

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 ทฤษฎีเศรษฐศาสตร์การเงิน

เศรษฐศาสตร์การเงินเป็นแขนงหนึ่งของเศรษฐศาสตร์ซึ่งมุ่งเน้นในการศึกษากิจกรรมทางการเงินซึ่ง โดยทำการศึกษาใน 2 ส่วนหลัก ประกอบไปด้วยการวัดมูลค่าสินทรัพย์ (Asset Pricing) และการศึกษาการเงินธุรกิจ (Corporate Finance) ในการศึกษาครั้งนี้จะมุ่งเน้นในการศึกษาในเรื่องการวัดมูลค่าสินทรัพย์ทางการเงินอันประกอบไปด้วยหุ้นและสัญญาอนุพันธ์

2.1.1 การวัดมูลค่าของสินทรัพย์

สำหรับการศึกษาในครั้งนี้เป็นการศึกษาการวัดมูลค่าของสินทรัพย์เพื่อการลงทุน (Investment Asset) ซึ่งเป็นสินทรัพย์ที่มีความต้องการถือครองเพื่อวัตถุประสงค์ในการลงทุน โดยเฉพาะ อันได้แก่ หุ้นและสัญญาอนุพันธ์ซึ่งมีลักษณะเป็นสินทรัพย์ทางการเงินเนื่องจากมีสภาพคล่องสูงสามารถเปลี่ยนเป็นเงินสดได้อย่างรวดเร็ว การวัดมูลค่าที่เหมาะสมจึงเป็นการคำนวณมูลค่าสินทรัพย์โดยเปรียบเทียบกับมูลค่าตามเวลาของเงิน ซึ่งโดยปกติแล้วเงินมีมูลค่าลดลงตามเวลาเนื่องจากมูลค่าของเงินในปัจจุบันจะสูงกว่าในอนาคต ในสถานะที่เงินเป็นสื่อกลางในการแลกเปลี่ยนจึงต้องมีรักษามูลค่าเงินให้เท่าเดิมด้วยการจ่ายดอกเบี้ยเพื่อชดเชยมูลค่าที่หายไปตามเวลา จึงสามารถคำนวณมูลค่าในอนาคตได้จากอัตราดอกเบี้ย

กำหนดให้ S_0 เป็นมูลค่าปัจจุบัน ให้ S_τ เป็นมูลค่าในอนาคตเมื่อเวลาผ่านไป τ และให้อัตราผลตอบแทนไร้ความเสี่ยงทบต้นต่อเนื่องเท่ากับ r_f คำนวณมูลค่าในอนาคตได้ดังต่อไปนี้

$$S_\tau = S_0 e^{r_f \tau} \quad (2.1)$$

สมการที่ (2.1) เป็นสมการที่ใช้สำหรับสินทรัพย์ไร้ความเสี่ยง ซึ่งนักลงทุนสามารถคำนวณราคาในอนาคตเพื่อตัดสินใจการลงทุนในสินทรัพย์เมื่อทราบระยะเวลาการลงทุนและอัตราผลตอบแทนไร้ความเสี่ยงในช่วงเวลาที่ต้องการลงทุนที่แน่นอน

สำหรับการลงทุนในสินทรัพย์เสี่ยง ราคาสินทรัพย์จะมีการเปลี่ยนแปลงตลอดทำให้ไม่สามารถคาดเดาผลตอบแทนจากการลงทุนได้ การลงทุนที่มีประสิทธิภาพจำเป็นต้องมีการจัดการความเสี่ยงของผลตอบแทนจากการลงทุน ด้วยการใช้อนุพันธ์ทางการเงินประเภทสัญญาล่วงหน้า เช่น สัญญาฟิวเจอร์ส และ ออปชั่น (Hull, 2012) โดยอนุพันธ์ทางการเงินประเภทสัญญาล่วงหน้าจะมีการตกลงราคาซื้อขายในอนาคตเป็นราคาคงที่แน่นอนและระบุเป็นเงื่อนไขในสัญญา เรียกว่าราคาใช้สิทธิ์ หรือ K สามารถคำนวณราคาใช้สิทธิ์กลับมาเป็นมูลค่าปัจจุบันได้ ด้วยวิธีการคิดลดดังสมการต่อไปนี้

$$K_0 = K_r e^{-r_f t} \quad (2.2)$$

2.1.2 สัญญาล่วงหน้าชนิดออปชั่น

ออปชั่น (Option) เป็นอนุพันธ์ทางการเงินที่มีลักษณะเป็นสัญญาล่วงหน้าที่ให้สิทธิ์ผู้ซื้อในการซื้อหรือขายสินค้ายกกับผู้ขายตามเงื่อนไขที่ตกลงกันระหว่างผู้ซื้อและผู้ขาย ประกอบไปด้วยราคาที่จะทำการซื้อหรือขาย เรียกว่าราคาใช้สิทธิ์และเวลาที่สามารถใช้สิทธิ์ตามสัญญา

ออปชั่นสามารถแบ่งเป็น 2 ชนิดตามลักษณะของสิทธิ์ที่กำหนดเอาไว้ในสัญญา ออปชั่นที่ให้สิทธิ์ผู้ซื้อในการซื้อสินค้ายกกับผู้ขาย เรียกว่าออปชั่นฝั่งซื้อ หรือ Call Option และ ออปชั่นที่ให้สิทธิ์ผู้ซื้อในการขายสินค้ายกกับผู้ขาย เรียกว่าออปชั่นฝั่งขาย หรือ Put Option เมื่อแบ่งตามเงื่อนไขในการใช้สิทธิ์ ออปชั่นแบ่งได้เป็น 2 แบบ คือ ออปชั่นแบบอเมริกัน เป็นออปชั่นที่ผู้ซื้อสามารถใช้สิทธิ์ได้ตลอดอายุของสัญญา และ ออปชั่นแบบยุโรปซึ่งเป็นออปชั่นที่ผู้ซื้อสามารถใช้สิทธิ์ได้เฉพาะเวลาที่สัญญาถึงกำหนดเท่านั้น (บริษัท ตลาดสัญญาซื้อขายล่วงหน้า (ประเทศไทย) จำกัด (มหาชน), 2559)

2.1.3 มูลค่าของออปชั่น

การประเมินราคาที่เหมาะสมของออปชั่น เริ่มจากการพิจารณามูลค่าของออปชั่นอันประกอบไปด้วยมูลค่าในตัวของออปชั่น (Intrinsic Value of Option) ซึ่งเท่ากับส่วนต่างระหว่างราคาของสินทรัพย์อ้างอิงกับราคาใช้สิทธิ์ และ มูลค่าเวลาของออปชั่น (Time Value of Option) ซึ่งเป็นค่าพรีเมียมของความเสี่ยงที่ผู้ขายออปชั่นต้องรับไว้ มีค่าเท่ากับมูลค่าของโอกาสที่ราคาสินทรัพย์อ้างอิงจะเปลี่ยนไปในทิศทางที่ทำให้มูลค่าในตัวสูงขึ้น

การคำนวณมูลค่าของออปชั่น ณ เวลานั้นนั้นต้องมีการพิจารณามูลค่าทั้ง 2 ส่วน โดยมูลค่าในตัวของออปชั่นจะเป็นการพิจารณาราคาปัจจุบันของสินทรัพย์อ้างอิง (Spot Price; S) เทียบกับราคาใช้สิทธิ์ของออปชั่น (Exercise Price; K) และมูลค่าเวลาของออปชั่นจะเป็นการพิจารณาอายุสัญญาคงเหลือของออปชั่น (Time to Maturity ; TTM)

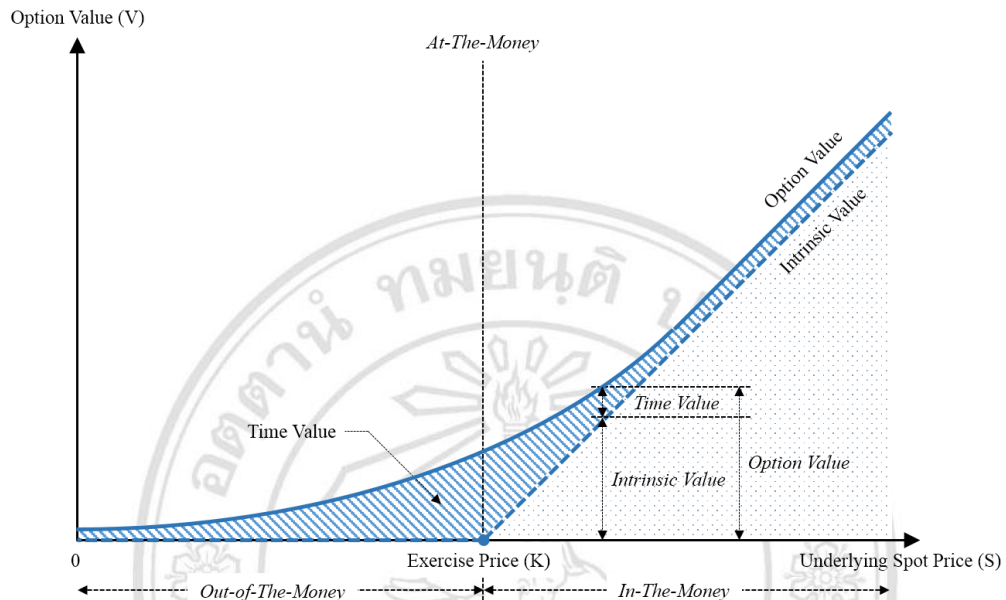
โดยคร่าวๆนั้นการพิจารณาในส่วนของมูลค่าในตัวของออปชั่นนั้น เป็นการมองออปชั่นในลักษณะของเงินตรา หรือ Moneyness ซึ่งเป็นการจำแนกออปชั่นตามราคาใช้สิทธิ ออปชั่นที่มีราคาใช้สิทธิเท่ากับราคาปัจจุบันของสินทรัพย์ เรียกว่าเป็นออปชั่นแบบ At-The-Money (ATM) ซึ่งในทางปฏิบัตินั้นการที่ราคาปัจจุบันของสินทรัพย์จะเท่ากับราคาใช้สิทธิพอดีนั้นเป็นไปได้ยาก จึงอาจใช้สัญญาออปชั่นที่มีราคาใช้สิทธิใกล้เคียงกับราคาปัจจุบันของสินทรัพย์มากที่สุดเป็นออปชั่นแบบ At-The-Money ได้ โดยมีชื่อเรียกอีกชื่อหนึ่งคือ Near-The-Money

สำหรับออปชั่นอีก 2 ประเภทนั้น แบ่งตามผลตอบแทนโดยคิดเสมือนว่ามีการใช้สิทธิตามสัญญาออปชั่น ณ เวลานั้น หากเป็นออปชั่นที่มีการใช้สิทธิแล้วทำให้ผู้ใช้สิทธิมีกำไร เรียกว่าเป็นออปชั่นแบบ In-The-Money (ITM) และเรียกออปชั่นที่มีการใช้สิทธิแล้วขาดทุนว่าเป็นออปชั่นแบบ Out-of-The-Money (OTM) ดังนั้นจะเห็นได้ว่ามีเพียงออปชั่นแบบ In-The-Money ที่มีมูลค่าในตัวในขณะที่ออปชั่นแบบ At-The-Money และ Out-of-The-Money มีมูลค่าในตัวเท่ากับศูนย์

โดยทั่วไปแล้วนักลงทุนมักจะตัดสินใจซื้อขายสัญญาออปชั่นที่มีราคาใช้สิทธิใกล้เคียงกับ Moneyness แบบ At-The-Money เนื่องจากเป็นราคาที่โอกาสของผลตอบแทนเมื่อมีการใช้สิทธิของผู้ซื้อและผู้ขายเท่ากัน สภาพคล่องในการซื้อขายส่วนมากจึงมักอยู่ในสัญญาออปชั่นแบบ At-The-Money รวมทั้งสัญญาออปชั่นแบบ In-The-Money และ Out-of-The-Money ที่ไม่ไกลจากราคาปัจจุบันของสินทรัพย์อ้างอิงมากนัก โดยเรียกสัญญาออปชั่นแบบ In-The-Money และ Out-of-The-Money ที่มีราคาใช้สิทธิไกลจากราคาปัจจุบันของสินทรัพย์จนไม่มีสภาพคล่องว่าเป็นสัญญาออปชั่นแบบ Deep In-The-Money และ Deep Out-of-The-Money ตามลำดับ (Hull, 2012)

สำหรับการพิจารณามูลค่าเวลาของออปชั่นนั้นในทางปฏิบัติสามารถหาได้จากส่วนต่างของราคาออปชั่นกับมูลค่าในตัวของออปชั่น ดังนั้นจะเห็นได้ว่าสัญญาออปชั่นที่มีมูลค่าในตัวเท่ากับศูนย์อาจจะมีราคามากกว่าศูนย์ ทั้งนี้เนื่องจากสัญญาออปชั่นเป็นสัญญาล่วงหน้า หากยังไม่ถึงกำหนดใช้สิทธิก็ยังมีโอกาสที่ราคาสินทรัพย์อ้างอิงจะมีการเปลี่ยนแปลงไปในทิศทางที่ทำให้มูลค่าในตัวของออปชั่นสูงขึ้นได้ โอกาสดังกล่าวจะลดลงตามอายุสัญญาออปชั่นที่ลดลง มูลค่าเวลาของออปชั่นจึงเท่ากับศูนย์ในวันหมดอายุของสัญญา เมื่อจำแนกตามลักษณะ Moneyness ออปชั่นที่มีมูลค่าเวลาสูงสุดจะเป็นออปชั่นแบบ At-The-Money เนื่องจากเป็นราคาที่ทั้งผู้ซื้อและผู้ขายมีโอกาสได้กำไรเมื่อราคาของสินทรัพย์อ้างอิงมีการเปลี่ยนแปลง มูลค่าเวลาของออปชั่นจะลดลงสำหรับออปชั่นที่ราคาใช้สิทธิห่างจากราคาปัจจุบันของสินทรัพย์อ้างอิงเนื่องจากมีโอกาสน้อยที่ราคาสินทรัพย์อ้างอิงจะมีการเปลี่ยนแปลงไปในทิศทางที่ทำให้มูลค่าในตัวของออปชั่นสูงขึ้นหรือลดลงจนเกิดการใช้สิทธิหรือไม่ใช้สิทธิตามลำดับ

