

บทที่ 3

หลักการและทฤษฎี

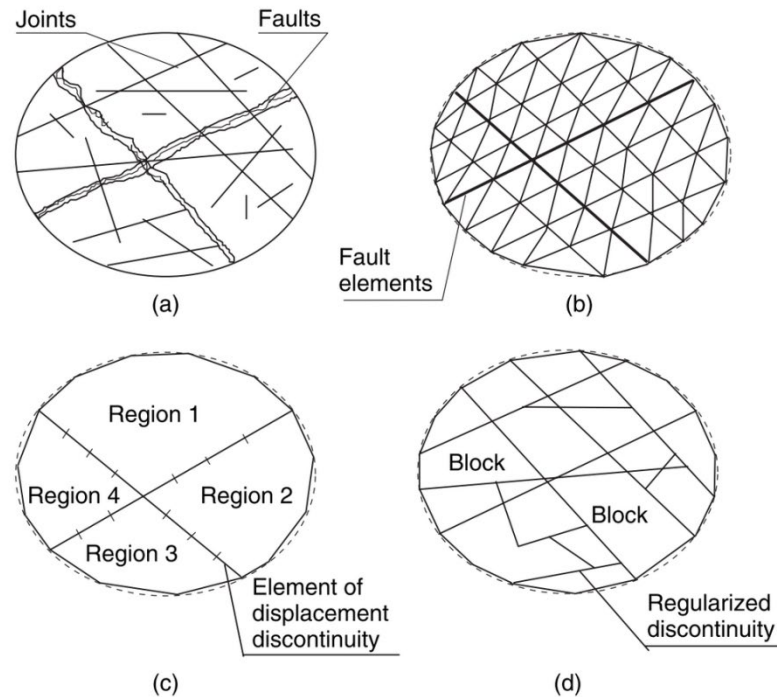
3.1 วิธีดิสครีตเอลิเมนต์ในงานวิเคราะห์กลศาสตร์ธรณี

วิธีดิสครีตเอลิเมนต์ (Discrete Element Method, DEM) เป็นวิธีวิเคราะห์แบบจำลองเชิงตัวเลข ตั้งอยู่บนสมมติฐานของทฤษฎีกลศาสตร์ความไม่ต่อเนื่อง ได้รับการพัฒนามาเป็นลำดับนับจากช่วงปี ค.ศ. 1970 ถึง 1980 ตามหลักการทางด้านกลศาสตร์ธรณี (Geomechanics) ที่พิจารณาธรรมชาติของมวลดินมวลหิน เป็นวัสดุไม่ต่อเนื่อง โดยมีศัพท์บัญญัติเรียกมวลหินตามแนวคิดนี้ว่า DIANE (Discontinuous, Inhomogeneous, Anisotropic and Non-Elastic) ตรงข้ามกับ CHILE (Continuous, Homogeneous, Isotropic and Linearly-Elastic) ซึ่งเป็นสมมติฐานตามหลักกลศาสตร์ความต่อเนื่อง (Hudson and Harrison, 1997)

ธรรมชาติทางธรณีวิทยา มวลหินมักจะปรากฏ “ความไม่ต่อเนื่อง” (Discontinuities) เช่น รอยแตก (Fractures) รอยเลื่อน (Faults) แนวรอยแยก (Joints) รอยเฉือนในชั้นหิน (Bedding shears) ระบายของชั้นดินอ่อน (Weak layers or weak planes) ตัดแยกมวลหินออกเป็นบล็อก (Rock blocks) ทำให้มวลรวมไม่ต่อเนื่องเป็นเนื้อเดียว การจำลองตำแหน่ง ทิศทาง และขนาด ของความไม่ต่อเนื่องเหล่านี้ เป็นตัวแปรสำคัญในการกำหนดรูปร่าง (Geometry) และขอบเขตของปัญหา (Boundary) ที่ต้องการวิเคราะห์ แสดงดังรูปที่ 3.1 (Jing, 2003)

การวิเคราะห์ปัญหากลศาสตร์ธรณีด้วย DEM เริ่มขึ้นเมื่อ Cundall (1971) นำเสนอการพัฒนาสูตรการคำนวณ และแบบจำลองด้วยคอมพิวเตอร์ เพื่อวิเคราะห์ปัญหาการเคลื่อนตัวของระบบบล็อกรวม (Blocky rock systems) ซึ่งต่อมา Cundall and Strack (1979) ประยุกต์ใช้เป็นเครื่องมือในการศึกษาพฤติกรรมของระบบมวลเล็กที่ประกอบขึ้นจากวัสดุเม็ดย่อย (Granular assemblies) รูปแผ่น และทรงกลม

โดย Dr.Cundall เรียกวิธีการที่พัฒนาขึ้นใหม่นี้ว่า Distinct Element Method

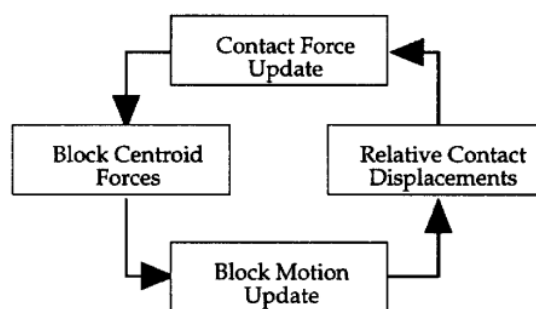
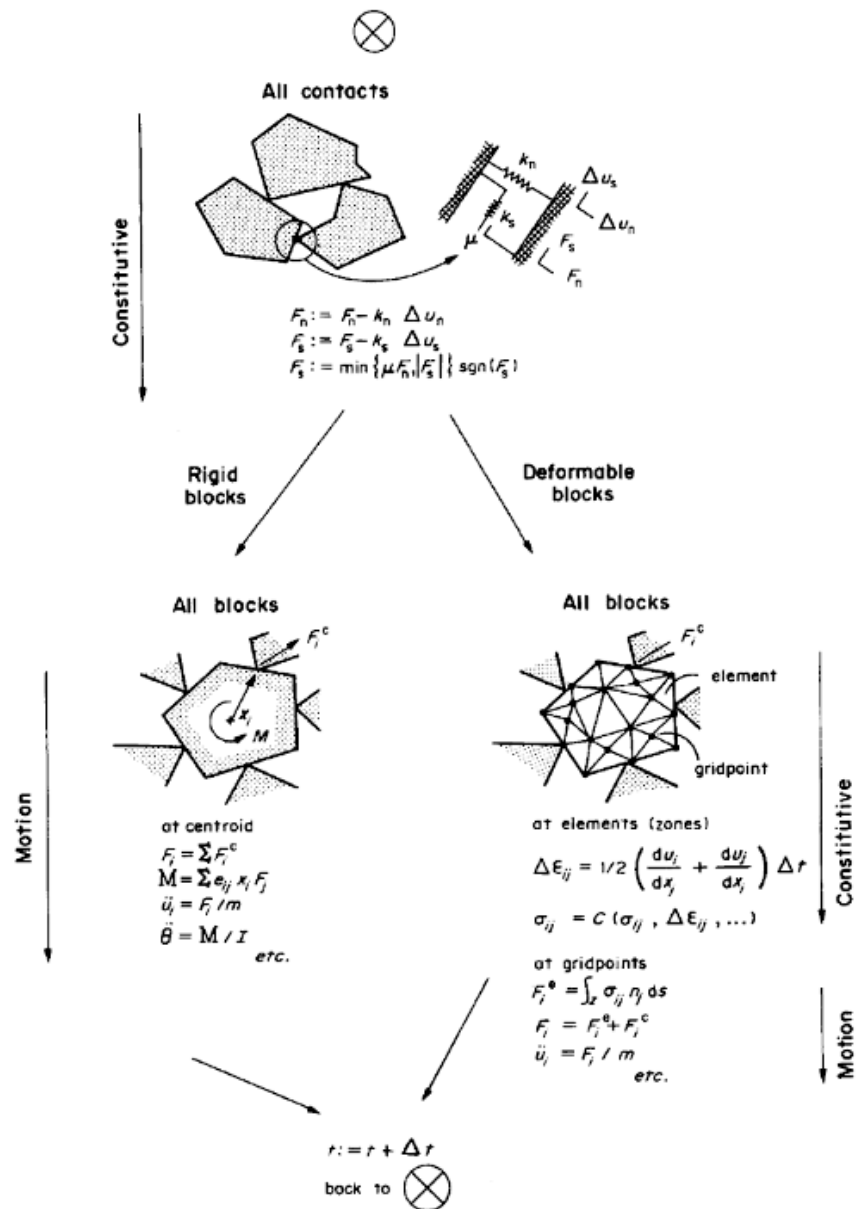


รูปที่ 3.1 รูปแบบการจำลองรอยแตกที่ตัดความต่อเนื่องของมวลหิน (Jing, 2003)

