

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง เพื่อเป็นกรอบและแนวทางในการวิจัยในด้านต่างๆ ตามลำดับหัวข้อดังนี้

2.1 การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์

2.1.1 หลักการสอนคณิตศาสตร์

2.1.2 จิตวิทยาสำหรับครูคณิตศาสตร์

2.2 การคิดทางเรขาคณิตและแนวการสอนของแวน ฮีลี

2.2.1 การคิดทางเรขาคณิตของแวน ฮีลี

2.2.2 ลักษณะสำคัญของระดับการคิดทางเรขาคณิตของแวน ฮีลี

2.2.3 กิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการสอนของแวน ฮีลี

2.3 โปรแกรมจิโอเมตอร์สเก็ตซ์แพด

2.3.1 ประวัติความเป็นมาของโปรแกรมจิโอเมตอร์สเก็ตซ์แพด

2.3.2 การใช้โปรแกรมจิโอเมตอร์สเก็ตซ์แพดกับการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์

2.4 ความรู้สีกเชิงปริภูมิ

2.4.1 ความหมายและความสำคัญของความรู้สีกเชิงปริภูมิ

2.4.2 พัฒนาการของความรู้สีกเชิงปริภูมิ

2.4.3 แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเรขาคณิตเพื่อพัฒนาความรู้สีกเชิงปริภูมิ

2.4.4 การประเมินผลความสามารถทางด้านความรู้สีกเชิงปริภูมิ

2.5. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์

การที่จะทำให้การจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ให้บรรลุตามตัวชี้วัดได้นั้น ผู้สอนควรมีความรู้ในเรื่องหลักการสอนคณิตศาสตร์ และจิตวิทยาสำหรับครูคณิตศาสตร์เพื่อที่จะนำความรู้เหล่านั้นมาจัดกิจกรรมการเรียนรู้ให้เหมาะสม หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ พุทธศักราช 2551 ได้กำหนดมาตรฐานและตัวชี้วัดที่เกี่ยวกับเรขาคณิต ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่เกี่ยวข้องกับ เรื่อง ความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติ ได้แก่ มาตรฐาน ค 3.1 อธิบายและวิเคราะห์รูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติ และมาตรฐาน ค 3.2 ใช้การนึกภาพ (Visualization) ใช้เหตุผลเกี่ยวกับปริภูมิ (Spatial reasoning) และ ใช้แบบจำลองทางเรขาคณิต (Geometric model) ในการแก้ปัญหา โดยมีตัวชี้วัด 4 ตัวชี้วัด คือ 1. อธิบายลักษณะของรูปเรขาคณิตสามมิติจากภาพที่กำหนดให้ 2. ระบุภาพสองมิติที่ได้จากการมองด้านหน้า (Front view) ด้านข้าง (Side view) หรือ ด้านบน (Top view) ของรูปเรขาคณิตสามมิติที่กำหนดให้ 3. วาดหรือประดิษฐ์รูปเรขาคณิตสามมิติที่ประกอบขึ้นจากลูกบาศก์ เมื่อกำหนดภาพสองมิติที่ได้จากการมองด้านหน้า ด้านข้าง และด้านบนให้ (กระทรวงศึกษาธิการ, 2551 : 66-68)

2.1.1 หลักการสอนคณิตศาสตร์

ในการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ให้มีประสิทธิภาพและประสบผลสำเร็จได้นั้น ไม่เพียงแต่ครูจะมีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับเนื้อหาเป็นอย่างดีแล้ว ครูจะต้องมีความรู้เกี่ยวกับหลักการสอนเป็นอย่างดีด้วย โดยอัมพร ม้าคนอง (2546: 8-10) ได้กล่าวถึงหลักการสอนคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

- 1) สอนให้นักเรียนเกิดมโนทัศน์หรือได้ความรู้ทางคณิตศาสตร์จากการคิดและมีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกับผู้อื่น ใช้ความคิดและคำถามที่นักเรียนสงสัยเป็นประเด็นในการอภิปรายเพื่อให้ได้แนวคิดที่หลากหลาย และเพื่อนำไปสู่ข้อสรุป
- 2) สอนให้นักเรียนเห็น โครงสร้างทางคณิตศาสตร์ ความสัมพันธ์และความต่อเนื่องของเนื้อหาคณิตศาสตร์
- 3) สอนโดยคำนึงว่าจะให้นักเรียนเรียนอะไร และเรียนอย่างไร นั่นคือต้องคำนึงถึงทั้งเนื้อหาวิชาและกระบวนการเรียน
- 4) สอนโดยใช้สิ่งที่เป็รูปธรรมอธิบายนามธรรม หรือการทำให้สิ่งที่เป็นามธรรมมากๆ เป็นามธรรมที่ง่ายขึ้นหรือพอที่จะจินตนาการได้มากขึ้น

- 5) จัดกิจกรรมการสอนโดยคำนึงถึงประสบการณ์ และความรู้พื้นฐานของนักเรียน
- 6) สอนโดยใช้การฝึกหัดให้นักเรียนเกิดประสบการณ์ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ทั้งการฝึกรายบุคคล ฝึกเป็นกลุ่ม การฝึกทักษะย่อยทางคณิตศาสตร์และการฝึกทักษะรวมเพื่อแก้ปัญหาที่ซับซ้อนมากขึ้น
- 7) สอนเพื่อให้นักเรียนเกิดทักษะการคิดวิเคราะห์เพื่อแก้ปัญหา สามารถให้เหตุผล เชื่อมโยง สื่อสาร และคิดอย่างสร้างสรรค์ ตลอดจนเกิดความอยากรู้อยากเห็นและนำไปคิดต่อ
- 8) สอนให้นักเรียนเห็นความสัมพันธ์ระหว่างคณิตศาสตร์ในห้องเรียนกับคณิตศาสตร์ในชีวิตประจำวัน
- 9) ผู้สอนควรศึกษาธรรมชาติและศักยภาพของนักเรียน เพื่อจะได้จัดกิจกรรมการสอนให้สอดคล้องกับนักเรียน
- 10) สอนให้นักเรียนมีความสุขในการเรียนคณิตศาสตร์ รู้สึกว่า วิชาคณิตศาสตร์ไม่ยากและมีความสนุกสนานในการทำกิจกรรม
- 11) สังเกต และประเมินการเรียนรู้ และความเข้าใจของนักเรียนขณะเรียนในห้องโดยใช้คำถามสั้นๆ หรือการพูดคุยปกติ
- ยุพิน พิพิธกุล (2530:49-50) ได้เสนอแนะหลักการสอนคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้
- 1) ควรสอนจากเรื่องง่ายไปสู่เรื่องยาก
 - 2) เปลี่ยนจากรูปธรรมไปสู่นามธรรม
 - 3) สอนให้สัมพันธ์ความคิด
 - 4) เปลี่ยนวิธีการสอนไม่ซ้ำซากน่าเบื่อหน่าย ผู้สอนควรสอนให้สนุกสนาน น่าสนใจซึ่งอาจจะมี กลอน เพลง เกม การเล่าเรื่อง การทำภาพประกอบ การ์ตูน ปริศนา ต้องรู้จักสอดแทรกสิ่งละอ้อนพ้นละน้อยให้บทเรียนน่าสนใจ
 - 5) ใช้ความสนใจของนักเรียนเป็นจุดเริ่มต้นเป็นแรงคลไจที่จะเรียนด้วยเหตุนี้ ในการจัดการสอนจึงมีการนำเข้าสู่บทเรียนเร้าใจเสียก่อน
 - 6) ควรจะคำนึงถึงประสบการณ์เดิมและทักษะเดิมที่นักเรียนมีอยู่ กิจกรรมใหม่ควรจะต้องเนื่องกับกิจกรรมเดิม
 - 7) เรื่องที่สัมพันธ์กันก็ควรสอนไปพร้อม ๆ กัน เช่น เซตที่เท่ากันกับเซตที่เทียบเท่า กัน ยูเนียนของเซตกับอินเตอร์เซกชันของเซต

8) ให้ผู้เรียนมองเห็น โครงสร้าง ไม่ใช่เน้นแต่เนื้อหา

9) ไม่ควรเป็นเรื่องยากเกินไป ผู้สอนบางคนชอบให้โจทย์ยากๆ เกินสาระการเรียนรู้ที่กำหนดไว้ซึ่งอาจจะทำให้ผู้เรียนที่เรียนอ่อนท้อถอย แต่ถ้าผู้เรียนที่เรียนเก่งก็อาจจะชอบเพราะส่งเสริมเป็นรายไป ในการสอนต้องคำนึงถึงหลักสูตรและเลือกเนื้อหาเพิ่มเติมให้เหมาะสมทั้งนี้เพื่อส่งเสริมศักยภาพ

10) สอนให้นักเรียนสามารถหาข้อสรุปได้ด้วยตนเอง การยกตัวอย่างหลาย ๆ ตัวอย่าง จนนักเรียนเห็นรูปแบบจะช่วยให้นักเรียนสรุปได้ อย่ารีบบอกเกินไปควรเลือกวิธีการต่าง ๆ ที่สอดคล้องกับเนื้อหา

11) ให้ผู้เรียนลงมือปฏิบัติในสิ่งที่ทำได้ลงมือปฏิบัติจริงและประเมินการปฏิบัติจริง

12) ผู้สอนควรมีอารมณ์ขัน เพื่อช่วยให้บรรยากาศในห้องเรียนน่าเรียนยิ่งขึ้นวิชาคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เรียนหนัก ครูจึงไม่ควรจะเคร่งเครียด ให้นักเรียนเรียนด้วยความสนุกสนาน

13) ผู้สอนควรมีความกระตือรือร้นและตื่นตัวอยู่เสมอ

14) ผู้สอนควรหมั่นแสวงหาความรู้เพิ่มเติมเพื่อจะนำสิ่งแปลกและใหม่ มาถ่ายทอดให้ผู้เรียนและผู้สอนควรจะเป็นผู้ที่มีความรู้ในอาชีพของตนจึงจะทำให้สอนได้ดี

กระทรวงศึกษาธิการ (2553: หน้า 8-10) ได้เสนอแนวทางในการจัดการเรียนรู้ให้บรรลุตามเป้าหมายของหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ไว้ดังนี้

1) ผู้สอนต้องจัดการเรียนรู้ให้เหมาะสมกับความสามารถของผู้เรียน โดยเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ลงมือปฏิบัติงานเพื่อสร้างความรู้ด้วยตนเอง และผู้สอนเป็นผู้ส่งเสริมสนับสนุน ตลอดจนการจัดสภาพแวดล้อมให้มีความพร้อมแก่ผู้เรียน

2) ผู้สอนต้องคำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคล จัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ให้ความสำคัญกับผู้เรียน โดยส่งเสริมให้ผู้เรียนได้แสดงออกถึงศักยภาพของตนเอง และออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้ให้เหมาะสมกับความแตกต่างระหว่างบุคคลของผู้เรียน

3) ผู้สอนต้องจัดการเรียนรู้ที่สอดคล้องกับพัฒนาการทางสมอง เน้นให้ผู้เรียนได้รับการพัฒนาอย่างเหมาะสมกับการทำงานของสมอง โดยใช้สถานการณ์ชีวิตจริงตามธรรมชาติเป็นเครื่องมือในการจัดการเรียนรู้ของผู้เรียน

4) ผู้สอนต้องจัดการเรียนรู้ที่เน้นด้านคุณธรรม จริยธรรม เป็นการสอดแทรกคุณธรรมและจริยธรรมให้ผู้เรียนในระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

จากข้างต้น สามารถกล่าวได้ว่า ในการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ให้มีประสิทธิภาพและประสบผลสำเร็จได้นั้น ครูจะต้องมีความรู้เกี่ยวกับหลักการสอนคณิตศาสตร์ กล่าวคือ ครูจะต้องสอนให้นักเรียนเกิดมโนทัศน์ โดยการใช้สิ่งที่เป็นรูปธรรมอธิบายนามธรรมและให้นักเรียนลงมือปฏิบัติจริง เพื่อให้นักเรียนเกิดทักษะการคิดวิเคราะห์ในการแก้ปัญหา สามารถให้เหตุผลเชื่อมโยง สื่อสาร คิดอย่างสร้างสรรค์ และสามารถหาข้อสรุปได้ด้วยตนเอง นอกจากนี้ผู้สอนจะต้องเข้าใจธรรมชาติและศักยภาพของนักเรียน คำนึงถึงประสบการณ์และความรู้พื้นฐานของนักเรียน มีความกระตือรือร้นและหมั่นแสวงหาความรู้เพิ่มเติม

2.1.2 จิตวิทยาสำหรับครูคณิตศาสตร์

ในการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ให้มีประสิทธิภาพและมีความเหมาะสมกับผู้เรียนนั้น ครูผู้สอนจะต้องเข้าใจบริบทต่างๆของนักเรียนและห้องเรียนของตน อีกทั้งยังสามารถจัดการบริหารบริบทเหล่านั้นได้ให้เป็นไปในทิศทางที่เหมาะสม โดย ยุพิน พิพิธกุล (2545) กล่าวว่า ครูคณิตศาสตร์ควรคำนึงถึงจิตวิทยาการเรียนการสอน ดังนี้