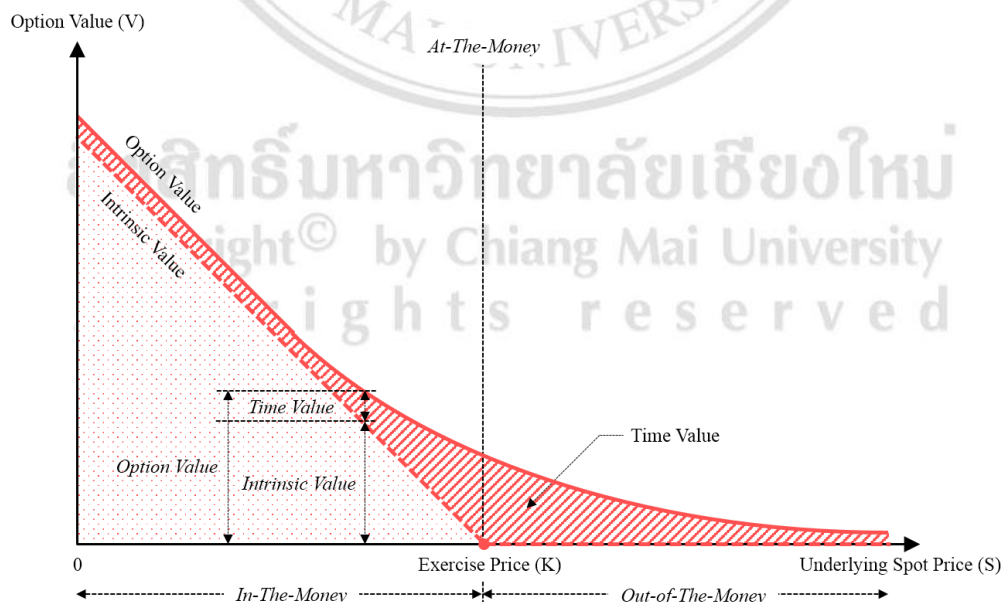
สามารถแสดงแผนภาพราคาของออปชั่นประเภท Call Option ได้ดังภาพที่ 2.1 ซึ่งแสดงให้เห็นว่า Call Option จะมีมูลค่าในตัวเมื่อราคาปัจจุบันของสินทรัพย์อ้างอิงเพิ่มขึ้นมากกว่าราคาใช้สิทธิ อย่างไรก็ตามราคาของออปชั่นที่ไม่มีมูลค่าในตัวจะไม่เท่ากับศูนย์เนื่องจากยังมีมูลค่าเวลาอยู่



ที่มา : “Call and Put Prices as a Function of the Stock Price” by Kolb, 1995 *Understanding Options* ,p.199

ภาพที่ 2.1 มูลค่าของออปชั่นชนิด Call Option ณ เวลาที่ออปชั่นยังไม่หมดอายุ

สำหรับราคาของออปชั่นประเภท Put Option ที่ยังไม่หมดอายุสัญญาได้ดังภาพที่ 2.2



ที่มา : “Call and Put Prices as a Function of the Stock Price” by Kolb, 1995 *Understanding Options* ,p.199

ภาพที่ 2.2 มูลค่าของออปชั่นชนิด Put Option ณ เวลาที่ออปชั่นยังไม่หมดอายุ

ภาพที่ 2.2 ซึ่งแสดงให้เห็นว่า Put Option จะมีมูลค่าในตัวเมื่อราคาปัจจุบันของสินทรัพย์อ้างอิงลดลงต่ำกว่าราคาใช้สิทธิ์ อย่างไรก็ตามราคาของออปชันที่ไม่มีมูลค่าในตัวจะไม่เท่ากับศูนย์ เนื่องจากยังมีมูลค่าเวลาอยู่

2.1.4 มูลค่าในตัวของออปชัน

มูลค่าในตัวของออปชัน (Intrinsic Value of Option) คือ ค่าพรีเมียมของกำไรที่ผู้ซื้อจะได้รับเมื่อใช้สิทธิ์ซื้อหรือขายตามที่ระบุไว้ในสัญญาออปชัน มีค่าเท่ากับส่วนต่างระหว่างราคาของสินทรัพย์อ้างอิงกับราคาใช้สิทธิ์ที่ระบุไว้ในสัญญาออปชัน

พิจารณา Call Option ซึ่งเป็นออปชันที่ให้สิทธิ์ผู้ซื้อในการซื้อสินค้าอ้างอิง โดย Call Option จะมีมูลค่าในตัวเมื่อผู้ซื้อซื้อกำไร นั่นคือในกรณีที่ราคาสินทรัพย์อ้างอิงสูงกว่าราคาใช้สิทธิ์พิจารณาออปชัน ณ เวลาปัจจุบัน สามารถคำนวณราคาออปชันได้จาก ส่วนต่างของราคาสินทรัพย์อ้างอิงปัจจุบันและมูลค่าปัจจุบันของราคาใช้สิทธิ์ซึ่งใช้วิธีคิดลดตามสมการ (2.2)

กำหนดให้ C เป็นราคาปัจจุบันของ Call Option ที่มีราคาใช้สิทธิ์เท่ากับ K และมีอายุคงเหลือเท่ากับ τ ให้ S เป็นราคาสินทรัพย์อ้างอิงปัจจุบัน และให้อัตราผลตอบแทนไร้ความเสี่ยงแบบทบต้นต่อเนื่องเท่ากับ r_f ราคาของ Call Option จะมีค่าดังสมการต่อไปนี้

$$C \geq S - Ke^{-r_f \tau} \quad (2.3)$$

ฝั่งขวาของสมการ (2.3) เท่ากับมูลค่าในตัวของออปชัน ซึ่งราคาออปชันที่ยังไม่หมดอายุจะมีราคาสูงกว่ามูลค่าในตัวเสมอเพราะยังมีส่วนของมูลค่าเวลาอยู่ สำหรับราคาของออปชันในวันครบกำหนดสัญญาจะเท่ากับมูลค่าในตัวเท่านั้นเนื่องจากมูลค่าเวลาลดลงเหลือศูนย์

พิจารณาราคาของ Call Option ในวันครบกำหนดสัญญา โดยไม่ทราบราคาสินทรัพย์อ้างอิงในวันครบกำหนดสัญญา ในกรณีที่ราคาสินทรัพย์อ้างอิงสูงกว่าราคาใช้สิทธิ์ซื้อ หรือมีการใช้สิทธิ์ ราคา Call Option จะเท่ากับส่วนต่างของราคาทั้งสอง และในกรณีที่ราคาสินทรัพย์อ้างอิงสูงกว่าราคาใช้สิทธิ์ซื้อ ผู้ซื้อจะไม่ใช้สิทธิ์ และราคาออปชันจะเท่ากับศูนย์ (Merton, 1973)

ณ วันครบกำหนดสัญญา กำหนดให้ C_τ เป็นราคาของ Call Option ให้ S_τ เป็นราคาสินค้าอ้างอิง สามารถคำนวณราคา Call Option ณ วันครบกำหนดสัญญาได้ดังสมการต่อไปนี้

$$C_\tau = \max\{S_\tau - K, 0\} = (S_\tau - K)^+ \quad (2.4)$$

สำหรับมูลค่าในตัวของ Put Option ซึ่งเป็นออปชันที่ให้สิทธิ์ผู้ซื้อในการขายสินค้าอ้างอิง โดย Put Option จะมีมูลค่าในตัวเมื่อราคาใช้สิทธิ์สูงกว่าราคาสินทรัพย์อ้างอิง พิจารณาออปชัน

ณ เวลาปัจจุบัน สามารถคำนวณราคาอปชั่นได้จาก ส่วนต่างของราคาสินทรัพย์อ้างอิงปัจจุบันและมูลค่าปัจจุบันของราคาใช้สิทธิซึ่งใช้วิธีคิดลดตามสมการ (2.2)

กำหนดให้ P เป็นราคาปัจจุบันของ Put Option ที่มีราคาใช้สิทธิเท่ากับ K และมีอายุคงเหลือเท่ากับ τ ให้ S เป็นราคาสินทรัพย์อ้างอิงปัจจุบัน และให้อัตราผลตอบแทนไร้ความเสี่ยงแบบทบต้นต่อเนื่องเท่ากับ r_f ราคาของ Put Option จะมีค่าดังสมการต่อไปนี้

$$P \geq Ke^{-r_f \tau} - S \quad (2.5)$$

ฝั่งขวาของสมการ (2.5) เท่ากับมูลค่าในตัวของอปชั่น ซึ่งราคาอปชั่นที่ยังไม่หมดอายุจะมีราคาสูงกว่ามูลค่าในตัวเสมอเนื่องจากมีมูลค่าเวลารวมอยู่ สำหรับราคาของอปชั่นในวันครบกำหนดสัญญาจะเท่ากับมูลค่าในตัวเท่านั้นเนื่องจากมูลค่าเวลาลดลงเหลือศูนย์

พิจารณาราคาของ Put Option ในวันครบกำหนดสัญญา โดยไม่ทราบราคาสินทรัพย์อ้างอิงในวันครบกำหนดสัญญา ในกรณีที่ราคาใช้สิทธิขายสูงกว่าราคาสินทรัพย์อ้างอิง หรือมีการใช้สิทธิ ราคา Put Option จะเท่ากับส่วนต่างของราคาทั้งสอง และในกรณีที่ราคาใช้สิทธิขายต่ำกว่าราคาสินทรัพย์อ้างอิง ผู้ซื้อจะไม่ใช้สิทธิ และราคาอปชั่นจะเท่ากับศูนย์ (Merton, 1973)

ณ วันครบกำหนดสัญญา กำหนดให้ P_τ เป็นราคาของ Put Option ให้ S_τ เป็นราคาสินทรัพย์อ้างอิง สามารถคำนวณราคา Put Option ณ วันครบกำหนดสัญญาได้ดังสมการต่อไปนี้

$$P_\tau = \max\{K - S_\tau, 0\} = (K - S_\tau)^+ \quad (2.6)$$

2.1.5 การเท่ากันของราคาอปชั่น (Put-Call Parity)

การเท่ากันของราคาอปชั่น หรือ Put-Call Parity เป็นนิยามความสัมพันธ์ของอปชั่นแบบยุโรป ชนิด Call Option และ Put Option ที่มีราคาใช้สิทธิเท่ากันและมีอายุสัญญาคงเหลือเท่ากัน ภายใต้สมมติฐานว่าไม่มีต้นทุนในการซื้อขายอปชั่นและสินทรัพย์ โดยไม่ต้องมีการซื้อขายอปชั่นและสินทรัพย์อ้างอิงจนถึงวันครบกำหนดสัญญา

พิจารณาวิธีการสร้างพอร์ตลงทุนไร้ความเสี่ยงโดยใช้ Call Option เรียกว่าการจัดพอร์ตลงทุนแบบ Fiduciary Call โดยเป็นการซื้อ Call Option ณ เวลาปัจจุบันที่มีราคาเท่ากับ C พร้อมกับการถือเงินสดในจำนวนน้อยที่สุดที่จะสามารถจ่ายเพื่อใช้สิทธิตามสัญญาอปชั่นในวันครบกำหนดสัญญา ซึ่งมีค่าเท่ากับ $Ke^{-r_f \tau}$ ผลตอบแทนจากการลงทุนนี้ แบ่งออกเป็น 2 กรณี

1. กรณีที่ราคาสินทรัพย์ในครบกําหนดสัญญาสูงกว่าราคาใช้สิทธิ นักลงทุนจะใช้สิทธิตามสัญญาออพชัน โดยจ่ายเงินเท่ากับราคาใช้สิทธิซึ่งมีราคาต่ำกว่าตลาด แล้วนำสินทรัพย์ไปขายในตลาด และได้รับผลตอบแทนจากการลงทุนเท่ากับ $S_T - K$

2. กรณีที่ราคาสินทรัพย์ในครบกําหนดสัญญาต่ำกว่าราคาใช้สิทธิ นักลงทุนจะซื้อสินทรัพย์จากตลาดและมีเงินเหลือ เนื่องจากจ่ายเงินซื้อสินทรัพย์น้อยกว่าเงินที่ถือไว้ ทำให้ได้รับผลตอบแทนจากการลงทุนเท่ากับ $K - S_T$

สามารถเขียนสมการผลตอบแทนจากการลงทุนแบบ Fiduciary Call ได้ดังสมการต่อไปนี้

$$payoff\{C + Ke^{-r_f t}\} = \max\{S_T - K, K - S_T\} \quad (2.7)$$

นักลงทุนสามารถสร้างพอร์ตลงทุนพอร์ตลงทุนไร้ความเสี่ยงอีกวิธีหนึ่งโดยใช้ Put Option เรียกว่าการจัดพอร์ตลงทุนแบบ Protective Put ซึ่งเป็นการซื้อ Put Option ณ เวลาปัจจุบันที่มีราคาเท่ากับ P พร้อมกับการซื้อสินทรัพย์ ณ เวลาปัจจุบันซึ่งมีราคาเท่ากับ S และถือจนออพชันหมดอายุ ผลตอบแทนจากการลงทุนนี้ แบ่งออกเป็น 2 กรณี

1. กรณีที่ราคาสินทรัพย์ในครบกําหนดสัญญาต่ำกว่าราคาใช้สิทธิ นักลงทุนจะใช้สิทธิตามสัญญาออพชันในการขายสินทรัพย์ได้ราคาสูงกว่าราคาตลาด วิธีนี้จะได้รับผลตอบแทนจากการลงทุน เท่ากับ $K - S_T$

2. ในกรณีที่ราคาตลาดของทรัพย์สินในวันครบกําหนดสัญญาสูงกว่าราคาใช้สิทธิ นักลงทุนจะขายสินทรัพย์ในตลาดเนื่องจากจะได้รับเงินมากกว่าราคาใช้สิทธิ และได้รับผลตอบแทนจากการลงทุนเท่ากับ $S_T - K$

