



ภาคผนวก

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved



ภาคผนวก ก

รายนามผู้เชี่ยวชาญ

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright© by Chiang Mai University

All rights reserved

รายนามผู้เชี่ยวชาญ
ประเมินชุดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ
เรื่อง การพิสูจน์คณิตศาสตร์เบื้องต้นสำหรับนักเรียนค่ายโอลิมปิก

1. รองศาสตราจารย์ ดร.ปยุตนา กลัษณ์อุตม อาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์
คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
2. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ รัชณี คระระวาด อาจารย์ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์
คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏลำปาง
3. คุณครูจิระประภา สุวรรณจักร์ ครูชำนาญการพิเศษวิทยฐานะ คศ.3
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
โรงเรียนบุญวาทย์วิทยาลัย จังหวัดลำปาง
และวิทยาการค่ายโอลิมปิกวิชาการสาขาคณิตศาสตร์

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved



ภาคผนวก ข

ตัวอย่างแบบประเมินชุดการเรียนรู้การสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ
เรื่อง การพิสูจน์คณิตศาสตร์เบื้องต้น สำหรับนักเรียนค่ายโอลิมปิก

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

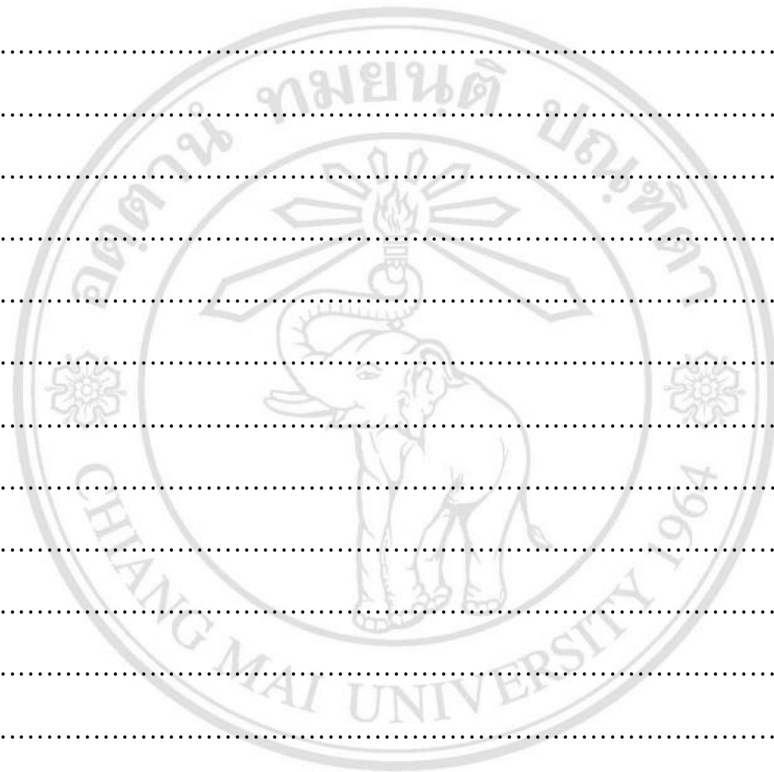
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

แบบประเมินชุดการเรียนรู้การสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ
เรื่อง การพิสูจน์คณิตศาสตร์เบื้องต้นสำหรับนักเรียนค่ายโอลิมปิก
สำหรับผู้เชี่ยวชาญด้านการเรียนการสอนคณิตศาสตร์

คำชี้แจง ขอให้ท่านประเมินคุณภาพของชุดการเรียนรู้การสอนในแต่ละชุดตามรายการต่อไปนี้
 โดยทำเครื่องหมาย ✓ ลงในตาราง พร้อมทั้งให้ข้อเสนอแนะเพิ่มเติม

รายการ	คุณภาพของชุดการเรียนรู้การสอน		ข้อเสนอแนะ
	เห็นด้วย	ไม่เห็นด้วย	
1. เนื้อหาสาระสอดคล้องกับจุดประสงค์			
2. เวลาที่ใช้มีความเหมาะสม			
3. วิธีการและขั้นตอนของการจัดการเรียนการสอนมีความเหมาะสม			
4. การจัดรูปแบบของชุดการเรียนรู้การสอนมีความเหมาะสม			
5. ชุดการเรียนรู้การสอนช่วยให้ผู้เรียนเข้าใจเนื้อหาได้เป็นอย่างดี			
6. จำนวนของตัวอย่างในแต่ละชุดการเรียนรู้การสอนมีความเหมาะสม			
7. วิธีการวัดและการประเมินผลมีความเหมาะสม			
8. การใช้ภาษาที่มีความเหมาะสม			
9. ชุดการเรียนรู้การสอนเหมาะสมกับความสามารถของผู้เรียน			
10. ชุดการเรียนรู้การสอนมีความน่าสนใจ			

ความคิดเห็น / ข้อเสนอแนะอื่นๆ



ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

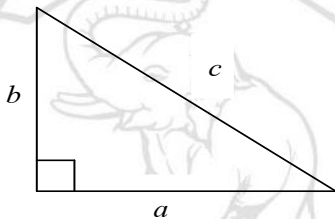


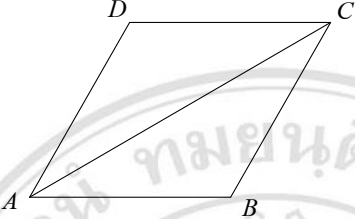
ภาคผนวก ค

แบบประเมินความสอดคล้องระหว่างแบบฝึกหัดหลังเรียน
กับจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

แบบประเมินความสอดคล้องระหว่างแบบฝึกหัดหลังเรียนกับจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

จุดประสงค์เชิง พฤติกรรม	แบบฝึกหัดหลังเรียน	คะแนนการพิจารณา		
		+1	0	-1
ชุดการเรียนรู้การสอนที่ 1 นักเรียนสามารถบอกได้ ว่าข้อความใดเป็นการให้ เหตุผลที่สมเหตุสมผล และสามารถพิสูจน์ทาง คณิตศาสตร์เบื้องต้นได้	1. จงพิสูจน์ว่า ถ้าส่วนของเส้นตรงสองเส้น ตัดกันแล้วมุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน			
	2. พิจารณารูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาว a, b และ c ดังที่กำหนดให้ จงใช้กฎของโคไซน์ พิสูจน์ว่า ถ้ารูปสามเหลี่ยมเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก แล้ว $c^2 = a^2 + b^2$ 			
ชุดการเรียนรู้การสอนที่ 2 นักเรียนสามารถแสดง การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ ในรูป $p \rightarrow q$ ด้วยการ พิสูจน์โดยตรงได้	1. จงพิสูจน์ว่า ถ้า n เป็นจำนวนคี่แล้ว n^2 เป็นจำนวนคี่			
	2. จงพิสูจน์ว่า ผลบวกของจำนวนคู่กับจำนวน คี่เป็นจำนวนคี่			
	3. กำหนดให้ a, b, c, x และ y เป็นจำนวน เต็มโดยที่ $a, b \neq 0$ จงแสดงว่า 3.1 ถ้า $a b$ และ $a c$ แล้ว $a (b + c)$			
	3.2 ถ้า $a b$ และ $b c$ แล้ว $a (b + c)$			
	3.3 ถ้า $a (2x - 3y)$ และ $a (4x - 5y)$ แล้ว $a y$			

จุดประสงค์เชิง พฤติกรรม	แบบฝึกหัดหลังเรียน	คะแนนการพิจารณา		
		+1	0	-1
	4. จากรูป จงพิสูจน์ว่า ถ้ารูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน แล้ว $\triangle ACD$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว 			
ชุดการเรียนรู้การสอนที่ 3 นักเรียนสามารถแสดง การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ใน รูป $p \rightarrow q$ ด้วยการ พิสูจน์โดยใช้ประพจน์ แย้งกลับที่ได้	1. กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า ถ้า n^2 เป็นจำนวนคี่ แล้ว n จะเป็นจำนวนคี่			
	2. กำหนดให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ จงพิสูจน์ว่า ถ้า $A \subset B$ แล้ว $A \cap B' = \emptyset$			
	3. กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า ถ้า $4 \mid a^2$ แล้ว a เป็นจำนวนคู่			
	4. กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า ถ้า $a \leq c$ แล้ว $a \leq b$ หรือ $b \leq c$			
ชุดการเรียนรู้การสอนที่ 4 นักเรียนสามารถแสดง การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ใน รูป $p \rightarrow q$ ด้วยการ พิสูจน์โดยการหา ข้อขัดแย้งได้	1. สำหรับจำนวนจริง x และ y ใด ๆ ถ้า $x \leq y$ และ $y \leq x$ แล้ว $x = y$			
	2. ถ้า A เป็นเซตใด ๆ แล้ว $A \cap \emptyset = \emptyset$			

จุดประสงค์เชิง พฤติกรรม	แบบฝึกหัดหลังเรียน	คะแนนการพิจารณา		
		+1	0	-1
ชุดการเรียนรู้การสอนที่ 5 นักเรียนสามารถแสดง การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $p \rightarrow q$ ด้วยการ พิสูจน์โดยการแยกกรณี ได้	1. จงพิสูจน์ว่า ถ้า a เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $a^2 - a$ เป็นจำนวนคู่			
	2. จงพิสูจน์ว่า ถ้า a เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $3 \mid a(a+1)(a+2)$			
ชุดการเรียนรู้การสอนที่ 6 นักเรียนสามารถแสดง การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $p \leftrightarrow q$ ได้	1. จงพิสูจน์ว่า a เป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ $a+1$ เป็นจำนวนคี่			
	2. กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริง จงแสดงว่า $x = 2$ ก็ต่อเมื่อ $x^3 - 2x^2 + x = 2$			