1) ความแตกต่างระหว่างบุคคล (Individual differences) นักเรียนย่อมมีความแตกต่างกันทั้งในด้านสติปัญญา อารมณ์ จิตใจ และลักษณะนิสัย ดังนั้นการจัดการเรียนการสอนและการจัดชั้นเรียน ผู้สอนควรคำนึงถึง

1.1) ความแตกต่างของนักเรียนภายในกลุ่มเดียวกัน ทางร่างกาย ความสามารถบุคลิกภาพ ผู้สอนจะสอนให้เหมือนกันนั้นเป็นไปได้ ต้องศึกษาว่านักเรียนแต่ละคนมีปัญหาอย่างไร

1.2) ความแตกต่างระหว่างกลุ่มนักเรียน เช่น ผู้สอนอาจแบ่งนักเรียนตามความสามารถ (Ability grouping)

1.3) ศึกษาและวินิจฉัยนักเรียนแต่ละคนว่าประสบปัญหาในการเรียนคณิตศาสตร์อย่างไร

1.4) วางแผนการสอนให้สอดคล้องกับความแตกต่างของนักเรียน นักเรียนเรียนเก่งก็ส่งเสริมให้ก้าวหน้า นักเรียนเรียนอ่อนก็พยายามหาทางช่วยเหลือด้วยการสอนซ่อมเสริม

1.5) ผู้สอนต้องรู้จักหาวิธีการสอนที่แปลกและใหม่

1.6) ผู้สอนจะต้องรู้จักหาเอกสารประกอบการสอนมาเสริมการเรียนรู้

1.7) ผู้สอนต้องมีความอดทน ขยัน ใฝ่หาความรู้ เสียสละเวลา จึงจะสามารถสอนได้อย่างมีประสิทธิภาพ

2) จิตวิทยาในการเรียนรู้ (Psychology of learning) การสอนนั้นก็เพื่อพัฒนา
นักเรียนให้เกิดการเรียนรู้ ให้พัฒนาไปสู่จุดมุ่งหมายของการสอน ผู้สอนจะต้องคำนึงถึงเสมอว่าจะทำ
อย่างไรให้นักเรียนเกิดการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรม

2.1) นักเรียนจะเปลี่ยนพฤติกรรมเมื่อนักเรียนได้รับประสบการณ์ใด
ประสบการณ์หนึ่งเป็นครั้งแรก ก็มีความอยากรู้อยากเห็นและอยากคิดที่จะทำได้

2.2) การถ่ายทอดการเรียนรู้

2.2.1) นักเรียนได้รับการถ่ายทอดการเรียนรู้ ก็ต่อเมื่อเห็นเหตุการณ์
ที่คล้ายคลึงกันหลาย ๆ ตัวอย่าง

2.2.2) ผู้สอนควรฝึกนักเรียนให้รู้จักการสังเกต รูปแบบของสิ่งของ
ที่คล้ายคลึงกันแล้วเขาก็จะสามารถสรุปได้ว่ารูปแบบนั้นเป็นอย่างไร

2.2.3) รู้จักนำเรื่องที่เรียนแล้วมาเปรียบเทียบ เชื่อมโยงหรือใช้กับ
เรื่องที่ต้องเรียนใหม่

2.2.4) ควรให้นักเรียนเรียนให้ประสบความสำเร็จไปเป็นเรื่องๆ

2.2.5) การถ่ายทอดการเรียนรู้จะสำเร็จผลมากน้อยเพียงไรขึ้นอยู่กับ
วิธีการสอนของผู้สอน ดังนั้นผู้สอนต้องตระหนักอยู่เสมอว่าจะสอนอะไรและสอนอย่างไร

2.3) ธรรมชาติของการเกิดการเรียนรู้

2.3.1) นักเรียนจะต้องรู้จักประสงค์การเรียนรู้

2.3.2) นักเรียนจะต้องรู้จักวิเคราะห์ข้อความในลักษณะที่เป็นแบบ
เดียวกันหรือเปรียบเทียบกันเพื่อนำไปสู่การค้นพบ

2.3.3) ผู้สอนต้องพยายามสอนให้นักเรียนรู้จักสัมพันธ์ความคิดเมื่อ
สอนเรื่องหนึ่งก็ควรพูดถึงเรื่องที่เกี่ยวข้องกัน

2.3.4) นักเรียนจะต้องเรียนด้วยความเข้าใจและสามารถนำไปใช้ได้
นักเรียนบางคนจำสูตรได้ แต่แก้ปัญหาโจทย์ไม่ได้ เรื่องนี้ผู้สอนควรแก้ไขและสอนให้นักเรียนเข้าใจ
ถึงกระบวนการแก้ปัญหา

2.3.5) ผู้สอนจะต้องเป็นผู้มีปณิธาน สมองไว รู้จักวิธีการที่จะนำ
นักเรียนไปสู่ข้อสรุปในการสอนแต่ละเรื่องนั้นควรสรุปทบทวนทุกครั้ง

2.3.6) นักเรียนควรจะรู้วิธีการเรียนว่าจะเรียนอย่างไร

2.3.7) ผู้สอนไม่ควรทำโทษนักเรียนเพราะจะทำให้นักเรียนเบื่อหน่ายยิ่งขึ้นควรจะเสริมกำลังใจให้นักเรียน

3) จิตวิทยาในการฝึก (Psychology of Drill) การฝึกนั้นเป็นเรื่องที่จำเป็นสำหรับนักเรียนแต่ถ้าให้ฝึกซ้ำๆ นักเรียนก็จะเกิดความเบื่อหน่าย ผู้สอนจะต้องดูให้เหมาะสม การฝึกให้ได้ผลดี อาจจะพิจารณาดังนี้

3.1) การฝึกจะให้ผลดีต้องฝึกเป็นรายบุคคล

3.2) ควรฝึกไปทีละเรื่อง เมื่อจบบทเรียนหนึ่งและเมื่อเรียนได้หลายบทก็ควรจะฝักรวบขออีกครั้งหนึ่ง

3.3) ควรจะมีการตรวจสอบแบบฝึกหัดแต่ละครั้งที่ให้นักเรียนทำ เพื่อประเมินผลนักเรียน ตลอดจนประเมินผลการสอนของผู้สอนด้วย เมื่อนักเรียนทำโจทย์ปัญหาไม่ได้ ผู้สอนควรจะถามตนเองเสมอว่าเพราะอะไร

3.4) เลือกแบบฝึกหัดที่สอดคล้องกับบทเรียนและให้แบบฝึกหัดพอเหมาะ

3.5) แบบฝึกหัดที่นักเรียนทำจะต้องคำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคล

3.6) แบบฝึกหัดที่ให้นั้น ควรจะฝึกหลายๆ ด้าน คำนึงถึงความยากง่าย เรื่องใดควรจะเน้นก็ให้ทำหลายข้อ เพื่อให้นักเรียนเกิดทักษะและจำได้

3.7) พึงตระหนักอยู่เสมอว่า ก่อนที่จะให้นักเรียนทำโจทย์นั้น นักเรียนต้องเข้าใจในวิธีการทำโจทย์นั้น โดยต้องแก้ อย่างค่อยๆ ให้นักเรียนทำโจทย์ตามตัวอย่างที่ผู้สอนสอนโดยไม่เกิดความคิดริเริ่มสร้างสรรค์แต่ประการใด

3.8) พึงตระหนักอยู่เสมอว่า ฝึกอย่างไรนักเรียนจึงจะ “คิดเป็น” ไม่ใช่ “คิดตาม” ผู้สอนจะต้องฝึกให้นักเรียน “คิดเป็น” “ทำเป็น” และ “แก้ปัญหาเป็น”

4) การเรียนโดยการกระทำ (Learning by Doing) ผู้สอนจะต้องให้นักเรียนได้ลงกระทำหรือปฏิบัติจริงแล้วจึงให้สรุปเป็นมโนคติ (Concept)

5) การเรียนเพื่อรู้ (Mastery Learning) เป็นการเรียนแบบรู้จริงทำได้จริง นักเรียนบางคนต้องใช้เวลามากกว่าบุคคลอื่นที่เรียนในเรื่องเดียวกัน ผู้สอนจำเป็นต้องให้เวลาช่วยเหลือเพื่อให้บรรลุจุดประสงค์การเรียนรู้ เมื่อนักเรียนเกิดการเรียนรู้และทำสำเร็จตามความประสงค์ก็จะเกิดความพอใจ กำลังใจและเกิดแรงจูงใจอยากเรียนต่อไป

6) ความพร้อม (Readiness) ความพร้อมในการเรียนของนักเรียนเป็นเรื่องสำคัญ ผู้สอนต้องตรวจสอบความพร้อมก่อนเรียน ต้องดูความรู้พื้นฐานของนักเรียนว่าพร้อมที่จะเรียนบทต่อไปหรือไม่

7) แรงจูงใจ (Motivation) ด้วยธรรมชาติของวิชาคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ยากในการเรียนการสอน ผู้สอนต้องสร้างแรงจูงใจแก่นักเรียนให้อยากเรียน และการให้นักเรียนทำงานหรือแก้โจทย์ปัญหานั้น ผู้สอนต้องคำนึงถึงความสำเร็จด้วย

8) การเสริมกำลังใจ (Reinforcement) ในการสอนครูจำเป็นต้องแสดงพฤติกรรมออกมาแสดงการยอมรับ เช่น วาจา กริยาท่าทาง ย่อมทำให้นักเรียนเกิดแรงจูงใจในการเรียนมีความสนใจและกระตือรือร้นที่จะเรียน

จากข้างต้นสามารถกล่าวได้ว่า การจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ให้มีประสิทธิภาพและมีความเหมาะสมกับผู้เรียนนั้น ครูต้องคำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคลของนักเรียน เพื่อออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้ให้มีความเหมาะสมกับนักเรียน ในการสอนครูต้องมีจิตวิทยาในการสอนเพื่อที่จะกำหนดทิศทางของการจัดการเรียนรู้ให้มีประสิทธิภาพสูงสุด ในการจัดการเรียนรู้ครูต้องเน้นให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติด้วยตนเอง และมีการฝึกฝนประสบการณ์ให้กับนักเรียน เพื่อให้นักเรียนได้เรียนรู้จริงและสามารถสร้างองค์ความรู้ได้ด้วยตนเอง นอกจากนี้ต้องคำนึงถึงความพร้อมในการเรียนรู้รวมถึงการสร้างแรงจูงใจและกำลังใจในการเรียนให้กับนักเรียน

2.2 การคิดทางเรขาคณิตและแนวการสอนของแวน ฮีลี

รูปแบบแวน ฮีลี (Van Hiele Model) เกิดจากการสร้างของปีแอร์ แวนฮีลี และไดนา แวนฮีลี (Pierre Van Hiele and Dina Van Hiele) ชาวเนเธอร์แลนด์ซึ่งเป็นอาจารย์สอนคณิตศาสตร์ในโรงเรียนมัธยมศึกษา พวกเขาพบว่า นักเรียนเรียนเรขาคณิตด้วยความยากลำบากโดยเฉพาะการเขียนพิสูจน์ ดังนั้นพวกเขาก็สร้างรูปแบบแวน ฮีลี (Van Hiele Model) ซึ่งเป็นรูปแบบเกี่ยวกับความคิดทางเรขาคณิตเพื่อใช้ประเมินความสามารถของนักเรียน โดยวัดจากระดับการคิดทางเรขาคณิต 5 ขั้นตอน เพื่อพัฒนาความคิดทางเรขาคณิต ดังนี้

2.2.1 การคิดทางเรขาคณิตของแวน ฮีลี

การคิดทางเรขาคณิตเป็นการคิดทางคณิตศาสตร์อีกลักษณะหนึ่งที่เกี่ยวข้องกับเรขาคณิต ซึ่งเป็นความสามารถของนักเรียนในการวิเคราะห์และสังเกต รูปลักษณะ สมบัติหรือนิยาม ความสัมพันธ์ทางเรขาคณิต ตลอดจนการพิสูจน์ทางเรขาคณิต เพื่อนำมาสู่การแก้ปัญหาทางเรขาคณิต

โดย แวน ฮิล ได้กำหนดระดับความสามารถทางการคิดในวิชาเรขาคณิตของนักเรียนไว้ 5 ระดับ มีรายละเอียดแต่ละระดับดังต่อไปนี้ (ชัยวัฒน์ สุทธิรัตน์. 2552:390-392; Crowley,1987: 2-3)

ระดับ 0 ขั้นการมองเห็นรูปธรรมภายนอก (Visualization) โดยความสามารถในระดับนี้นักเรียนจะระลึกถึงรูปร่างภายนอกของรูปเรขาคณิต มีการแสดงความคิดออกมาถึงรูปธรรมภายนอกมากกว่าองค์ประกอบหรือคุณลักษณะของรูป สามารถบอกชื่อรูปภาพที่มองเห็น แต่ในขั้นนี้นักเรียนไม่สามารถบอกคุณลักษณะส่วนย่อยได้ เช่น รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส มีมุมจาก 4 มุม และด้าน 4 ด้านที่เท่ากัน หรือรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน คือรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้านทั้งสี่ยาวเท่ากัน เป็นต้น