สามารถเขียนสมการผลตอบแทนจากการลงทุนแบบ Protective Put ได้ดังสมการต่อไปนี้

$$payoff\{P + S\} = \max\{K - S_T, S_T - K\} \quad (2.8)$$

จากสมการที่ (2.7) และ (2.8) เมื่อออพชันทั้งสองฝั่งมีราคาใช้สิทธิที่เท่ากันและมีอายุคงเหลือเท่ากันแล้ว ผลตอบแทนและต้นทุนของทั้งสองวิธีจะเท่ากัน ทำให้สามารถเขียนสมการความสัมพันธ์ของราคาออพชัน (Put-Call Parity) ได้ตามสมการต่อไปนี้ (Hull, 2012)

$$C + Ke^{-r_f t} = P + S \quad (2.9)$$

2.1.6 มูลค่าเวลาของออปชัน

การประเมินมูลค่าเวลาของออปชันสามารถทำได้ด้วยการประมาณค่าด้วยสูตรการคำนวณทางคณิตศาสตร์การเงิน เช่น สูตรราคาออปชันของ Black-Scholes หรือ ด้วยวิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลข เช่น แบบจำลองทวินามของออปชัน (Option Binomial Model) การศึกษาครั้งนี้เลือกใช้สูตรราคาออปชันของ Black-Scholes ในการศึกษาเนื่องจากมีความเหมาะสมกับลักษณะของออปชันดัชนี SET50 ซึ่งมีดัชนีหลักทรัพย์ SET50 เป็นสินทรัพย์อ้างอิง

2.1.7 แบบจำลองของ Black-Scholes-Merton

แบบจำลองของ Black-Scholes-Merton เป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของตลาดทางการเงิน นำเสนอ โดย Black, Merton & Scholes (1973) สมมติฐานของแบบจำลองนี้ เริ่มจากกำหนดให้ตลาดทางการเงินประกอบไปด้วยสินทรัพย์เสี่ยงและสินทรัพย์ไร้ความเสี่ยงอย่างละ 1 ชนิด เป็นอย่างน้อย เพื่อความง่ายในการคำนวณมักจะแทนสินทรัพย์เสี่ยงด้วยหุ้น และเรียกการลงทุนในสินทรัพย์ไร้ความเสี่ยงว่าการลงทุนในตลาดเงิน

โดยแบบจำลองนี้มีสมมติฐานของสินทรัพย์ ดังต่อไปนี้

1. อัตราผลตอบแทนแบบไร้ความเสี่ยง หมายถึง อัตราผลตอบแทนจากการลงทุนในสินทรัพย์ไร้ความเสี่ยง ซึ่งได้แก่อัตราดอกเบี้ยแบบไร้ความเสี่ยง มีลักษณะเป็นค่าคงที่
2. ผลตอบแทนของราคาหุ้นมีลักษณะการเคลื่อนไหวแบบบราวน์ (Brownian Motion) เป็นการเคลื่อนที่เชิงสุ่มแบบต่อเนื่อง โดยแนวโน้มและความผันผวนเป็นค่าคงที่
3. หุ้นไม่มีการจ่ายปันผล

และมีสมมติฐานของตลาด ดังต่อไปนี้

1. นักลงทุนทุกคนทราบข้อมูลในตลาดเท่ากัน ทำให้ไม่มีโอกาสในการทำกำไรโดยปราศจากความเสี่ยงในตลาด
2. สามารถกู้ยืมเงินจากตลาดในจำนวนใดก็ได้แม้จะเป็นจำนวนเศษส่วน โดยคิดอัตราดอกเบี้ยเท่ากับอัตราผลตอบแทนแบบไร้ความเสี่ยง
3. สามารถซื้อขายหรือชอร์ตหุ้นในตลาดเป็นจำนวนใดก็ได้แม้จะเป็นจำนวนเศษส่วน
4. การทำธุรกรรมในตลาดไม่มีต้นทุน

เมื่อสมมติฐานดังกล่าวเป็นจริง แบบจำลองนี้สามารถคำนวณผลตอบแทนของอนุพันธ์ทางการเงินในอนาคตเมื่อทราบราคาของสินทรัพย์อ้างอิง และสามารถคำนวณราคาอนุพันธ์ ณ เวลาปัจจุบันได้โดยไม่ต้องทราบราคาในอนาคตของสินทรัพย์อ้างอิง (Black & Scholes, 1973)

2.1.8 สมการของ Black-Scholes

สมการของ Black-Scholes เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่อธิบายการเปลี่ยนแปลงของสินทรัพย์ทางการเงิน ภายใต้แบบจำลองของ Black-Scholes-Merton ตั้งอยู่บนหลักการที่ว่าราคาที่เหมาะสมของสินทรัพย์จะมีเพียงราคาเดียวซึ่งเป็นราคาที่ไม่สามารถเกิดการทำการแบบไร้ความเสี่ยงระหว่างอุปสงค์กับสินทรัพย์อ้างอิง พิจารณาสมการ Black-Scholes ของสินทรัพย์ประเภทอุปสงค์

กำหนดให้ $V(S,t)$ เป็นฟังก์ชันราคาของอุปสงค์แบบยุโรปซึ่งขึ้นอยู่กับราคาหุ้นอ้างอิงและเวลา ให้ราคาหุ้นอ้างอิงเท่ากับ S ณ เวลา t ให้ σ เป็นความผันผวนของอัตราผลตอบแทนของหุ้นอ้างอิงและให้ r_f เป็นอัตราผลตอบแทนแบบไร้ความเสี่ยง สามารถเขียนสมการของ Black-Scholes สำหรับราคาอุปสงค์แบบยุโรปได้ดังต่อไปนี้

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = r_f V - r_f S \frac{\partial V}{\partial S} \quad (2.10)$$

ฟังก์ชันของสมการประกอบไปด้วยความเสื่อมค่าจากเวลา (Time Decay) ซึ่งเป็นผลของการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันราคาอุปสงค์อันเนื่องมาจากการเปลี่ยนแปลงของอายุอุปสงค์ (Duration Effect) กับ ความโค้งออกหรืออัตราการผลิตเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันราคาของอุปสงค์เทียบกับการเปลี่ยนแปลงของราคาหุ้น (Convexity Effect)

ฟังก์ชันของสมการประกอบไปด้วยผลตอบแทนแบบไร้ความเสี่ยงของสถานะถืออนุพันธ์ (Riskless Return of Long Derivative Position) และผลตอบแทนไร้ความเสี่ยงของสถานะชอร์ตของหุ้นจำนวนเท่ากับการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันราคาอุปสงค์อันเนื่องมาจากการเปลี่ยนแปลงของราคาหุ้น (Riskless Return of Short Stock Position) (Hull, 2012)

2.1.9 สูตรราคาอุปสงค์ของ Black-Scholes

สูตรราคาอุปสงค์ของ Black-Scholes เกิดจากการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของ Black-Scholes ภายใต้ขอบเขตราคาของอุปสงค์ โดยใช้วิธีการทางคณิตศาสตร์ในการเปลี่ยนรูปสมการให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของ Cauchy-Euler ซึ่งเป็นสมการการถ่ายเทความร้อน พิจารณาการแก้สมการ Black-Scholes ของราคา Call Option เมื่อทำการเปลี่ยนรูปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของ Black-Scholes โดยแทนตัวแปรใหม่ ดังต่อไปนี้

$$u = Ke^{r_f \tau} \quad (2.11)$$

$$x = \ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r_f - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau \quad (2.12)$$

เมื่อแทนค่ากลับเข้าไปในสมการ (2.10) สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของ Black-Scholes จะเปลี่ยนรูปเป็นสมการการถ่ายเทความร้อน (Black & Scholes, 1973) ซึ่งมีรูปสมการดังนี้

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.13)$$

ให้ขอบเขตราคาที่เป็นไปได้ในวันครบกำหนดสัญญาของราคา Call Option เป็นเงื่อนไขเริ่มต้น แทนค่าสมการ (2.4) ในสมการ (2.13) จะได้สมการการถ่ายเทความร้อนที่เวลาเริ่มต้น ($t = 0$)

$$u(x, 0) = u_0 Z(x) \equiv K(e^{\max\{x, 0\}} - 1) \quad (2.14)$$

แก้สมการ (2.13) ด้วยวิธีเดียวกับการแก้สมการการถ่ายเทความร้อน โดยอินทิเกรตสมการจากเวลาเริ่มต้นจนถึงวันครบกำหนดสัญญาเป็นระยะเวลา τ

$$u(x, \tau) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2\tau}} dy \quad (2.15)$$

สมการ (2.15) ประกอบไปด้วยฟังก์ชันการกระจายของค่าความน่าจะเป็นแบบปกติ แทน $N(\cdot)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของการกระจายแบบปกติ เข้าไปในสมการ

$$u(x, \tau) = Ke^{\frac{x+\frac{1}{2}\sigma^2\tau}{2}} N(d_1) - K(N(d_2)) \quad (2.16)$$

โดยที่

$$d_1 = \frac{\left[\left(x + \frac{1}{2}\sigma^2\tau \right) + \frac{1}{2}\sigma^2\tau \right]}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad (2.17)$$

$$d_2 = \frac{\left[\left(x + \frac{1}{2}\sigma^2\tau \right) - \frac{1}{2}\sigma^2\tau \right]}{\sigma\sqrt{\tau}} = d_1 - \sigma\sqrt{\tau} \quad (2.18)$$

เมื่อแทนค่าตัวแปรจากสมการ (2.11) และ (2.12) ในสมการ (2.16) (2.17) และ (2.18) สามารถเขียนสูตรราคาอปชั่นของ Black-Scholes สำหรับอปชั่นแบบยุโรปชนิด Call Option ซึ่งมีอายุคงเหลือเท่ากับ τ ได้ดังต่อไปนี้

$$C = S.N(d_1) - Ke^{-r_f\tau}.N(d_2) \quad (2.19)$$

โดยที่

$$d_1 = \frac{\left[\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r_f + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau \right]}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad (2.20)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau} \quad (2.21)$$

จากกฎการเท่ากันของราคาออปชัน (Put-Call Parity) สูตรราคาออปชันของ Black-Scholes สำหรับ Put Option แบบยุโรปซึ่งมีอายุคงเหลือเท่ากับ τ จะเป็นดังต่อไปนี้

$$P = Ke^{-r_f\tau} \cdot N(-d_2) - S \cdot N(-d_1) \quad (2.22)$$

โดยที่ d_1 และ d_2 มีค่าเท่ากับสมการ (2.20) และสมการ (2.21) ตามลำดับ

2.1.10 สูตรราคาออปชันของ Black-Scholes สำหรับสินทรัพย์อ้างอิงที่จ่ายปันผล

สำหรับสูตรคำนวณราคาของออปชันที่อ้างอิงดัชนีหลักทรัพย์ ซึ่งเกิดจากการคำนวณราคาหุ้นหลายตัวที่มีการจ่ายปันผลออกในเวลาที่แตกต่างกันตลอดปี สามารถตั้งสมมติฐานได้ว่าการลงทุนในดัชนีหลักทรัพย์จะได้รับผลตอบแทนเงินปันผลในอัตราต่อเนื่อง (Harvey & Whaley, 1992)

กำหนดให้ δ เป็นอัตราผลตอบแทนเงินปันผลต่อปีจากการลงทุนในดัชนีหลักทรัพย์ สามารถเขียนสูตรราคาออปชันของ Black-Scholes สำหรับออปชันแบบยุโรปชนิด Call Option ซึ่งมีอายุคงเหลือเท่ากับ τ ได้ดังต่อไปนี้

$$C = Se^{-\delta\tau} \cdot N(d_1) - Ke^{-r_f\tau} \cdot N(d_2) \quad (2.23)$$

และจากกฎการเท่ากันของราคาออปชัน (Put-Call Parity) สามารถเขียนสูตรราคาออปชันของ Black-Scholes สำหรับออปชันแบบยุโรปชนิด Put Option ซึ่งมีอายุคงเหลือเท่ากับ τ ได้ดังต่อไปนี้

$$P = Ke^{-r_f\tau} \cdot N(-d_2) - Se^{-\delta\tau} \cdot N(-d_1) \quad (2.24)$$

โดยที่ d_1 และ d_2 ของสมการ (2.23) และ (2.24) มีค่าดังต่อไปนี้

$$d_1 = \frac{\left[\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r_f - \delta + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau \right]}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad (2.25)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau} \quad (2.26)$$

2.2 การประมาณค่าความผันผวน

การศึกษาในครั้งนี้ทำการศึกษาความผันผวนหลายชนิด อันประกอบไปด้วยความผันผวนแฝง (Implied Volatility; IV) ความผันผวนจากข้อมูลการซื้อขายในอดีต (Historical Volatility; HV) และความผันผวนย้อนหลังของผลตอบแทน (Realized Return Volatility; RV)

โดยความผันผวนแฝงเป็นความผันผวนที่คำนวณจากราคาของสัญญาล่วงหน้า ซึ่งในการศึกษาครั้งนี้ใช้สัญญาออปชั่นในการศึกษา มีลักษณะเป็นความผันผวนที่รวมเอาการคาดการณ์ของตลาดต่อความผันผวนในอนาคตของสินทรัพย์อ้างอิง ส่วนความผันผวนจากข้อมูลการซื้อขายในอดีตเป็นความผันผวนที่คำนวณจากการใช้ข้อมูลการซื้อขายในอดีตของสินทรัพย์อ้างอิง เช่น คำนวณจากแบบจำลองความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไข

สำหรับความผันผวนย้อนหลังของผลตอบแทนเป็นการคำนวณโดยใช้ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของผลตอบแทนเฉลี่ยย้อนหลังของสินทรัพย์อ้างอิง ซึ่งความผันผวนชนิดนี้จะบ่งบอกถึงระดับความเสี่ยงในอนาคตของการลงทุนในระยะที่เท่ากับคาบเวลาที่น่าความผันผวนมาเฉลี่ย เช่นความผันผวนย้อนหลังรายเดือน จะเป็นระดับความเสี่ยงที่ผลตอบแทนของการลงทุนในอีก 1 เดือนข้างหน้าจะแตกต่างไปจากค่าเฉลี่ยของผลตอบแทนการลงทุนในรอบ 1 เดือนที่ผ่านมา

2.2.1 การประมาณค่าความผันผวนแฝง

การศึกษานี้ทำการศึกษาความผันผวนแฝงหลายชนิด อันประกอบไปด้วยค่าความผันผวนแฝงของออปชั่นดัชนี SET50 ชนิด Call Option และ Put Option ซึ่งเป็นความผันผวนแฝงที่เกิดจากเงื่อนไขเฉพาะตัวของสัญญาออปชั่นนั้น และความผันผวนแฝงของออปชั่นดัชนี SET50 ซึ่งเป็นความผันผวนแฝงที่เกิดจากความผันผวนของผลตอบแทนของสินทรัพย์อ้างอิงร่วมกับผลของการคาดการณ์ต่อความผันผวนในอนาคตของตลาด โดยคำนวณจากความผันผวนแฝง Call Option และ Put Option

1. การประมาณค่าความผันผวนแฝงของ Call Option

ค่าประมาณความผันผวนแฝงของ Call Option คำนวณจากราคาปิดรายวันของออปชั่นดัชนี SET50 ชนิด Call Option ของชุดสัญญาใกล้วันปัจจุบันที่มีสภาพคล่องในการซื้อขายสูงสุดและเลือกใช้ราคาปิดของสัญญาที่มีราคาใช้สิทธิใกล้กับราคาปิดของดัชนีหลักทรัพย์ SET50 มากที่สุดเพื่อลดผลของ Term Structure of Volatility และ Volatility Smile (Hwang & Satchell, 1998)

กำหนดให้ C เป็นราคาของออปชั่นดัชนี SET50 ชนิด Call Option ซึ่งมีราคาใช้สิทธิเท่ากับ K มีอายุคงเหลือของสัญญาเท่ากับ τ โดยมีสมมติฐานว่าราคาออปชั่นซื้อขายบนค่า

คาดหวังของความผันผวนของอัตราผลตอบแทนดัชนีหลักทรัพย์ SET50 ซึ่งเท่ากับ σ_c สามารถเขียนสูตรราคาอปชั่นของ Black-Scholes ได้ดังต่อไปนี้

$$C = Se^{-\delta\tau} \cdot N(d_1) - Ke^{-r_f\tau} \cdot N(d_2) \quad (2.27)$$

โดยที่

$$d_1 = \frac{\left[\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r_f - \delta + \frac{\sigma_c^2}{2}\right)\tau \right]}{\sigma_c \sqrt{\tau}} \quad (2.28)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_c \sqrt{\tau} \quad (2.29)$$

เมื่อ S เป็นราคาปิดของดัชนีหลักทรัพย์ SET50 ที่มีอัตราผลตอบแทนเงินปันผลเท่ากับ δ ($\delta=0$ ในกรณีที่มีสมมติฐานว่าไม่มีการจ่ายปันผล) และอัตราผลตอบแทนไร้ความเสี่ยงในขณะนั้นเท่ากับ r_f หากกำหนดให้ $\sigma_{iv(c)}$ เป็นความผันผวนแฝงของอปชั่นดัชนี SET50 ชนิด Call Option มีค่าเท่ากับค่าประมาณของ σ_c ซึ่งเป็นอัตราผลตอบแทนดัชนีหลักทรัพย์ SET50 ที่ได้จากการแก้สมการ (2.27) (2.28) และ (2.29) สามารถเขียนเป็นสมการความผันผวนแฝงได้ดังต่อไปนี้

$$\sigma_{iv(c)} = \sigma_c \quad (2.30)$$

2. การประมาณค่าความผันผวนแฝงของ Put Option

ค่าประมาณความผันผวนแฝงของ Put Option คำนวณจากราคาปิดรายวันของอปชั่นดัชนี SET50 ชนิด Put Option ของชุดสัญญาใกล้วันปัจจุบันที่มีสภาพคล่องในการซื้อขายสูงสุดและเลือกใช้ราคาปิดของสัญญาที่มีราคาใช้สิทธิใกล้กับราคาปิดของดัชนีหลักทรัพย์ SET50

กำหนดให้ P เป็นราคาของอปชั่นดัชนี SET50 ชนิด Put Option ซึ่งมีราคาใช้สิทธิเท่ากับ K มีอายุคงเหลือของสัญญาเท่ากับ τ โดยมีสมมติฐานว่าราคาอปชั่นซื้อขายบนค่าคาดหวังของความผันผวนของอัตราผลตอบแทนดัชนีหลักทรัพย์ SET50 ซึ่งเท่ากับ σ_p สามารถเขียนสูตรราคาอปชั่นของ Black-Scholes ได้ดังต่อไปนี้

$$P = Ke^{-r_f\tau} \cdot N(-d_2) - Se^{-\delta\tau} \cdot N(-d_1) \quad (2.31)$$

โดยที่

$$d_1 = \frac{\left[\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r_f - \delta + \frac{\sigma_p^2}{2}\right)\tau \right]}{\sigma_p \sqrt{\tau}} \quad (2.32)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_p \sqrt{\tau} \quad (2.33)$$

กำหนดให้ $\sigma_{iv(p)}$ เป็นความผันผวนแฝงของออปชั่นดัชนี SET50 ชนิด Put Option มีค่าเท่ากับค่าประมาณของ σ_p ซึ่งเป็นความผันผวนของอัตราผลตอบแทนดัชนีหลักทรัพย์ SET50 ที่ได้จากการแก้สมการ (2.31) (2.32) และ (2.33) สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังต่อไปนี้

$$\sigma_{iv(p)} = \sigma_p \quad (2.34)$$

3. การประมาณค่าความผันผวนแฝงเฉลี่ยของออปชั่นดัชนี SET50

ค่าประมาณความผันผวนแฝงของออปชั่น จากการคำนวณสมการ (2.30) และ (2.34) เป็นค่าประมาณความผันผวนแฝงของ Call Option และ Put Option ของออปชั่นดัชนี SET50 ที่มีราคาใช้สิทธิ์และอายุคงเหลือของสัญญาเท่ากัน หากยึดตามนิยาม Put-Call Parity แล้วความผันผวนแฝงของออปชั่นทั้ง 2 ชุดจะต้องเท่ากัน แต่ในความเป็นจริงความผันผวนแฝงทั้ง 2 ค่าอาจจะไม่เท่ากัน เนื่องจากสภาพคล่องของตลาดอนุพันธ์ ในการคำนวณความผันผวนแฝงเฉลี่ยของออปชั่นดัชนี SET50 จึงต้องคำนวณจากค่าเฉลี่ยของค่าประมาณความผันผวนแฝงของออปชั่นทั้ง 2 ชุด

กำหนดให้ σ_{iv} เป็นความผันผวนแฝงเฉลี่ยของออปชั่นดัชนี SET50 คำนวณจากค่าเฉลี่ยเลขคณิตของความผันผวนแฝงของ Call Option และ Put Option ดังสมการต่อไปนี้

$$\sigma_{iv,t} = \frac{\sigma_{iv(c),t} + \sigma_{iv(p),t}}{2} \quad (2.35)$$

2.2.2 การคำนวณข้อมูลความผันผวนย้อนหลังของอัตราผลตอบแทนดัชนี SET50

ความผันผวนย้อนหลังของอัตราผลตอบแทนดัชนี SET50 (Realized Volatility) ซึ่งใช้เป็นข้อมูลอ้างอิงในการศึกษา ใช้วิธีคำนวณจากผลตอบแทนรายวันดัชนีหลักทรัพย์ SET50 กำหนดให้ r เป็นอัตราผลตอบแทนดัชนีหลักทรัพย์ SET50 ให้ S เป็นราคาปิดของดัชนีหลักทรัพย์ SET50 สามารถคำนวณอัตราผลตอบแทนรายวันดัชนีหลักทรัพย์ SET50 ได้ดังสมการต่อไปนี้

$$r_t = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} \quad (2.36)$$

หากลงทุนในดัชนีหลักทรัพย์ SET50 อย่างสม่ำเสมอในช่วงเวลาหนึ่ง อัตราผลตอบแทนจากการลงทุนจะเท่ากับค่าเฉลี่ยของอัตราผลตอบแทนในช่วงเวลานั้น กำหนดให้ $\bar{r}_n$ เป็นผลตอบแทนเฉลี่ยย้อนหลังของดัชนีหลักทรัพย์ SET50 ที่เกิดจากการลงทุนอย่างสม่ำเสมอเป็นช่วงเวลา n สามารถเขียนสมการอัตราผลตอบแทนเฉลี่ยย้อนหลังของดัชนีหลักทรัพย์ SET50 ได้ดังต่อไปนี้

$$\bar{r}_{n,t} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} r_{t-i} \quad (2.37)$$

จากสมการ (2.37) สามารถคำนวณแปรปรวนของอัตราผลตอบแทนดัชนี SET50 ย้อนหลัง โดยใช้สูตรคำนวณความแปรปรวนย้อนหลังของกลุ่มตัวอย่าง กำหนดให้ S_n^2 เป็นความแปรปรวนของอัตราผลตอบแทนดัชนีหลักทรัพย์ SET50 ย้อนหลัง n คาบเวลาสามารถเขียนสมการความแปรปรวนของอัตราผลตอบแทนดัชนี SET50 ได้ดังต่อไปนี้

$$S_{n,t}^2 = \frac{\sum_{t=1}^n (r_t - \bar{r}_{n,t})^2}{n-1} \quad (2.38)$$

ความผันผวนอัตราผลตอบแทนเป็นค่าที่แสดงความแตกต่างของอัตราผลตอบแทนที่ได้รับกับอัตราผลตอบแทนที่ควรจะได้รับในรูปของผลตอบแทนต่อปี สามารถคำนวณได้จากค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของอัตราผลตอบแทน กำหนดให้ $\sigma_{rv(n)}$ เป็นความผันผวนของอัตราผลตอบแทนดัชนีหลักทรัพย์ SET50 ในช่วงเวลาย้อนหลัง n วัน ให้ λ_{yr} เป็นจำนวนวันทำการของตลาดหลักทรัพย์ต่อปี สามารถคำนวณความผันผวนย้อนหลังต่อปีของอัตราผลตอบแทนดัชนี SET50 ได้ดังต่อไปนี้

$$\sigma_{rv(n),t} = \sqrt{\lambda_{yr} S_{n,t}^2} \quad (2.39)$$

สำหรับวันทำการต่อปีที่นำมาคำนวณ ใช้จำนวนวันทำงานของตลาดหลักทรัพย์ต่อปีเฉลี่ย อ้างอิงจากข้อมูลของตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย โดยข้อมูลถึงปี พ.ศ. 2558 ตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทยมีวันทำการเฉลี่ย 245.7 วัน/ปี เนื่องจากค่าเฉลี่ยเปลี่ยนแปลงทุกปี จึงใช้วันทำการ 240 วัน เป็นจำนวนวันทำงานของตลาดหลักทรัพย์ต่อปี

2.2.3 การประมาณค่าความผันผวนจากข้อมูลในอดีตของดัชนี SET50

ความผันผวนจากข้อมูลในอดีตของดัชนีหลักทรัพย์ SET50 (Historical Volatility) ซึ่งจะนำมาใช้เป็นข้อมูลเปรียบเทียบ เป็นความผันผวนแบบสุ่ม (Stochastic Volatility) ชนิดหนึ่งซึ่งได้จากการประมาณแบบจำลองความจำระยะสั้น การศึกษาครั้งนี้เลือกใช้การประมาณค่าความผันผวนจากแบบจำลอง GARCH (p,q) เพื่อใช้เป็นวิธีพยากรณ์อ้างอิง

กำหนดให้ r เป็นอัตราผลตอบแทนดัชนีหลักทรัพย์ SET50 ซึ่งคำนวณได้จากสมการ (2.36) ให้ μ เป็นค่าเฉลี่ยของอัตราผลตอบแทนดัชนีหลักทรัพย์ SET50 และให้ ε_t เป็นพจน์ของส่วนคงเหลือจากการประมาณสมการ เขียนสมการ AR(p) ของผลตอบแทนดัชนี SET50 ได้ดังต่อไปนี้

$$r_t = \mu + \sum_{i=1}^p \phi_i r_{t-i} + \varepsilon_t \quad (2.40)$$

กำหนดให้ σ_{hv} เป็นความผันผวนที่ประมาณจากข้อมูลในอดีตของดัชนีหลักทรัพย์ SET50 h_t เป็นความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไขของส่วนคงเหลือจากการประมาณสมการ และ

กำหนดให้ λ_{yr} เป็นจำนวนวันทำการของตลาดหลักทรัพย์ต่อปี ซึ่งสามารถคำนวณความผันผวนที่ประมาณจากข้อมูลในอดีตได้จากสมการต่อไปนี้

$$\sigma_{hv,t} = \sqrt{\lambda_{yr} h_t} \quad (2.41)$$

การศึกษาในครั้งนี้ใช้จำนวนวันทำงานของตลาดหลักทรัพย์ไทยเท่ากับ 240 วัน/ปี ซึ่งเป็นค่าที่ใกล้เคียงกับวันทำการต่อปีโดยเฉลี่ย โดยความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไขของผลตอบแทนของดัชนีหลักทรัพย์ SET50 สามารถคำนวณได้จากแบบจำลองความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไขซึ่งประกอบไปด้วยแบบจำลอง GARCH ในรูปทั่วไปและแบบจำลอง GARCH ในรูปอื่นอันได้แก่ EGRACH และ TGARCH