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved



ภาคผนวก ง
แบบประเมินความสอดคล้องระหว่างแบบทดสอบหลังเรียน
กับจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

แบบประเมินความสอดคล้องระหว่างแบบทดสอบหลังเรียนกับจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

จุดประสงค์เชิง พฤติกรรม	ข้อสอบ	คะแนนการพิจารณา		
		+1	0	-1
1. นักเรียนสามารถบอกได้ว่าข้อความใดเป็นการให้เหตุผลที่สมเหตุสมผล	1.1 ข้อความใดเป็นการให้เหตุผลที่สมเหตุสมผลโดยไม่มีข้อโต้แย้งใด ๆ จะไม่สามารถนำไปใช้อ้างอิงได้ (ข้อสอบเลือกตอบถูก-ผิด)			
	1.2 ในวิชาคณิตศาสตร์การพิสูจน์หมายถึงการให้เหตุผลที่สมเหตุสมผลโดยไม่มีข้อโต้แย้งใด ๆ เพื่อแสดงว่าข้อความนั้นเป็นจริง (ข้อสอบเลือกตอบถูก-ผิด)			
	1.3 บทนิยามคือการให้ความหมายของคำซึ่งบทนิยามที่คตินั้นผู้อ่านต้องเข้าใจได้ไม่ตรงกัน (ข้อสอบเลือกตอบถูก-ผิด)			
	1.4 กำหนดให้ $a, b, c \in R$ ถ้า $a = b$ แล้ว $a + c = b + c$ (ข้อสอบเลือกตอบถูก-ผิด)			
	1.5 กำหนดให้ $y \in R$ ถ้า $5y^2 = y$ แล้ว $5y = 1$ (ข้อสอบเลือกตอบถูก-ผิด)			
2. นักเรียนสามารถพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เบื้องต้นได้	2. จงพิสูจน์ข้อความ “ถ้าต่อต้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไปแล้วมุมภายนอกจะมีขนาดเท่ากับผลบวกของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิด”			
3. นักเรียนสามารถแสดงการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $p \rightarrow q$ ด้วยการพิสูจน์โดยตรงได้	3. จงพิสูจน์ข้อความ “กำหนดให้ a, b, c, x และ y เป็นจำนวนเต็มโดยที่ $a \neq 0$ ถ้า $a \mid b$ และ $a \mid c$ แล้ว $a \mid (bx + cy)$ ”			
	4. จงพิสูจน์ข้อความ “ถ้า k เป็นจำนวนคี่แล้ว $k + 1$ จะเป็นจำนวนคู่”			

จุดประสงค์เชิง พฤติกรรม	ข้อสอบ	คะแนนการพิจารณา		
		+1	0	-1
4. นักเรียนสามารถ แสดงการพิสูจน์ ข้อความที่อยู่ในรูป $p \rightarrow q$ ด้วยการ พิสูจน์โดยใช้ประพจน์ แย้งกลับที่ได้	5. จงพิสูจน์ข้อความ “ถ้า $(9k-11)^2$ เป็นจำนวนคู่ แล้ว k จะเป็นจำนวนคี่”			
	6. จงพิสูจน์ข้อความ “กำหนดให้ a เป็น จำนวนเต็ม ถ้า $2 \mid a^3$ แล้ว a เป็นจำนวนคู่”			
5. นักเรียนสามารถ แสดงการพิสูจน์ ข้อความที่อยู่ในรูป $p \rightarrow q$ ด้วยการ พิสูจน์โดยการหา ข้อขัดแย้งได้	7. จงพิสูจน์ข้อความ “กำหนดให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ จงพิสูจน์ว่า ถ้า $A \subset B$ แล้ว $A \cap B' = \emptyset$ ”			
	8. จงพิสูจน์ข้อความ “กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า $a \mid b$ แล้ว $a \leq b$ ”			
6. นักเรียนสามารถ แสดงการพิสูจน์ ข้อความที่อยู่ในรูป $p \rightarrow q$ ด้วยการ พิสูจน์โดยการแยก กรณีได้	9. จงพิสูจน์ข้อความ “ถ้า a เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $4a+3$ เป็นจำนวนคี่”			
	10. จงพิสูจน์ข้อความ “ถ้า a เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $4 \mid a(a+1)(a+2)(a+3)$ ”			
7. นักเรียนสามารถ แสดงการพิสูจน์ ข้อความที่อยู่ในรูป $p \leftrightarrow q$ ได้	11. จงพิสูจน์ข้อความ “ a^2 เป็นจำนวนคี่ ก็ต่อเมื่อ $a+2$ เป็นจำนวนคี่”			
	12. จงพิสูจน์ข้อความ “กำหนดให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ จงพิสูจน์ว่า $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $B' \subset A'$ ”			



ภาคผนวก จ

แผนการจัดการเรียนรู้ชุดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ
เรื่อง การพิสูจน์คณิตศาสตร์เบื้องต้นสำหรับนักเรียนค่ายโอลิมปิก

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1

ชุดการเรียนรู้การสอนที่ 1

เรื่อง ความสำคัญของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เวลา 3 ชั่วโมง

สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์หมายถึงการให้เหตุผลที่สมเหตุสมผลโดยไม่มีข้อโต้แย้งใด ๆ เพื่อแสดงว่าข้อความนั้นเป็นจริง

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. นักเรียนสามารถบอกได้ว่าข้อความใดเป็นการให้เหตุผลที่สมเหตุสมผล
2. นักเรียนสามารถพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เบื้องต้นได้

กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นนำ

1. ครูแนะนำวิธีการเรียนโดยใช้ชุดการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ
2. ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้สำหรับชุดการเรียนรู้ที่ 1 ให้นักเรียนทราบ

ขั้นสอน

1. ครูให้นักเรียนพิจารณาข้อความที่ 1-4 ในหน้า 1-3 ของชุดการเรียนรู้ที่ 1 พร้อมเติมคำตอบของข้อคำถามแต่ละข้อเมื่อนักเรียนเต็มที่แล้วครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเพื่อเฉลยคำตอบดังนี้

ข้อความที่ 1

นายเอ กล่าวว่า

“ถ้า $ax^2 + bx + c = 0$ และ $a \neq 0$ แล้ว $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ เป็นจริง เพราะ

ถ้า $ax^2 + bx + c = 0$ และ $a \neq 0$

เมื่อนำ $\frac{1}{a} \neq 0$ มาคูณทั้งสองข้างของสมการจะได้ว่า

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad \dots (1)$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \quad \dots (2)$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \quad \dots (3)$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \quad \dots (4)$$

$$= -\frac{4ac}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2} \quad \dots (5)$$

$$= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad \dots (6)$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \quad \dots (7)$$

$$= \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \dots (8)$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \dots (9)$$

$$= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \dots (10)$$

นั่นคือ ถ้า $ax^2 + bx + c = 0$ และ $a \neq 0$ แล้ว $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$,

จากข้อความที่กำหนดให้มีความสมเหตุสมผลหรือไม่ (ถ้าไม่สมเหตุสมผลให้ระบุบรรทัดที่ไม่สมเหตุสมผล)

คำตอบ มีความสมเหตุสมผล

ข้อความที่ 2

นายบี กล่าวว่า

“ $-1 = 1$ เพราะ

พิจารณา $-1 = (-1)^1 \quad \dots (1)$

$$= (-1)^{\frac{2}{2}} \quad \dots (2)$$

$$= ((-1)^2)^{\frac{1}{2}} \quad \dots (3)$$

$$= 1^{\frac{1}{2}} \quad \dots (4)$$

$$= 1 \quad \dots (5)$$

ดังนั้น

$$-1 = 1 ”$$

จากข้อความที่กำหนดให้มีความสมเหตุสมผลหรือไม่ (ถ้าไม่สมเหตุสมผลให้ระบุบรรทัดที่ไม่สมเหตุสมผล)

คำตอบ ไม่มีความสมเหตุสมผล เพราะจากบรรทัดที่ 2 ไปบรรทัดที่ 3 จะไม่สามารถใช้สมบัตินี้ได้เพราะเลขชี้กำลังต้องเป็นเศษส่วนอย่างต่ำ

ข้อความที่ 3

นายซี กล่าวว่า

“ถ้าลากส่วนของเส้นตรงสองเส้นให้ตัดกัน แล้วส่วนของเส้นตรงสองเส้นตัดกันได้เพียงจุดเดียว เท่านั้น”

จากข้อความที่กำหนดให้มีความสมเหตุสมผลหรือไม่

คำตอบ มีความสมเหตุสมผล

ข้อความที่ 4

นายดี กล่าวว่า

	“ $1 = 2$ เพราะ	
กำหนดให้	$a = b$	... (1)
	$a^2 = ab$	... (2)
	$a^2 - b^2 = ab - b^2$	... (3)
	$(a - b)(a + b) = (a - b)(b)$	... (4)
	$a + b = b$	... (5)
	$a + a = a$	... (6)
	$2a = a$	... (7)
	$2 = 1$	... (8)
ดังนั้น	$1 = 2$ ”	... (9)

จากข้อความที่กำหนดให้มีความสมเหตุสมผลหรือไม่ (ถ้าไม่สมเหตุสมผลให้ระบุบรรทัดที่ไม่สมเหตุสมผล)