ระดับ 1 ขั้นการวิเคราะห์ (Analysis) ความสามารถในการในระดับนี้ เป็นการเริ่มต้นการวิเคราะห์ความคิดรวบยอดทางเรขาคณิตที่ได้จากการสังเกตและการทดลอง นักเรียนเริ่มเห็นคุณลักษณะของรูป เห็นสมบัติเฉพาะของรูป สามารถแบ่งรูปออกเป็นกลุ่มๆได้ สามารถวิเคราะห์หามโนคติเกี่ยวกับรูปเรขาคณิต ได้ชัดเจนมากขึ้นกว่าขั้นพื้นฐานและสามารถบอกสมบัติของรูปเรขาคณิต เช่น รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านทั้งสี่ยาวเท่ากันและมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก แต่ไม่สามารถอธิบายความสัมพันธ์รูปที่เห็นหรือรูปที่ยังมองไม่เห็นได้

ระดับ 2 ขั้นการสรุปที่ไม่เป็นแบบแผน (Informal deduction) ความสามารถในการระดับนี้นักเรียนสามารถบอกความสัมพันธ์ในสมบัติต่างๆของรูปได้ สามารถบอกรายละเอียดปลีกย่อยเกี่ยวกับสมบัติของรูปต่างๆทางเรขาคณิต และสามารถเปรียบเทียบและบอกความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องกันได้ เช่น ในรูปสี่เหลี่ยมใดๆถ้ามีด้านที่อยู่ตรงข้ามขนานกันและยาวเท่ากันแล้ว มุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมนั้นจะต้องเท่ากัน รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสคือ รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีด้านทั้งสี่ยาวเท่ากัน เป็นต้น นอกจากนั้น นักเรียนสามารถบอกลักษณะที่แตกต่างกันของรูปสี่เหลี่ยมได้ถึงแม้ว่าจะยังไม่สามารถพิสูจน์ได้ เข้าใจจำกัดความต่างๆ มีการอภิปรายให้เหตุผลอย่างไม่เป็นแบบแผนจากสิ่งที่กำหนดให้ได้ แต่ไม่สามารถสรุปโดยใช้สัจพจน์ ทฤษฎีบท บทนิยามต่างๆได้ไม่สามารถให้เหตุผลในลักษณะที่เป็นโครงสร้างได้

ระดับ 3 ขั้นการสรุปที่เป็นแบบแผน (Formal deduction) ความสามารถในการระดับนี้นักเรียนสามารถสรุปเรขาคณิตภายใต้สัจพจน์ ทฤษฎี อนิยาม และบทนิยามต่างๆได้อย่างเข้าใจและถูกโครงสร้างการให้ลำดับเหตุผล เข้าใจการพิสูจน์ที่มีกฎเกณฑ์ คู่กันเคยกับการพิสูจน์โดยทราบว่าอะไรคือสิ่งที่กำหนดให้ และอะไรคือสิ่งที่ต้องพิสูจน์ รู้จักตั้งกฎเกณฑ์และข้อโต้แย้งในการคิดไปตามลำดับเหตุผล ทราบดีว่าทำไมสิ่งที่กำลังพิสูจน์เป็นจริงและเป็นได้อย่างไร สามารถสรุปจากสิ่งที่กำหนดให้ได้ว่าถูกต้องตามลำดับของเหตุผล อาจจะพิสูจน์สิ่งที่ต้องการพิสูจน์นั้นได้มากกว่าหนึ่งวิธี

ระดับ 4 ขั้นการคิดขั้นสูงสุด (Rigor) ความสามารถในระดับนี้นักเรียนต้องมีความรอบรู้ระบบสัจพจน์เป็นอย่างดี สามารถพิสูจน์เรขาคณิตที่ไม่ใช่ของยูคลิดได้ สามารถนำเรขาคณิตไปสัมพันธ์กับวิชาอื่นๆ สามารถมองเรขาคณิตในลักษณะนามธรรม ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงในระบบสัจพจน์และนิยามต่างๆ ได้ คำถามที่อาจใช้ถามนักเรียนได้แก่ อะไรจะเกิดขึ้นในการเรียนเรขาคณิต ถ้าไม่มีทฤษฎีบทเกี่ยวกับเส้นขนานคู่หนึ่งและมีเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งตัดขวาง

2.2.2 ลักษณะสำคัญของระดับการคิดทางเรขาคณิตของแวน ฮีลี

ระดับการคิดทางเรขาคณิตของแวน ฮีลี มีลักษณะสำคัญดังนี้ (ชัยวัฒน์ สุทธิรัตน์, 2552:390-392; Crowley,1987: 4-6)

- 1) การมีลำดับ (Sequential) หมายถึง การพัฒนาที่มีลำดับขั้นตอนตามลำดับจากระดับความคิดในระดับต่ำไปยังระดับสูงจะสามารถพัฒนาไปสู่ระดับการคิดในระดับสูงได้ต้องศึกษาในระดับการคิดในระดับที่ต่ำกว่าให้มีคุณภาพเพียงพอ
- 2) สิ่งที่ยังไม่ชัดเจนในระดับหนึ่งจะชัดเจนในระดับถัดไป (Intrinsic and Extrinsic) หมายถึง นักเรียนที่อยู่ในระดับต่ำกว่าจะรู้เรื่องราวต่างๆ ได้อย่างชัดเจนในระดับที่สูงขึ้นจากการวิเคราะห์และศึกษาสมบัติของรูป
- 3) การมีภาษาประจำระดับ (Linguistics) หมายถึง ในแต่ละระดับการคิดจะมีภาษาที่มีความสัมพันธ์กับการคิดในระดับนั้นโดยตรงซึ่งอาจขัดแย้งกับอีกระดับหนึ่งก็ได้ เช่น ความสัมพันธ์ระหว่างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสกับรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ผู้ที่มีระดับการคิดต่างกันจะให้เหตุผลและใช้ภาษาแตกต่างกัน แต่เป็นพื้นฐานต่อกันได้ ดังนั้นภาษาจึงเป็นตัวบอกระดับการคิด
- 4) การมีพัฒนาการความก้าวหน้า (Advancement) หมายถึง มีการพัฒนาความก้าวหน้าจากระดับหนึ่งไปอีกระดับหนึ่งเป็นการก้าวหน้าพัฒนาระดับความคิดได้แต่ต้องศึกษาเนื้อหาฝึกฝนทักษะจนมีคุณภาพของระดับที่ต่ำกว่าอย่างพอเพียงจึงสามารถไปอยู่ในระดับที่สูงกว่าได้
- 5) การไม่เข้ากัน (Mismatch) หมายถึง นักเรียนที่อยู่ในระดับใดระดับหนึ่งสามารถเรียนรู้เนื้อหา โครงสร้างคำที่ใช้แตกต่างกันผู้ที่อยู่ต่างระดับกันไม่สามารถเข้าใจในเนื้อหาโครงสร้างและภาษาที่ใช้กันได้ ผู้ที่อยู่ในระดับต่ำกว่าไม่สามารถมีความคิดในระดับที่สูงกว่าได้การกำหนดสมบัติของระดับความคิดนี้เพื่อให้สามารถนำระดับการคิดทางเรขาคณิตตามแบบแวน ฮีลีไปใช้ได้ถูกต้องและไปในแนวเดียวกัน และเพื่อเป็นแนวทางในการกำหนดเนื้อหา การจัดกิจกรรม การฝึกทักษะให้ถูกต้องเป็นลำดับขั้นตอนถูกต้องตามสมบัติที่กำหนด

2.2.3 กิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการสอนของแวน ฮีลี

การพัฒนาการคิดทางเรขาคณิตจากระดับหนึ่งไปสู่อีกระดับหนึ่งสามารถทำได้โดยการสอนและการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่เหมาะสม ซึ่ง ปี แอร์ และ ไคน่า แวน ฮีลี ได้เสนอขั้นตอนการสอนเพื่อพัฒนาระดับความคิดทางเรขาคณิต 5 ขั้นตอน (ชัยวัฒน์ สุทธิรัตน์, 2552:390-392; Crowley, 1987: 5-6; Teppo, 1999: 1-2) ดังนี้

ขั้นที่ 1 การสืบสวนสอบสวน/การแสวงหาความรู้ (Inquiry/information) ครูและนักเรียนมีส่วนร่วมในการสนทนาในการทำกิจกรรมเกี่ยวกับจุดมุ่งหมายของการเรียน โดยการสังเกตและใช้คำถาม เช่น ครูถามนักเรียนว่า รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนคืออะไร รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสคืออะไร รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานคืออะไร และรูปสี่เหลี่ยมพวกนี้มีลักษณะคล้ายกันอย่างไร แตกต่างกันอย่างไร ทำไมถึงตอบอย่างนั้น จุดมุ่งหมายของกิจกรรมนี้มี 2 อย่าง คือครูได้เรียนรู้สิ่งที่เป็นความรู้ดั้งเดิมของนักเรียนเกี่ยวกับหัวข้อนี้ และนักเรียนได้เรียนรู้สิ่งที่เป็นแนวทางการศึกษาเพิ่มเติม

ขั้นที่ 2 การกำหนดทิศทางโดยตรง(Directed or guided orientation) โดยนักเรียนสำรวจหัวข้อของการศึกษาผ่านสื่อที่ครูจัดลำดับขั้นกิจกรรม และแสดงให้เห็นให้นักเรียนเห็นลักษณะโครงสร้างอย่างค่อยเป็นค่อยไป ดังนั้นสื่อจะเป็นงานสั้นๆที่ออกแบบมาเพื่อดึงคำตอบเฉพาะ เช่น ครูอาจจะถามนักเรียนโดยใช้กระดานตะปู เพื่อสร้างรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนและสร้างรูปที่มีขนาดใหญ่หรือเล็กลง

ขั้นที่ 3 การอธิบาย (Explanation or explicitation) เป็นขั้นสร้างจากประสบการณ์เดิมของนักเรียน โดยให้นักเรียนแลกเปลี่ยนความคิดเห็นเกี่ยวกับสิ่งที่ได้จากการสังเกต ซึ่งจะช่วยให้ นักเรียนเรียนรู้ภาษาที่ถูกต้องและเหมาะสมบทบาทของครูลดน้อยลง นักเรียนได้อภิปรายร่วมกันและกันและกับครู

ขั้นที่ 4 การไม่กำหนดทิศทาง (Free orientation) เป็นขั้นที่นักเรียนต้องเผชิญกับงานที่ยุ้งยากมากขึ้นโดยจะได้ประสบการณ์ในการค้นพบวิธีแก้ปัญหาด้วยตัวของพวกเขาเอง งานก็สามารถทำให้สมบูรณ์ได้หลายวิธีและงานปลายเปิด พวกเขาได้ประสบการณ์ในการค้นพบวิธีแก้ปัญหาด้วยตัวของพวกเขาเอง ทำให้นักเรียนมีความชัดเจนเกี่ยวกับสิ่งที่ศึกษามากขึ้น

ขั้นที่ 5 การบูรณาการ (Integration) เป็นขั้นที่นักเรียนสรุปสิ่งที่เรียนมาได้ทั้งหมด โดยเป็นการทบทวนสิ่งที่ได้เรียนรู้ในการกระทำกิจกรรมตั้งแต่เริ่มต้น เช่น สรุปสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนทั้งหมด

จากข้างต้นสามารถกล่าวได้ว่า การจัดการเรียนรู้โดยใช้แนวการสอนของแวน ฮีลี เป็นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เกี่ยวกับการคิดทางเรขาคณิต ที่เน้นให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติด้วยตนเอง เปิดโอกาสให้นักเรียนได้แลกเปลี่ยนเรียนรู้ แสดงความคิดเห็น และอภิปรายร่วมกัน ตลอดจนการให้นักเรียนได้เผชิญกับปัญหาและแก้ปัญหาด้วยตัวของนักเรียนเอง ซึ่งทำให้นักเรียนเกิดการกระตุ้นความคิดและเป็นการพัฒนาการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียน ดังนั้น การพัฒนาการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียน สามารถทำได้โดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตาม 5 ขั้นตอน ของแวน ฮีลี โดยสามารถประเมินความสามารถทางการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียน จากการวัดระดับการคิดทางเรขาคณิต 5 ระดับ

2.3 โปรแกรมจีโอมิเตอร์สเก็ตช์แพด (The Geometer's Sketchpad Programe :GSP)

2.3.1 ประวัติความเป็นมาของโปรแกรมจีโอมิเตอร์สเก็ตช์แพด

โปรแกรมจีโอมิเตอร์สเก็ตช์แพด (GSP) เป็นโปรแกรมคณิตศาสตร์ที่ผลิตจากประเทศสหรัฐอเมริกา นิยมนำไปใช้ในวิชาคณิตศาสตร์ในหลาย ๆ ด้าน เช่น เรขาคณิต พีชคณิต ทรีโกณมิติ และแคลคูลัส เป็นต้น โปรแกรม GSP เป็นสื่อเทคโนโลยีที่ช่วยให้ผู้เรียนสามารถสร้างองค์ความรู้ด้วยตนเองและเป็นการเรียนโดยเน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ เป็นสื่อที่ช่วยให้ผู้เรียนพัฒนาทักษะของการมองเห็นรูปธรรมภายนอก ทักษะของกระบวนการแก้ปัญหา นอกจากนี้ การใช้โปรแกรม GSP ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ยังเป็นการบูรณาการสาระที่เกี่ยวข้องกับความรู้คณิตศาสตร์ และทักษะด้านเทคโนโลยีเข้าด้วยกันทำให้ผู้เรียนมีโอกาพัฒนาพหุปัญญาอันได้แก่ ปัญญาทางภาษาด้านตรรกศาสตร์ ด้านมิติสัมพันธ์ และด้านศิลปะ