(a) มวลหินและรอยแตกในธรรมชาติ (b) รูปแบบการจำลองด้วยวิธี Finite Element Method, FEM (c) รูปแบบการจำลองด้วยวิธี Boundary Element Method, BEM และ (d) รูปแบบการจำลองด้วยวิธี Discrete Element Method, DEM

Distinct Element Method มีคำย่อที่ใช้เรียกแทนชื่อเต็มเหมือนกับ Discrete Element Method คือ DEM และมักจะใช้เรียกแทนกันอย่างแพร่หลายในงานกลศาสตร์ธรณี แต่ในรายละเอียดแล้ว Distinct Element Method นั้นจะมีความหมายเฉพาะด้าน ลือไปถึงวิธีการแขนงหนึ่งของวิธี ดิสครีตเอลิเมนต์ มีลักษณะเด่นคือ อัลกอริทึมที่เรียกว่า *Explicit time-marching scheme* หรือ *Time stepping* ตามกระบวนการวิธี แสดงดังรูปที่ 3.2 สำหรับแก้สมการการเคลื่อนที่ในโดเมนเวลา เพื่อหาคำตอบของปัญหาระบบมวลที่ประกอบขึ้นจาก Rigid หรือ Deformable blocks ซึ่งจะกำหนดให้แนวรอยต่อ หรือ หน้าสัมผัสระหว่างบล็อก (Contacts) ในระบบเป็น Deformable contacts

หลักการพื้นฐานของ DEM เป็นการแก้สมการสมดุลพลศาสตร์ (Dynamic equation of equilibrium) ของบล็อกในระบบ และคำนวณซ้ำวนรอบ จนกระทั่งทั้งระบบเข้าสู่สมดุล หรือ ผลลัพธ์สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ และกฎการเคลื่อนที่ที่กำหนด



รูปที่ 3.2 อัลกอริทึมวงจรการคำนวณของ Distinct Element Method (Hart, 1993)

อัลกอริทึมของ DEM ประกอบไปด้วย (ลีลาสุขเสรี, 2556)

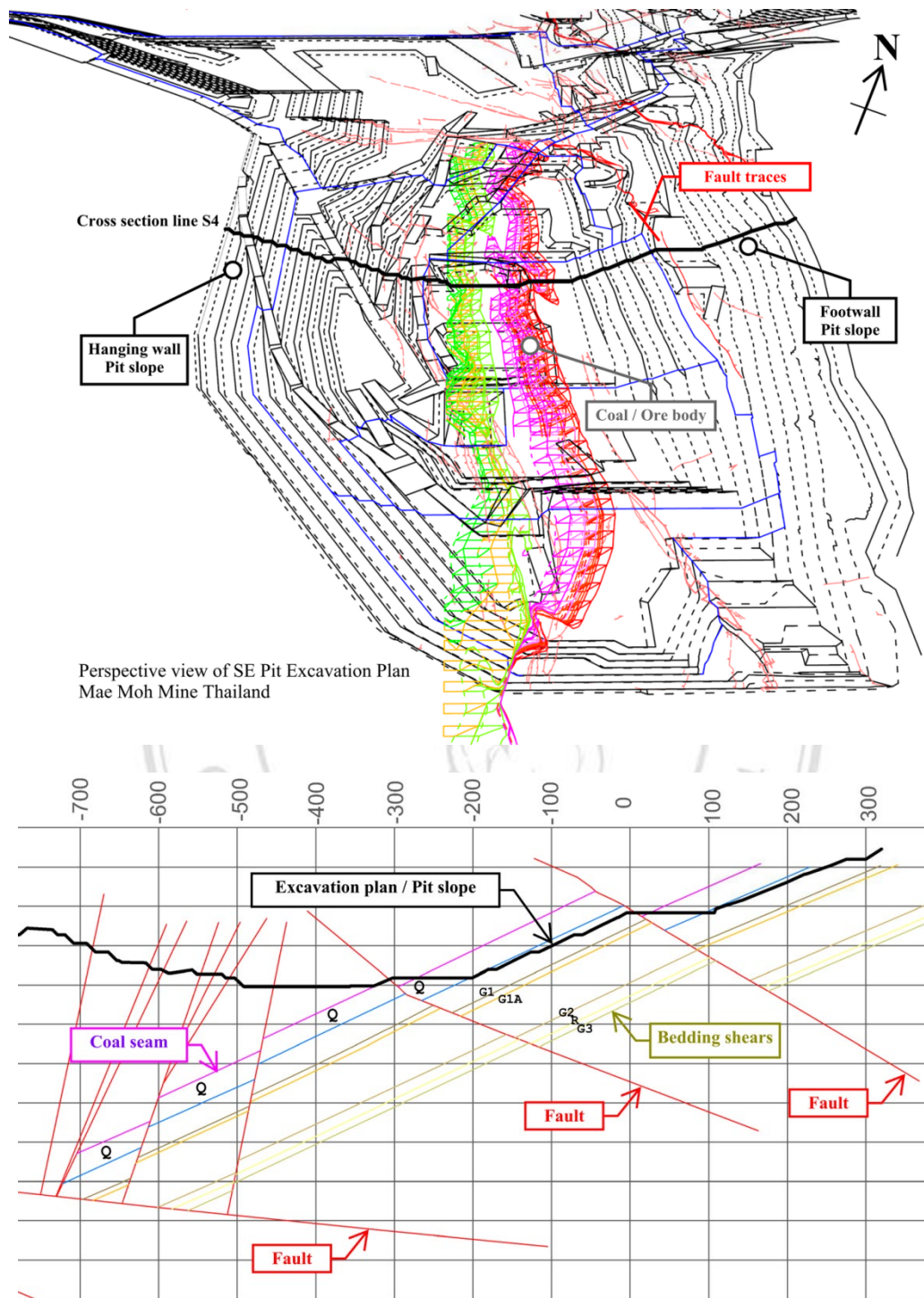
- ❖ ตำแหน่งและความเร็วตั้งต้น (Initial positions and velocities of bodies)
- ❖ รูปร่าง และมวลของบล็อก (Shapes and masses)
- ❖ พารามิเตอร์สมบัติของหน้าสัมผัส (Contacts interaction parameters i.e., normal and shear stiffness, k_n and k_s , damping, friction and etc.)
- ❖ ช่วงเวลาที่จะทำการจำลอง และแสดงผล (Time durations of simulation and results plotting interval specification)
- ❖ ช่วงเวลาในแต่ละรอบการคำนวณ (Time stepping or time increment, Δt)

ปัจจุบัน Code หรือโปรแกรมแบบจำลองเชิงตัวเลข ที่ใช้ในงานศึกษาวิเคราะห์ด้านกลศาสตร์ธรณี บนหลักทฤษฎีของ DEM ทั้งเชิง 2 มิติ และ 3 มิติ ที่เป็นที่ยอมรับในวงการ และมีการพัฒนามาอย่างต่อเนื่อง ได้แก่ *UDEC* และ *3DEC* ของบริษัท Itasca Consulting Group Inc.

UDEC ได้รับการพัฒนาขึ้นมาก่อน เพื่อใช้ในงานวิเคราะห์ปัญหาแบบ 2 มิติ หรือ Plain-strain analysis (Cundall, 1980) โดยต่อมาในปี ค.ศ. 1983 *3DEC* ได้รับการพัฒนาต่อสอดคล้องตามมาเพื่อใช้ในงานวิเคราะห์ปัญหา 3 มิติ (Cundall, 1988; Hart et al., 1988)

3.1.1 แบบจำลอง DEM 3 มิติ – *3DEC*

การวิเคราะห์ด้านกลศาสตร์ธรณีส่วนใหญ่จะเกี่ยวข้องกับปัญหาในเชิงสถิตยศาสตร์ (Statics) หรือ “กึ่ง” สถิต (Quasi-statics) โดยสภาพตามธรรมชาติ รูปทรง และมิติทางกายภาพของมวลหิน จะมีลักษณะปัญหาแบบ 3 มิติ อยู่แล้ว แต่เพื่อลดความยุ่งยากในการวิเคราะห์ปัญหา เช่น โครงสร้างเขื่อนที่มีหน้าตัดตามแนวแกนที่ค่อนข้างสม่ำเสมอ หรือ โครงสร้างผนังและฐานรากแนวยาว หรือ ลาดผนังบ่อเหมืองที่ขุดขนานไปตามแนวการวางตัวของชั้นแร่ จะสามารถใช้ภาพตัดขวางของระนาบแนวดิ่งที่ตั้งฉากกับแนวแกนตามทิศทางการวางตัวของโครงสร้างนั้น โดยไม่พิจารณาผลของหน่วยแรง และการเคลื่อนตัวในแนวแกนดังกล่าว เป็นกรณีสมมติที่เรียกว่า 2-D Plain-strain condition ตัวอย่างแสดงดังรูปที่ 3.3