คำตอบ ไม่มีความสมเหตุสมผล เพราะจากบรรทัดที่ 4 ไปบรรทัดที่ 5 จะไม่สามารถดำเนินการได้ถ้า

$$a - b = 0$$

2. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายความหมายของการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งหมายถึง การให้เหตุผลที่สมเหตุสมผลโดยไม่มีข้อโต้แย้งใด ๆ เพื่อแสดงว่าข้อความนั้นเป็นจริง
3. นักเรียนศึกษาตัวอย่างการให้เหตุผลที่สมเหตุสมผล (การพิสูจน์) ทางคณิตศาสตร์ ตัวอย่างที่ 1-3 ในหน้า 4-7 ของชุดการเรียนการสอนที่ 1 โดยเน้นให้นักเรียนได้คิด ได้ ปฏิบัติ และหาข้อสรุป ให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ด้วยตัวเอง โดยมีครูคอยกระตุ้น ทั้งครู และนักเรียนร่วมกันสร้างบรรยากาศการเรียนรู้ให้อำนวยความสะดวกในการเรียนรู้ โดยมี ครูสนับสนุนส่งเสริม เพื่อให้นักเรียนพัฒนาได้อย่างเต็มศักยภาพ

ขั้นสรุป

1. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายสรุปข้อความเป็นการให้เหตุผลที่สมเหตุสมผล และ หลักการ พิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เบื้องต้น
2. นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 1 หน้า 8-9 ของชุดการเรียนการสอนที่ 1

การวัดและการประเมินผล

หลักฐานการเรียนรู้ (ชิ้นงาน/ภาระงาน)	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์
แบบฝึกหัดที่ 1	ตรวจแบบฝึกหัดที่ 1	แบบฝึกหัดที่ 1	ถูกต้องตั้งแต่ 80%

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2

ชุดการเรียนรู้การสอนที่ 2

เรื่อง การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $p \rightarrow q$ ด้วยการพิสูจน์โดยตรง เวลา 3 ชั่วโมง

สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

การแสดงการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $p \rightarrow q$ โดยกำหนดให้ p เป็นจริง แล้วให้เหตุผลที่สมเหตุสมผลจนได้ข้อสรุป q ซึ่งกำหนดเป็นรูปแบบได้ดังนี้

การพิสูจน์ $p \rightarrow q$ ด้วยการพิสูจน์โดยตรง

กำหนด p เป็นจริง

$\therefore$ (ให้เหตุผล)

สรุปได้ว่า q เป็นจริง

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถแสดงการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $p \rightarrow q$ ด้วยการพิสูจน์โดยตรงได้

กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นนำ

1. ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้สำหรับชุดการเรียนรู้การสอนที่ 2
2. ครูสุ่มนักเรียน 1 คนเพื่อให้บอกความหมายของการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

ขั้นสอน

1. ครูให้นักเรียนพิจารณาข้อความที่อยู่ในรูป $p \rightarrow q$ ในหน้า 1 ของชุดการเรียนรู้การสอนที่ 2 แล้วครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายถึงหลักการพิสูจน์
2. นักเรียนศึกษาตัวอย่างการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $p \rightarrow q$ ด้วยการพิสูจน์โดยตรงในตัวอย่างที่ 1-3 ในหน้า 2-4 ของชุดการเรียนรู้การสอนที่ 2 ครูเน้นให้นักเรียนได้คิด ได้

ปฏิบัติ และหาข้อสรุป ให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ด้วยตัวเอง โดยมีครูคอยกระตุ้น ทั้งครูและนักเรียนร่วมกันสร้างบรรยากาศการเรียนรู้ให้อำนวยความสะดวกในการเรียนรู้ โดยมีครูสนับสนุนส่งเสริม เพื่อให้นักเรียนพัฒนาได้อย่างเต็มศักยภาพ

ขั้นสรุป

1. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายสรุปการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $p \rightarrow q$ ด้วยการพิสูจน์โดยตรง
2. นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 2 หน้า 5-7 ของชุดการเรียนรู้การสอนที่ 2

การวัดและการประเมินผล

หลักฐานการเรียนรู้ (ชิ้นงาน/ภาระงาน)	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์
แบบฝึกหัดที่ 2	ตรวจแบบฝึกหัดที่ 2	แบบฝึกหัดที่ 2	ถูกต้องตั้งแต่ 80%

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3

ชุดการเรียนรู้การสอนที่ 3

เรื่อง การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $p \rightarrow q$ ด้วยการพิสูจน์โดยใช้ประพจน์แย้งสลับที่ เวลา 3 ชั่วโมง

สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

การพิสูจน์ข้อความ $p \rightarrow q$ สามารถพิสูจน์โดยใช้ข้อความ $\sim q \rightarrow \sim p$ แทน โดยการพิสูจน์ข้อความ $\sim q \rightarrow \sim p$ โดยตรง กล่าวคือ การแสดงจะกำหนดให้ $\sim q$ เป็นจริง แล้วให้เหตุผลที่สมเหตุสมผลจนได้ข้อสรุป $\sim p$ จึงสรุปได้ว่า $p \rightarrow q$ เป็นจริง ซึ่งเรียกการพิสูจน์แบบนี้ว่าการพิสูจน์โดยใช้ประพจน์แย้งสลับที่ ซึ่งกำหนดเป็นรูปแบบได้ดังนี้

การพิสูจน์ $p \rightarrow q$ โดยใช้ประพจน์แย้งสลับที่

กำหนด $\sim q$ เป็นจริง

$\therefore$ (ให้เหตุผล)

สรุปได้ว่า $\sim p$ เป็นจริง

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถแสดงการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $p \rightarrow q$ ด้วยการพิสูจน์โดยใช้ประพจน์แย้งสลับที่ได้

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำ

1. ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้สำหรับชุดการเรียนรู้การสอนที่ 3
2. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเพื่อทบทวนเรื่องการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $p \rightarrow q$ ด้วยการพิสูจน์โดยตรง

ขั้นตอน

1. ครูให้นักเรียนพิจารณาการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $p \rightarrow q$ ด้วยการพิสูจน์โดยใช้ประพจน์แย้งสลับที่ ในหน้า 1-2 ของชุดการเรียนการสอนที่ 3 แล้วครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายถึงหลักการพิสูจน์
2. นักเรียนศึกษาตัวอย่างการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $p \rightarrow q$ ด้วยการพิสูจน์โดยใช้ประพจน์แย้งสลับที่ ในตัวอย่างที่ 1-2 ในหน้า 2-3 ของชุดการเรียนการสอนที่ 3 ครูเน้นให้นักเรียนได้คิด ได้ปฏิบัติ และหาข้อสรุป ให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ด้วยตัวเอง โดยมีครูคอยกระตุ้น ทั้งครูและนักเรียนร่วมกันสร้างบรรยากาศการเรียนรู้ให้อำนวยความสะดวกในการเรียนรู้ โดยมีครูสนับสนุนส่งเสริม เพื่อให้นักเรียนพัฒนาได้อย่างเต็มศักยภาพ

ขั้นสรุป

1. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายสรุปการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $p \rightarrow q$ ด้วยการพิสูจน์โดยใช้ประพจน์แย้งสลับที่
2. นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 3 หน้า 4-5 ของชุดการเรียนการสอนที่ 3

การวัดและการประเมินผล

หลักฐานการเรียนรู้ (ชิ้นงาน/ภาระงาน)	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์
แบบฝึกหัดที่ 3	ตรวจแบบฝึกหัดที่ 3	แบบฝึกหัดที่ 3	ถูกต้องตั้งแต่ 80%



ภาคผนวก จ

ชุดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ
เรื่อง การพิสูจน์คณิตศาสตร์เบื้องต้นสำหรับนักเรียนค่ายโอลิมปิก

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

ชุดการเรียนรู้การสอนที่ 1

เรื่อง : ความสำคัญของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

ชื่อ.....

ให้นักเรียนพิจารณาข้อความที่กำหนดให้แล้วตอบคำถาม

ข้อความที่ 1

นายเอ กล่าวว่า

“ถ้า $ax^2 + bx + c = 0$ และ $a \neq 0$ แล้ว $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ เป็นจริง เพราะ

ถ้า $ax^2 + bx + c = 0$ และ $a \neq 0$

เมื่อนำ $\frac{1}{a} \neq 0$ มาคูณทั้งสองข้างของสมการจะได้ว่า

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad \dots (1)$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \quad \dots (2)$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \quad \dots (3)$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \quad \dots (4)$$

$$= -\frac{4ac}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2} \quad \dots (5)$$

$$= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad \dots (6)$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \quad \dots (7)$$

$$= \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \dots (8)$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \dots (9)$$

$$= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \dots (10)$$

นั่นคือ ถ้า $ax^2 + bx + c = 0$ และ $a \neq 0$ แล้ว $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ „

จากข้อความที่กำหนดให้มีความสมเหตุสมผลหรือไม่ (ถ้าไม่สมเหตุสมผลให้ระบุบรรทัดที่ไม่สมเหตุสมผล)

.....

.....

ข้อความที่ 2

นายบี กล่าวว่า

“ $-1 = 1$ เพราะ

พิจารณา

$$-1 = (-1)^1 \quad \dots (1)$$

$$= (-1)^{\frac{2}{2}} \quad \dots (2)$$

$$= ((-1)^2)^{\frac{1}{2}} \quad \dots (3)$$

$$= 1^{\frac{1}{2}} \quad \dots (4)$$

$$= 1 \quad \dots (5)$$

ดังนั้น

$$-1 = 1 ”$$

จากข้อความที่กำหนดให้มีความสมเหตุสมผลหรือไม่ (ถ้าไม่สมเหตุสมผลให้ระบุบรรทัดที่ไม่สมเหตุสมผล)

.....