โปรแกรม GSP พัฒนาขึ้นครั้งแรกเมื่อปี ค.ศ. 1991 โดยแจคคิว (Jachiew) ในโครงการพัฒนาเรขาคณิตที่มองเห็นได้ (Visual Geometry Project) ของมูลนิธิวิทยาศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา (National Science Foundation: NSF) ภายใต้การนำของคลอทซ์ (Klotz) แห่งวิทยาลัยสวาทมอร์ (Swartmore College) และชาทซ์ไนเดอร์ (Schatschneider) แห่งวิทยาลัยมอราเวียน (Moravian College) ในรัฐเพนซิลวาเนีย ประเทศสหรัฐอเมริกา ในระยะแรกซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ถูกพัฒนาขึ้นรุ่นเบต้า (Beta Version) เพื่อใช้กับเครื่องแมคอินทอช (Macintosh) ต่อมาในปี ค.ศ. 1993 ได้พัฒนาขึ้นสำหรับใช้กับเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ใช้ระบบปฏิบัติการแบบวินโดวส์ (Windows) ปี ค.ศ. 1995 พัฒนาขึ้นเป็นซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ รุ่น 3 โดยมีสำนักพิมพ์คีย์เคอร์ริคิวลัม (Key Curriculum Press) เป็นผู้สนับสนุนในการจัดทำวีดิทัศน์ หนังสือเรียน และสื่อสิ่งพิมพ์ที่เกี่ยวข้องกับการใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ จึงทำให้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์แพร่หลายในโรงเรียนของประเทศสหรัฐอเมริกา สำหรับการใช้อุปกรณ์คอมพิวเตอร์ในการเรียนการสอน

เรขาคณิตนั้น ในระยะแรกกำหนดให้ใช้ใน โรงเรียนมัธยมศึกษาที่มีการเรียนการสอนวิชาเรขาคณิต ผลของการใช้ในเบื้องต้นสามารถดึงดูดความสนใจของผู้เรียนทำให้นักเรียนประสบความสำเร็จในการเรียนเรขาคณิตและเรียนรู้อย่างมีประสิทธิภาพ (วรรณวิภา สุทธิเกียรติ. 2542 : 2)

โปรแกรม GSP ในปัจจุบันประเทศต่าง ๆ ได้นำไปใช้ในการจัดการเรียนการสอน มากกว่า 60 ประเทศทั่วโลกทั้งยังได้บรรจุในหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับต่าง ๆ กว่า 10 ประเทศ เช่น สิงคโปร์ มาเลเซีย ญี่ปุ่น จีน อังกฤษ อเมริกา แคนาดา ออสเตรเลีย เป็นต้น และได้มีการแปล โปรแกรมเป็นภาษาต่าง ๆ 15 ภาษา ได้แก่ ฝรั่งเศส สเปน เดนมาร์ก เกาหลี ญี่ปุ่น รัสเซีย นอร์เวย์ ฟินแลนด์ อาหรับ เชคโก เปรู เยอรมัน จีน อังกฤษ และไทย (สสวท.)

2.3.2 การใช้โปรแกรมจีโอเมตริคส์เพื่อกำหนดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์

การใช้โปรแกรม GSP ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ สำนักพิมพ์ คีย์ เคอร์รี่-คิวรัม (Key Curriculum Press) ได้กล่าวไว้สรุปได้ว่า โปรแกรม GSP เป็นเครื่องมือที่นักเรียนสามารถใช้กับเนื้อหาเรขาคณิตแบบ Euclidean หรือ Non-Euclidean พิเศษคณิต แคลคูลัส และตรีโกณมิติ ในการเรียนรู้โน้ตสันทางเรขาคณิตนั้น โปรแกรม GSP สามารถช่วยในการสร้างรูปเรขาคณิตในมิติต่าง ๆ ทำให้นักเรียนได้เกิดการสำรวจ และทำความเข้าใจในเนื้อหาเรขาคณิตได้ง่ายขึ้นกว่าการเรียนรู้แบบเดิม โปรแกรม GSP เป็นเครื่องมือที่ช่วยกระตุ้นให้เกิดกระบวนการค้นพบ โดยนักเรียนจะเห็นภาพในตอนแรกแล้วทำการวิเคราะห์ปัญหา หลังจากนั้นนักเรียนจะตั้งข้อคาดเดาก่อนที่จะทำการพิสูจน์ในเรื่องนั้น ๆ กระบวนการเรียนรู้จากโปรแกรม GSP ช่วยให้นักเรียนได้พัฒนาพื้นฐานของตนเองในเชิงรูปธรรมก่อนแล้วค่อยๆ พัฒนาการเรียนรู้ไปสู่ระดับที่สูงขึ้น ผู้ใช้จะสามารถสร้างรูปเรขาคณิต วัดขนาด สัดส่วนของเส้นตรง ส่วนโค้ง มุม และพื้นที่ได้รวดเร็วและถูกต้อง ทั้งยังช่วยให้ผู้เรียนสร้างรูปสองมิติและสามมิติบนหน้าจอแล้วทำกิจกรรมสำรวจการยืด หด เลื่อน รูป ในมุมมองต่าง ๆ เพื่อเรียนรู้โน้ตสันทางเรขาคณิตได้รวดเร็วนำไปสู่การค้นหาคำสมมติต่าง ๆ ส่งเสริมให้นักเรียนเกิดความกระตือรือร้น ดึงดูดความสนใจ เกิดจินตนาการในการค้นคว้าหาเหตุผลและเพิ่มพูนความรู้ ซึ่งการเรียนรู้เรขาคณิตในลักษณะดังกล่าวจะทำให้ผู้เรียนมองสิ่งต่างๆ รอบตัวได้อย่างมีความหมายมากขึ้น การใช้โปรแกรม GSP จะช่วยให้ การสร้างรูปได้รวดเร็วทำให้การแก้ปัญหาในเรื่องที่ยากและซับซ้อนได้อย่างมีประสิทธิภาพและประหยัดเวลาในการเรียนรู้ นอกจากนี้ยังใช้งานง่าย ใช้เวลาน้อยในการศึกษาวิธีการใช้งาน ผู้สอนสามารถใช้เป็นสคริปต์ในการสาธิตหรือสรุปให้ผู้เรียนศึกษาตามเพื่อการทบทวนเนื้อหาได้ การใช้งานโปรแกรม GSP จะใช้งานที่มีลักษณะดังต่อไปนี้

1) สร้างรูปเพื่อศึกษาทฤษฎีของยูคลิดและนอกระบบยูคลิด โดยใช้เมนูคำสั่งเครื่องมือวาดภาพในกล่องเครื่องมือ และคำสั่งในเมนูการสร้าง

2) ปรับเปลี่ยนรูปโดยใช้คำสั่งใน Transformation Menu ในการเลื่อน ขนาน การสะท้อนการหมุน การย่อขยายและทำซ้ำ เพื่อกำหนด จำนวน และบอกปริมาณต่าง ๆ

3) ป้อนข้อมูลผลการวิเคราะห์ทางเรขาคณิต เพื่อให้แสดงในรูปการสร้าง กราฟในระบบแกนมุมฉากหรือระบบโพลาร์

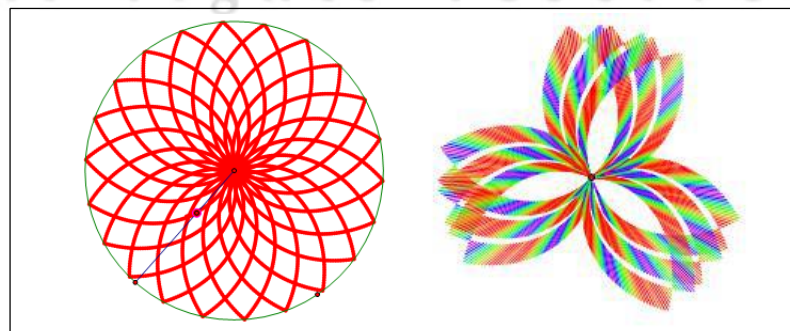
4) จำนวนและแสดงอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่าง ๆ ทั้งในรูปของกราฟและ สัญลักษณ์

5) สร้างภาพเคลื่อนไหวเพื่อแสดงกราฟของฟังก์ชันไซน์และสำรวจ เอกลักษ์ตรี โทณมิติ

อภิชาติ เพชรพลอย (2558: หน้า 1) กล่าวถึงโปรแกรม GSP ว่าเป็นระบบซอฟต์แวร์ ที่ใช้สำหรับสร้าง สำรวจ และการวิเคราะห์สิ่งต่างๆที่เกี่ยวกับเนื้อหาคณิตศาสตร์หลายด้าน โปรแกรม GSP เป็นสื่อเทคโนโลยีที่ช่วยให้ผู้เรียนมีโอกาสเรียนรู้คณิตศาสตร์ โดยการสร้างองค์ความรู้ด้วย ตนเอง เนื่องจากขณะใช้โปรแกรม GSP ผู้ใช้สามารถสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ทำให้เกิดการ เคลื่อนไหวเชิงเรขาคณิต และผู้ใช้สามารถทำการโต้ตอบได้ โปรแกรม GSP สามารถนำมาใช้ในการ สำรวจเบื้องต้นเกี่ยวกับรูปทรงเรขาคณิต และจำนวน ตลอดจนแสดงการเคลื่อนไหวของเนื้อหาด้าน คณิตศาสตร์ที่ซับซ้อนและพัฒนาความคิดเกี่ยวกับหัวข้อต่างๆ ในวิชาคณิตศาสตร์ได้หลายแขนงเช่น เรขาคณิต พีชคณิต ตรีโกณมิติ แคลคูลัสและเนื้อหาอื่นๆ จึงมีความเหมาะสมที่จะนำมาใช้ในการ จัดการเรียนรู้ และสร้างสื่อคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

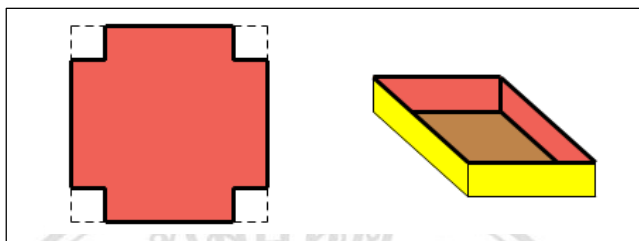
อภิชาติ เพชรพลอย (2558, หน้า4-6) ได้กล่าวถึงการใช้งานโปรแกรม GSP ว่า สามารถนำมาใช้ในงานที่มีลักษณะที่หลากหลาย ดังรายละเอียดต่อไปนี้

1) ด้านศิลปะและการเคลื่อนไหว (Art / Animation) โปรแกรม GSP สามารถที่จะ นำเครื่องมือมาสร้างรูปต่างๆ และสามารถใช้คำสั่งเพื่อที่จะทำให้รูปดังกล่าวเคลื่อนไหวได้ตามที่ ต้องการ ดังภาพที่ 2.1



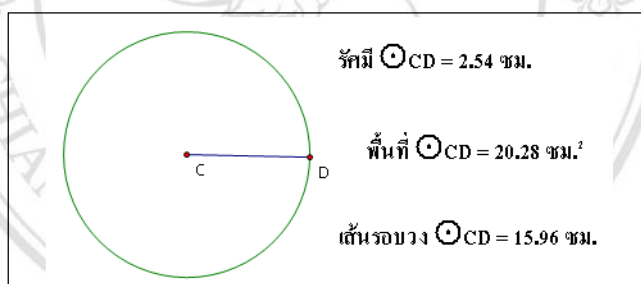
ภาพที่ 2.1 แสดงตัวอย่างการใช้โปรแกรม GSP ในการสร้างงานศิลปะและการเคลื่อนไหว

2) แคลคูลัส (Calculus) เราสามารถใช้โปรแกรม GSP คำนวณหาปริมาตรของกล่องซึ่งเกิดจากการตัดมุมทั้งสี่ของกระดาษ ซึ่งเราจะเห็นการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรของกล่องดังกล่าวจากการเคลื่อนไหว และนอกจากนี้ยังสามารถใช้โปรแกรกดังกล่าวสร้างกราฟจากสมการต่างๆ ได้ ดังภาพที่ 2.2



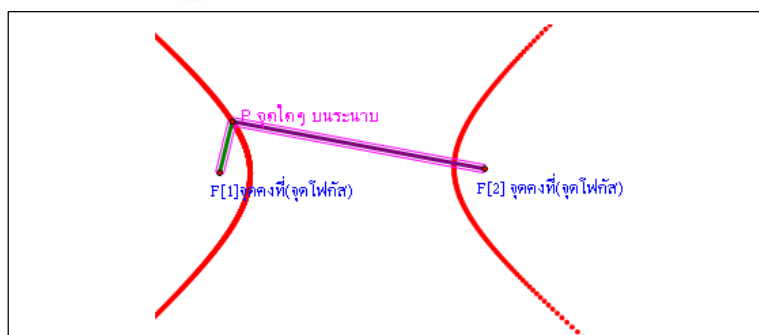
ภาพที่ 2.2 แสดงตัวอย่างการใช้โปรแกรม GSP ในการหาปริมาตรของกล่องที่เกิดจากการตัดมุมทั้งสี่ของกระดาษ