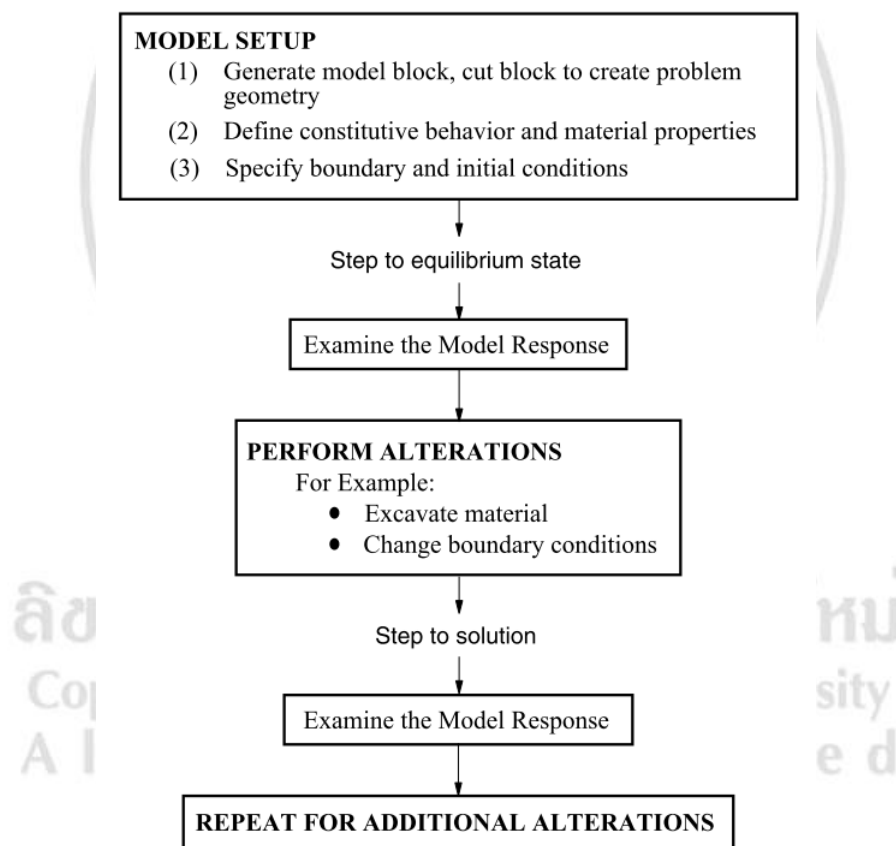
รูปที่ 3.3 ตัวอย่างภาพตัดขวางตามแบบการทำเหมืองและข้อมูลธรณีโครงสร้าง เพื่อใช้ในการวิเคราะห์เสถียรภาพผนังบ่อเหมืองแม่เมาะ กรณี 2-D Plain-strain condition

ปัญหาในอีกลักษณะหนึ่งที่ Geometry มีความสมมาตรรอบแนวแกนของโครงสร้าง เช่น ในงานขุดเจาะอุโมงค์ ที่อุโมงค์มีความสมมาตรรอบแนวแกนเจาะ สามารถพิจารณา

วิเคราะห์เฉพาะส่วนครึ่งภาพตัดตามแนวแกนนั้นได้ โดยกรณีนี้เรียกว่า Axi-symmetry condition

แต่สำหรับโครงสร้างลาดเปิดของผนังบ่อเหมือง หรือ อุโมงค์ใต้ดินในบางกรณี เช่น ปัญหาเสถียรภาพของลิ่มหินบนหน้าลาดเปิด หรือ ในงานอุโมงค์ (Rock wedge stability analysis) ที่เสถียรภาพขึ้นอยู่กับทิศทางการวางตัวของธรณีโครงสร้าง เทียบกับทิศทางของหน้าเปิดหรืออุโมงค์ ซึ่งต้องวิเคราะห์ปัญหาในเชิง 3 มิติ

สำหรับการประยุกต์ใช้แบบจำลอง 3DEC เพื่อวิเคราะห์ปัญหาในงานวิศวกรรมธรณี มีขั้นตอน แสดงดังรูปที่ 3.4



รูปที่ 3.4 ขั้นตอนในการวิเคราะห์ปัญหาด้านกลศาสตร์ธรณี ด้วยแบบจำลองเชิงตัวเลข

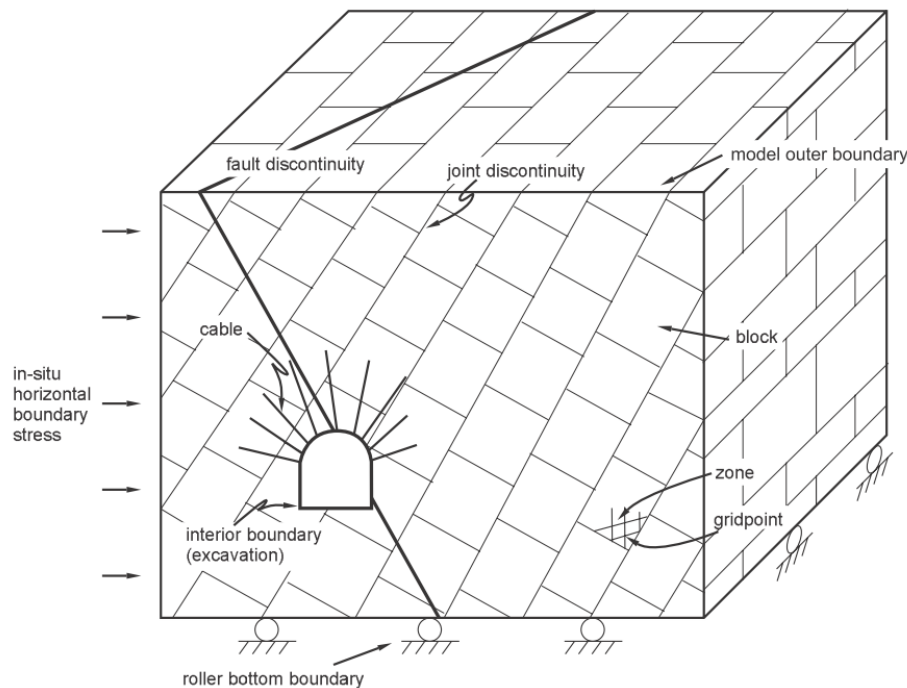
(Itasca Consulting Group, 2007)

ในขั้นเริ่มต้น การสร้างแบบจำลอง (Model setup) ต้องพิจารณากำหนดรูปทรง และขอบเขตของแบบจำลองให้สอดคล้องตามลักษณะทางกายภาพของปัญหาที่ทำการวิเคราะห์ (Problem geometry match)

ขั้นต่อมา ในกรณีที่กำหนดให้มวลหินในแบบจำลองเป็น Deformable blocks ต้องกำหนดสมบัติทางกลและสมการแบบจำลองที่ใช้อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและการเปลี่ยนรูปร่าง (Constitutive behavior model and material mechanical properties) สำหรับอีกกรณีที่กำหนดให้มวลหินเป็น Rigid blocks จะไม่จำเป็นต้องกำหนด Constitutive model ของมวลหิน โดยจะกำหนดเฉพาะสมบัติทางกายภาพ เช่น มวล หรือ ความหนาแน่นของมวลหิน เท่านั้น เพราะถือว่ามวลหินเป็นก้อนวัตถุแข็งเกร็ง ไม่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างภายใต้แรงกระทำ

จากนั้นจึงกำหนดเงื่อนไขขอบ และสถานะตั้งต้นของแบบจำลอง (Boundary and initial conditions) ก่อนที่จะจำลองการเปลี่ยนแปลง หรือ สร้างผลกระทบ รบกวนสมดุลเดิมของแบบจำลอง และติดตามสังเกตผลตอบสนองต่อการเปลี่ยนแปลงดังกล่าว

องค์ประกอบของแบบจำลอง 3DEC แสดงดังรูปที่ 3.5



รูปที่ 3.5 ตัวอย่างและองค์ประกอบของแบบจำลอง 3DEC (Itasca Consulting Group, 2007)

