยเช่นกัน อย่างไรก็ตาม ค่าสัมประสิทธิ์ในระยะยาวมีขนาดเล็กกว่าเมื่อเปรียบเทียบกับค่าสัมประสิทธิ์ในระยะยาวของกำลังแรงงาน

Oluyomi Ayoyinka และ Oluranti Isaiah (2011) ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างการจ้างงานและการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจของไนจีเรีย กำหนดแบบจำลองการจ้างงานอย่างง่ายและทำการประมาณค่าโดยวิธีกำลังสองน้อยสุด (Ordinary Least Squares) และใช้ข้อมูลอนุกรมเวลาสำหรับการศึกษา โดยใช้ Hodrick-Prescott แก้ไขความไม่นิ่งของข้อมูล ผลการวิเคราะห์ทางเศรษฐมิติแสดงให้เห็นว่า มีผลทางบวกและมี นัยยะสำคัญทางสถิติของความสัมพันธ์ระหว่างระดับการจ้างงานและการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ ขณะเดียวกัน ก็มีผลทางลบของความสัมพันธ์ระหว่างอัตราการเจริญเติบโตของการจ้างงานและอัตราการเจริญเติบโตของ GDP ในระบบเศรษฐกิจ ซึ่งผู้ศึกษาได้มีการเสนอให้เพิ่มกลยุทธ์ส่งเสริมการจ้างงานที่จะช่วยลดการว่างงานที่สูงในปัจจุบันของไนจีเรีย