3) วงกลม (Circles) ในโปรแกรม GSP สามารถที่จะใช้เครื่องมือ Compass Tool สร้างวงกลมได้ตามที่ต้องการ และสามารถที่จะวัดหารัศมี เส้นรอบวง และคำนวณหาพื้นที่ที่ได้ ดังภาพที่ 2.3



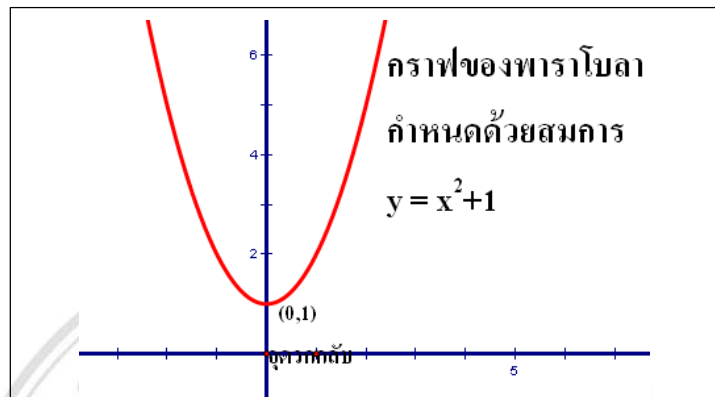
ภาพที่ 2.3 แสดงตัวอย่างการใช้โปรแกรม GSP ในการสร้างวงกลม วัดรัศมี วัดเส้นรอบวง และคำนวณหาพื้นที่

4) ภาคตัดกรวย (Conic Section) สำหรับเรื่องภาคตัดกรวย โปรแกรม GSP สามารถที่จะสร้างวงกลม วงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบลา โดยการเคลื่อนที่ที่ทำให้เห็นร่องรอย (Trace) ของกราฟ ซึ่งจะช่วยให้เห็นรูปต่างๆ ได้ตามต้องการ ดังภาพที่ 2.4



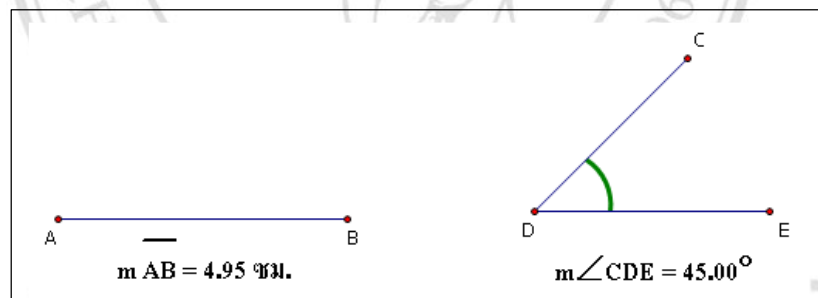
ภาพที่ 2.4 แสดงตัวอย่างการใช้โปรแกรม GSP ในการสร้างไฮเพอร์โบลา

5) การเขียนกราฟและการหาจุดโคออร์ดิเนตในเรขาคณิต (Graphing / Coordinate Geometry) ในการเขียนกราฟจากรูปสมการต่างๆ โปรแกรม GSP สามารถสร้างรูปกราฟและหาจุดโคออร์ดิเนตในสมการต่างๆ ได้ ดังภาพที่ 2.5



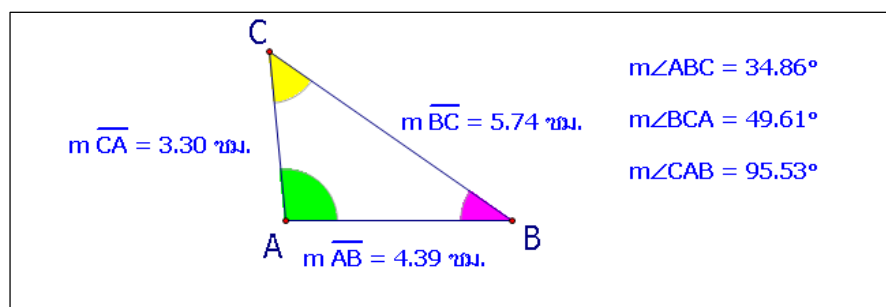
ภาพที่ 2.5 แสดงตัวอย่างการใช้โปรแกรม GSP ในการเขียนกราฟและการหาจุดโคออร์ดิเนต

6) เส้นตรงและมุม (Lines and Angles) ในการสร้างเส้นตรงและมุมโดยใช้โปรแกรม GSP สามารถทำได้โดยง่าย ซึ่งเมื่อได้ทำการสร้างเส้นตรงและมุมเสร็จแล้วสามารถที่จะวัดขนาดของเส้นตรงและมุมดังกล่าวได้ ซึ่งด้วยความสามารถและคุณสมบัติดังกล่าวทำให้การสรุปเนื้อหาและทฤษฎีเกี่ยวกับเรื่องเส้นตรงและมุมทำได้รวดเร็วยิ่งขึ้น ดังภาพที่ 2.6



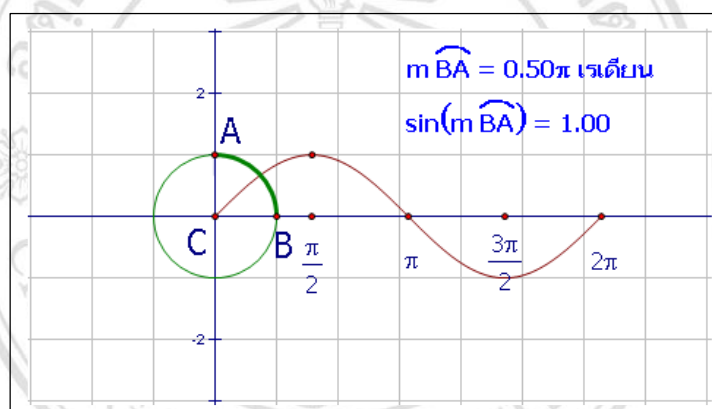
ภาพที่ 2.6 แสดงตัวอย่างการใช้โปรแกรม GSP ในการสร้างส่วนของเส้นตรงกับการวัดขนาดของส่วนของเส้นตรง และการสร้างมุมกับการวัดขนาดของมุม

7) รูปสามเหลี่ยม (Triangles) เมื่อสร้างรูปสามเหลี่ยมโดยใช้โปรแกรม GSP แล้ว เราสามารถใช้คำสั่งภายในโปรแกรมเพื่อกำหนดหาความยาวของด้านแต่ละด้าน มุมแต่ละมุมและคำนวณหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมดังกล่าวได้ ดังภาพที่ 2.7



ภาพที่ 2.7 แสดงตัวอย่างการใช้โปรแกรม GSP ในการสร้างรูปสามเหลี่ยม และการคำนวณหาความยาวของด้านแต่ละด้านและมุมแต่ละมุม

8) ตรีโกณมิติ (Trigonometry) ในการหาฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม GSP กระทำได้โดยสร้างวงกลมหน่วย (Unit Circle) เมื่อกำหนดมุม C ตามรูปด้านล่าง ก็สามารถหาฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม C ได้ตามต้องการ ดังภาพที่ 2.8



ภาพที่ 2.8 แสดงตัวอย่างการใช้โปรแกรม GSP ในการหาฟังก์ชันตรีโกณมิติ

จากเอกสารของ สาขาคณิตศาสตร์และสถิติ มหาวิทยาลัยหัวเฉียวเฉลิมพระเกียรติ (2555 : หน้า 1) กล่าวว่า โปรแกรม GSP สำหรับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ เป็นการบูรณาการสาระที่เกี่ยวข้องกับความรู้คณิตศาสตร์และทักษะด้านเทคโนโลยีเข้าด้วยกัน ทำให้ผู้เรียนมีโอกาพัฒนาหุปัญญาอันได้แก่ ปัญญาทางด้านภาษา ด้านตรรกศาสตร์ ด้านมิติสัมพันธ์ และด้านศิลปะ โปรแกรม GSP มีลักษณะเป็น Dynamic software ที่ช่วยให้ผู้เรียนมีโอกาเรียนคณิตศาสตร์ โดยการสร้างองค์ความรู้ใหม่ๆ หรือสร้างความคิดรวบยอดต่างๆ ทางคณิตศาสตร์ได้ด้วยตนเอง เนื่องจากเวลาใช้โปรแกรม GSP ผู้เรียนสามารถสร้างตัวแบบคณิตศาสตร์ (Mathematical model) ที่ทำให้เกิดการเคลื่อนไหวเชิงเรขาคณิต และผู้ใ้สามารถใช้มีปฏิสัมพันธ์โต้ตอบกับโปรแกรมได้ โปรแกรม GSP สามารถนำมาใช้สร้างรูปเรขาคณิตที่เคลื่อนไหวได้ ซึ่งนำไปสู่การค้นหามบัตินต่างๆ ทางเรขาคณิต โดยผู้เรียนสามารถสำรวจ ตั้งข้อสังเกต คาดเดาและสืบเสาะตรวจสอบเพื่อยืนยันเหตุผลของตนเอง ทำให้เกิดจินตนาการในการค้นคว้าหาเหตุผลเป็นการเพิ่มพูนความรู้ให้กับผู้เรียน และ

พัฒนาความคิดรวบยอดเกี่ยวกับเนื้อหาสาระต่างๆ ในวิชาคณิตศาสตร์ ไม่ว่าจะเป็นทางเรขาคณิต พีชคณิต ตรรกศาสตร์ ได้เป็นอย่างดี นอกจากนี้สำหรับผู้สอนเองก็สามารถนำเอาโปรแกรม GSP มาช่วยเป็นสื่อในการสร้างบรรยากาศของการเรียนการสอนที่ส่งเสริมให้มีการนำเสนอความคิด รวบยอดทางคณิตศาสตร์ ความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ตลอดจนมีการนำเสนอที่น่าสนใจเร้าใจซึ่งทำให้ ผู้เรียนเกิดความสนใจ มีการซักถาม การโต้ตอบ ซึ่งจะทำให้ผู้เรียนตั้งข้อาคเดาเหตุการณ์และหา ข้อสรุปในเวลาเรียนหรือในช่วงเวลาที่น่าเสนอได้ ซึ่งขอบเขตของการใช้งาน โปรแกรมนั้นก็ขึ้นอยู่กับ จินตนาการของผู้เรียนเอง

เสรี สุขโยธิน (2555) กล่าวว่า โปรแกรม GSP เป็นซอฟต์แวร์สำรวจเชิงคณิตศาสตร์ เรขาคณิตเชิงพลวัต (Dynamic geometry) ที่ใช้สร้าง รูปเรขาคณิตที่เคลื่อนไหวได้ซึ่งนำไปสู่การ ค้นหาคสมบัติต่างๆทางเรขาคณิตโดย ผู้ใช้ซอฟต์แวร์นี้สร้างรูปแล้วสามารถสำรวจ ตั้งข้อาคเดา และ สืบเสาะตรวจค้นเพื่อยืนยันเหตุผลของตนเองทำให้เกิดจินตนาการในการค้นหา เหตุผลเพื่อเพิ่มพูน ความรู้่นักเรียนมีโอกาพัฒนาพหุปัญญาอันได้แก่ ปัญญาทางภาษา ด้านตรรกศาสตร์ ด้านมิติสัมพันธ์ และด้านศิลปะ โปรแกรม GSP สามารถนำไปใช้ประกอบการเรียนการสอนได้หลากหลายเนื้อหาทาง เรขาคณิตเช่นเส้นตรงและมุม การสร้าง ความเท่ากันทุกประการ ทฤษฎีบทพีทาโกรัส เส้นขนาน ความคล้าย วงกลม นอกจากนี้ยังสามารถนำไปใช้ในเรื่องของตรีโกณมิติ เรขาคณิตวิเคราะห์ เวกเตอร์ ฟังก์ชัน การเขียนแบบ ฯลฯ ผู้ใช้โปรแกรม GSP ในฐานะนักเรียน จะช่วยทำให้นักเรียน สำรวจเนื้อหาและพัฒนาความคิดรวบยอดเกี่ยวกับเนื้อหาสาระต่างๆ ในวิชาคณิตศาสตร์ เช่น เรขาคณิต พีชคณิต ตรรกศาสตร์ ได้เป็นอย่างดี นอกจากนี้สำหรับผู้สอนสามารถนำโปรแกรม GSP มาช่วยเป็นสื่อในการสร้างบรรยากาศของการเรียนการสอนที่ส่งเสริมให้มีการนำเสนอความคิด รวบยอดทางคณิตศาสตร์ ความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ตลอดจนมีการนำเสนอที่น่าสนใจเร้าใจซึ่งทำให้ นักเรียนเกิดความสนใจ มีการซักถาม การโต้ตอบ ซึ่งจะทำให้ให้นักเรียนตั้งข้อาคเดาเหตุการณ์และหา ข้อสรุปในเวลาเรียนหรือในช่วงเวลาที่น่าเสนอได้