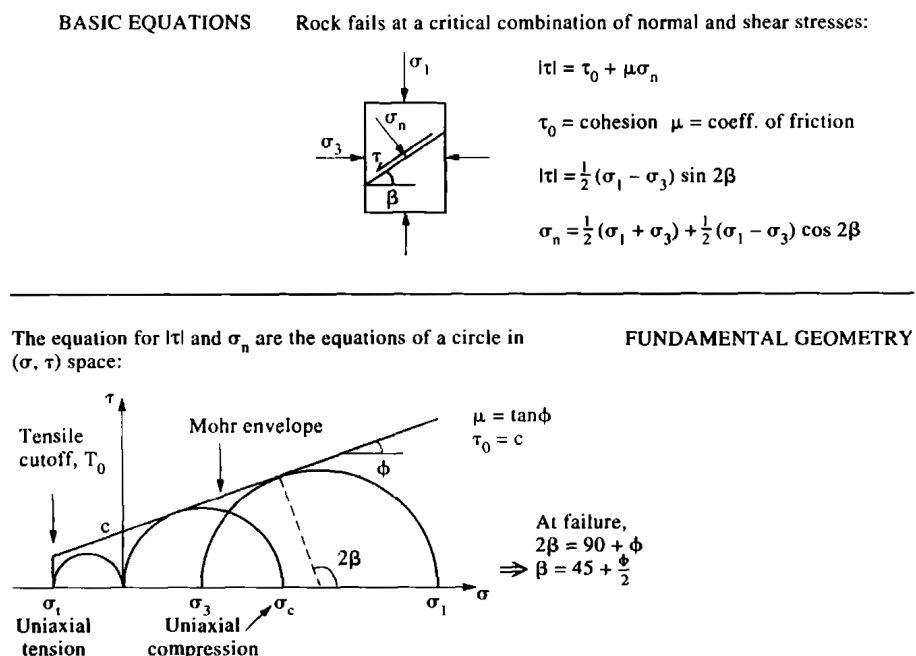
ทั้งนี้ ศัพท์บัญญัติ คำอธิบาย ความหมาย (Terminology) ขององค์ประกอบ และ กระบวนการทำงานที่เกี่ยวข้องกับแบบจำลอง มีดังนี้

- ❖ Blocks บล็อกเป็นรูปทรงพื้นฐาน แสดงถึงมวลหิน หรือ วัตถุทางกายภาพที่ประกอบกัน อยู่ภายในขอบเขตปัญหาที่พิจารณา โดยในแบบจำลองอาจสร้างขึ้นให้เป็นก้อนวัตถุเดี่ยว แล้วทำการตัดด้วยโครงสร้าง หรือ Joints แบ่งเป็นบล็อกย่อย ๆ ให้สอดคล้องกับลักษณะ ปัญหาที่ต้องการวิเคราะห์
- ❖ Contacts and Sub-contacts แนวรอยต่อหรือหน้าสัมผัสระหว่างบล็อก ในแบบจำลองคือ Joint plane ถือเป็นขอบเขตที่แรงกระทำถ่ายเทหากันระหว่างบล็อกที่อยู่ติดกัน เมื่อมีการ ระบายสมดุลของระบบจากภายนอก
- ❖ Discontinuities ธรณี โครงสร้างที่ตัดแยกมวลหินออกจากกัน ทั้งนี้ เพื่อความสะดวกใน แบบจำลอง 3DEC จะเรียก Discontinuities ทุกประเภทรวมกันว่า Joints
- ❖ Zone การแบ่งโซนย่อยในบล็อก เพื่อจำลองมวลหินให้เป็น Deformable blocks ตามหลัก กลศาสตร์ความต่อเนื่องด้วยวิธี Finite difference method ซึ่งพฤติกรรมของมวลหินจะ ตอบสนองกับหน่วยแรงกระทำตาม Constitutive model ที่กำหนด ในแบบจำลอง 3DEC โซนทั้งหมดมีรูปทรงทางเรขาคณิตเป็นทรง 4 หน้า (Tetrahedral)
- ❖ Gridpoints หรือ Nodal points จุดเชื่อมต่อระหว่าง Tetrahedral finite difference zones เป็นตำแหน่งของแต่ละโซนตามระบบพิกัดคาร์ทีเซียน (x-, y-, z-coordinate) สำหรับ ปัญหาของแบบจำลองแบบ Deformable blocks
- ❖ Model boundary หรือ Calculation domain ขอบเขตของแบบจำลอง
- ❖ Boundary condition เงื่อนไขขอบ เป็นการกำหนดสภาวะควบคุมตามขอบเขตของ แบบจำลอง เช่น การตรึงส่วนล่าง และด้านข้างของขอบเขตแบบจำลอง ไม่ให้เกิดการ เคลื่อนที่
- ❖ Initial conditions สภาวะตั้งต้นของแบบจำลอง ก่อนที่จะมีการเปลี่ยนแปลง หรือ สร้าง ผลกระทบระบายสมดุลเดิมของแบบจำลอง

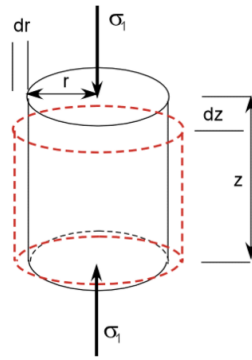
- ❖ Null blocks บล็อกที่กำหนดให้เป็นขอบเขตของ “ช่องว่าง” หรือ ไม่มีเนื้อวัตถุอยู่ แต่ภายหลังสามารถกำหนดสมบัติให้กลับ “มี” ขึ้นอีกได้ ประโยชน์เพื่อใช้จำลองการถมกลับ (Backfilling)
- ❖ Block constitutive model สมการแบบจำลองซึ่งสอดคล้องกับสมบัติทางกลของบล็อก ที่ใช้อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและการเปลี่ยนรูปร่าง (Strength and deformation behavior) ซึ่งต้องกำหนดในการวิเคราะห์ปัญหาของแบบจำลองแบบ Deformable blocks

Constitutive model ที่เป็นที่นิยมตามแบบแผนดั้งเดิม และมักใช้ในการวิเคราะห์เบื้องต้น คือ แบบจำลองวัสดุอีลาสติกเชิงเส้นเท่ากันทุกทิศทาง (Linear elastic isotropic model) และแบบจำลองของกำลังวัสดุตามเกณฑ์การวิบัติของมอร์-คูลอมบ์ (Mohr-Coulomb failure criterion) แสดงดังรูปที่ 3.6

โดยพารามิเตอร์อีลาสติก หรือ สมบัติความยืดหยุ่น (Deformability) ที่เป็นตัวกำหนดพฤติกรรมของ Deformable blocks ให้ตอบสนองตาม Constitutive model ที่กำหนด ได้แก่ อีลาสติกโมดูลัส (Elastic modulus หรือ Young's modulus, E) และอัตราส่วนปัวซอง (Poisson's ratio, ν)



รูปที่ 3.6 เกณฑ์การวิบัติ ของมอร์-คูลอมบ์ (Hudson and Harrison, 1997)



จากรูป Elastic modulus (E)

$$E = \frac{\sigma_1}{dz/z} \quad (3.1)$$

และ Poisson's ratio (v)

$$v = -\frac{dr/r}{dz/z} \quad (3.2)$$

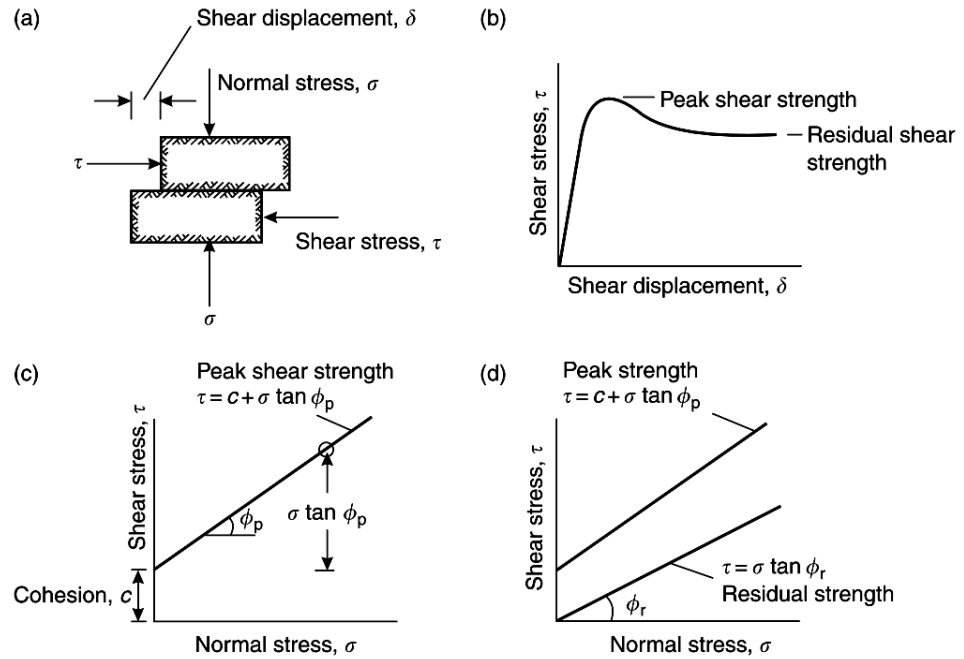
ในแบบจำลอง 3DEC จะแปลงไปเป็นพารามิเตอร์อีลาสติก ซึ่งมีความสัมพันธ์กับ E, v ได้แก่ Bulk modulus (K) คือความต้านทานต่อการเปลี่ยนแปลงปริมาตรของวัตถุต่อหน่วยแรงบีบอัด และ Shear modulus (Modulus of rigidity, G) คือความต้านทานต่อการเปลี่ยนรูปร่างหรือบิดเบี้ยวเชิงมุม (Angular distortion) ของวัตถุต่อหน่วยแรงเฉือน แสดงดังสมการ

$$K = \frac{E}{3(1 - 2v)} \quad (3.3)$$

และ

$$G = \frac{E}{2(1 + v)} \quad (3.4)$$

- ❖ Joint constitutive model แบบจำลองซึ่งสอดคล้องกับสมบัติทางกลของ Joints กำหนดด้วยพารามิเตอร์สมบัติของหน้าสัมผัส (Contacts interaction parameters) ได้แก่ Normal stiffness (k_n), Shear stiffness (k_s) สมบัติกำลังรับแรงเฉือนและแรงดึงของแนว Joints (Joints shear and tensile strength) แสดงดังรูปที่ 3.7