2.2.4 การคำนวณข้อมูลความผันผวนเฉลี่ยรายสัปดาห์

สำหรับข้อมูลความผันผวนเฉลี่ยรายสัปดาห์ ใช้วิธีคำนวณค่าเฉลี่ยเลขคณิตจากความผันผวนแฝงและความผันผวนย้อนหลังรายวันที่คำนวณได้ดังวิธีข้างต้น โดยใช้วันทำการ 5 วันต่อสัปดาห์ มีวันจันทร์เป็นวันแรกของสัปดาห์ ไม่นับวันหยุดทำการของตลาดหลักทรัพย์

จากความผันผวนแฝง ซึ่งคำนวณจากสมการ (2.35) กำหนดให้ $\sigma_{iv,T}$ เป็นความผันผวนแฝงของสัปดาห์ที่ T ซึ่งมีจำนวนวันทำการในสัปดาห์เท่ากับ m และให้ i เป็นลำดับของวันทำการในสัปดาห์ $i = 1, 2, \dots, m$ สามารถคำนวณความผันผวนแฝงรายสัปดาห์ได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\sigma_{iv,T} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sigma_{iv,i} \quad (2.42)$$

จากความผันผวนจากข้อมูลในอดีต ซึ่งคำนวณจากสมการ (2.41) กำหนดให้ $\sigma_{hv,T}$ เป็นความผันผวนในอดีตของสัปดาห์ที่ T ซึ่งมีจำนวนวันทำการในสัปดาห์เท่ากับ m และให้ i เป็นลำดับของวันทำการในสัปดาห์ $i = 1, 2, \dots, m$ สามารถคำนวณความผันผวนในอดีตรายสัปดาห์ได้ดังต่อไปนี้

$$\sigma_{hv,T} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sigma_{hv,i} \quad (2.43)$$

2.2.5 การทดสอบความเหมาะสมของค่าประมาณและค่าพยากรณ์ความผันผวนแฝง

การทดสอบความเหมาะสมของค่าประมาณและค่าพยากรณ์ของความผันผวนแฝง ใช้วิธีทดสอบความสัมพันธ์กับสินทรัพย์อ้างอิง โดยใช้ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์เพียร์สันเป็นค่าสถิติในการศึกษา และใช้ค่าสถิติความคลาดเคลื่อนจากค่าความผันผวนที่เกิดขึ้นจริงของผลตอบแทนดัชนีหลักทรัพย์ SET50

1. ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์เพียร์สัน (Pearson Correlation Coefficient)

เป็นค่าสัมประสิทธิ์ที่ใช้ในการอธิบายความสัมพันธ์ของชุดข้อมูล 2 ชุด มีค่าอยู่ระหว่าง -1 และ 1 โดยค่าสัมประสิทธิ์อธิบายระดับความสัมพันธ์และเครื่องหมายอธิบายลักษณะของความสัมพันธ์ กำหนดให้ $\rho_{X,Y}$ เป็นค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์เพียร์สันของชุดข้อมูล X และ Y ซึ่งเป็นข้อมูลอนุกรมที่มีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ σ_X และ σ_Y ตามลำดับ โดยชุดข้อมูลทั้ง 2 มีความแปรปรวนร่วมเท่ากับ $cov(X,Y)$ มีสมการที่ใช้ในการคำนวณได้ดังต่อไปนี้

$$\rho_{X,Y} = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (2.44)$$

2. การทดสอบความคลาดเคลื่อนของการประมาณค่าและการพยากรณ์

การทดสอบความคลาดเคลื่อนของการประมาณค่าและการพยากรณ์ ใช้วิธีทดสอบความคลาดเคลื่อนทางสถิติระหว่างค่าประมาณ หรือ ค่าพยากรณ์ กับค่าความผันผวนที่เกิดขึ้นจริง โดยใช้ความผันผวนย้อนหลังของอัตราผลตอบแทนดัชนี SET50 เป็นข้อมูลอ้างอิง

กำหนดให้ $\hat{\sigma}$ เป็นค่าประมาณของความผันผวนหรือค่าพยากรณ์ความผันผวน ให้ $\sigma_{rv(n)}$ เป็นผันผวนย้อนหลัง n วันของอัตราผลตอบแทนดัชนี SET50 และให้ N เป็นจำนวนข้อมูลทั้งหมด สามารถคำนวณสถิติที่ใช้ในการทดสอบความเหมาะสมดังต่อไปนี้

Mean Absolute Error (MAE) เป็นค่าสถิติความคลาดเคลื่อนที่ใช้แสดงค่าเฉลี่ยของขนาดความคลาดเคลื่อนของค่าประมาณกับค่าจริง

Mean Absolute Forecast Error (MAFE) เป็นค่าสถิติความคลาดเคลื่อนที่ใช้แสดงค่าเฉลี่ยของขนาดความคลาดเคลื่อนของค่าพยากรณ์กับค่าจริง

$$MAE = MAFE = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N |\hat{\sigma}_t - \sigma_{rv(n),t}| \quad (2.45)$$

Root Mean Square Error (RMSE) เป็นค่าสถิติความคลาดเคลื่อนที่ใช้แสดงค่าเฉลี่ยของขนาดความคลาดเคลื่อนของค่าประมาณกับค่าจริง โดยใช้วิธีถ่วงน้ำหนักด้วยขนาดของค่าคลาดเคลื่อนจากค่าจริง

Root Mean Square Forecast Error (RMSFE) เป็นค่าสถิติความคลาดเคลื่อนที่ใช้แสดงค่าเฉลี่ยของขนาดความคลาดเคลื่อนของค่าพยากรณ์กับค่าจริง โดยใช้วิธีถ่วงน้ำหนักด้วยขนาดของค่าคลาดเคลื่อนจากค่าจริง

$$RMSE = RMSFE = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \sqrt{(\hat{\sigma}_t - \sigma_{rv(n),t})^2} \quad (2.46)$$

Mean Absolute Percentage Error (MAPE) เป็นค่าสถิติที่ใช้แสดงค่าเฉลี่ยของสัดส่วนความคลาดเคลื่อนของค่าประมาณกับค่าจริง โดยแสดงเป็นร้อยละของค่าจริง

Mean Absolute Percentage Forecast Error (MAPFE) เป็นค่าสถิติที่ใช้แสดงค่าเฉลี่ยของสัดส่วนความคลาดเคลื่อนของค่าพยากรณ์กับค่าจริง โดยแสดงเป็นร้อยละของค่าจริง

$$MAPE = MAPFE = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \frac{|\hat{\sigma}_t - \sigma_{rv(n),t}|}{\sigma_{rv(n),t}} \times 100 \quad (2.47)$$

2.3 ทฤษฎีเศรษฐมิติ

ทฤษฎีเศรษฐมิติเป็นศาสตร์ที่มีการประยุกต์ใช้วิธีการทางคณิตศาสตร์ สถิติ เข้ากับข้อมูลทางเศรษฐกิจเพื่อตอบปัญหาทางเศรษฐศาสตร์ สำหรับเศรษฐมิติที่เกี่ยวข้องกับเศรษฐศาสตร์การเงิน มักเป็นการหาความสัมพันธ์ของข้อมูลที่อยู่ในรูปอนุกรมเวลาซึ่งขั้นตอนการศึกษาจะเริ่มต้นจากขั้นตอนการทดสอบความนิ่งของข้อมูล

2.3.1 การทดสอบความนิ่งของข้อมูล

การศึกษาค้างนี้เป็นการศึกษาการพยากรณ์ข้อมูลซึ่งมีลักษณะเป็นข้อมูลอนุกรมเวลา ซึ่งสถิติที่นำมาศึกษานั้นต้องการข้อมูลอนุกรมเวลาที่มีลักษณะโครงสร้างนิ่ง (Stationary data) ไม่มีการเปลี่ยนแปลงตามเวลา ซึ่งหากข้อมูลมีลักษณะโครงสร้างที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา (Unit Root) จะทำให้เกิดปัญหาเกี่ยวกับค่าสถิติที่ประมาณได้ โดยข้อมูลที่มีลักษณะนิ่งจะต้องมีลักษณะต่อไปนี้

1. ข้อมูลจะต้องมีค่าเฉลี่ยคงที่
2. ข้อมูลจะต้องมีความแปรปรวนคงที่
3. ข้อมูลจะต้องมีความแปรปรวนร่วมคงที่ในแต่ละคาบเวลาที่เท่ากันในทุกช่วงเวลา

การทดสอบความนิ่งของข้อมูลอนุกรมเวลา (Unit Root test) มีหลายวิธีการ การศึกษาค้างนี้เลือกใช้วิธีการทดสอบแบบ Augmented Dickey-Fuller (ADF) และวิธีทดสอบแบบ The Kwiatkowski, Phillip, Schmidt & Shin (KPSS) เนื่องจากผลการศึกษาที่เกี่ยวข้อง พบว่าข้อมูลความผันผวนมีลักษณะของความจำระยะยาว (ชาตญาณ วิพัฒนานันท์กุล, 2553) ซึ่งในการทดสอบความนิ่งของข้อมูลแบบ Augmented Dickey-Fuller ซึ่งเป็นวิธีทดสอบมาตรฐาน มักจะไม่สามารถแยกลักษณะของอัตราสัมพันธ์ออกจากการเปลี่ยนแปลงโครงสร้างย่อยของข้อมูลได้ และจะทำให้ผลทดสอบความนิ่งของข้อมูลคลาดเคลื่อน จึงต้องใช้การทดสอบความนิ่งของข้อมูลที่มีสมมติฐานว่างในการทดสอบแตกต่างกันในการทดสอบข้อมูล

1. การทดสอบความนิ่งของข้อมูลแบบ Augmented Dickey-Fuller

การทดสอบแบบ Augmented Dickey-Fuller เป็นวิธีการทดสอบความนิ่งของข้อมูลที่พัฒนาจากการทดสอบแบบ Dickey-Fuller พิจารณาแบบจำลองของข้อมูลที่มีลักษณะอัตโนมัติ (Autoregressive Model) กำหนดให้ y_t เป็นตัวแปรตาม ให้ t เป็นคาบเวลา ให้ ρ เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของอัตโนมัติ และให้ ε_t เป็นพจน์ของส่วนคลาดเคลื่อน สามารถเขียนสมการของแบบจำลองได้ดังต่อไปนี้

$$y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.48)$$

พิจารณาค่าสัมประสิทธิ์ของอัตโนมัติ (ρ) ในกรณีต่อไปนี้

1. ค่าสัมบูรณ์ของสัมประสิทธิ์ของอัตโนมัติน้อยกว่าหนึ่ง ($|\rho| < 1$) อนุกรมเวลาจะเข้าสู่ความนิ่งเมื่อเวลาผ่านไป ($t \rightarrow \infty$)
2. ค่าสัมบูรณ์ของสัมประสิทธิ์ของอัตโนมัติเท่ากับ 1 ($|\rho| = 1$) จะทำให้ความแปรปรวนของข้อมูลขึ้นกับเวลามีค่าเท่ากับ $t\sigma^2$ เมื่อเวลาผ่านไปความแปรปรวนของข้อมูลจะเพิ่มขึ้นทำให้อนุกรมเวลาดังกล่าวเป็นข้อมูลที่ไม่นิ่ง ซึ่งบางครั้งเรียกอนุกรมเวลาที่มีลักษณะแบบนี้ว่าเป็นข้อมูลแนวจีนแบบสุ่ม (Random Walk)
3. ค่าสัมบูรณ์ของสัมประสิทธิ์ของอัตโนมัติมากกว่า 1 ($|\rho| > 1$) เมื่อเวลาผ่านไปความแปรปรวนของข้อมูลจะเพิ่มขึ้นแบบเอกซ์โพเนนเชียล ทำให้อนุกรมเวลาดังกล่าวเป็นข้อมูลที่ไม่นิ่ง (Dickey & Fuller, 1979)

สร้างแบบจำลองผลต่างลำดับที่หนึ่งของสมการ (2.48) เพื่อทำการทดสอบ

$$\Delta y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t - y_{t-1} \quad (2.49)$$

$$\Delta y_t = (\rho - 1)y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.50)$$

δ_f เป็นผลต่างของค่าสัมประสิทธิ์ของอัตโนมัติ มีค่าเท่ากับ $\delta_f = (\rho - 1)$

$$\Delta y_t = \delta_f y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.51)$$

การทดสอบแบบ Dickey-Fuller มีการทดสอบทั้งหมด 3 รูปแบบโดยทำการทดสอบจุดตัดแกนและแนวโน้มเวลา เช่นเดียวกับการทดสอบแบบ Augmented Dickey-Fuller ซึ่งมีการเพิ่มพจน์เพื่อแก้ไขปัญหา Serial Correlation ในสมการทดสอบ

กำหนดให้ Δy_t เป็นผลต่างลำดับที่หนึ่งของตัวแปรตาม ให้ α เป็นค่าคงที่ ให้ β เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของแนวโน้มเวลา ให้ δ_f เป็นผลต่างของค่าสัมประสิทธิ์ของอัตโนมัติ

ให้ φ_i เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของผลต่างลำดับที่หนึ่งของค่าลำดับที่ i ให้ p เป็นลำดับสูงสุดของ Serial Correlation ของสมการซึ่งเลือกด้วยค่าสถิติ Schwarz Info Criterion และให้ ε_t เป็นพจน์ของ ส่วนคลาดเคลื่อน เขียนสมการทดสอบแบบ Augmented Dickey-Fuller ได้ดังต่อไปนี้

1. สมการทดสอบ Augmented Dickey-Fuller แบบทั่วไป

$$\Delta y_t = \delta_f y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \varphi_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t \quad (2.52)$$

2. สมการทดสอบ Augmented Dickey-Fuller แบบมีจุดตัด

$$\Delta y_t = \alpha + \delta_f y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \varphi_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t \quad (2.53)$$

3. สมการทดสอบ Augmented Dickey-Fuller แบบมีจุดตัดและแนวโน้มเวลา

$$\Delta y_t = \alpha + \beta t + \delta_f y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \varphi_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t \quad (2.54)$$