จากข้างต้นสามารถกล่าวได้ว่า โปรแกรม GSP เป็นซอฟต์แวร์สำรวจเชิงคณิตศาสตร์สำหรับ สร้าง สำรวจ และการวิเคราะห์สิ่งต่างๆที่เกี่ยวกับเนื้อหาคณิตศาสตร์หลายด้าน สามารถใช้สร้างรูป เรขาคณิตที่เคลื่อนไหวได้ นำไปสู่การค้นหาคสมบัติต่างๆทางเรขาคณิต โดยการสำรวจ ตั้งข้อาคเดา และสืบเสาะตรวจค้นเพื่อยืนยันเหตุผลของตนเอง ทำให้เกิดจินตนาการในการค้นหาเหตุผล อีกทั้งยังเป็นสื่อเทคโนโลยีที่ช่วยให้ผู้เรียนมีโอกาเรียนรู้คณิตศาสตร์ โดยการสร้างองค์ความรู้ด้วยตนเอง และเป็นการบูรณาการสาระที่เกี่ยวข้องกับความรู้คณิตศาสตร์และทักษะด้านเทคโนโลยีเข้าด้วยกัน ซึ่ง สามารถนำไปใช้ประกอบการเรียนการสอนได้หลากหลายเนื้อหาทางเรขาคณิต

2.4 ความรู้สึกเชิงปริภูมิ (Spatial sense)

2.4.1 ความหมายและความสำคัญของความรู้สึกเชิงปริภูมิ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2558) ได้กล่าวถึง "ความรู้สึกเชิงปริภูมิ" มาจากคำว่า spatial sense ในภาษาอังกฤษ spatial มาจากคำว่า space ภาษาไทยใช้คำว่า "ปริภูมิ" ในที่นี้ หมายถึง สิ่งต่างๆ รวมทั้ง อาณาบริเวณซึ่งทุกสิ่งทุกอย่างดำรงอยู่เคลื่อนไหว และเคลื่อนที่ หรืออีกนัยหนึ่ง มิติที่เราอาศัยอยู่นั่นเอง

sense เป็นความรู้สึกที่เรารับรู้ผ่านทางประสาทสัมผัสทั้งห้า ซึ่งได้แก่ การมองเห็น การได้ยิน การรับรู้กลิ่น การรับรู้รส และการสัมผัส ประกอบกับ ความรู้ความเข้าใจอย่างลึกซึ้งเกี่ยวกับสิ่งใดสิ่งหนึ่งอันจะนำไปสู่การตัดสินใจที่สมเหตุสมผล

ความรู้สึกเชิงปริภูมิ หรือ spatial sense จึงเป็นความสามารถของบุคคลในการรับรู้และเข้าใจอย่างลึกซึ้งเกี่ยวกับสิ่งต่างๆ รอบตัว รวมทั้ง อาณาบริเวณซึ่งทุกสิ่งทุกอย่างดำรงอยู่เคลื่อนไหว และเคลื่อนที่ รวมถึงความสามารถในการนึกภาพหรือจินตนาการ การเคลื่อนย้ายการหมุน การพับ หรือการใช้สื่อหรือแบบจำลอง

เด็กเรียนรู้ด้วยตนเองเกี่ยวกับธรรมชาติของปริภูมิจากการเคลื่อนไหว การจับต้อง และการปฏิสัมพันธ์ (interact) กับสิ่งต่างๆ รอบตัว ซึ่ง ความรู้ความเข้าใจที่เกิดขึ้นเองโดยสัญชาตญาณเกี่ยวกับสิ่งต่างๆ รอบตัวนี้เป็นส่วนหนึ่งของความรู้สึกเชิงปริภูมิ ในการพัฒนาความรู้สึกเชิงปริภูมิ เด็กจำเป็นต้องได้รับประสบการณ์ที่หลากหลาย และประสบการณ์ต่างๆ เหล่านั้นควรเป็นประสบการณ์ที่เน้นในเรื่องต่างๆ ต่อไปนี้

- 1) ความสัมพันธ์ทางเรขาคณิต
- 2) ทิศ ทิศทาง และมุมมองของรูปและวัตถุต่าง ๆ ในปริภูมิ
- 3) ความสัมพันธ์ของรูปร่างและขนาดของรูปและวัตถุต่าง ๆ
- 4) การเปลี่ยนรูปร่างสัมพันธ์กับการเปลี่ยนขนาดอย่างไร

อาจกล่าวได้ว่า ความรู้สึกเชิงปริภูมิเป็นความสามารถของบุคคลในการรับรู้และความเข้าใจอย่างลึกซึ้งเกี่ยวกับสิ่งต่างๆ รอบตัว ไม่ว่าจะเป็นการเข้าใจเกี่ยวกับขนาด รูป ร้าง ตำแหน่ง ทิศทาง ระยะทาง และความสัมพันธ์ของรูปและสิ่งต่างๆ รวมถึงการเคลื่อนไหว การเคลื่อนที่ ความสามารถการนึกภาพหรือการใช้จินตนาการ การเคลื่อนย้าย การหมุน การพับ

2.4.2 พัฒนาการของความรู้สึกเชิงปริภูมิ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2558) ได้กล่าวว่า เด็กรับรู้เกี่ยวกับลักษณะ รูป ร้าง ตำแหน่ง และการเคลื่อนไหวของสิ่งต่างๆ จากการมองเห็น ขณะที่สมองกำลังนำภาพที่ได้จากการมองเห็นมาประมวลผลนั้น กระบวนการประมวลผลข้อมูลที่ผ่านมาทางประสาทการรับรู้ส่วนอื่นๆ อันได้แก่ การได้ยิน การสัมผัส การรับรู้กลิ่น ตำแหน่งที่อยู่ของร่างกายในขณะนั้น รวมถึงประสบการณ์ที่เกี่ยวข้องก็จะเกิดขึ้นไปพร้อมกันด้วย สิ่งที่ได้จากการประมวลผลข้อมูลที่ผ่านมาทางประสาทการรับรู้เหล่านี้ ช่วยให้เด็กได้ค้นพบว่าโลกภายนอกและผู้คนนั้นเป็นอย่างไร

เด็กเริ่มเข้าโรงเรียนโดยมีพื้นฐานเกี่ยวกับความรู้สึกเชิงปริภูมิเป็นทุนเดิมอยู่แล้ว เนื่องจากพัฒนาการในขั้นต้นของเด็กยังไม่มีภาษาเข้ามาเกี่ยวข้อง ประสบการณ์ส่วนใหญ่ เป็นเรื่องของรูป ร้าง ขนาด และตำแหน่งของสิ่งต่างๆ รอบตัว โดยธรรมชาติแล้วเด็ก ส่วนใหญ่มีความคุ้นเคยกับการแก้ปัญหาที่ต้องใช้ความรู้สึกเชิงปริภูมิ และได้พัฒนา ความคิดสร้างสรรค์และทักษะทางคณิตศาสตร์ จากการทำกิจกรรมที่ใช้สื่อสิ่ง ประดิษฐ์และวัตถุหรือสิ่งของที่พบในชีวิตประจำวัน

ในเบื้องต้นเด็กทุกคนจะต้องรู้จักการเลื่อนและการหมุนเพราะเป็นพื้นฐานที่ใช้ในการสำรวจสิ่งแวดล้อมรอบตัว ดังนั้นจึงควรให้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์แก่นักเรียนตั้งแต่ เริ่มเรียนโดยการวางแผนคิดเกี่ยวกับการเลื่อนและการหมุนไว้ในบริบทของเรขาคณิต นอกจากนี้ความเข้าใจอย่างถ่องแท้เกี่ยวกับรูป ร้างในสองและสามมิติ ด้านลักษณะเฉพาะ ความเกี่ยวข้องกันของรูป ร้างเหล่านี้ และผลจากการเปลี่ยนแปลงรูป ร้าง นับเป็นส่วนที่สำคัญของความรู้สึกเชิงปริภูมิ

การพัฒนาความรู้สึกเชิงปริภูมิเป็นสิ่งจำเป็นอย่างยิ่ง ทั้งในกิจกรรมการเรียนรู้ การสอนเรขาคณิตและกิจกรรมอื่นๆ ความรู้สึกเชิงปริภูมิเป็นส่วนสำคัญสำหรับ พัฒนาการทางด้านต่างๆ ของเด็ก ไม่ว่าจะเป็นพัฒนาการทางด้านการอ่าน การเขียน การวาด การสร้างแบบจำลอง และการแก้ปัญหาของนักเรียน รวมไปถึงพัฒนาการทางด้านสังคมและอารมณ์ เด็กจะมีพัฒนาการด้านความรู้สึกเชิงปริภูมิมาตามลำดับ ตั้งแต่วัยทารกและพัฒนาต่อไปเมื่อเด็กเริ่มเข้าสู่ระบบโรงเรียน การทำงานของกล้ามเนื้อต่างๆ ของร่างกายอาจอยู่ในขั้นกำลังพัฒนา ครูจึงควรเลือกกิจกรรมที่เพิ่มทักษะเหล่านี้ให้มากขึ้น ให้นักเรียนได้มีโอกาสทำกิจกรรมกับสื่อรูปธรรมต่างๆ นักเรียนจะต้องฝึกฝนการจินตเขียนเป็นขั้นตอน ครูไม่ควรเร่งรัดให้นักเรียนทำกิจกรรม บางกิจกรรมโดยตั้งเกณฑ์หรือคุณภาพของงานสูงเกินไป ครูผู้สอนควรให้ความสนใจ ใส่และอาศัยการสังเกตเพื่อดูว่านักเรียนแต่ละคนมีพื้นฐานทางด้านความรู้สึกเชิงปริภูมิต่างๆ อย่างไร แล้วเลือกจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่ช่วยส่งเสริมทักษะทางด้านความรู้สึกเชิง ปริภูมิให้เหมาะสมกับระดับพัฒนาการของนักเรียน

2.4.3 แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนเรขาคณิตเพื่อพัฒนาความรู้สึกเชิงปริภูมิ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2558) ได้กล่าวว่า ความรู้สึกเชิงปริภูมิเป็นทักษะที่ทุกคนมีอยู่ในตนเอง จะมีมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับปัจจัยหลายด้าน เช่น การอบรมเลี้ยงดู สภาพแวดล้อม การจัดการเรียนการสอนในโรงเรียน เป็นต้น ได้จำแนกความรู้สึกเชิงปริภูมิที่ดีที่นักเรียนควรมีออกเป็น 7 ประการ ดังนี้

1) การประสานระหว่างสายตากับการเคลื่อนไหว (Eye - motor coordination)

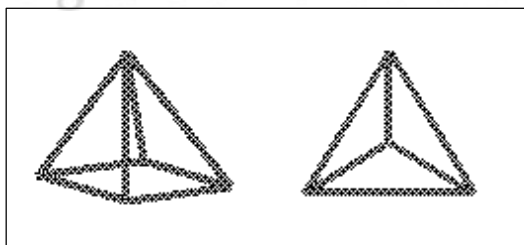
การประสานระหว่างสายตากับการเคลื่อนไหวเป็นความสามารถในการประสานงานของสายตากับร่างกายส่วนอื่นๆ ในการปฏิบัติกิจกรรมต่างๆ เช่น ขณะวิ่ง กระโดด เตะลูกบอล หรือก้าวข้ามสิ่งกีดขวาง สายตาจะควบคุมทิศทางของการเคลื่อนไหวของเท้า ขณะที่แต่งตัว เดินถือของไปวางที่โต๊ะหรือทำความสะอาดห้อง สายตาและส่วนอื่นๆ ของร่างกายจะต้องประสานงานกัน

การประสานระหว่างสายตากับการเคลื่อนไหวเป็นทักษะที่จำเป็น เพราะเด็กที่มีความบกพร่องทางด้านนี้จะทำให้มีพัฒนาการทางด้านอื่นๆ ล่าช้าไปด้วย เช่น ถ้านักเรียนประสบปัญหาในการลากเส้นเชื่อมโยงจุดต่างๆ บนกระดานจุด เป็นไปได้ที่นักเรียนคนนั้นจะมัวพะวงกับการเชื่อมโยงจุด จนไม่ได้พิจารณาถึงสมบัติของรูปที่สร้างขึ้น

ตัวอย่างกิจกรรมที่ช่วยพัฒนาการประสานระหว่างสายตากับการเคลื่อนไหว

- การสร้างภาพตามแบบที่กำหนดให้
- การบอกความคล้ายและความแตกต่างของรูปเรขาคณิต
- การสร้างรูปเรขาคณิตโดยการลากเส้นบนกระดานจุด
- การพิจารณาลูกบาศก์หรือรูปเรขาคณิตสามมิติอื่นๆ แล้วสร้างแบบจำลอง
- การนำลวด หลอดดูด หรือวัสดุอื่นๆ มาประดิษฐ์เป็นโครงร่างของรูป

เรขาคณิตสามมิติ เช่น พีระมิด ทรงสี่หน้า (tetrahedron) ดังภาพที่ 2.9 แล้วพิจารณาลักษณะของแต่ละหน้า จำนวนลวดหรือหลอดดูดที่มาบรรจบเป็นมุม