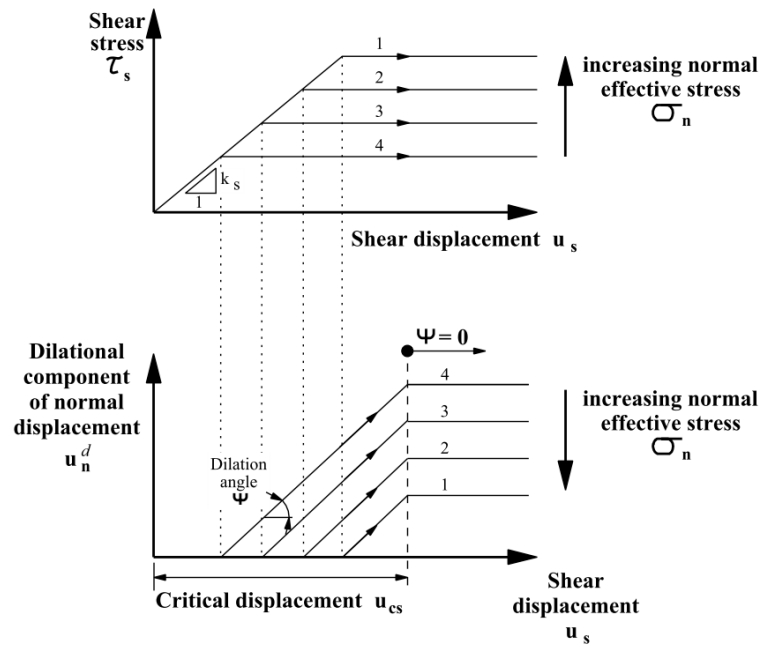


รูปที่ 3.7 สมบัติกำลังรับแรงเฉือนของ Joints (Wyllie and Mah, 2004)

(a) รูปแบบการทดสอบรับแรงเฉือน (b) กราฟระหว่างหน่วยแรงเฉือน Shear stress กับ Shear displacement (c) กำลังรับแรงเฉือนสูงสุด (Peak strength) ของ Joints ตามเกณฑ์กำลังของคูลอมบ์ (Coulomb strength criterion) และ (d) กำลังรับแรงเฉือนสูงสุดและกำลังคงค้าง (Residual strength) ของ Joints ตามเกณฑ์กำลังของคูลอมบ์

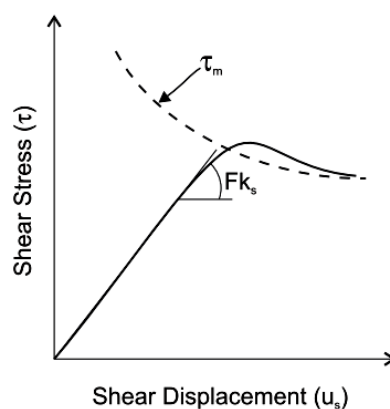
โดยในแบบจำลอง 3DEC จะกำหนด Joint constitutive model ได้ 2 แบบ ได้แก่

- 1) Joint area contact ตาม Coulomb slip criterion หรือ Coulomb slip model สำหรับแบบจำลองของ Joints ในระบบบล็อกมวลหินทั่วไปที่เรียงตัวอยู่ชิดติดกัน แสดงดังรูปที่ 3.8



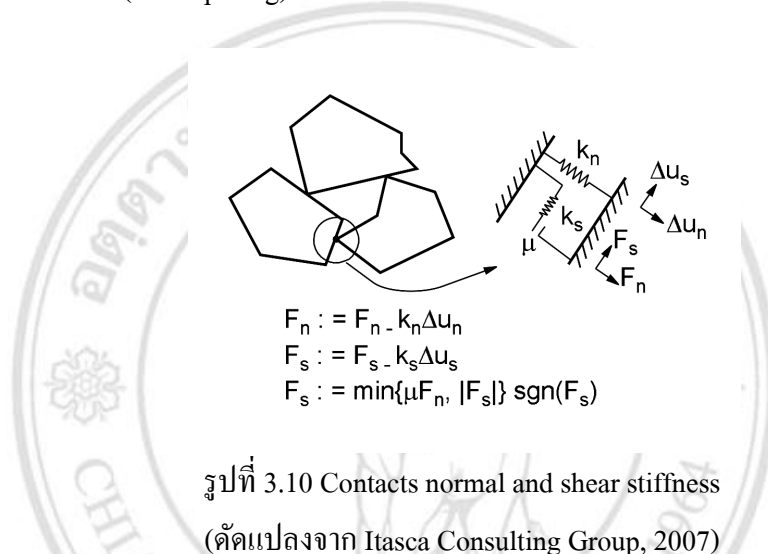
รูปที่ 3.8 Coulomb slip model สำหรับ Joints ที่ค่าแรงยึดเหนี่ยวเป็นศูนย์
(Itasca Consulting Group, 2007)

- 2) Continuously yielding สำหรับแบบจำลองของ Joints ในกรณีพิเศษ เช่น การรับแรงกระทำซ้ำ ๆ วนเป็นรอบ (Cyclic loading) หรือ กลับไปกลับมา (Load reversal with hysteretic behavior) เช่น การเกิดแผ่นดินไหว หรือ Tectonic process ทำให้ Joints เกิดความเสียหายต่อเนื่อง และมีกำลังลดลงเรื่อย ๆ แสดงดังรูปที่ 3.9



รูปที่ 3.9 Continuously yielding joint model (Itasca Consulting Group, 2007)

พารามิเตอร์สตีฟเนสที่เป็นตัวกำหนดพฤติกรรมของ Joints ตาม Constitutive model คือ Normal stiffness (k_n), Shear stiffness (k_s) แสดงดังรูปที่ 3.10 โดยในทางทฤษฎี หากสมมติให้สมบัติยืดหยุ่นของมวลหินแตกหัก (Jointed rock mass deformability) เทียบเท่ากับ สมบัติยืดหยุ่นของมวลวัสดุยืดหยุ่นต่อเนื่อง (Elastic continuum deformability) จะสามารถหาความสัมพันธ์เพื่อประมาณค่าพารามิเตอร์สตีฟเนสของ Joints จากสมบัติยืดหยุ่นของมวลหิน (Rock mass), เนื้อหิน (Intact rock), และข้อมูลระยะห่างระหว่างแนวรอยแยก (Joint spacing) ในมวลหินได้



เช่นตัวอย่างจากกรณีของมวลหินที่รับแรงกดอัดแกนเดียว (Uniaxial loading) ที่มี Joint spacing เป็นระยะสม่ำเสมอวางตัวตั้งฉากกับทิศทางหน่วยแรงกระทำ จะประมาณค่า Joint normal stiffness (k_n) ได้ตามสมการ

$$\frac{1}{E_m} = \frac{1}{E_r} + \frac{1}{k_n \cdot s} \quad (3.5)$$

หรือ

$$k_n = \frac{E_m \cdot E_r}{s(E_r - E_m)} \quad (3.6)$$

เมื่อ E_m = rock mass elastic modulus
 E_r = intact rock elastic modulus
 k_n = joint normal stiffness
 s = joint spacing.

และ Joint shear stiffness (k_s)

$$k_s = \frac{G_m \cdot G_r}{s(G_r - G_m)} \quad (3.7)$$

เมื่อ G_m = rock mass elastic modulus;

G_r = intact rock elastic modulus; and

k_s = joint shear stiffness.