ทำการประมาณค่าแบบจำลองดังกล่าวเพื่อทดสอบความนิ่งของข้อมูล การทดสอบ Augmented Dickey-Fuller ค่าสถิติที่นำมาทดสอบคือค่าสถิติของ δ_f มีสมมติฐานว่างคือ ค่า $\delta_f = 0$ ซึ่งจะทำให้ข้อมูลที่นำมาทดสอบมีลักษณะไม่นิ่ง ($\rho = 1$) ส่วนค่าสถิติที่ใช้ทดสอบจะใช้ค่าสถิติ t ที่มีการกระจายแบบเจาะจงตาม Dickey-Fuller Table ในการทดสอบแทนค่าสถิติ t ที่มีการกระจายแบบมาตรฐาน เนื่องจากการทดสอบเป็นการทดสอบพจน์คงเหลือ (Residual Term) จึงไม่สามารถใช้ค่าสถิติ t ที่มีการกระจายแบบมาตรฐานได้ (Dickey & Fuller, 1979)

2. การทดสอบความนิ่งของข้อมูลแบบ The Kwiatkowski, Phillip, Schmidt & Shin

ผลการทดสอบเชิงประจักษ์หลายครั้งแสดงให้เห็นว่าการทดสอบความนิ่งของข้อมูลแบบ Augmented Dickey-Fuller มีข้อผิดพลาดที่ไม่สามารถปฏิเสธสมมติฐานว่างของอนุกรมเวลาที่มีลักษณะไม่นิ่งหลายชุด Kwiatkowski, Phillips, Schmidt, & Shin (1992) จึงได้นำเสนอวิธีการทดสอบความนิ่งของข้อมูลโดยมีสมมติฐานว่างของการทดสอบที่แตกต่างจากการทดสอบความนิ่งของข้อมูลแบบทั่วไป (Kwiatkowski, Phillips, Schmidt, & Shin, 1992)

โดยการทดสอบ KPSS เริ่มจากแบบจำลองของอนุกรมเวลาที่ประกอบไปด้วยพจน์แนวโน้มเวลา พจน์ข้อมูลแนวเดินแบบสุ่ม (Random Walk) และพจน์คลาดเคลื่อนที่มีความนิ่ง (Stationary Error) กำหนดให้ y_t เป็นตัวแปรตาม ให้ t เป็นดัชนีเวลา มี ξ เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของแนวโน้มเวลา ให้ z_t เป็นพจน์แนวเดินแบบสุ่ม และให้ ε_t เป็นพจน์ของส่วนคลาดเคลื่อน สามารถเขียนสมการหลักของการทดสอบได้ดังต่อไปนี้

$$y_t = \xi t + z_t + \varepsilon_t \quad (2.55)$$

จากสมการ (2.55) ให้พจน์แนวโน้มแบบสุ่ม (z_t) มีสมการเป็น

$$z_t = z_{t-1} + v_t \quad (2.56)$$

ตั้งสมมติฐานให้พจน์คลาดเคลื่อน v_t มีการแจกแจงแบบ White Noise มีความแปรปรวนคงที่เท่ากับ σ_v^2 หรือ $v_t \sim iid(0, \sigma_v^2)$ โดยค่าคงที่ z_0 ทำหน้าที่เป็นจุดตัดของสมการ ซึ่งภายใต้สมมติฐานนี้ ข้อมูลที่นำมาทดสอบจะเป็นข้อมูลที่มีลักษณะนิ่งเมื่อความคลาดเคลื่อนของสมการแนวโน้มแบบสุ่มเป็นค่าคงที่ การทดสอบ KPSS จึงมีสมมติฐานว่างคือความแปรปรวนของ v_t เท่ากับศูนย์ ($\sigma_v^2 = 0$) ซึ่งจะทำให้ข้อมูลที่นำมาทดสอบมีลักษณะนิ่ง ค่าสถิติที่ใช้ทดสอบสมมติฐานคือค่าสถิติ Lagrange Multiplier

การทดสอบ KPSS ยังมีรูปแบบการทดสอบข้อมูลที่ไม่มีแนวโน้มเวลา ($\xi = 0$) ซึ่งเขียนสมการหลักของการทดสอบได้ดังต่อไปนี้

$$y_t = z_t + \varepsilon_t \quad (2.57)$$

การทดสอบแบบจำลองแบบนี้จะมีสมมติฐานเหมือนกับการทดสอบแบบปกติ บางกรณีจะใช้ค่าสถิติ Locally Best Invariant Test ในการทดสอบ

2.3.2 การพยากรณ์ข้อมูลอนุกรมเวลา

ในทางเศรษฐมิติ มีวิธีการพยากรณ์ข้อมูลอนุกรมเวลา ทั้งสิ้น 5 รูปแบบด้วยกัน ได้แก่ Exponential Smoothing Method, Single-Equation Regression Model, Simultaneous-Equation Regression Model, Autoregressive Integrated Moving Average models (ARIMA models) และ Vector Autoregression ซึ่งแต่ละกระบวนการพยากรณ์มีความเหมาะสมกับข้อมูลอนุกรมเวลาที่มีลักษณะแตกต่างกัน

การศึกษานี้ใช้วิธีแบบจำลอง ARIMA ซึ่งเป็นแบบจำลองของข้อมูลที่ตัวแปรตามมีความสัมพันธ์กับค่าของตัวเองแปรตามในอดีตในการพยากรณ์ข้อมูลอนุกรมเวลาของความผันผวนแฝง โดยใช้กระบวนการทดสอบทางสถิติแบบ Box-Jenkins ซึ่งนำเสนอโดย Box & Jenkins (1970) (Gujarati, 2004)

2.3.3 แบบจำลอง ARIMA

แบบจำลอง Autoregressive Integrated Moving Average models หรือแบบจำลอง ARIMA เป็นการพยากรณ์ข้อมูลอนุกรมเวลาโดยใช้ข้อมูลในอดีตของตัวเองแปรตามหรือเรียกว่าค่าล่า (Lag) ในการอธิบายตัวแปรตามโดยไม่มีตัวแปรอื่นร่วมอธิบาย

1. Autoregressive Process (AR)

เป็นกระบวนการของข้อมูลอนุกรมเวลาที่ตัวแปรตามมีความสัมพันธ์เชิงเส้นกับค่าของตัวแปรตามในอดีต พิจารณาแบบจำลองของข้อมูลอนุกรมเวลาที่มีลักษณะหนึ่ง ซึ่งตัวแปรตามมีความสัมพันธ์เชิงเส้นกับค่าของตัวแปรตามที่เกิดขึ้นเมื่อคาบเวลาที่แล้ว กำหนดให้ y_t เป็นตัวแปรตามซึ่งมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ ให้ t เป็นคาบเวลา และให้ ε_t เป็นพจน์ของส่วนคลาดเคลื่อน สามารถเขียนแบบจำลองได้ดังต่อไปนี้

$$y_t = \mu + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.58)$$

เมื่อ ε_t ไม่มีความสัมพันธ์กับตัวแปรตาม มีลักษณะการแจกแจงแบบ White Noise มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์และความแปรปรวนคงที่ หรือ $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$ สามารถเรียกสมการ (2.58) ว่าเป็นแบบจำลอง First-Order Autoregressive หรือ AR(1) เรียก ϕ_1 ว่าเป็น First-Order Autoregressive Parameter

หากข้อมูลอนุกรมเวลาที่มีลักษณะที่ตัวแปรตามมีความสัมพันธ์เชิงเส้นกับค่าของตัวแปรตามที่เกิดขึ้นแล้วมากกว่า 1 คาบเวลา สามารถเขียนแบบจำลองในรูปทั่วไป หรือ AR(p) ได้ดังต่อไปนี้

$$y_t = \mu + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t \quad (2.59)$$

และเขียนสมการ (2.59) ในรูปทั่วไปได้ดังต่อไปนี้

$$y_t = \mu + \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} + \varepsilon_t \quad (2.60)$$

กำหนดให้ L เป็นตัวดำเนินการค่าล่า (Lag Operator) ซึ่งมีค่าเท่ากับค่าของตัวแปรในอดีตในจำนวน ℓ คาบเวลา เมื่อ $\ell = 1, 2, \dots, p$ สามารถเขียนค่าล่าของ y_t ในรูปของตัวดำเนินการค่าล่า ได้ดังนี้ $Ly_t = y_{t-1}$, $L^2 y_t = y_{t-2}$, ..., $L^p y_t = y_{t-p}$

จากสมการ (2.59) เมื่อกำหนดให้ $\Phi(L)$ เป็น Autoregressive Function ในรูปของตัวดำเนินการค่าล่า สามารถเขียนแบบจำลอง AR(p) ในรูปของฟังก์ชันตัวดำเนินการค่าล่าได้ดังต่อไปนี้

$$\Phi(L)y_t = (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p)y_t \quad (2.61)$$

2. Moving Average Process (MA)

เป็นกระบวนการของข้อมูลอนุกรมเวลาที่ตัวแปรตามมีความสัมพันธ์เชิงเส้นกับพจน์คลาดเคลื่อนในอดีต พิจารณาแบบจำลองของข้อมูลอนุกรมเวลาที่มีลักษณะหนึ่ง ซึ่งมีลักษณะที่ตัว

แปรตามมีความสัมพันธ์เชิงเส้นกับค่าคงที่และค่าของส่วนคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นเมื่อคาบเวลาที่แล้วกำหนดให้ y_t เป็นตัวแปรตามซึ่งมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ ให้ t เป็นคาบเวลาและให้ ε_t เป็นพจน์ของส่วนคลาดเคลื่อน สามารถเขียนแบบจำลองได้ดังต่อไปนี้

$$y_t = \mu + \theta_0 \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} \quad (2.62)$$

เมื่อพจน์คลาดเคลื่อน ε_t และ ε_{t-1} มีการแจกแจงแบบ White Noise สมการ (2.62) เรียกว่าแบบจำลอง First-Order Moving Average หรือ MA(1) เรียก θ_0 และ θ_1 ว่าเป็นสัมประสิทธิ์ค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ลำดับที่ 0 และ 1 ตามลำดับ

หากข้อมูลอนุกรมเวลามีลักษณะที่ตัวแปรตามมีความสัมพันธ์เชิงเส้นกับค่าของส่วนคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นเมื่อคาบเวลาที่แล้วมากกว่า 1 คาบเวลา สามารถเขียนแบบจำลองค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ลำดับที่ q หรือ MA(q) ได้ดังต่อไปนี้

$$y_t = \mu + \theta_0 \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (2.63)$$

และเขียนสมการ (2.63) ในรูปทั่วไปได้ดังต่อไปนี้

$$y_t = \mu + \sum_{i=0}^q \theta_i \varepsilon_{t-i} \quad (2.64)$$

จากสมการ (2.63) เมื่อกำหนดให้ $\Theta(L)$ เป็นฟังก์ชันค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ในรูปของตัวดำเนินการค่าล่า เขียนแบบจำลอง MA(q) ในรูปของฟังก์ชันตัวดำเนินการค่าล่าได้ดังต่อไปนี้

$$\Theta(L)\varepsilon_t = (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q) \varepsilon_t \quad (2.65)$$

3. Autoregressive Moving Average (ARMA Process)

หากพิจารณาข้อมูลอนุกรมเวลาแล้วจะพบว่าข้อมูลมักจะมีลักษณะของ Autoregressive พร้อมกับ Movig Average เรียกกระบวนการนี้ว่า Autoregressive Moving Average หรือ ARMA สามารถเขียนแบบจำลอง ARMA ที่ตัวแปรตามมีความสัมพันธ์กับข้อมูลที่เกิดขึ้นเมื่อคาบเวลาที่ผ่านมาได้ดังต่อไปนี้

$$y_t = \mu + \varphi_1 y_{t-1} + \theta_0 \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} \quad (2.66)$$

สมการ (2.66) เป็นสมการ ARMA(1,1) สามารถเขียนแบบจำลอง ARMA ในรูปทั่วไปหรือ ARMA (p, q) ได้ดังต่อไปนี้

$$y_t = \mu + \sum_{i=1}^p \varphi_i y_{t-i} + \sum_{i=0}^q \theta_i \varepsilon_{t-i} \quad (2.67)$$

4. Autoregressive Integrated Moving Average (ARIMA)

แบบจำลอง ARMA (p,q) ตั้งอยู่บนสมมติฐานที่ว่าข้อมูลอนุกรมเวลามีลักษณะหนึ่ง อย่างไรก็ตามข้อมูลอนุกรมเวลาทางเศรษฐศาสตร์มักเป็นข้อมูลที่ไม่นิ่ง เนื่องจากเป็นข้อมูลที่เกิดจากการรวมเข้าด้วยกัน (Integrated Data) (Gujarati, 2004) ดังนั้น ก่อนทำการพยากรณ์ข้อมูลด้วยแบบจำลอง ARMA จะต้องมีการปรับข้อมูลให้นิ่ง

โดยหากข้อมูลมีลำดับของการรวมเข้าด้วยกัน (Order of Integration) เท่ากับ 1 หรือ I(1) จะมีสมการผลต่างลำดับที่ 1 (First Order Differential) เป็นข้อมูลแบบไม่มีลำดับของการรวมเข้าด้วยกัน หรือ I(0) ซึ่งมีลักษณะนิ่ง เช่นเดียวกับข้อมูลมีลำดับของการรวมเข้าด้วยกัน เท่ากับ I(2) จะมีสมการผลต่างลำดับที่ 2 (Second Order Differential) เป็นข้อมูลแบบ I(0) ซึ่งมีลักษณะนิ่ง

แบบจำลอง Autoregressive Integrated Moving Average หรือ ARIMA เป็นแบบจำลองของข้อมูลที่มีลำดับของการรวมเข้าด้วยกัน ซึ่งคือกระบวนการ ARMA ที่ต้องปรับข้อมูลด้วยวิธีหาผลต่างก่อน โดย d เป็นสัมประสิทธิ์ของ Order of Differencing มีค่าเป็นจำนวนเต็มและมากกว่าศูนย์ สามารถเขียนแบบจำลอง ARIMA (p,d,q) ในรูปทั่วไปได้ดังต่อไปนี้

$$\Delta^d y_t = \mu + \sum_{i=1}^p \varphi_i \Delta^d y_{t-i} + \sum_{i=0}^q \theta_i \varepsilon_{t-i} \quad (2.68)$$