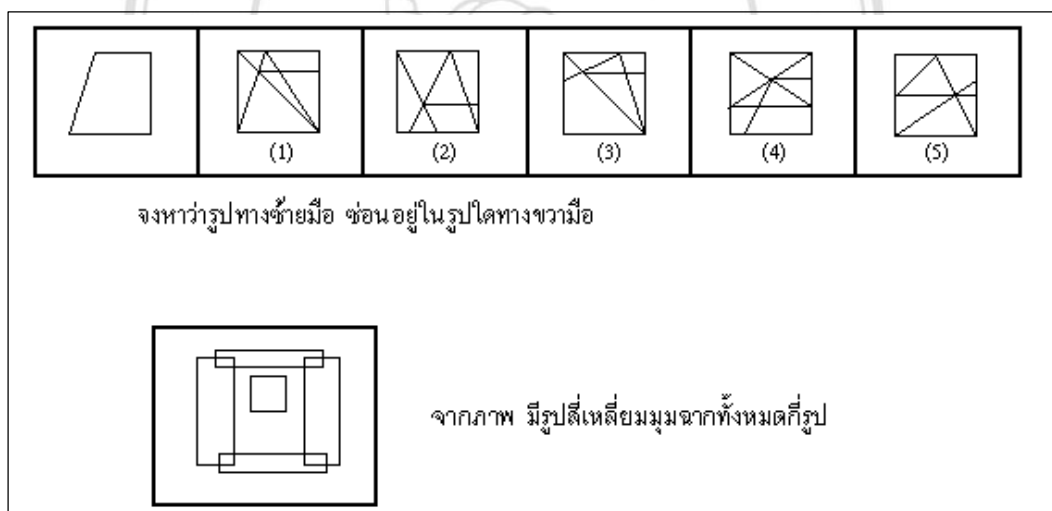
ภาพที่ 2.9 แสดงการนำหลอดดูดมาสร้างเป็นโครงร่างของรูปเรขาคณิตสามมิติ

2) การจำแนกภาพออกจากพื้นหลัง (Figure - ground perception)

การจำแนกภาพออกจากพื้นหลังเป็นความสามารถในการใช้สายตาจำแนกภาพออกจากพื้นหลัง การรับรู้เกี่ยวกับภาพดีๆ จะสมบูรณ์ได้ ต้องอาศัยการรับรู้ที่สัมพันธ์กับพื้นหลัง

ตัวอย่างเช่น เด็กคนหนึ่งกำลังเลี้ยงลูกบอลให้กระดอนกับพื้นสนาม ความสนใจของเด็กคนนี้จะอยู่ที่ลูกบอลเป็นหลัก ภาพที่เด็กมองเห็นอย่าง ชัดเจนจึงมีเพียงลูกบอล ในขณะที่ส่วนอื่นๆ ในสนามไม่ว่าจะเป็นกระบะทราย เครื่องเล่น หรือเด็กคนอื่นๆ นั้น เด็กจะรับรู้ในลักษณะของพื้นหลังที่มองเห็น เพียงเพื่อหลบหลีกไม่ให้เข้าไปชนเท่านั้น

กิจกรรมจิตเขียนที่อาศัยการรับรู้ภาพจากพื้นหลังมักจะเกี่ยวข้องกับการค้นหา รูปเรขาคณิตชนิดใดชนิดหนึ่งที่ซ่อนอยู่ในภาพซึ่งเกิดจากรูปเรขาคณิตหลายๆ ชนิดซ้อน เหลื่อม หรือตัดกันดังภาพที่ 2.10 การพิจารณาภาพที่กำหนดให้แล้วบอกชนิดและจำนวนของรูปเรขาคณิตที่อยู่ในภาพนั้นๆ



ภาพที่ 2.10 แสดงตัวอย่างกิจกรรมที่ช่วยพัฒนาทักษะการจำแนกภาพออกจากพื้นหลัง

- การสร้างรูปที่เท่ากันทุกประการบนกระดานตะปู เช่น ครูอาจให้นักเรียนสร้าง รูปสามเหลี่ยมบนกระดานตะปู จากนั้น หมุนกระดานตะปูไปเศษหนึ่งส่วนสี่รอบ จ้าให้นักเรียนเห็นว่าตำแหน่งของยางรัดไม่ได้เปลี่ยนแปลง แล้วถามนักเรียนว่า รูปที่ได้ยังเหมือนเดิมหรือไม่ ต่างจากเดิมอย่างไร มีขนาดและรูปร่างเหมือนเดิมหรือไม่ เพราะเหตุใด

- การสร้างรูปที่มีขนาดและรูปร่างเหมือนกันสองรูปบนกระดานตะปู แล้วให้นักเรียนพิจารณาพร้อมทั้งบอกเหตุผลว่าทำไมจึงคิดว่าสองรูปนี้เหมือนกัน

- ให้นักเรียนใช้ยางรัดสร้างรูปเรขาคณิตบนกระดานตะปู จากนั้นคัดลอกรูปเรขาคณิต ดังกล่าวลงในกระดาษ

3) ความคงตัวในการรับรู้รูป ร้างหรือขนาด (Perceptual constancy)

ความคงตัวในการรับรู้รูป ร้างหรือขนาดเป็นความสามารถของบุคคลในการจดจำรูป ร้างหรือขนาดของวัตถุไม่ว่าวัตถุนั้นจะอยู่ใกล้หรือไกล วางอยู่ ณ ตำแหน่งใด หรือภาพที่ปรากฏแก่สายตาจะเป็นภาพจากมุมมองใด

ความสามารถของบุคคลในการจดจำรูป ร้าง เช่น การที่บุคคลรู้ว่าพื้นผิวโต๊ะเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก แม้ว่าภาพของพื้นโต๊ะที่ปรากฏแก่สายตาจากมุมมองนั้นๆ จะเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูก็ตาม ส่วนความสามารถของบุคคลในการจดจำขนาด เช่น การที่บุคคลซึ่งมีความคุ้นเคยกับกีฬาฟุตบอลรู้ว่าลูกฟุตบอลที่ตนถืออยู่ในมือกับลูกฟุตบอลที่อยู่ห่างออกไปอีก 10 เมตร ซึ่งมองเห็นเป็นเพียงจุดเล็ก ๆ นั้นมีขนาดเท่ากัน

ตัวอย่างกิจกรรมที่ช่วยพัฒนาทักษะความคงตัวในการรับรู้รูป ร้างหรือขนาด

- การพิจารณารูปเรขาคณิตสามมิติสองชนิด เช่น ปริซึมสี่เหลี่ยมจัตุรัส และปริซึมสามเหลี่ยมว่ามีอะไรบางอย่างที่เหมือนกัน และมีอะไรบางอย่างที่แตกต่างกัน
- การสำรวจหน้าของรูปเรขาคณิตสามมิติชนิดต่างๆ แล้วเขียนหน้าทุกหน้าลงในตารางซึ่งแบ่งเป็นสองคอลัมน์ คอลัมน์แรกเป็นภาพของรูปเรขาคณิตสามมิติพร้อมชื่อประกอบได้ภาพ คอลัมน์ที่สองเป็นหน้าต่างๆ ของรูปเรขาคณิตสามมิติ ดังภาพที่ 2.11

รูปเรขาคณิตสามมิติ	หน้าต่างๆ
 ลูกบาศก์	     
 ปริซึมหกเหลี่ยม	     
 ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก	     

ภาพที่ 2.11 แสดงการสำรวจหน้าของรูปเรขาคณิตสามมิติชนิดต่างๆ

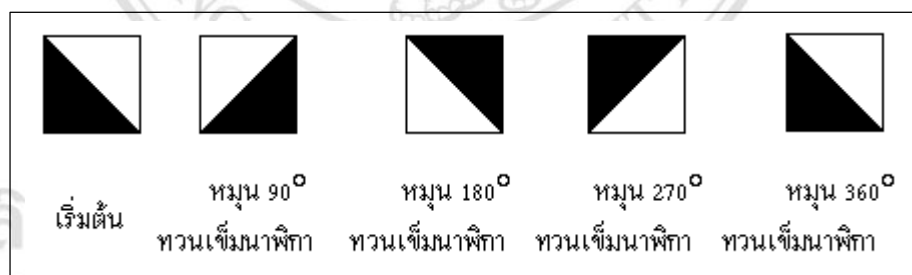
นำตารางที่ได้มาตัดเป็นชิ้นส่วนตามแนวเส้นคั่นตารางจะได้ภาพรูปเรขาคณิตสามมิติ ชนิดต่างๆ และภาพแสดงหน้าต่าง ๆ ของรูปเรขาคณิตสามมิติ แผ่นภาพที่ได้สามารถนำมา ทำกิจกรรม ถาม - ตอบ หรือเล่นเกมจับคู่ภาพรูปเรขาคณิตสามมิติกับหน้าต่างๆ

4) การรับรู้เกี่ยวกับตำแหน่งในปริภูมิ (Position - in - space perception)

การรับรู้เกี่ยวกับตำแหน่งในปริภูมิเป็นความสามารถของบุคคลในการรับรู้ตำแหน่งของสิ่งต่างๆ โดยใช้ตนเองเป็นจุดอ้างอิง กล่าวคือ บอกได้ว่าวัตถุอยู่ข้างหน้า ข้างหลัง ข้างบน ข้างล่าง หรือข้างๆ ตน เด็กที่มีความบกพร่องในการรับรู้ตำแหน่งของสิ่งต่างๆ มักจะประสบปัญหาในการอ่าน ซึ่งทำให้เกิดความล่าช้าด้านพัฒนาการทางการเขียนและการคิดคำนวณ

ตัวอย่างกิจกรรมที่ช่วยพัฒนาการรับรู้เกี่ยวกับตำแหน่งในปริภูมิ

- กิจกรรมแสดงการเลื่อน การพลิก และการหมุนโดยให้นักเรียนพิจารณา หรือนึกภาพว่าเมื่อพลิกหรือหมุนวัตถุในลักษณะต่างๆ ภาพที่ได้จะมีลักษณะอย่างไร
- ในขณะที่นักเรียนทำกิจกรรม ครูอาจใช้คำถามให้นักเรียนได้ฝึกกลยุทธ การแก้ปัญหา เช่น ครูอาจถามนักเรียนว่า ในการหมุนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส จะต้องหมุนไปกี่องศา รูปจึงจะกลับมาอยู่ที่ตำแหน่งเดิม นักเรียนบางคนอาจใช้วิธีวางรูปสามเหลี่ยมสีดำนบนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเพื่อช่วยให้เห็นว่ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสหมุนไปอย่างไร ดังภาพที่ 2.12



ภาพที่ 2.12 แสดงการหมุนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

- กิจกรรมอื่น เช่น การสลับที่ การเปลี่ยนตำแหน่งของส่วนประกอบย่อยในภาพ

5) การรับรู้เกี่ยวกับความสัมพันธ์ของสิ่งต่างๆ ในปริภูมิ (Perception of spatial relationship)

การรับรู้เกี่ยวกับความสัมพันธ์ของสิ่งต่างๆ ในปริภูมิเป็นความสามารถ ของบุคคล ในการมองเห็นความสัมพันธ์ของสิ่งสองสิ่งหรือมากกว่าทั้งกับ ตนเองและระหว่างกันและกัน ความสัมพันธ์นี้รวมไปถึงในด้านตำแหน่งและทิศทาง ทักษะนี้ต้องอาศัยความรู้ความเข้าใจลึกซึ้ง

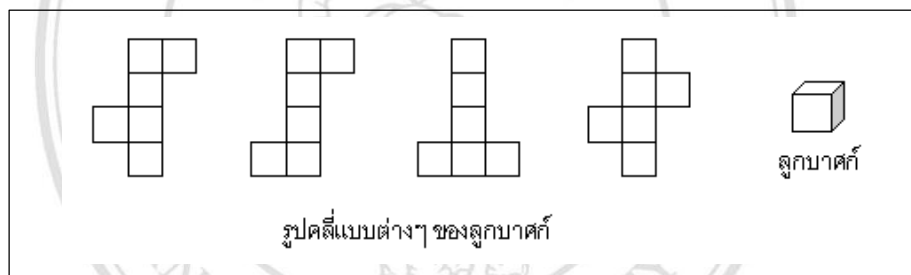
เกี่ยวกับตำแหน่งและทิศทางอันจะ นำไปสู่การคาดคะเนที่ใกล้เคียงกับความเป็นจริงและการตัดสินใจ
ที่สมเหตุ สมผลเกี่ยวกับขนาด ตำแหน่ง ทิศทาง ระยะทางของสิ่งต่าง ๆ รอบตัว

กิจกรรมที่ต้องอาศัยทักษะนี้ เช่น การให้ระบุความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่ง
ระยะทาง หรือทิศทางของสิ่งของตั้งแต่สองสิ่งขึ้นไป การสังเกตความคล้ายและความแตกต่าง การหา
เส้นทางที่สั้นที่สุดไปยังจุดหมาย การเชื่อมโยงระหว่างจุดต่างๆ การเติมลำดับที่หายไป และการต่อ
ภาพจากชิ้นส่วนภาพ (jigsaw)

ตัวอย่างกิจกรรมที่ช่วยพัฒนาการรับรู้เกี่ยวกับความสัมพันธ์ของสิ่งต่าง ๆ ในปริภูมิ

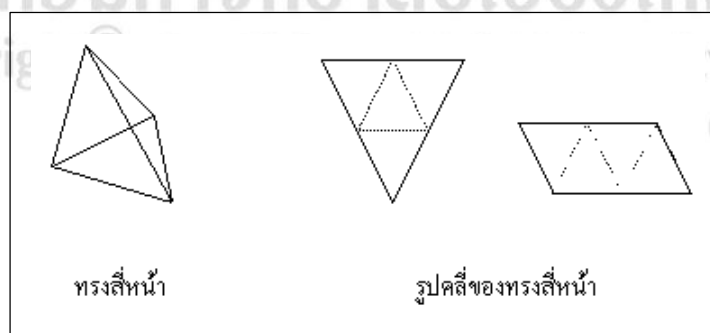
- การต่อลูกบาศก์หรือการต่อลูกบาศก์ให้เหมือนตัวอย่าง
- การสังเกตรูปคลี่ว่าเมื่อประกอบแล้วได้เป็นรูปเรขาคณิตสามมิติชนิดใด