ทั้งนี้ นักวิจัยหลายท่าน เช่น Kulhawy (1975), Rosso (1976) และ Bandis et al. (1983) ได้สรุปค่าประมาณการของ Joint stiffness สำหรับ Joint ที่มีดินเหนียวความแข็งแรงต่ำ แทรกอยู่ (Clay in-filling joints) จะอยู่ในช่วง 10 ถึง 100 MPa/m และจะมากกว่า 100 GPa/m สำหรับ Joints ในเนื้อหินแข็ง เช่น หินแกรนิต หรือ บะซอลต์

ในการกำหนดค่า Stiffness ทั้งของ Blocks และ Joints เพื่อใช้งานในแบบจำลอง 3DEC จะมีข้อจำกัดที่ต้องพิจารณาให้เหมาะสมก่อนทำการวิเคราะห์ เนื่องจาก ความแตกต่างระหว่างค่า Stiffness จะกระทบต่อประสิทธิภาพ และระยะเวลาที่ใช้ในการคำนวณเป็นอย่างมาก เช่น ในปัญหาการวิเคราะห์ทางกลศาสตร์ทั่วไปควรกำหนดค่า Joint normal stiffness และ Shear stiffness ให้น้อยกว่า Stiffness ที่มากที่สุดของ Zone ใน Blocks ที่อยู่ติดกันประมาณ 10 เท่า (Itasca Consulting Group, 2007)

แสดงดังสมการ

$$k_n \text{ and } k_s \leq 10.0 \left[\max \left[\frac{K + 4/3G}{\Delta z_{\min}} \right] \right] \quad (3.8)$$

เมื่อ K and G = Bulk and shear moduli ตามลำดับ;

$\Delta z_{\min}$ = ด้านที่เล็กที่สุดของ Zone ที่ติดกับ Joints นั้น ๆ ในทิศทางตั้งฉาก

- ❖ Step, Time step หรือ Cycle จำนวนครั้ง หรือ รอบการคำนวณ ที่กำหนดได้โดยผู้วิเคราะห์ ซึ่งในแต่ละรอบการคำนวณข้อมูลการเคลื่อนที่ของบล็อก ความเร็ว หรือ หน่วยแรงลัพธ์ และการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของมวลจะ update ไปเรื่อย ๆ ตามรอบการคำนวณที่มากขึ้น

ตัวอย่างกรณีการจำลองสภาวะสมดุลตั้งต้น (Initial equilibrium state) การคำนวณจะเข้าสู่ภาวะสมดุลได้ด้วยรอบการคำนวณประมาณ 2,000 ถึง 4,000 steps แต่ทั้งนี้หากระบบประกอบขึ้นด้วยมวลบล็อกจำนวนมาก และมีความซับซ้อน อาจต้องใช้รอบการคำนวณเพิ่มขึ้นถึงหลายหมื่น steps กว่าที่จะเข้าสู่ภาวะสมดุล

- ❖ Unbalanced force หรือ Out-of-balance force แรงลัพธ์ส่วนเกิน ซึ่งวัดจากเวกเตอร์ลัพธ์ของแรงที่กระทำต่อจุดศูนย์กลางมวลของแต่ละบล็อก (Block centroid) สำหรับปัญหาแบบจำลองมวลหินแบบ Rigid blocks หรือที่ Gridpoints ในปัญหาแบบจำลองแบบ Deformable blocks โดยระบบจะเข้าสู่สมดุลตามทฤษฎีเมื่อแรงลัพธ์เป็นศูนย์

แต่ในทางปฏิบัติ แรงลัพธ์ดังกล่าวจะไม่มีทางเป็นศูนย์ (ระบบหยุดนิ่ง) อย่างแท้จริง เมื่อภาวะสมดุลถูกรบกวนทั้งจากแรงกระทำภายนอก (Applied force) และแรงกระทำของน้ำหนักวัตถุภายใต้แรงโน้มถ่วง (Body force) ทั้งนี้ ในแบบจำลอง 3DEC จะถือว่าระบบเข้าสู่ภาวะสมดุล เมื่อค่า Maximum unbalanced force มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับแรงลัพธ์ของทั้งระบบ (Total applied force) โดยทั่วไปจะประมาณ 0.01 % หรือ 1/10,000

และหาก Unbalanced force อยู่ค่าคงที่ค่าหนึ่งที่ไม่เท่ากับศูนย์ และยังคงมีค่ามากเมื่อเทียบกับแรงลัพธ์ของทั้งระบบ จะหมายความว่าระบบมีการเคลื่อนที่ต่อเนื่องไม่เข้าสู่สมดุล หรือ อาจหมายถึงการพังทลาย ซึ่งทั้งนี้ขึ้นอยู่กับผู้วิเคราะห์ว่าจะนิยามการเคลื่อนตัวพังทลายเป็นอย่างไร

- ❖ Factor of Safety solving (FS solving) การคำนวณเพื่อหาค่า FS ในแบบจำลอง 3DEC โดยวิธี Shear Strength Reduction technique (SSR) ที่อธิบายโดย Dawson et al. (1999), Griffith and Lane (1999), Matsui and San (1992) ตามสมการ

$$c^{\text{trial}} = \frac{1}{FS^{\text{trial}}} \cdot c \quad (3.9)$$

และ

$$\phi^{\text{trial}} = \arctan\left(\frac{1}{FS^{\text{trial}}} \cdot \tan\phi\right) \quad (3.10)$$

เมื่อ $FS^{\text{trial}} = \text{Trial FS}$
 $c^{\text{trial}} = \text{Trial cohesion}$

c = Cohesion

ϕ^{trial} = Trial internal friction angle

ϕ = Internal friction angle

ความหมายตามสมการที่ (3.9) และ (3.10) คือ การคำนวณเพื่อหาค่า FS โดยเทคนิควิธีลดพารามิเตอร์กำลัง (c, ϕ) ลงทีละขั้น จนกระทั่งระบบของแบบจำลองเข้าสู่ขีดจำกัดภาวะสมดุล (State of limiting equilibrium) หรือ จุดที่มวลดิน หินกำลังจะเคลื่อนพังทลายลง

ในกรณีที่ระบบของแบบจำลองไม่มีเสถียรภาพอยู่ก่อนแล้ว การ Trial จะเป็นในทางกลับกัน คือ จะเพิ่มค่าพารามิเตอร์กำลังขึ้น จนกระทั่งระบบได้ภาวะสมดุล

3.2 ทฤษฎีความน่าจะเป็นในงานวิเคราะห์เสถียรภาพความลาด

เป้าหมายสำคัญในการวิเคราะห์เชิงความน่าจะเป็นของเสถียรภาพความลาด คือ การหารูปแบบการแจกแจงความน่าจะเป็นของค่า Factor of Safety (Probability distribution of FS) ซึ่งเป็นผลลัพธ์จากการคำนวณ เมื่อ Input parameters ที่เป็นปัจจัยกระทบต่อเสถียรภาพ ถูกกำหนดให้เป็นตัวแปรสุ่ม (Random variables) ได้แก่ สมบัติกำลังต้านทานหน่วยแรงเฉือนบนระนาบพิบัติและมวลหิน (Joint shear strength) ตำแหน่ง ทิศทางการวางตัว ความเอียงเท ขนาดความยาว ความถี่ห่างของธรณีโครงสร้างในมวลหิน (Joint networks) แรงดันน้ำเหนือระนาบการเลื่อนไถล (Pore water pressure) เป็นต้น และเมื่อทราบการแจกแจงความน่าจะเป็นของค่า FS ที่คำนวณได้ ก็จะสามารถระบุ “ความน่าจะเป็นในการพังทลาย” (Probability of Failure, PF) ได้ (Hammah et al., 2009)

Probability of Failure เป็นพารามิเตอร์ที่จะใช้ในการประเมินความเสี่ยง (Risk assessment) และการยอมรับความเสี่ยง ภายใต้โจทย์ปัญหาของความไม่แน่นอนในการออกแบบด้านวิศวกรรมธรณีได้ (McMahon, 1982; Hoek et al., 1995)

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องในการวิเคราะห์ความน่าจะเป็น และตัวแปรทางสถิติ มีดังนี้

- ❖ Mean ค่าเฉลี่ย หรือ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต (Arithmetic mean, μ or $\bar{x}$) หรือ ค่าคาดหวัง (Expected value) ของชุดข้อมูลที่มีประชากร $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ แสดงดังสมการ

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (3.11)$$

ค่าเฉลี่ย เป็นพารามิเตอร์ทางสถิติ เรียกว่า ค่าโมเมนต์ทางสถิติลำดับที่ 1 (The 1st statistical moment) ระบุถึงตำแหน่งศูนย์กลางของการแจกแจงความถี่

- ❖ Variance ความแปรปรวน (σ^2)