จากสมการ (2.68) สามารถเขียนแบบจำลอง ARIMA (p,d,q) ในรูปของฟังก์ชันตัวดำเนินการค่าได้ดังต่อไปนี้

$$\Phi(L)(1-L)^d y_t = \mu + \Theta(L)\varepsilon_t \quad (2.69)$$

ในการพยากรณ์ข้อมูลอนุกรมด้วยแบบจำลอง ARIMA จะต้องมีการหา Order of Integration ของข้อมูลก่อนทุกครั้ง โดยใช้วิธีการทดสอบความนิ่งของข้อมูล (Unit Root Test) ด้วยสมการผลต่างลำดับต่างๆ เพื่อหา Order of Differencing ที่ทำให้ข้อมูลเป็นข้อมูลที่นิ่ง

2.3.4 แบบจำลองกระบวนการความจำระยะยาว

กระบวนการความจำระยะยาว (Long Memory Process) เป็นกระบวนการที่ใช้อธิบายข้อมูลอนุกรมที่มีความสัมพันธ์เป็นระยะเวลายาวนาน (Long-range Dependence) กับค่าในอดีตของข้อมูล มากพอที่จะทำให้ข้อมูลไม่นิ่งแต่ไม่มากพอที่จะมีลำดับของการรวมเข้าด้วยกันเท่ากับ 1 หรืออาจกล่าวได้ว่าเป็นข้อมูลที่มี Order of Integration อยู่ระหว่าง I(0) และ I(1) เรียกข้อมูลประเภทนี้ว่าข้อมูลที่มีลำดับของการรวมเข้าด้วยกันเป็นแบบเศษส่วน (Fractional Integration Data) หรือ I(d) เมื่อ d เป็นจำนวนจริง

พิจารณากระบวนการ ARMA ที่มีลักษณะหนึ่ง พบว่าแม้เฉพาะตัวกระบวนการอัตโนมัติสหสัมพันธ์หรือ AR จะเป็นกระบวนการที่มีความจำแบบไม่มีสิ้นสุด (Infinite Memory) เนื่องจากค่าของพจน์คลาดเคลื่อน ε_t ทั้งหมดจะถูกนำมารวมในค่าตัวแปรตาม y_t แต่เมื่อรวมเข้ากับกระบวนการของผลของพจน์คลาดเคลื่อนหรือ MA ซึ่งผลของ ε_t จำกัดเฉพาะคาบเวลาที่กำหนด จะทำให้ฟังก์ชันอัตโนมัติสหสัมพันธ์ เข้าสู่ค่าศูนย์อย่างรวดเร็ว ด้วยผลดังกล่าวจึงเรียกแบบจำลอง ARMA ว่าเป็นแบบจำลองแบบกระบวนการความจำระยะสั้น (Short Memory Process) (Brockwell & Davis, 1991)

กระบวนการความจำระยะยาว คือกระบวนการ ARMA ที่ผลของกระบวนการอัตโนมัติสหสัมพันธ์คงอยู่เป็นเวลานาน หรือมีลักษณะ Persistence เรียกกระบวนการนี้ว่า Fractional Integrated ARMA process สำหรับการพยากรณ์ข้อมูล ใช้แบบจำลอง Autoregressive Fractional Integrated Moving Average หรือ ARFIMA ซึ่งก็คือแบบจำลอง ARIMA ที่ใช้วิธีการหาผลต่างแบบเศษส่วน (Fractional Differencing) ในการปรับข้อมูล โดย Order of Fractional Differencing มีค่าเท่ากับ $0 < |d| < 0.5$ เขียนแบบจำลอง ARFIMA (p,d,q) ในรูปของฟังก์ชันตัวดำเนินการค่าได้ดังต่อไปนี้

$$\Phi(L)(1-L)^d y_t = \mu + \Theta(L)\varepsilon_t \quad (2.70)$$

เมื่อ $(1-L)^d$ เป็นตัวดำเนินการผลต่างแบบเศษส่วน แสดงเป็นสมการ ได้ดังต่อไปนี้

$$(1-L)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k-d)L^k}{\Gamma(-d)\Gamma(k+1)} \quad (2.71)$$

โดย $\Gamma(\cdot)$ เป็นฟังก์ชันแกมมา (Generalized Factorial Function) และ k เป็นจำนวนคาบเวลา ระหว่างค่าลากับค่าปัจจุบัน โดย $k=0,1,2,\dots,\infty$

สำหรับค่าของสัมประสิทธิ์ของ Order of Fractional Differencing (d) นั้น Hosking (1981) แสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันอัตโนมัติสหสัมพันธ์ของกระบวนการ ARFIMA กับคาบเวลา ดังสมการต่อไปนี้

$$\rho(k) \sim Ck^{2d-1} \quad (2.72)$$

โดยค่า C ไม่เท่ากับศูนย์ หรือ $C \neq 0$ เมื่อข้อมูลเข้าสู่ค่าอนันต์ ($k \rightarrow \infty$) ข้อมูลจะเป็นข้อมูลที่นิ่ง เมื่อ $2d-1 < 1$ ซึ่งเกิดขึ้นเมื่อ $|d| < 0.5$ แบ่งออกเป็น 2 กรณี

1. กรณีที่ $-0.5 < d < 0$ ข้อมูลจะมีลักษณะของความสัมพันธ์เชิงลบในระยะยาว (Long-range Negative Dependence) หรือมีลักษณะ Anti-persistence บางครั้งเรียกว่ากระบวนการความจำระยะกลาง (Intermediate Memory)

2. กรณีที่ $0 < d < 0.5$ ข้อมูลจะมีลักษณะของความสัมพันธ์ระยะยาว (Long-range Dependence) หรือมีลักษณะ Persistence หรือ กระบวนการความจำระยะยาว (Long Memory Process)

เมื่อเวลาผ่านไป ทั้ง 2 กรณีจะทำให้ฟังก์ชันอัตโนมัติสัมพันธ์ลู่เข้าสู่ค่าศูนย์ ($\rho(\cdot) \rightarrow 0$) ด้วยอัตราลดลงแบบไฮเพอร์โบลิก (Hyperbolically decay) (Brockwell & Davis, 1991)

โดยสรุปแล้วสามารถเขียนแบบจำลอง ARFIMA (p,d,q) ในรูปทั่วไป ได้ดังต่อไปนี้

$$\Delta^d y_t = \mu + \sum_{i=1}^p \phi_i \Delta^d y_{t-i} + \sum_{i=0}^q \theta_i \varepsilon_{t-i} \quad -0.5 < d < 0.5 \quad (2.73)$$

2.3.5 แบบจำลอง Scale-truncated ARFIMA

แบบจำลองอนุกรมเวลาดังอยู่บนสมมติฐานว่าข้อมูลที่นำมาใช้เป็นแบบข้อมูลต่อเนื่อง ย้อนหลังไม่จำกัด สำหรับแบบจำลองความจำระยะสั้นผลที่ได้จากการศึกษาจะเป็นไปตามทฤษฎี เนื่องจากแบบจำลองนำผลเฉพาะค่าค่าที่ใกล้ค่าปัจจุบันมากำนวน โดยมีสมมติฐานว่าผลของค่าที่นอกเหนือจากนั้นถูกรวมเอาไว้ในค่าที่นำมาคำนวณหมดแล้ว

แต่สำหรับแบบจำลองความจำระยะยาวนั้น ตัวแบบจำลองต้องการข้อมูลที่เป็นแบบไม่จำกัดซึ่งไม่สามารถทำได้ในทางปฏิบัติ ทำให้ในการประมาณสมการ ARFIMA ข้อมูลช่วงต้นจะนำผลของฟังก์ชัน AR ที่ไม่มีอยู่มาร่วมคำนวณ ส่งผลให้ผลการศึกษาที่ได้ไม่สอดคล้องกับทฤษฎี

Satchell & Hwang (1998) จึงได้นำเสนอแบบจำลอง Scale-truncated ARFIMA โดยใช้เทคนิคการตัดข้อมูลในส่วนแรกซึ่งนำมาคำนวณฟังก์ชัน Autoregressive ของข้อมูลออก จนถึงค่าที่เกิดจากการรวมกันฟังก์ชัน Autoregressive ใกล้เคียงกับ 1 มากที่สุด ซึ่งสามารถหาจำนวนข้อมูลที่ตัดออกโดยใช้ค่าของ Order of Fractional Differencing จากการประมาณสมการ ARFIMA ในครั้งแรก ด้วยกระบวนการค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ (Zero Mean Process) จากนั้นจึงปรับข้อมูลทั้งหมดเพื่อให้ผลรวมของฟังก์ชัน Autoregressive ของข้อมูลที่นำมาคำนวณมีค่าใกล้เคียงกับ 1 มากที่สุด กำหนดให้ x_t เป็นตัวแปรตาม สามารถเขียนแบบจำลอง Scale-truncated ARFIMA ได้ดังต่อไปนี้

$$(1-L)^{d_{sr}} x_t = \varepsilon_t \quad (2.74)$$

สามารถเขียนสมการ (2.74) ในรูปแบบของกระบวนการ ARMA ได้ดังต่อไปนี้

$$x_t = \sum_{j=1}^m \phi_j^* x_{t-j} + v_t \quad \sum_{j=1}^m \phi_j^* = 1 \quad (2.75)$$

ให้ ϕ^* เป็นสัมประสิทธิ์ AR ในช่วงค่าค่า m เท่ากับจำนวนข้อมูลที่ถูกละทิ้งออก กระบวนการ AR ดังกล่าวยังคงลักษณะการลู่เข้าสู่ค่าศูนย์ด้วยอัตราลดลงแบบไฮเพอร์โบลิก

กำหนดให้ $\Gamma(\cdot)$ เป็นฟังก์ชันแกมมา (Generalized Factorial Function) และ j เป็นค่าเวลาระหว่าง m กับค่าปัจจุบัน ($j=1,2,...,m$) สามารถคำนวณค่า m จาก Order of Fractional Differencing ที่ได้จากการประมาณสมการ ARFIMA ในครั้งแรก ดังสมการต่อไปนี้

$$\phi_j^* = \frac{\Gamma(j-d)}{\Gamma(j+1)\Gamma(-d)} / \sum_{j=1}^m \frac{\Gamma(j-d)}{\Gamma(j+1)\Gamma(-d)} \quad (2.76)$$

สามารถเขียนแบบจำลอง Scale-truncated ARFIMA (p,d,q) ได้ดังต่อไปนี้

$$(1-\Phi(L))(1-L)^{d_{st}}(x_t - \tilde{\mu}) = (1-\Theta(L))\varepsilon_t \quad (2.77)$$

โดยที่สามารถเขียนฟังก์ชัน $\Phi(L)$ และ $\Theta(L)$ ได้ดังต่อไปนี้

$$\Phi(L) = \phi_1^*L + \phi_2^*L^2 + \dots + \phi_p^*L^p \quad (2.78)$$

$$\Theta(L) = \theta_1L + \theta_2L^2 + \dots + \theta_qL^q \quad (2.79)$$

2.3.6 การพยากรณ์ความแปรปรวนของอนุกรมเวลา

ในการประมาณค่าข้อมูลอนุกรมเวลาทางเศรษฐมิติดนั้น หากความแปรปรวนของส่วนคงเหลือไม่คงที่ จะทำให้ความแปรปรวนของค่าประมาณพารามิเตอร์เกิดความเอนเอียง Engle (1982) ได้นำเสนอกระบวนการ Autoregressive Conditional Heteroskedasticity หรือ ARCH ซึ่งแยกความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไขออกจากส่วนคงเหลือจากการประมาณสมการและทำให้ความแปรปรวนที่ไม่มีเงื่อนไขของส่วนคลาดเคลื่อนนั้นคงที่ (Bollerslev, 1986)

ให้ส่วนคลาดเคลื่อนประกอบไปด้วยส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานที่ขึ้นกับเวลา σ_t และความคลาดเคลื่อนแบบสุ่ม z_t กำหนดให้ ε_t เป็นพจน์ของส่วนคลาดเคลื่อนจากการประมาณสมการ สามารถเขียนสมการ ARCH ได้ดังต่อไปนี้

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t \quad (2.80)$$

กำหนดให้ h_t เป็นความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไขของส่วนคลาดเคลื่อน เมื่อ z_t มีการแจกแจงแบบ White Noise สามารถเขียนแบบจำลอง ARCH (q) ได้ดังต่อไปนี้

$$h_t = \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2\varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \alpha_q\varepsilon_{t-q}^2 \quad (2.81)$$

Bollerslev (1986) เสนอแบบจำลอง GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) ซึ่งเป็นแบบจำลองที่มีเงื่อนไขว่าความแปรปรวนมีการแจกแจงแบบปกติ

$$\varepsilon_t = \xi_t \sigma_t \quad \xi_t \sim N(0, h_t) \quad (2.82)$$

สามารถเขียนแบบจำลอง GARCH (p,q) ในรูปทั่วไปได้ดังต่อไปนี้

$$h_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2 + \beta_1 h_{t-1} + \dots + \beta_p h_{t-p} \quad (2.83)$$

แบบจำลอง GARCH แบ่งออกได้หลายรูปแบบจำแนกตามลักษณะการแจกแจงของความแปรปรวน อันได้แก่แบบจำลอง Exponential General Autoregressive Conditional Heteroskedasticity หรือแบบจำลอง EGARCH (p,q) มีสมมติฐานว่าการเปลี่ยนแปลงของความแปรปรวนมีการกระจายของทิศทางแบบสมมาตรแต่แบบจำลองนี้ให้น้ำหนักกับความแปรปรวนในแต่ละทิศทางไม่เท่ากัน กำหนดให้ α เป็นสัมประสิทธิ์ของขนาดการเปลี่ยนแปลงของความแปรปรวน γ เป็นสัมประสิทธิ์ของทิศทางของความแปรปรวน สามารถเขียนแบบจำลอง EGARCH (p,q) ได้ดังต่อไปนี้

$$\ln h_t = \omega + \sum_{i=1}^p \beta_i \ln h_{t-i} + \sum_{j=1}^q \left[\alpha_j |\eta_{t-j}| + \gamma_j \eta_{t-j} \right], \quad \eta_t = \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{h_t}} \quad (2.84)$$