.....

ข้อความที่ 3

นายซี กล่าวว่า

“ถ้าลากส่วนของเส้นตรงสองเส้นให้ตัดกัน แล้วส่วนของเส้นตรงสองเส้นตัดกันได้เพียงจุดเดียวเท่านั้น”

จากข้อความที่กำหนดให้มีความสมเหตุสมผลหรือไม่

.....
.....

ข้อความที่ 4

นายดี กล่าวว่า

กำหนดให้

$$\text{“ } 1 = 2 \text{ ” เพราะ} \quad a = b \quad \dots (1)$$

$$a^2 = ab \quad \dots (2)$$

$$a^2 - b^2 = ab - b^2 \quad \dots (3)$$

$$(a - b)(a + b) = (a - b)(b) \quad \dots (4)$$

$$a + b = b \quad \dots (5)$$

$$a + a = a \quad \dots (6)$$

$$2a = a \quad \dots (7)$$

$$2 = 1 \quad \dots (8)$$

ดังนั้น

$$1 = 2 \text{ ”} \quad \dots (9)$$

จากข้อความที่กำหนดให้มีความสมเหตุสมผลหรือไม่ (ถ้าไม่สมเหตุสมผลให้ระบุบรรทัดที่ไม่สมเหตุสมผล)

.....
.....

เมื่อพิจารณาข้อความที่ 1 – 4 แล้วนักเรียนพบว่า

- ข้อความที่.....เป็นการให้เหตุผลที่สมเหตุสมผล โดยไม่มีข้อโต้แย้งใด ๆ และข้อความสมเหตุสมผลสามารถนำไปใช้อ้างอิงได้

- ข้อความที่.....เป็นการให้เหตุผลที่ไม่สมเหตุสมผล
และข้อความที่ไม่สมเหตุสมผลไม่สามารถนำไปใช้อ้างอิงได้

“ การให้เหตุผลที่สมเหตุสมผลโดยไม่มีข้อโต้แย้งใด ๆ เพื่อแสดงว่าข้อความนั้นเป็นจริงในวิชา
คณิตศาสตร์ เรียกว่า..... ”

ตัวอย่างการให้เหตุผลที่สมเหตุสมผล (การพิสูจน์) ทางคณิตศาสตร์

ตัวอย่างที่ 1 จงแสดงว่า $2.\dot{9} = 3$

การพิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $A = 2.999999\ldots$	กำหนดให้
2. $10A = 29.999999\ldots$	นำ 10 คูณทั้งสองข้างของสมการ
3. $9A = 27$	นำสมการในข้อ 2. ลบด้วยสมการในข้อ 1.
4. $A = 3$	จากการแก้สมการในข้อ 3.
5. $2.\dot{9} = 3$	จากข้อ 1. ข้อ 4. และสมบัติของการเท่ากัน

จากการพิสูจน์ดังกล่าวสามารถเขียนแบบบรรยายโดยไม่ใช้ตารางได้ดังนี้

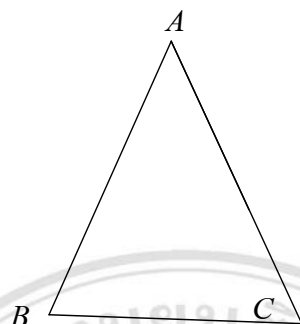
จากกำหนดให้ จะได้ $A = 2.999999\ldots$... (1)
 นำ 10 คูณทั้งสองข้างของสมการจะได้ $10A = 29.999999\ldots$... (2)
 นำ (2) - (1) จะได้ $9A = 27$
 แก้สมการ จะได้ $A = 3$... (3)
 จาก (1) และ (3) จะได้ว่า $2.\dot{9} = 3$ #

ข้อสังเกต

การเขียนพิสูจน์แบบบรรยายในแต่ละข้อความ (1 บรรทัด) จะต้องประกอบด้วยเหตุผลและ
ผลลัพธ์

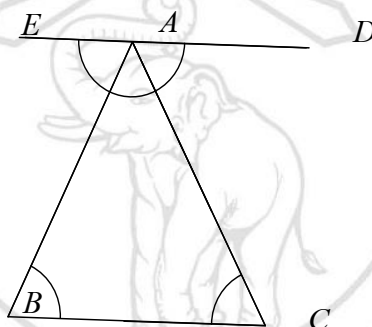
ตัวอย่างที่ 2 จงแสดงว่าผลบวกของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ รวมกันเท่ากับ 180°

ให้ $\triangle ABC$ เป็นตัวแทนของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ



ต้องการพิสูจน์ว่า $\hat{A}BC + \hat{A}CB + \hat{B}AC = 180^\circ$

ถ้าสร้าง $\overline{ED}$ ให้ขนานกับ $\overline{BC}$ ดังรูป แล้วสามารถให้เหตุผลได้ดังตาราง



การพิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $\overline{ED} \parallel \overline{BC}$	จากการสร้าง
2. $\hat{C}AD = \hat{A}CB$	จากข้อ 1. ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัดแล้ว มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน
3. $\hat{B}AE = \hat{A}BC$	จากข้อ 1. ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัดแล้ว มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน
4. $\hat{C}AD + \hat{B}AC + \hat{B}AE = 180^\circ$	ขนาดของมุมตรง
5. $\hat{A}CB + \hat{B}AC + \hat{A}BC = 180^\circ$	จากข้อ 2. – 4. และสมบัติของการเท่ากัน
6. ผลบวกของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ รวมกันเท่ากับ 180°	จากข้อ 5.

จากการพิสูจน์ดังกล่าวสามารถเขียนแบบบรรยายโดยไม่ใช่ตารางได้ดังนี้

การพิสูจน์ จากการสร้างจะได้ $\overline{ED} \parallel \overline{BC}$

เนื่องจาก ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัดแล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากันทำให้ได้ว่า

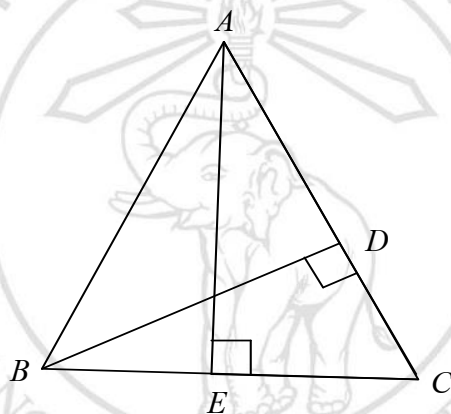
$$\hat{CAD} = \hat{ACB} \text{ และ } \hat{BAE} = \hat{ABC} \quad \dots (1)$$

$$\text{จากขนาดของมุมตรงจะได้ } \hat{CAD} + \hat{BAC} + \hat{BAE} = 180^\circ \quad \dots (2)$$

$$\text{จาก (1) - (2) และสมบัติของการเท่ากัน ทำให้ได้ว่า } \hat{ACB} + \hat{BAC} + \hat{ABC} = 180^\circ$$

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า ผลบวกของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ รวมกันเท่ากับ 180° #

ตัวอย่างที่ 3 ถ้ากำหนดรูปสามเหลี่ยมดังรูป แล้วจงแสดงว่า $\triangle AEC \sim \triangle BDC$



จากสิ่งที่โจทย์ให้แสดง (พิสูจน์) นักเรียนต้องทราบความหมาย (บทนิยาม) ของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน กล่าวคือ รูปสามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกัน ก็ต่อเมื่อ รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นมีขนาดของมุมเท่ากันเป็นคู่ ๆ สามคู่ โดยเราใช้สัญลักษณ์ $\sim$ แทน การคล้ายกัน

เช่น $\triangle AEC \sim \triangle BDC$ หมายถึง $\triangle AEC$ คล้ายกับ $\triangle BDC$

การแสดงว่า $\triangle AEC \sim \triangle BDC$ ตามความหมาย (บทนิยาม) ต้องแสดงว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปมีขนาดของมุมเท่ากันเป็นคู่ ๆ สามคู่ หรือต้องแสดงว่า $\hat{ACE} = \hat{BCD}$, $\hat{AEC} = \hat{BDC}$, $\hat{CAE} = \hat{CBD}$

การพิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $\hat{A}CE = \hat{B}CD$	มุมร่วม
2. $\hat{A}EC = \hat{B}DC$	ต่างก็เป็นมุมฉาก
3. $\hat{C}AE = \hat{C}BD$	ขนาดของมุมภายในรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 180° เมื่อมุมสองคู่มีขนาดเท่ากันแล้ว มุมคู่ที่เหลือจึงมีขนาดเท่ากัน
4. $\triangle AEC \sim \triangle BDC$	จากข้อ 1. – 3. จะได้ว่า $\triangle AEC$ และ $\triangle BDC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีขนาดของมุมเท่ากันเป็น คู่ ๆ สามคู่

จากการพิสูจน์ดังกล่าวสามารถเขียนแบบบรรยายโดยไม่ใช้ตารางได้ดังนี้

พิจารณาจากรูป $\triangle AEC$ และ $\triangle BDC$ จะได้ว่า $\hat{A}CE = \hat{B}CD$ เพราะมี $\hat{C}$ เป็นมุมร่วม และ $\hat{A}EC = \hat{B}DC$ เพราะต่างก็เป็นมุมฉาก

เนื่องจากขนาดของมุมภายในรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 180° เมื่อมุมสองคู่มีขนาดเท่ากันแล้วมุมคู่ที่เหลือจึงมีขนาดเท่ากันทำให้ได้ว่า $\hat{C}AE = \hat{C}BD$ ดังนั้น $\triangle AEC \sim \triangle BDC$ เพราะ $\triangle AEC$ และ $\triangle BDC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีขนาดของมุมเท่ากันเป็นคู่ ๆ สามคู่ #

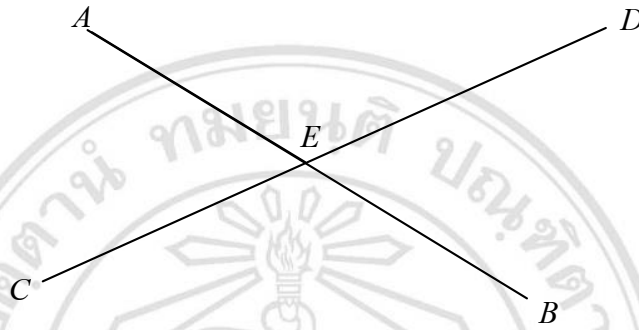
การให้เหตุผล (การพิสูจน์) ส่วนใหญ่จะใช้วิธีการเขียนแบบบรรยาย โดยในเบื้องต้นอาจจะเริ่มจากการฝึกเขียนการพิสูจน์เป็นแบบตารางก่อน ซึ่งจะเป็นการช่วยให้มีแนวทาง และมีลำดับขั้นตอนที่สมเหตุ-สมผล

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

แบบฝึกหัดที่ 1

1. จงพิสูจน์ว่า ถ้าส่วนของเส้นตรงสองเส้นตัดกัน แล้วมุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน

สร้างส่วนของเส้นตรง $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ให้ตัดกันที่จุด E ดังรูป



ต้องการพิสูจน์ว่า $\hat{A}ED = \hat{B}EC$ และ $\hat{A}EC = \hat{B}ED$

การพิสูจน์

A right-angled triangle is shown. The vertical side is labeled b , the horizontal side is labeled a , and the hypotenuse is labeled c . A small square at the vertex where sides a and b meet indicates a right angle.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

การพิสูจน์

ชุดการเรียนรู้การสอนที่ 2

เรื่อง : การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $p \rightarrow q$ ด้วยการพิสูจน์โดยตรง
ชื่อ.....

การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $p \rightarrow q$ ด้วยการพิสูจน์โดยตรง

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

- ถ้า $ax^2 + bx + c = 0$ และ $a \neq 0$ แล้ว $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีขนาดของมุมเท่ากันเป็นคู่ ๆ สามคู่ แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกัน
- ถ้าส่วนของเส้นตรงสองเส้นตัดกัน แล้วมุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน
- ถ้ารูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านยาว a, b และ c โดยที่ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก แล้ว $c^2 = a^2 + b^2$

จากข้อความข้างต้นจะพบว่าเป็นข้อความที่อยู่ในรูป ถ้า...แล้ว... หรือ $p \rightarrow q$ ซึ่งได้พิสูจน์ในชุดการเรียนรู้การสอนที่ 1 ไปแล้ว โดยการกำหนดให้ข้อความ p เป็นจริง จากนั้นให้เหตุผลที่ชัดเจนโดยไม่มีข้อโต้แย้งใด ๆ เพื่อแสดงว่าข้อความ q เป็นจริง การพิสูจน์ในลักษณะนี้เรียกว่าเป็นการพิสูจน์โดยตรง นั่นคือ การแสดง $p \rightarrow q$ จะกำหนดให้ p เป็นจริง แล้วให้เหตุผลที่สมเหตุสมผลจนได้ข้อสรุป q ซึ่งกำหนดเป็นรูปแบบได้ดังนี้

การพิสูจน์ $p \rightarrow q$ ด้วยการพิสูจน์โดยตรง

กำหนด p เป็นจริง

: (ให้เหตุผล)

สรุปได้ว่า q เป็นจริง

ต่อไปเป็นตัวอย่างการพิสูจน์ข้อความ $p \rightarrow q$ โดยตรงทางทฤษฎีจำนวน โดยนักเรียนต้องรู้ความหมายของจำนวนคู่ และจำนวนคี่ก่อน ดังนี้

บทนิยาม ให้ a, b เป็นจำนวนเต็ม เรากล่าวว่า

1. a เป็นจำนวนคู่ (even number) ก็ต่อเมื่อ $a = 2k$ โดยที่ k เป็นจำนวนเต็ม
2. b เป็นจำนวนคี่ (odd number) ก็ต่อเมื่อ $b = 2k + 1$ โดยที่ k เป็นจำนวนเต็ม

ตัวอย่างที่ 1 จงพิสูจน์ว่า ถ้า n เป็นจำนวนคู่ แล้ว n^2 เป็นจำนวนคู่

กำหนดให้ n เป็นจำนวนคู่

ต้องการพิสูจน์ว่า n^2 เป็นจำนวนคู่

การพิสูจน์

กำหนดให้ n เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่า $n = 2k$

โดยที่ k เป็นจำนวนเต็ม

$$\begin{aligned}\text{พิจารณา } n^2 &= (2k)^2 \\ &= 4k^2 \\ &= 2(2k^2)\end{aligned}$$

เพราะว่า $2k^2$ เป็นจำนวนเต็ม นั่นคือ n^2 เป็นจำนวนคู่

สรุปได้ว่า ถ้า n เป็นจำนวนคู่ แล้ว n^2 เป็นจำนวนคู่

#

ทด

กำหนดให้ n เป็นจำนวนคู่

: (ให้เหตุผล)

สรุปได้ว่า n^2 เป็นจำนวนคู่

ตัวอย่างที่ 2 ให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $a, b \neq 0$ จงพิสูจน์ว่า ถ้า a หาร b ลงตัว และ b หาร c ลงตัว แล้ว a หาร c ลงตัว

บทนิยาม ให้ m, n เป็นจำนวนเต็ม และ $m \neq 0$ เรากล่าวว่า m หาร (divide) n ลงตัว

ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = km$ (เราจะเขียน $m | n$ แทนการกล่าวว่า m หาร n ลงตัว)

กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $a, b \neq 0$ โดยที่ $a | b$ และ $b | c$
ต้องการพิสูจน์ว่า $a | c$

ทด

กำหนดให้ $a | b$ และ $b | c$

: (ให้เหตุผล)

สรุปได้ว่า $a | c$

การพิสูจน์

กำหนดให้ a หาร b ลงตัว จะได้ว่า $b = ma$ โดยที่ m เป็นจำนวนเต็ม ... (1)

b หาร c ลงตัว จะได้ว่า $c = nb$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม ... (2)

แทนค่า $b = ma$ ใน (2) จะได้ $c = n(ma) = (nm)a$

เพราะว่า mn เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น $a | c$

#

ตัวอย่างที่ 3 จากรูปจงพิสูจน์ว่า ถ้ารูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน แล้ว
 $\hat{B}AD = \hat{B}CD$



ทด

กำหนดให้ รูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

: (ให้เหตุผล)

สรุปได้ว่า $\hat{B}AD = \hat{B}CD$

กำหนดให้ รูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ต้องการพิสูจน์ว่า $\hat{B}AD = \hat{B}CD$

การพิสูจน์

จากรูปกำหนดให้รูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน จะได้ว่า $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ และ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

และเนื่องจากขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดเส้นขนานรวมกันเท่ากับ 180°

ดังนั้น $\hat{B}AD + \hat{A}DC = 180^\circ$ และ $\hat{B}CD + \hat{A}DC = 180^\circ$

จากสมบัติของการเท่ากันจะได้ว่า $\hat{B}AD + \hat{A}DC = \hat{B}CD + \hat{A}DC$

และเมื่อนำ $-\hat{A}DC$ บวกทั้งสองข้างของสมการทำได้ว่า $\hat{B}AD = \hat{B}CD$

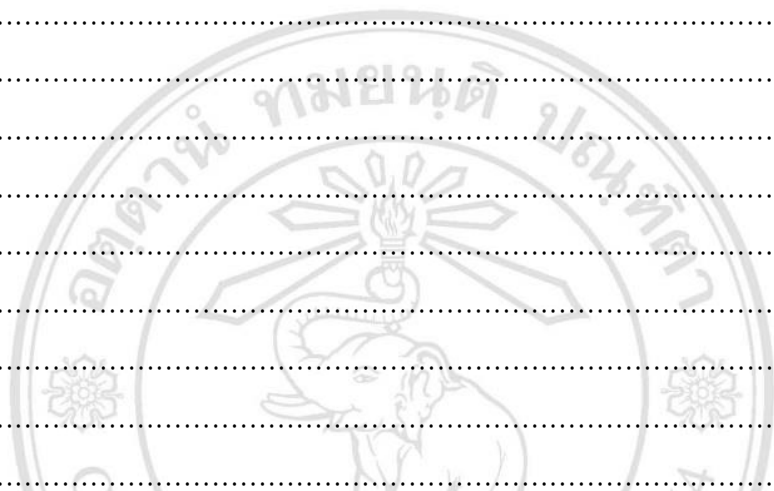
#



ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

แบบฝึกหัดที่ 2

1. จงพิสูจน์ว่า ถ้า n เป็นจำนวนคี่แล้ว n^2 เป็นจำนวนคี่



2. จงพิสูจน์ว่า ผลบวกของจำนวนคู่กับจำนวนคี่เป็นจำนวนคี่

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

3.1 ถ้า $a|b$ และ $a|c$ แล้ว $a|(b+c)$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

ชุดการเรียนรู้การสอนที่ 3

เรื่อง : การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $p \rightarrow q$ ด้วยการพิสูจน์โดยใช้ประพจน์แย้งสลับที่
ชื่อ.....

การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $p \rightarrow q$ ด้วยการพิสูจน์โดยใช้ประพจน์แย้งสลับที่

จากการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $p \rightarrow q$ ด้วยการพิสูจน์ตรงซึ่งกล่าวมาแล้วในชุดการเรียนรู้การสอนที่ 2 มีบางข้อความที่อาจทำได้ยาก ยกตัวอย่างเช่น การพิสูจน์ข้อความ n เป็นจำนวนเต็ม ถ้า n^2 เป็นจำนวนคู่แล้ว n เป็นจำนวนคู่ ซึ่งแสดงเป็นการพิสูจน์ตรงได้ดังนี้

กำหนดให้ n^2 เป็นจำนวนคู่ซึ่งจะได้ว่า $n^2 = 2k$ โดยที่ k เป็นจำนวนเต็ม แล้วเราจะต้องพิสูจน์ว่า n เป็นจำนวนคู่โดยการแสดงว่า $n = 2m$ โดยที่ m เป็นจำนวนเต็มซึ่งวิธีดังกล่าวนี้ทำได้ยาก

ในทางตรรกศาสตร์จึงใช้รูปแบบของข้อความ(ประพจน์) ที่สมมูลกันมาช่วยเพื่อเปลี่ยนข้อความจากการพิสูจน์ที่อาจทำได้ยากให้กลายเป็นการพิสูจน์ที่ไม่ยากได้ ดังนี้

พิจารณารายค่าความจริงของรูปแบบของประพจน์ $p \rightarrow q$ และ $\sim q \rightarrow \sim p$ ดังนี้

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \rightarrow q$	$\sim q \rightarrow \sim p$
T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

จากตารางค่าความจริงจะพบว่ารูปแบบของประพจน์ $p \rightarrow q$ สมมูลกับ $\sim q \rightarrow \sim p$ กล่าวคือข้อความ $\sim q \rightarrow \sim p$ มีความหมายเช่นเดียวกับข้อความ $p \rightarrow q$ ดังนั้นการพิสูจน์ข้อความ $p \rightarrow q$ สามารถพิสูจน์โดยใช้ข้อความ $\sim q \rightarrow \sim p$ แทน โดยการพิสูจน์ข้อความ $\sim q \rightarrow \sim p$ โดยตรง กล่าวคือ การแสดงจะกำหนดให้ $\sim q$ เป็นจริง แล้วให้เหตุผลที่สมเหตุสมผลจนได้ข้อสรุป $\sim p$ จึงสรุปได้ว่า $p \rightarrow q$ เป็นจริง ซึ่งเรียกการพิสูจน์แบบนี้ว่าการพิสูจน์โดยใช้ประพจน์แย้งสลับที่ ซึ่งกำหนดเป็นรูปแบบได้ดังนี้

การพิสูจน์ $p \rightarrow q$ ด้วยการพิสูจน์โดยใช้ประพจน์แย้งสลับที่

กำหนด $\sim q$ เป็นจริง

$\therefore$ (ให้เหตุผล)

สรุปได้ว่า $\sim p$ เป็นจริง

ตัวอย่างที่ 1 จากตัวอย่าง “สำหรับ n เป็นจำนวนเต็ม ถ้า n^2 เป็นจำนวนคู่ แล้ว n เป็นจำนวนคู่”
สามารถพิสูจน์โดยใช้ประพจน์แย้งสลับที่ได้ดังนี้

จะพิสูจน์ข้อความดังกล่าวด้วยการพิสูจน์โดยใช้ประพจน์แย้งสลับที่ได้ดังนี้

ให้ n เป็นจำนวนเต็ม

จากข้อความ ถ้า n^2 เป็นจำนวนคู่ แล้ว n เป็นจำนวนคู่ ($p \rightarrow q$)

ใช้ข้อความ ถ้า n เป็นจำนวนคี่ แล้ว n^2 เป็นจำนวนคี่ ($\sim q \rightarrow \sim p$) พิสูจน์แทน

กำหนดให้ n เป็นจำนวนคี่

ต้องการพิสูจน์ว่า n^2 เป็นจำนวนคี่

ทด

กำหนดให้ n เป็นจำนวนคี่

$\therefore$ (ให้เหตุผล)

สรุปได้ว่า n^2 เป็นจำนวนคี่

การพิสูจน์

กำหนดให้ n เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่า $n = 2k + 1$ โดยที่ k เป็นจำนวนเต็ม

พิจารณา $n^2 = (2k + 1)^2$

$$= 4k^2 + 4k + 1$$

$$n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

เพราะว่า $2k^2 + 2k$ เป็นจำนวนเต็ม ทำให้ n^2 เป็นจำนวนคี่

สรุปได้ว่า ถ้า n เป็นจำนวนคี่ แล้ว n^2 เป็นจำนวนคี่

นั่นคือ ถ้า n^2 เป็นจำนวนคู่ แล้ว n เป็นจำนวนคู่

#

ตัวอย่างที่ 2 ให้ x เป็นจำนวนจริง จงพิสูจน์ว่า ถ้า x เป็นจำนวนอตรรกยะแล้ว $\sqrt{x}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

บทนิยาม	1. x เป็นจำนวนตรรกยะ ถ้ามีจำนวนเต็ม m และ $n \neq 0$ ซึ่ง $x = \frac{m}{n}$
	2. x เป็นจำนวนอตรรกยะ ถ้า x เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นจำนวนตรรกยะ

จะพิสูจน์ข้อความดังกล่าวด้วยการพิสูจน์โดยใช้ประพจน์แย้งสลับที่ได้ดังนี้

ให้ x เป็นจำนวนจริง

จากข้อความ ถ้า x เป็นจำนวนอตรรกยะแล้ว $\sqrt{x}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ ($p \rightarrow q$)

ใช้ข้อความ ถ้า $\sqrt{x}$ เป็นจำนวนตรรกยะแล้ว x เป็นจำนวนตรรกยะ ($\sim q \rightarrow \sim p$) พิสูจน์แทน

กำหนดให้ $\sqrt{x}$ เป็นจำนวนตรรกยะ

ต้องการพิสูจน์ว่า x เป็นจำนวนตรรกยะ

การพิสูจน์

กำหนดให้ $\sqrt{x}$ เป็นจำนวนตรรกยะ ดังนั้น $\sqrt{x} = \frac{m}{n}$

โดยที่ m และ n เป็นจำนวนเต็ม และ $n \neq 0$

จะได้ว่า $x = \frac{m^2}{n^2}$ ซึ่ง m^2 และ n^2 เป็นจำนวนเต็มและ $n^2 \neq 0$

ดังนั้น x เป็นจำนวนตรรกยะ

นั่นคือ ถ้า x เป็นจำนวนอตรรกยะแล้ว $\sqrt{x}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ #

ทด

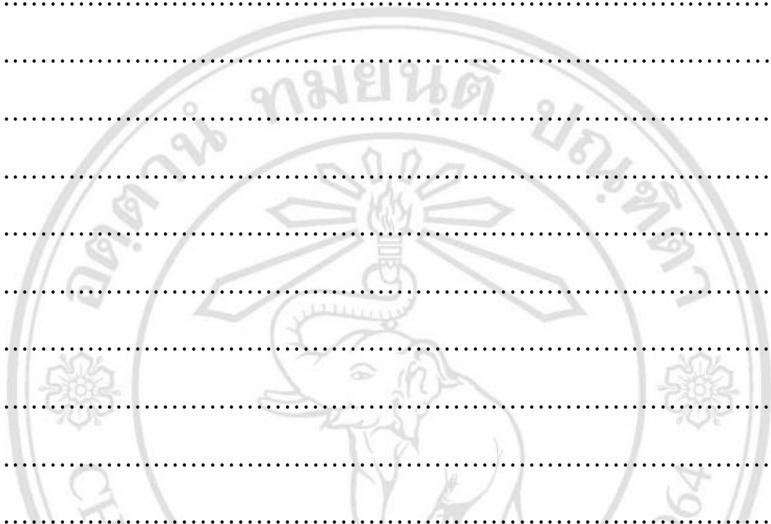
กำหนดให้ $\sqrt{x}$ เป็นจำนวนตรรกยะ

: (ให้เหตุผล)

สรุปได้ว่า x เป็นจำนวนตรรกยะ

แบบฝึกหัดที่ 3

1. กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า ถ้า n^2 เป็นจำนวนคี่ แล้ว n จะเป็นจำนวนคี่



2. กำหนดให้เซต A และเซต B เป็นเซตใด ๆ จงพิสูจน์ว่า ถ้า $A \subset B$ แล้ว $A \cap B' = \emptyset$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved



ภาคผนวก ข

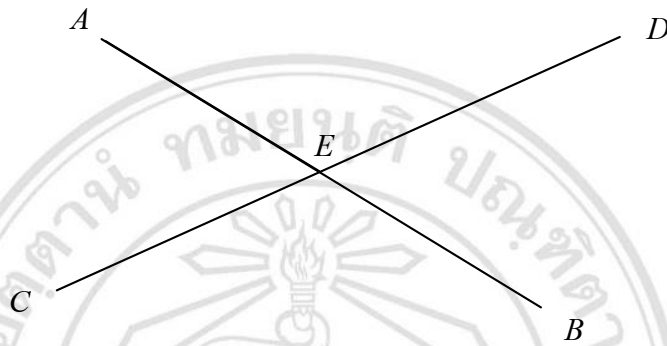
เฉลยแบบฝึกหัดหลังเรียนของชุดการเรียนรู้การสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ
เรื่อง การพิสูจน์คณิตศาสตร์เบื้องต้นสำหรับนักเรียนค่ายโอลิมปิก