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \quad (3.12)$$

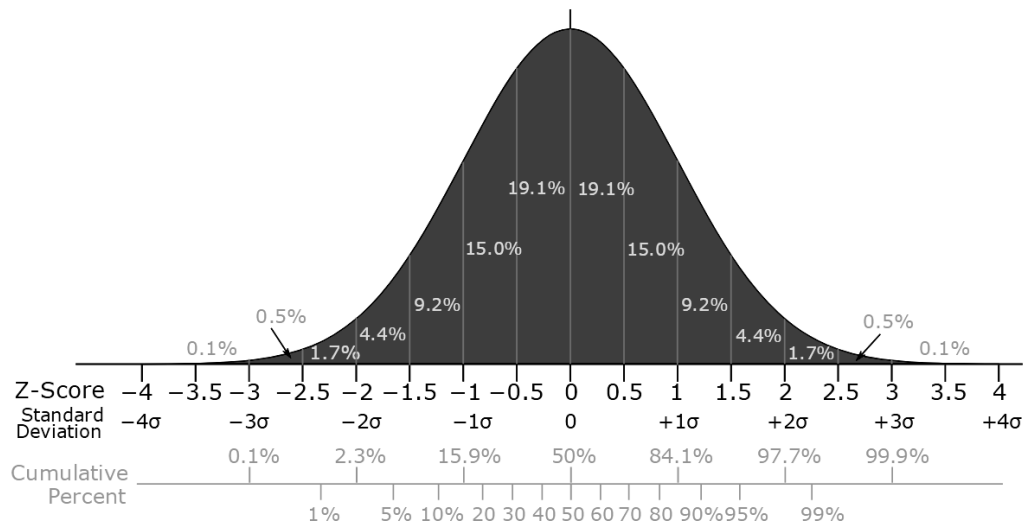
ความแปรปรวน เป็นพารามิเตอร์ทางสถิติ เรียกว่า ค่าโมเมนต์ทางสถิติลำดับที่ 2 (The 2nd statistical moment) แสดงการกระจายตัวของข้อมูลประชากร (Spread or dispersion) ตามการแจกแจงความถี่ รอบค่าเฉลี่ย

โดยทฤษฎีทางสถิติ พจน์ของตัวหาร อาจใช้ค่าปรับแก้ (Bessel's correction) เป็น (n-1) แทน (n) เมื่อขนาดของตัวอย่างจากประชากรทั้งหมดมีจำนวนน้อยกว่า 30

- ❖ Standard deviation ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (σ or SD)

$$\sigma = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right]^{1/2} \quad (3.13)$$

ค่า σ แสดงถึงการกระจายตัวของข้อมูลประชากรตามการแจกแจงความถี่ รอบค่าเฉลี่ย เช่นเดียวกับ Variance ค่าน้อยจะแสดงถึงการกระจายตัวของข้อมูลในช่วงแคบ หากข้อมูลมีแจกแจงปกติ (Normal or Gaussian distribution) ดังนั้น จะมีสัดส่วนของข้อมูลจำนวน 68 %, 95 % และ 99.7 % ของข้อมูลทั้งหมด อยู่ในช่วงค่าเฉลี่ย $\pm 1\sigma$, $\pm 2\sigma$ และ $\pm 3\sigma$ ตามลำดับ แสดงดังรูปที่ 3.11



รูปที่ 3.11 รูปแบบกราฟ Normal distribution “Bell Curve”

(ปรับปรุงจาก <http://www.mathsisfun.com/data/images/normal-distribution-large.svg>)

❖ Coefficient of variation (COV) สัมประสิทธิ์ความผันแปร

$$COV = \frac{\sigma}{\mu} \quad (3.14)$$

อัตราส่วนเปรียบเทียบระหว่าง ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน กับค่าเฉลี่ย เป็นตัวแปรไร้มิติ (Dimensionless) มีประโยชน์ในการชี้วัดความไม่แน่นอน (Uncertainties) เช่น $COV = 0.05$ (5 %) แสดงถึงความไม่แน่นอนของข้อมูลเล็กน้อย ในขณะที่ค่า $COV = 0.25$ (25 %) หมายถึง ข้อมูลมีความไม่แน่นอนที่มากขึ้น

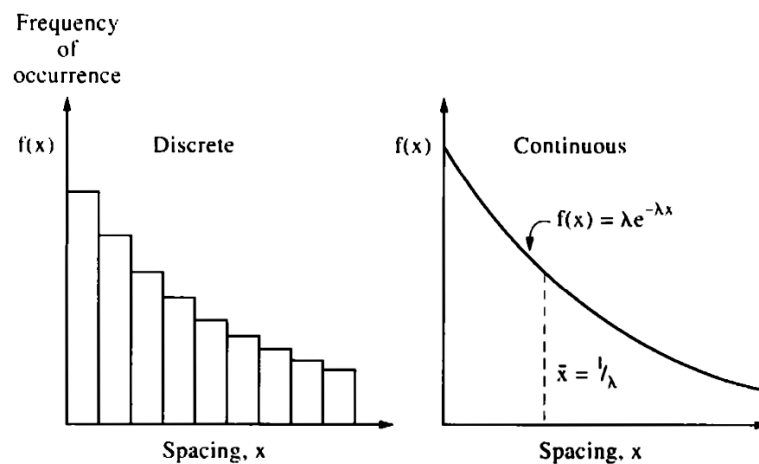
❖ Probability density function (PDF) ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น คือ ฟังก์ชันที่ใช้อธิบายความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มที่จะเกิดขึ้น ณ จุดที่กำหนด แสดงเป็นกราฟรูปแบบการแจกแจงความถี่ (Histogram) โดยพื้นที่รวมใต้กราฟ PDF จะมีค่าเท่ากับ 1 ทั้งนี้ ข้อมูลส่วนใหญ่ในการวิเคราะห์เชิงความน่าจะเป็นในงานวิศวกรรมธรณี PDF จะมีรูปแบบการแจกแจงปกติ แสดงดังสมการ

$$f_x(x) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]}{\sigma\sqrt{2\pi}} \quad (3.15)$$

เมื่อ $-\infty \leq x \leq \infty$

ยกเว้นข้อมูลบางจำพวก จะมีการแจกแจงความถี่ของข้อมูลเป็นรูปแบบอื่น ตามลักษณะ และโอกาสการเกิดโดยธรรมชาติ ตัวอย่างเช่น Joints spacing ระดับความสูงของน้ำใน Tension crack อัตราเร่งเนื่องจากแผ่นดินไหว เป็นต้น ซึ่งจะมีรูปแบบการแจกแจงความถี่ของข้อมูลเป็นแบบ Negative exponential แสดงดังรูปที่ 3.12

แต่อย่างไรก็ดี ตามทฤษฎี Central limit theorem ไม่ว่าการแจกแจงของข้อมูลจะเป็นรูปแบบใดก็ตาม เมื่อการทดสอบทำซ้ำด้วยปริมาณข้อมูลที่มากเพียงพอ ค่าเฉลี่ยของข้อมูลการทดสอบจะเข้าสู่ค่ากลาง เช่นเดียวกับการแจกแจงปกติ



รูปที่ 3.12 รูปแบบกราฟ Negative exponential distribution ของตัวอย่างข้อมูล Joints spacing

(Hudson and Harrison, 1997)

ในทางปฏิบัติอีกหลายกรณี สามารถกำหนดรูปแบบการแจกแจงของข้อมูลเป็นรูปแบบอื่น เช่น Lognormal distribution, Triangular distribution, Uniform distribution และ Beta distribution ขึ้นอยู่กับความเหมาะสม และปริมาณของข้อมูลที่ทดสอบ หรือ เก็บได้จากสนาม

กรณีการแจกแจงปกติ พิสัย หรือ ช่วงของข้อมูล (Range) ตามทฤษฎีคือ $-\infty \leq x \leq \infty$ จะทำให้มีปัญหาในการคำนวณ (มีค่าน้อยจนอาจติดลบ หรือ มีค่าสูงเกินไป) โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อใช้ร่วมกับการประมาณค่าทางสถิติเชิงความน่าจะเป็น ด้วยวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ Monte Carlo simulations ดังนั้น ในทางปฏิบัติจึงต้อง “ตัด” การแจกแจงให้อยู่

ในช่วง $\pm 3\sigma$ ซึ่งจะมีค่าต่ำสุด และ สูงสุด ที่แน่ชัด (Truncated normal distribution) ด้วย
การประมาณการค่า Standard deviation, σ จาก “the 3 σ Rule” ของ Duncan (2000) ตาม
สมการ

$$\sigma = \frac{HCV - LCV}{6} \quad (3.16)$$

เมื่อ HCV = Highest conceivable value ค่าสูงสุดที่เป็นไปได้ของตัวแปรสุ่ม;
LCV = Lowest conceivable value ค่าต่ำสุดที่เป็นไปได้ของตัวแปรสุ่ม