ดั่งภาพที่ 2.13



ภาพที่ 2.13 แสดงรูปเรขาคณิตสามมิติของรูปคลี่ที่กำหนดให้

- การพิจารณารูปเรขาคณิตสามมิติที่กำหนดให้ ว่าเมื่อคลี่ออกมาแล้วมี
ลักษณะเป็นรูปคลี่แบบใดบ้าง ดังภาพที่ 2.14



ภาพที่ 2.14 แสดงรูปคลี่ของรูปเรขาคณิตสามมิติที่กำหนดให้

6) การจำแนกโดยใช้สายตา (Visual discrimination)

การจำแนกโดยใช้สายตาเป็นความสามารถของบุคคลในการ จำแนกความคล้ายและความแตกต่างของวัตถุโดยไม่เกี่ยวข้องกับตำแหน่ง ตัวอย่างเช่น การบอกว่าสิ่งใดบ้างที่มีลักษณะร่วมกันหรือแตกต่างกันตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ การบอกว่าของสองสิ่งใดในกลุ่มที่มีลักษณะร่วมกันซึ่งแตกต่างจากสิ่งอื่น ๆ ที่เหลือ เป็นต้น

ตัวอย่างกิจกรรมที่ช่วยพัฒนาทักษะการจำแนกโดยใช้สายตา เช่น

- การนำสิ่งของต่าง ๆ ที่พบทั่วไป เช่น กระดุม ฝาขวด ใบไม้ มาจำแนกหรือจัดกลุ่มโดยใช้เกณฑ์ที่กำหนดขึ้นเอง
- การสร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีความกว้างเป็นสองเท่าหรือครึ่งเท่า หรือมีพื้นที่เป็นสองเท่าของรูปสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้

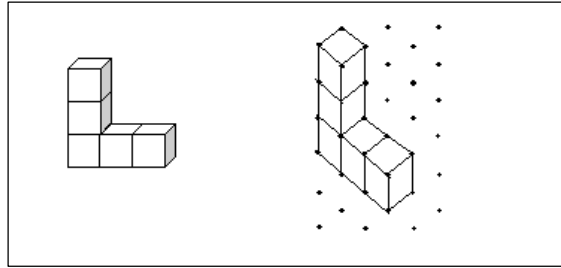
7) ความทรงจำเกี่ยวกับสิ่งที่ได้เห็น (Visual memory)

ความทรงจำเกี่ยวกับสิ่งที่ได้เห็นเป็นความสามารถของบุคคลในการบอกลักษณะของวัตถุที่ไม่ได้อยู่ ณ ที่นั้น โดยอาศัยภาพที่อยู่ในความทรงจำ คนทั่วไปจะสามารถจดจำข้อมูลเกี่ยวกับสิ่งที่ได้เห็นได้ประมาณห้าถึงเจ็ดอย่างในความทรงจำระยะสั้น การที่จะจดจำข้อมูลให้ได้มากกว่านี้ ในความทรงจำระยะยาวจะต้องมีการจัดเก็บข้อมูลอย่างเป็นระบบโดยอาศัยแบบจำลองและสัญลักษณ์

การต่อแบบรูปเชิงเส้น (linear pattern) เกี่ยวข้องโดยตรงกับระบบการจำ เนื่องจาก การนึกภาพและความทรงจำเกี่ยวกับสิ่งที่ได้เห็นมีบทบาทสำคัญในการที่บุคคลจะ "มองเห็น" แบบรูป บุคคลสามารถนำความสัมพันธ์ของแบบรูปอย่างง่ายมาสรุปเป็นความคิดรวบยอดในลักษณะของคำพูดเพื่อให้ง่ายต่อการจำ เช่น "แดงสอง ขาวหนึ่ง น้ำเงินสาม....." สำหรับแบบรูปที่ซับซ้อนจะต้องพิจารณาถึงระยะทาง ความกว้างของเส้น ขนาดของมุม จุดตัดและลำดับของรูป เป็นต้น

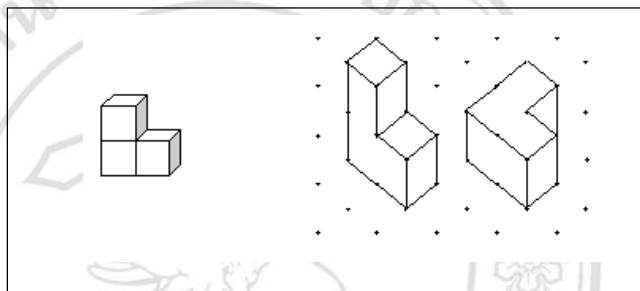
ตัวอย่างกิจกรรมที่ช่วยพัฒนาความทรงจำเกี่ยวกับสิ่งที่ได้เห็น

- การสังเกตรูปบนกระดุมจุดแล้วปิดรูปไว้ จากนั้นวาดรูปตามแบบในช่องที่กำหนดให้
- การนำลูกบาศก์หลายๆ ลูกมาประกอบเข้าด้วยกัน แล้ววาดรูปลงบนกระดุมจุด ดังภาพที่ 2.15



ภาพที่ 2.15 แสดงการประกอบและวาดรูปลูกบาศก์กระดาษจุด

- การนำลูกบาศก์จำนวนสามถึงสี่ลูกมาประกอบเข้าด้วยกันแล้ววาดรูปจากมุมมองที่ต่างกันสองมุมมองลงบนกระดาษจุด



ภาพที่ 2.16 แสดงการวาดรูปลูกบาศก์จากมุมมองที่ต่างกันลงบนกระดาษจุด

จากข้างต้นสามารถกล่าวได้ว่า แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเรขาคณิต เพื่อพัฒนาความรู้ทักษะเชิงปริภูมินั้น ผู้สอนจะต้องศึกษาลักษณะความรู้ทักษะเชิงปริภูมิแต่ละด้านอย่างละเอียด เพื่อสร้างความรู้ความเข้าใจและออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้ให้มีความสอดคล้องกับความสามารถของความรู้ทักษะเชิงปริภูมิในแต่ละด้าน

2.4.4 การประเมินผลความสามารถทางด้านความรู้ทักษะเชิงปริภูมิ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีได้เสนอความสามารถของผู้มีความรู้ทักษะเชิงปริภูมิที่ดีไว้ 7 ประการ ดังที่กล่าวข้างต้น และความสามารถทั้ง 7 ประการ ก็คือตัวกำหนดการประเมินความรู้ทักษะเชิงปริภูมิ

ซึ่งส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2558) ได้กล่าวว่า ก่อนจะตัดสินใจใช้การวัดและการประเมินผลความสามารถทางด้านความรู้ทักษะเชิงปริภูมิอย่างไร ควรจะทราบก่อนว่าผู้มีความรู้ทักษะเชิงปริภูมิที่ดีควรมีความสามารถอย่างไรบ้าง และได้เสนอวิธีการประเมินผลความสามารถทางด้านความรู้ทักษะเชิงปริภูมิ ดังนี้

การประเมินความสามารถด้านความรู้เชิงปริภูมิจึงต้องกระทำในหลายรูปแบบ โดยกระทำควบคู่ไปกับ การจัดกิจกรรมการเรียนการสอน ไม่มุ่งเน้นไปที่การสอบกลางภาคหรือปลายภาคแต่เพียงอย่างเดียว การประเมินผลควบคู่ไปกับการจัดการเรียนการสอนเป็นสิ่งจำเป็นที่จะขาดเสียไม่ได้ เพราะข้อมูลที่ได้สามารถนำมาใช้ในการแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ ทั้งของครูและนักเรียน นั่นคือ ครูจะได้ปรับปรุงการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนให้มีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น และได้แนวทางในการช่วยเหลือให้นักเรียนประสบความสำเร็จในการเรียนมากที่สุด

การประเมินผลระหว่างเรียนอาจทำได้โดยการสังเกตเป็นรายบุคคลและกลุ่ม แล้วบันทึกความก้าวหน้าต่าง ๆ ของนักเรียน โดยครูผู้สอนควรวางแผนล่วงหน้าว่าในช่วงเวลานั้น ๆ จะสังเกตเรื่องใด นักเรียนคนใดหรือกลุ่มใด เพื่อให้การสังเกตและบันทึกผลเป็นไปอย่างมีประสิทธิภาพ ในช่วงเวลาหนึ่ง ๆ ควรจะสังเกตและบันทึกผลนักเรียนไม่เกิน 5 คน ซึ่งครูอาจต้องใช้เวลาสังเกต 7 - 8 วันจึงจะได้ข้อมูลของนักเรียนทุกคนในชั้น แล้วเริ่มต้นสังเกตในรอบต่อไป ข้อมูลที่ครูอาจสังเกต นอกจากความสามารถด้านความรู้เชิงปริภูมิแล้วยังอาจสังเกตด้านอื่น ๆ ประกอบไปด้วย

การประเมินอาจพิจารณาที่ความก้าวหน้าของนักเรียนเป็นรายบุคคล หรืออาจเทียบความสามารถกับเกณฑ์ที่กำหนดขึ้นอย่างใดอย่างหนึ่ง อย่างไรก็ตาม ครูไม่ควรใช้เกณฑ์การประเมินเป็นเครื่องตัดสินการสอบได้หรือสอบตกแต่ควรใช้ เกณฑ์เป็นข้อมูลประกอบการอ้างอิงเพื่อช่วยเหลือให้นักเรียนได้มีการพัฒนาอย่างเต็มศักยภาพ

2.5 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

มีการนำแนวการสอนของแวน ฮีลี และโปรแกรมจีโอเมเตอร์สเก็ตชแพดมาใช้ในการศึกษา และแก้ไขปัญหาทางเรขาคณิต เรื่อง ความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติ อย่างมากมาย ทั้งในด้านผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน การคิดทางเรขาคณิต และความรู้เชิงปริภูมิ ซึ่งแสดงรายละเอียดดังต่อไปนี้

มัลลิกา ผาจันทร์ (2553) ได้ทำการศึกษาการพัฒนาการจัดการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เรื่อง ความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้โปรแกรมจีเอสพี จำนวน 80 คน ซึ่งได้มาโดยการสุ่มแบบกลุ่ม (Cluster Random Sampling) แบ่งเป็นกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม กลุ่มละ 40 คนกลุ่มทดลองเรียนด้วยการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรมจีเอสพี และกลุ่มควบคุมเรียนด้วยการจัดการเรียนรู้แบบปกติ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่เรียนโดยใช้โปรแกรมจีเอสพี เรื่อง ความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติ มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่เรียนแบบปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01 และ

นักเรียนมีความคงทนในการเรียนรู้สูงกว่านักเรียนที่เรียนแบบปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01 นอกจากนี้ยังพบว่า นักเรียนมีความพึงพอใจต่อการเรียนโดยใช้โปรแกรมจีเอสพี เรื่อง ความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติ อยู่ในระดับมากที่สุด

เบญจพร สว่างศรี (2545) ได้ทำการศึกษาผลการสอนเรขาคณิตด้วยลำดับขั้นการสอนของ ไดอานา แวนฮิลล์ ที่มีต่อระดับการคิดและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตของนักเรียนชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 1 จำนวน 30 คน หลังจากที่นักเรียนได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามลำดับ ขั้นการสอนของไดอานา แวน ฮิลล์ ทดสอบวัดระดับความคิดด้วยการทดสอบแมร์นีมาร์และทดสอบ วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตด้วยการทดสอบไควส์แควร์ ผลการวิจัยพบว่า ระดับการคิด ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอนด้วยลำดับขั้นการสอนของไดอานา แวน ฮิลล์ หลังเรียนสูง กว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียนสูงกว่าก่อน เรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 นอกจากนี้ยังพบว่า นักเรียนร้อยละ 80 มีผลสัมฤทธิ์ ทางการเรียนผ่านเกณฑ์ร้อยละ 65 หรือมากกว่าอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

สุพิน ฟองจางวาง (2551) ได้ทำการศึกษาการเปรียบเทียบความสามารถเชิงปริภูมิและ ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง ความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติ ของ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่สอนโดยประยุกต์ใช้โปรแกรม GSP กับการสอนแบบปกติ ผลการวิจัยพบว่า ความสามารถเชิงปริภูมิของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยประยุกต์ใช้โปรแกรม GSP สูงกว่าการสอนแบบปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01 และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน คณิตศาสตร์ของนักเรียนสูงกว่าอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01

สมศักดิ์ ประเสริฐมานะกิจ (2556) ได้ทำการศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและระดับขั้นการ คิดทางเรขาคณิต เรื่อง ความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติ ของนักเรียนชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ร่วมกับการจัดการเรียนการสอน ตามรูปแบบ Van Hiele จำนวน 41 คน ผลการวิจัยพบว่า หลังจากจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง ความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้ โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ร่วมกับการจัดการเรียนการสอนตามรูปแบบ Van Hiele นักเรียนมีคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนส่วนใหญ่อยู่ในระดับดี ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียนสูง กว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 นอกจากนี้ยังพบว่า ระดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตของ นักเรียนมีระดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตส่วนใหญ่อยู่ในระดับที่ 2