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 1

1. จงพิสูจน์ว่า ถ้าส่วนของเส้นตรงสองเส้นตัดกัน แล้วมุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน

สร้างส่วนของเส้นตรง $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ให้ตัดกันที่จุด E ดังรูป



ต้องการพิสูจน์ว่า $\angle A\hat{E}D = \angle B\hat{E}C$ และ $\angle A\hat{E}C = \angle B\hat{E}D$

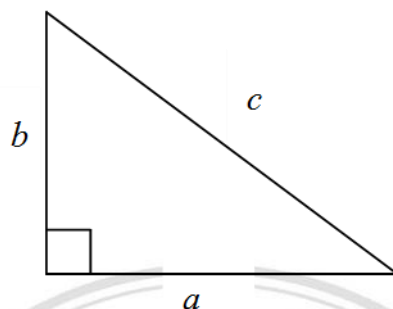
การพิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $\angle A\hat{E}D + \angle B\hat{E}D = 180^\circ$	ขนาดของมุมตรง
2. $\angle B\hat{E}C + \angle B\hat{E}D = 180^\circ$	ขนาดของมุมตรง
3. $\angle A\hat{E}D + \angle B\hat{E}D = \angle B\hat{E}C + \angle B\hat{E}D$	จากข้อ 1. – 2. และสมบัติของการเท่ากัน
4. $\angle A\hat{E}D + \angle B\hat{E}D - \angle B\hat{E}D = \angle B\hat{E}C + \angle B\hat{E}D - \angle B\hat{E}D$	สมบัติของการเท่ากัน
5. $\angle A\hat{E}D = \angle B\hat{E}C$	ผลลัพท์จากข้อ 4.
6. $\angle A\hat{E}C + \angle B\hat{E}C = 180^\circ$	ขนาดของมุมตรง
7. $\angle B\hat{E}D + \angle B\hat{E}C = 180^\circ$	ขนาดของมุมตรง
8. $\angle A\hat{E}C + \angle B\hat{E}C = \angle B\hat{E}D + \angle B\hat{E}C$	จากข้อ 7. – 8. และสมบัติของการเท่ากัน
9. $\angle A\hat{E}C + \angle B\hat{E}C - \angle B\hat{E}C = \angle B\hat{E}D + \angle B\hat{E}C - \angle B\hat{E}C$	สมบัติของการเท่ากัน
10. $\angle A\hat{E}C = \angle B\hat{E}D$	ผลลัพท์จากข้อ 9.
11. ถ้าส่วนของเส้นตรงสองเส้นตัดกัน แล้วมุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน	จากข้อ 5. และข้อ 10.

□

2. พิจารณารูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาว a, b และ c ดังที่กำหนดให้ จงใช้กฎของโคไซน์พิสูจน์ว่า

ถ้ารูปสามเหลี่ยมเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก แล้ว $c^2 = a^2 + b^2$



กฎของโคไซน์

กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC ถ้า a, b และ c แทนความยาวของด้านตรงข้ามมุม A, B และ C

ตามลำดับ แล้ว $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

ต้องการพิสูจน์ว่า $c^2 = a^2 + b^2$

การพิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาว a, b และ c เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก	กำหนดให้
2. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$	จากกฎของโคไซน์
3. $c^2 + 2ab \cos C = a^2 + b^2 - 2ab \cos C + 2ab \cos C$	นำ $2ab \cos C$ บวกทั้งสองข้างของสมการ
4. $c^2 + 2ab \cos C = a^2 + b^2$	ผลลัพธ์จากข้อ 3.
5. $c^2 + 2ab \cos(90^\circ) = a^2 + b^2$	c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก
6. $c^2 = a^2 + b^2$	จากข้อ 5. แทนค่า $\cos(90^\circ) = 0$

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 2

1. จงพิสูจน์ว่า ถ้า n เป็นจำนวนคี่แล้ว n^2 เป็นจำนวนคี่

กำหนดให้ n เป็นจำนวนคี่

ต้องการพิสูจน์ว่า n^2 เป็นจำนวนคี่

การพิสูจน์

กำหนดให้ n เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่า $n = 2k + 1$ โดยที่ k เป็นจำนวนเต็ม

พิจารณา $n^2 = (2k + 1)^2$

$$= 4k^2 + 4k + 1$$

$$= 2(2k^2 + 1) + 1$$

เพราะว่า $2k^2 + 1$ เป็นจำนวนเต็ม นั่นคือ n^2 เป็นจำนวนคี่

สรุปได้ว่า ถ้า n เป็นจำนวนคี่แล้ว n^2 เป็นจำนวนคี่

#

2. จงพิสูจน์ว่า ผลบวกของจำนวนคู่กับจำนวนคี่เป็นจำนวนคี่

กำหนดให้ x เป็นจำนวนคู่ และ y เป็นจำนวนคี่

ต้องการพิสูจน์ว่า $x + y$ เป็นจำนวนคี่

การพิสูจน์

กำหนดให้ x เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่า $x = 2m$ โดยที่ m เป็นจำนวนเต็ม

....(1)

และ y เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่า $y = 2n + 1$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม

....(2)

นำ (1) + (2) จะได้ $x + y = 2m + 2n + 1$

$$= 2(m + n) + 1$$

เพราะว่า $m + n$ เป็นจำนวนเต็ม นั่นคือ $x + y$ เป็นจำนวนคี่

สรุปได้ว่า ผลบวกของจำนวนคู่กับจำนวนคี่เป็นจำนวนคี่

#

3. กำหนดให้ a, b, c, x และ y เป็นจำนวนเต็มโดยที่ $a, b \neq 0$ จงแสดงว่า

3.1 ถ้า $a | b$ และ $a | c$ แล้ว $a | (b + c)$

กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็มโดยที่ $a, b \neq 0$ ซึ่ง $a | b$ และ $a | c$

ต้องการพิสูจน์ว่า $a | (b + c)$

การพิสูจน์

กำหนดให้ $a | b$ จะได้ว่า $b = ma$ โดยที่ m เป็นจำนวนเต็ม ... (1)

$a | c$ จะได้ว่า $c = na$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม ... (2)

นำ (1) + (2) จะได้ $b + c = ma + na$

$$= a(m + n)$$

เพราะว่า $m + n$ เป็นจำนวนเต็ม นั่นคือ $a | (b + c)$

#

3.2 ถ้า $a | b$ และ $b | c$ แล้ว $a | (b + c)$

กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็มโดยที่ $a, b \neq 0$ ซึ่ง $a | b$ และ $b | c$

ต้องการพิสูจน์ว่า $a | (b + c)$

การพิสูจน์

กำหนดให้ $a | b$ จะได้ว่า $b = ma$ โดยที่ m เป็นจำนวนเต็ม ... (1)

$b | c$ จะได้ว่า $c = nb$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม ... (2)

นำ (1) + (2) จะได้ $b + c = ma + nb$... (3)

แทนค่า (1) ใน (3) จะได้ $b + c = ma + nma$

$$= a(m + nm)$$

เพราะว่า $m + nm$ เป็นจำนวนเต็ม นั่นคือ $a | (b + c)$

#

3.3 ถ้า $a | (2x - 3y)$ และ $a | (4x - 5y)$ แล้ว $a | y$

กำหนดให้ a, x และ y เป็นจำนวนเต็มโดยที่ $a \neq 0$ ซึ่ง $a | (2x - 3y)$ และ $a | (4x - 5y)$

ต้องการพิสูจน์ว่า $a | y$

การพิสูจน์

กำหนดให้ $a | (2x - 3y)$ จะได้ว่า $2x - 3y = ma$ โดยที่ m เป็นจำนวนเต็ม ... (1)

$a | (4x - 5y)$ จะได้ว่า $4x - 5y = na$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม ... (2)

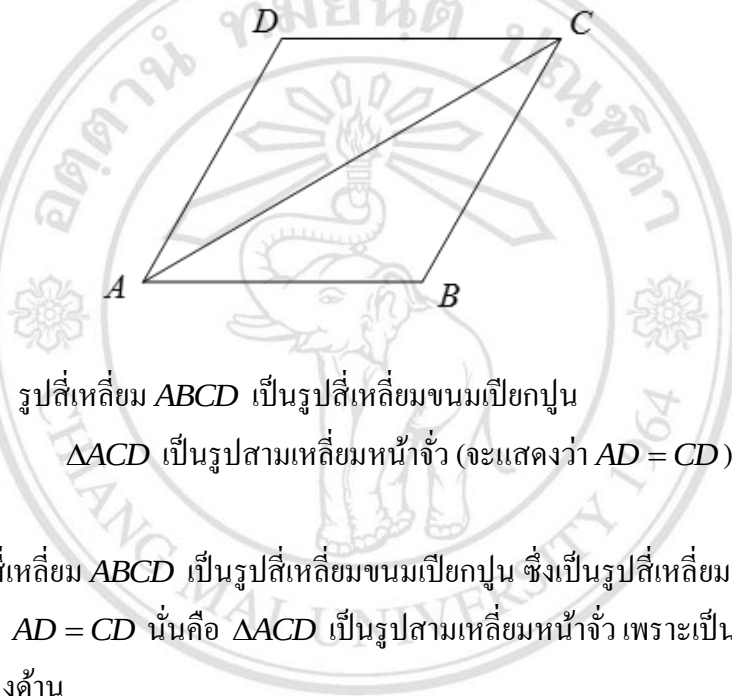
นำ (1) $\times 2$ จะได้ $4x - 6y = 2ma$... (3)