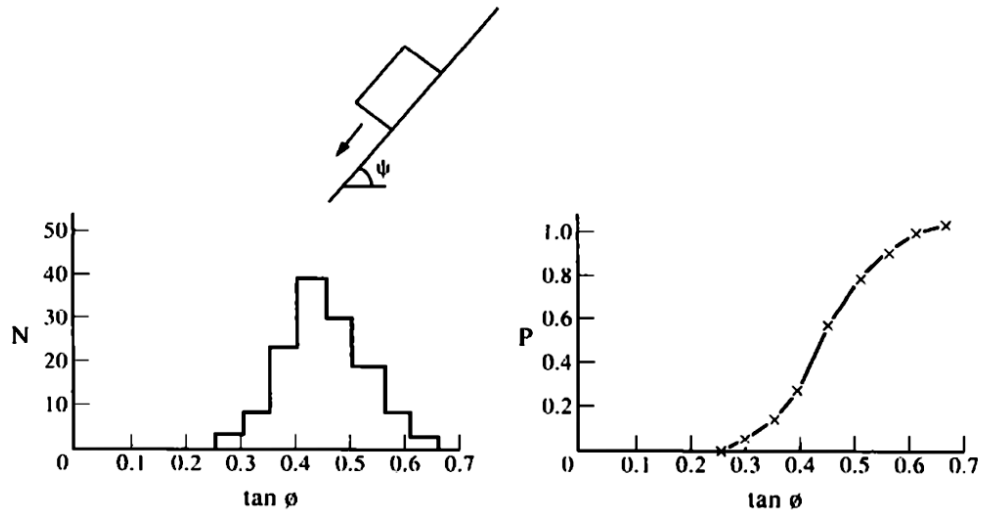
3.3 เทคนิคการวิเคราะห์เชิงความน่าจะเป็นของเสถียรภาพความลาด

เทคนิคการวิเคราะห์เชิงความน่าจะเป็นของเสถียรภาพที่เป็นที่ยอมรับ ได้แก่ Direct approach, Point estimation method (PEM), และ Monte Carlo simulation

Direct approach

ตัวอย่างกรณีอย่างง่ายของการเลื่อนไถลของบล็อกบนระนาบเอียงทำมุม ψ กับแนวนอน แสดงดังรูปที่ 3.13 ซึ่งกำหนดให้ Friction angle, ϕ บนพื้นผิวเอียงระหว่างบล็อกและระนาบเอียง เป็นตัวแปรสุ่ม แสดงเป็น Histogram แจกแจงความถี่ของ Friction parameters, $\tan\phi$ ดังกราฟทางซ้ายมือ ซึ่งสามารถนำไปใช้ในการวิเคราะห์ได้โดยตรงในลักษณะของอันตรภาคชั้น (Class interval) หรือ ปรับให้เป็น Probability density function ของการแจกแจงทางสถิติก่อน เช่น รูปแบบการแจกแจงปกติ โดยมีค่าเฉลี่ย และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Hudson and Harrison, 1997)

Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved



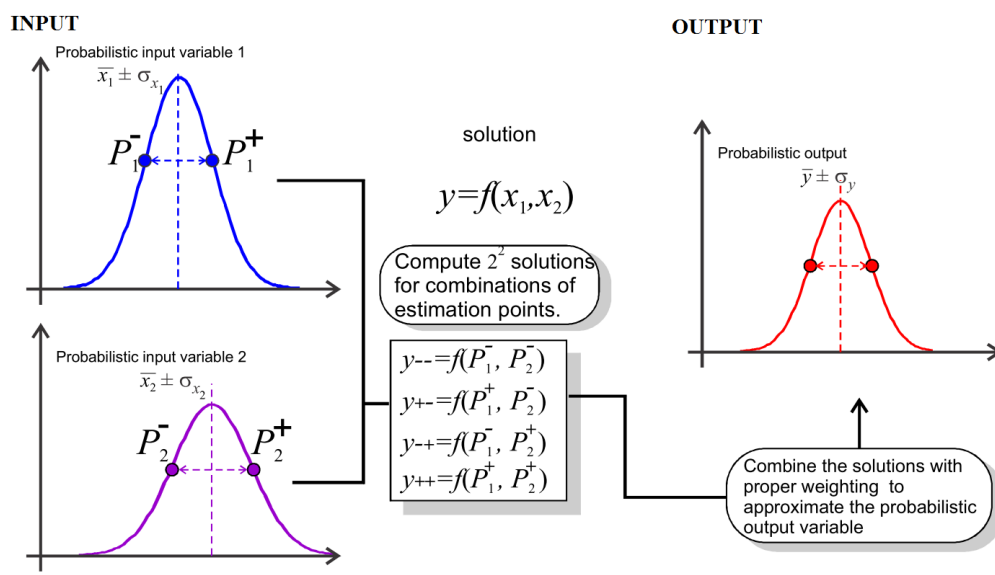
รูปที่ 3.13 การวิเคราะห์เชิงความน่าจะเป็น กรณีการเลื่อนไถลของบล็อกบนระนาบ
(Hudson and Harrison, 1997)

ด้วยค่า Friction parameters, $\tan \phi$ ที่สุ่มจากการแจกแจงความถี่ เป็น Input parameter นำไปคำนวณหาค่า FS แล้วพล็อตผลการวิเคราะห์เป็น Probability density function ของค่า FS ที่ได้ และแสดงเป็น Histogram หรือ เป็นกราฟความถี่สะสม (Cumulative distribution function, CDF) ในรูป S-curve แบบเดียวกับ Input parameter (ในกรณีตัวอย่างนี้คือ $\tan \phi$) ด้านขวามือ

Cumulative distribution curve จะใช้ในการแปลผลการวิเคราะห์ ซึ่งสามารถบอกถึงความน่าจะเป็นของผลวิเคราะห์ที่ค่า FS จะน้อยกว่า หรือ มากกว่า ค่าที่ระบุได้ เช่น จะมีความน่าจะเป็นเท่าไรที่ค่า FS ต่ำกว่า 1.25 เป็นต้น

Point estimation method (PEM)

วิธีการประมาณค่า Point estimation method (PEM) เสนอโดย Rosenblueth (1975, 1981) นำมาประยุกต์ใช้กับการวิเคราะห์เสถียรภาพความลาด ด้วยการให้ Input parameters ที่กำหนดเป็นตัวแปรสุ่ม มีการแจกแจง $\pm 1\sigma$ รอบค่าเฉลี่ย ($\mu \pm 1\sigma$) ได้เป็นค่าประมาณการ 2 ค่า (Two weighting points) และทำการคำนวณหาค่า FS จากออกมาจากทุกความเป็นไปได้ หรือ Combination ของ Point estimates ตามจำนวนของตัวแปรสุ่มที่เกี่ยวข้องทั้งหมด ซึ่งจะมีจำนวนเป็นเลขยกกำลังฐานสอง (การคำนวณ 2^n ครั้ง เมื่อ n เป็นจำนวนตัวแปร และจะได้ผลลัพธ์จำนวน 2^n ค่า) แล้วจึงทำการประมาณค่าโมเมนต์ทางสถิติ ได้แก่ ค่าเฉลี่ย และความแปรปรวน ของผลลัพธ์ (ค่า FS) ที่ได้ โดยหลักวิธีแสดงดังรูปที่ 3.14



รูปที่ 3.14 หลักวิธี Point estimation method ในการประมาณค่าโมเมนต์ทางสถิติของผลลัพธ์ จากตัวแปรสุ่มที่เกี่ยวข้อง (ปรับปรุงจาก Rocscience Inc., 2013)

Monte Carlo simulation

วิธีการเป็นไปตามชื่อ “Monte Carlo” ที่เชื่อกันว่ามาจากคำเรียกเทคนิคการวิเคราะห์ในงานวิจัยลับระหว่างการพัฒนาระเบิดนิวเคลียร์ในช่วงสงครามโลกครั้งที่ 2 (Harr, 1987) โดยการ “สุ่มเลือก” ค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดจาก Probability density function ของตัวแปรสุ่มที่เกี่ยวข้องทั้งหมด ถ้าจำนวนตัวอย่างจากการสุ่มมีมากเพียงพอ ผลลัพธ์เช่นค่า FS จากการคำนวณด้วยตัวแปรสุ่มเหล่านั้น จะนำไปพล็อต Probability density function และประมาณการค่าโมเมนต์ทางสถิติของผลลัพธ์ได้

ข้อดีของ Monte Carlo simulation คือ เป็นเทคนิคที่มีความยืดหยุ่นสูง ประยุกต์ใช้ร่วมกับ Probability density function ได้หลากหลายรูปแบบ ไม่จำกัดที่ต้องอนุมานให้เป็นการแจกแจงปกติเท่านั้น

แต่มีข้อจำกัดสำคัญคือ หากต้องการความแม่นยำในการประมาณค่าโมเมนต์ทางสถิติของผลลัพธ์สูง จำนวนการคำนวณด้วยวิธีสุ่มจะต้องมากเป็นหลายร้อย หลายพันครั้ง ซึ่งเมื่อนำมาใช้ร่วมกับการวิเคราะห์ด้วยวิธีเชิงตัวเลข จะต้องใช้ทรัพยากรด้านฮาร์ดแวร์ และเวลาในการคำนวณเป็นอย่างมาก Hammah et al. (2009) จึงเสนอวิธี *Approximate Monte Carlo* โดยทำการคำนวณด้วยตัวแปรสุ่มทั้งหมด 40 ครั้ง ซึ่งให้ผลการประมาณค่าพารามิเตอร์โมเมนต์ทางสถิติได้อย่างคร่าว ๆ โดยเป็นที่ยอมรับได้