แบบจำลอง Threshold General Autoregressive Conditional Heteroskedasticity หรือแบบจำลอง TGARCH (p,q) เป็นอีกรูปแบบหนึ่งของแบบจำลอง GARCH โดยมีสมมติฐานว่าการเปลี่ยนแปลงของความแปรปรวนมีการกระจายของทิศทางแบบไม่สมมาตร โดยแบบจำลองนี้แยกขนาดของความแปรปรวนออกตามทิศทางของการเปลี่ยนแปลง โดยไม่มีการถ่วงน้ำหนัก กำหนดให้ γ เป็นสัมประสิทธิ์ของความแปรปรวนในทิศทางลบ เขียนแบบจำลอง TGARCH (p,q) ได้ดังต่อไปนี้

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i} + \sum_{j=1}^q \left(\alpha_j \varepsilon_{t-j}^2 + \gamma_j D_{j,t-1} \varepsilon_{t-j}^2 \right), \quad D_{t-1} = \{1 | \varepsilon_{t-1} < 0, 0 | \varepsilon_{t-1} \geq 0\} \quad (2.85)$$

2.3.7 การทดสอบความเหมาะสมของแบบจำลองเศรษฐกิจ

เป็นการทดสอบความสามารถของแบบจำลองในการอธิบายตัวแปรตามและความสูญเสียข้อมูลเนื่องจากจำนวนตัวแปรในสมการ ประกอบไปด้วยค่าสถิติดังต่อไปนี้

1. ค่าสถิติ R^2 และ Adjusted R^2 (Goodness of Fit)

แสดงความเหมาะสมของแบบจำลองในการอธิบายตัวแปรตาม โดยค่าสถิติ R^2 ที่สูงแสดงว่าแบบจำลองสามารถอธิบายตัวแปรตามได้ดี หากค่าสถิติ R^2 มีค่าต่ำแสดงว่ามีตัวแปรนอกแบบจำลองที่ส่งผลต่อตัวแปรตามมากกว่า กำหนดให้ y_i เป็นตัวแปรตาม $\hat{y}_i$ เป็นค่าประมาณของตัวแปรตาม และ $\bar{y}$ เป็นค่าเฉลี่ยของตัวแปรตาม ข้อมูลมีจำนวน n ตัว คำนวณค่า R^2 ได้ดังต่อไปนี้

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (2.86)$$

สำหรับค่าสถิติ Adjusted R^2 เป็นค่าสถิติ R^2 ที่ปรับด้วย Degree of Freedom เพื่อลดความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการเพิ่มตัวแปรอธิบายเข้าไปในแบบจำลอง หากข้อมูลมีจำนวน n ตัว และ แบบจำลองมีตัวแปรอธิบาย k ตัว สามารถคำนวณค่า Adjusted R^2 ($\bar{R}^2$) ได้ดังต่อไปนี้

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{n-1}{n-k-1} \quad (2.87)$$

2. ค่าสถิติ Akaike Info Criterion (AIC)

ค่า Akaike Info Criterion เป็นค่าประมาณข้อมูลที่สูญเสียไปจากเพิ่มจำนวนตัวแปรตามของแบบจำลอง กำหนดให้ k เป็นจำนวนตัวแปรในแบบจำลอง และ $\mathcal{L}_{max}$ เป็นค่าสูงสุดของฟังก์ชัน Likelihood ของแบบจำลอง สามารถคำนวณค่า Akaike Info Criterion (AIC) ได้ดังต่อไปนี้

$$AIC = 2k - \mathcal{L}_{max} \quad (2.88)$$

3. ค่าสถิติ Schwarz Criterion (SC)

ค่า Schwarz Criterion เป็นค่าประมาณข้อมูลที่สูญเสียไปจากเพิ่มจำนวนตัวแปรตามของแบบจำลอง สามารถคำนวณค่า Schwarz Criterion (SC) ได้ดังต่อไปนี้

$$SC = -2 \cdot \ln(\mathcal{L}_{max}) + k \cdot \ln(n) \quad (2.89)$$

2.4 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การศึกษาค้นคว้าแบบอิสระครั้งนี้ ผู้ทำการศึกษาได้ทำการศึกษาค้นคว้างานวิจัยที่เกี่ยวข้องและสอดคล้อง อันประกอบไปด้วยงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความผันผวนแฝงและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการพยากรณ์ข้อมูลอนุกรมเวลาดังต่อไปนี้

อนุสร ต่ายห้วดง (2551) ได้ทำการศึกษาค่าประมาณค่าความผันผวนสำหรับผลตอบแทนของดัชนีหลักทรัพย์ SET50 ด้วยวิธีแบบจำลอง ARIMA-GARCH โดยใช้วิธีของ Box-Jenkins ทำการศึกษาข้อมูลผลตอบแทนของดัชนีหลักทรัพย์ SET50 ในช่วงเดือนพฤษภาคม พ.ศ.2539 ถึงเดือนสิงหาคม พ.ศ.2550 ด้วยแบบจำลอง ARIMA และใช้แบบจำลอง GARCH ในการวิเคราะห์ความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไข

ผลการศึกษาพบว่าข้อมูลผลตอบแทนรายเดือนของดัชนีหลักทรัพย์ SET50 เป็นข้อมูลที่มีลักษณะหนึ่ง โดยแบบจำลองที่เหมาะสมกับผลตอบแทนรายเดือนของดัชนีหลักทรัพย์ SET50 คือแบบจำลอง ARIMA (4,1,1) และแบบจำลองของความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไขที่เหมาะสมคือแบบจำลอง GARCH (2,2)

อนันตปริย์ ไชยวรรณ (2552) ได้ทำการศึกษาการใช้แบบจำลองความจำระยะยาวและการพยากรณ์ความผันผวนของผลตอบแทนของสินทรัพย์ทางการเงิน โดยศึกษาการประมาณแบบจำลองความผันผวนอย่างมีเงื่อนไขในหลักทรัพย์ซึ่งจดทะเบียนในตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทยที่มีมูลค่าการซื้อขายสูงสุด 10 อันดับแรก รวมทั้งการใช้แบบจำลองความจำระยะยาวเพื่อประมาณความผันผวนของผลตอบแทนของดัชนีตลาดหลักทรัพย์เอเซียตะวันออกเฉียงใต้ นอกจากนั้นยังประยุกต์ใช้แบบจำลองความผันผวนสำหรับการคำนวณและการพยากรณ์มูลค่าความเสี่ยง

ผลการศึกษาพบว่าแบบจำลอง VARMA-GARCH เป็นแบบจำลองความผันผวนอย่างมีเงื่อนไขที่มีประสิทธิภาพมากที่สุดสำหรับความผันผวนของหลักทรัพย์จดทะเบียน 10 อันดับ สำหรับผลตอบแทนของดัชนีตลาดหลักทรัพย์เอเซียตะวันออกเฉียงใต้พบว่ามีลักษณะของข้อมูลแบบความจำระยะยาวและแบบจำลองความจำระยะยาวสามารถใช้ประมาณความผันผวนได้อย่างมีประสิทธิภาพ และสำหรับการประยุกต์ใช้แบบจำลองความผันผวนสำหรับการคำนวณและการพยากรณ์มูลค่าความเสี่ยงพบว่าแบบจำลองดัชนีเดียนามาซึ่งค่าใช้จำรายวันที่ต่ำกว่า ส่วนแบบจำลองความจำระยะยาวนำมาซึ่งจำนวนของการละเมิดที่ต่ำกว่า

เขมรัฐ ชัยมงคล (2553) ได้ทำการศึกษาวิธีการวิเคราะห์ความผันผวนของอัตราผลตอบแทนของตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทยโดยเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแบบจำลองความจำระยะยาวกับแบบจำลองความผันผวนอย่างมีเงื่อนไขแบบ GARCH และ EGARCH การศึกษาใช้ข้อมูลอัตราผลตอบแทนของตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทยใน 3 ช่วงเวลา อันประกอบไปด้วยข้อมูลผลตอบแทนรายวันช่วงระหว่างปี พ.ศ. 2529 - พ.ศ. 2552 จำนวน 5,864 ข้อมูล ข้อมูลผลตอบแทนรายวันช่วงปี พ.ศ. 2533 - พ.ศ. 2552 จำนวน 4,649 ข้อมูล และข้อมูลผลตอบแทนรายวันช่วงระหว่างปี พ.ศ. 2541 - พ.ศ. 2552 จำนวน 2,709 ข้อมูล

ผลการศึกษาพบว่าข้อมูลผลตอบแทนของตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทยทั้ง 3 ช่วงเวลามีลักษณะของกระบวนการความจำระยะยาว สำหรับแบบจำลองความผันผวนอย่างมีเงื่อนไขพบว่าแบบจำลองความจำระยะยาวแบบ FIGARCH และ FIEGARCH เป็นแบบจำลองที่มีประสิทธิภาพในการพยากรณ์ดีกว่าแบบจำลอง GARCH และแบบจำลอง EGARCH ทั้ง 3 ช่วงเวลา

ชาตญาณ วิพัฒนานันทกุล (2553) ได้ทำการศึกษาการสร้างแบบจำลองและพยากรณ์ความผันผวนและราคาของออปชั่นที่อ้างอิงกับดัชนี SET50 โดยทำการศึกษาและสร้างดัชนีวัดความผันผวนของไทยด้วยสูตรคำนวณดัชนีวัดความผันผวนของตลาดอนุพันธ์ชิคาโก ประเทศสหรัฐอเมริกา ทำการเปรียบเทียบกับแบบจำลองดัชนีวัดความผันผวนอย่างง่ายซึ่งพัฒนามาจากสูตรคำนวณของตลาดอนุพันธ์

ซิกาโก พร้อมทั้งศึกษาวิธีการพยากรณ์ความผันผวนแฝงที่มีประสิทธิภาพมากที่สุด ประกอบด้วย การศึกษาวิธีการพยากรณ์ด้วยแบบจำลอง ARFIMA และ ARMA พร้อมด้วยแบบจำลองความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไขของแบบจำลองดังกล่าว

ผลการศึกษาพบว่าแบบจำลองดัชนีความผันผวนอย่างง่ายมีสหสัมพันธ์ทางลบอย่างสูงกับดัชนีหลักทรัพย์ SET50 และสามารถคาดการณ์ความผันผวนได้ดีกว่า สำหรับวิธีการพยากรณ์ความผันผวนพบว่าวิธีการพยากรณ์ความผันผวนโดยใช้แบบจำลอง ARMA-FIGARCH เป็นวิธีการพยากรณ์ที่มีประสิทธิภาพมากที่สุด

Dumas, B., Fleming, J., & Whaley, R. E. (1998) ได้ทำการศึกษาเชิงประจักษ์เกี่ยวกับฟังก์ชันของความผันผวนแฝง เพื่อทดสอบสมมติฐานที่ว่าความผันผวนแฝงเป็นฟังก์ชันของราคาสินทรัพย์อ้างอิงกับเวลาซึ่งสามารถนำมาสร้างแบบจำลองของราคาอปชันที่สามารถคำนวณราคาอปชันที่เหมาะสมได้ โดยทำการศึกษาความผันผวนแฝงของอปชันดัชนี S&P 500 ในช่วงเดือนมิถุนายน ค.ศ. 1988 ถึงเดือนธันวาคม ค.ศ. 1993 และทดสอบฟังก์ชันของความผันผวนแฝงที่สร้างขึ้นด้วยวิธีการใช้พยากรณ์ราคาและประสิทธิภาพในการใช้ป้องกันความเสี่ยงของพอร์ตลงทุนเปรียบเทียบกับความผันผวนแฝงที่คำนวณจากสูตรราคาอปชันของ Black-Scholes

ผลการศึกษาพบว่าฟังก์ชันของความผันผวนแฝงที่สร้างขึ้นไม่สามารถให้ผลในการพยากรณ์หรือมีประสิทธิภาพเมื่อนำไปใช้ป้องกันความเสี่ยงที่ดีกว่าความผันผวนแฝงที่คำนวณสูตรราคาอปชันของ Black-Scholes ทุกช่วงราคาใช้สิทธิ์และทุกช่วงอายุของอปชัน

Hwang, S., & Satchell, S. E. (1998) ได้ทำการศึกษาวิธีการพยากรณ์ความผันผวนแฝง เพื่อทดสอบวิธีการพยากรณ์ความผันผวนแฝงที่มีประสิทธิภาพมากที่สุด โดยทำการศึกษาการพยากรณ์ความผันผวนแฝงของอปชันอ้างอิงหลักทรัพย์ของบริษัทจดทะเบียนในสหราชอาณาจักร ซึ่งคำนวณจากสูตรราคาอปชันของ Black-Scholes ด้วยวิธีแบบจำลองความจำระยะยาวซึ่งพัฒนาจากแบบจำลอง log-ARFIMA รวมทั้งวิธีการพยากรณ์แบบพื้นฐาน ทำการเปรียบเทียบกับการพยากรณ์ความผันผวนจากข้อมูลความผันผวนของผลตอบแทนในอดีตโดยใช้แบบจำลอง GARCH

ผลการศึกษาพบว่าการใช้ความผันผวนแฝงในการพยากรณ์ความผันผวนของผลตอบแทนสินทรัพย์อ้างอิงมีประสิทธิภาพดีกว่าการใช้ความผันผวนจากข้อมูลในอดีต แบบจำลอง log-ARFIMA (0,d,1) มีประสิทธิภาพในการพยากรณ์ดีกว่าแบบจำลอง GARCH (1,1) และการพยากรณ์ความผันผวนแฝงด้วยวิธีแบบจำลอง Scale-truncated log-ARFIMA เป็นวิธีการพยากรณ์ที่มีประสิทธิภาพมากที่สุด