นำ (2) $-$ (3) จะได้ $y = na - 2ma$

$$= a(n - 2m)$$

เพราะว่า $n - 2m$ เป็นจำนวนเต็ม นั่นคือ $a \mid y$ #

4. จากรูป จงพิสูจน์ว่า ถ้ารูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน แล้ว $\triangle ACD$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว



กำหนดให้ รูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle ACD$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว (จะแสดงว่า $AD = CD$)

การพิสูจน์

จากกำหนดให้ รูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน ซึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากันทุกด้าน ทำให้ได้ว่า $AD = CD$ นั่นคือ $\triangle ACD$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว เพราะเป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากันสองด้าน #

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 3

1. กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า ถ้า n^2 เป็นจำนวนคี่ แล้ว n จะเป็นจำนวนคี่

จะพิสูจน์ข้อความดังกล่าวโดยใช้ประพจน์แย้งสลับที่ได้ดังนี้

ให้ n เป็นจำนวนเต็ม

จากข้อความ ถ้า n^2 เป็นจำนวนคี่ แล้ว n เป็นจำนวนคี่ ($p \rightarrow q$)

ใช้ข้อความ ถ้า n เป็นจำนวนคู่ แล้ว n^2 เป็นจำนวนคู่ ($\sim q \rightarrow \sim p$) พิสูจน์แทน

กำหนดให้ n เป็นจำนวนคู่

ต้องการพิสูจน์ว่า n^2 เป็นจำนวนคู่

การพิสูจน์

กำหนดให้ n เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่า $n = 2k$ โดยที่ k เป็นจำนวนเต็ม

$$\begin{aligned}\text{พิจารณา } n^2 &= (2k)^2 \\ &= 4k^2 \\ &= 2(2k^2)\end{aligned}$$

เพราะว่า $2k^2$ เป็นจำนวนเต็ม ทำให้ n^2 เป็นจำนวนคู่

สรุปได้ว่า ถ้า n เป็นจำนวนคู่ แล้ว n^2 เป็นจำนวนคู่

นั่นคือ ถ้า n^2 เป็นจำนวนคี่ แล้ว n เป็นจำนวนคี่

#

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

2. กำหนดให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ จงพิสูจน์ว่า ถ้า $A \subset B$ แล้ว $A \cap B' = \emptyset$

จะพิสูจน์ข้อความดังกล่าวโดยใช้ประพจน์แย้งกลับที่ได้ดังนี้

ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ

จากข้อความ ถ้า $A \subset B$ แล้ว $A \cap B' = \emptyset$ ($p \rightarrow q$)

ใช้ข้อความ ถ้า $A \cap B' \neq \emptyset$ แล้ว $A \not\subset B$ ($\sim q \rightarrow \sim p$) พิสูจน์แทน

กำหนดให้ $A \cap B' \neq \emptyset$

ต้องการพิสูจน์ว่า $A \not\subset B$

การพิสูจน์

จาก $A \cap B' \neq \emptyset$ จะได้ว่ามี $x \in A \cap B'$

ดังนั้น $x \in A$ และ $x \in B'$

นั่นคือ $x \in A$ และ $x \notin B$

ทำให้ได้ว่า $A \not\subset B$

เพราะฉะนั้น ถ้า $A \cap B' \neq \emptyset$ แล้ว $A \not\subset B$

สรุปได้ว่า ถ้า $A \subset B$ แล้ว $A \cap B' = \emptyset$

#

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

3. กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า ถ้า $4 \mid a^2$ แล้ว a เป็นจำนวนคู่

จะพิสูจน์ข้อความดังกล่าวโดยใช้ประพจน์แย้งกลับที่ได้ดังนี้

ให้ a เป็นจำนวนเต็ม

จากข้อความ ถ้า $4 \mid a^2$ แล้ว a เป็นจำนวนคู่ ($p \rightarrow q$)

ใช้ข้อความ ถ้า a เป็นจำนวนคี่แล้ว 4หาร a^2 ไม่ลงตัว ($\sim q \rightarrow \sim p$) พิสูจน์แทน

กำหนดให้ a เป็นจำนวนคี่

ต้องการพิสูจน์ว่า 4หาร a^2 ไม่ลงตัว

การพิสูจน์

กำหนดให้ a เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่า $a = 2k + 1$ โดยที่ k เป็นจำนวนเต็ม

$$\begin{aligned}\text{พิจารณา } a^2 &= (2k + 1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 4(k^2 + k) + 1\end{aligned}$$

เพราะว่า $k^2 + k$ เป็นจำนวนเต็ม ทำให้ได้ว่า 4หาร a^2 ไม่ลงตัว

สรุปได้ว่า ถ้า a เป็นจำนวนคี่แล้ว 4หาร a^2 ไม่ลงตัว

นั่นคือ ถ้า $4 \mid a^2$ แล้ว a เป็นจำนวนคู่

#

4. กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า ถ้า $a \leq c$ แล้ว $a \leq b$ หรือ $b \leq c$

จะพิสูจน์ข้อความดังกล่าวโดยใช้ประพจน์แย้งกลับที่ได้ดังนี้

ให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม

จากข้อความ ถ้า $a \leq c$ แล้ว $a \leq b$ หรือ $b \leq c$ ($p \rightarrow (q \vee r)$)

ใช้ข้อความ ถ้า $a > b$ และ $b > c$ แล้ว $a > c$ ($\sim q \wedge \sim r \rightarrow \sim p$) พิสูจน์แทน

กำหนดให้ $a > b$ และ $b > c$

ต้องการพิสูจน์ว่า $a > c$

การพิสูจน์

เนื่องจาก $a > b$ จะได้ว่า $a = b + x$ เมื่อ x เป็นจำนวนนับ ... (1)

และ $b > c$ จะได้ว่า $b = c + y$ เมื่อ y เป็นจำนวนนับ ... (2)

แทนค่า (2) ใน (1) จะได้ $a = (c + y) + x$

โดยสมบัติการเปลี่ยนหมู่ของการบวกจะได้ $a = c + (y + x)$

เนื่องจาก $y + x \in N$ ทำให้ได้ว่า $a > c$

ดังนั้น ถ้า $a > b$ และ $b > c$ แล้ว $a > c$

นั่นคือ ถ้า $a \leq c$ แล้ว $a \leq b$ หรือ $b \leq c$

#



ภาคผนวก ข

แบบทดสอบหลังเรียน

เรื่อง การพิสูจน์คณิตศาสตร์เบื้องต้นสำหรับนักเรียนค่ายโอลิมปิก

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

แบบทดสอบหลังเรียน

เรื่อง : การพิสูจน์คณิตศาสตร์เบื้องต้น

ชื่อ.....

1. ข้อความต่อไปนี้จริงหรือไม่

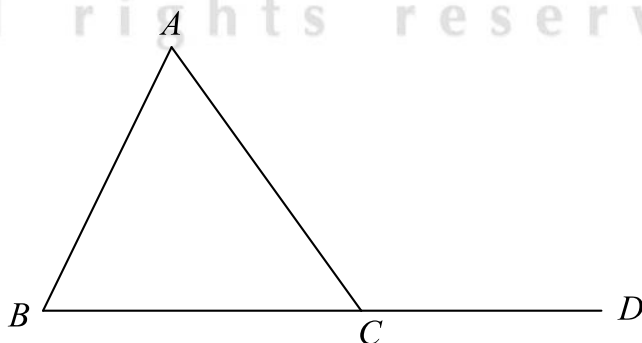
(10 คะแนน)

- 1.1 ข้อความใดเป็นการให้เหตุผลที่สมเหตุสมผลโดยไม่มีข้อโต้แย้งใด ๆ จะไม่สามารถนำไปใช้อ้างอิงได้
- 1.2 ในวิชาคณิตศาสตร์การพิสูจน์หมายถึงการให้เหตุผลที่สมเหตุสมผลโดยไม่มีข้อโต้แย้งใด ๆ เพื่อแสดงว่าข้อความนั้นเป็นจริง
- 1.3 บทนิยามคือการให้ความหมายของคำซึ่งบทนิยามที่ดีนั้นผู้อ่านต้องเข้าใจได้ไม่ตรงกัน
- 1.4 กำหนดให้ $a, b, c \in R$ ถ้า $a = b$ แล้ว $a + c = b + c$
- 1.5 กำหนดให้ $y \in R$ ถ้า $5y^2 = y$ แล้ว $5y = 1$

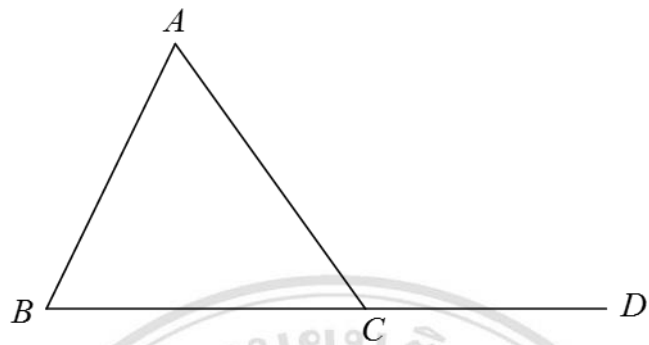
2. จงพิสูจน์ข้อความ “ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไปแล้วมุมภายนอกจะมีขนาดเท่ากับผลบวกของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิด”

(10 คะแนน)

ให้ $\triangle ABC$ เป็นตัวแทนของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ และสร้าง $\overline{CD}$ ดังรูป



ต้องการพิสูจน์ว่า $\hat{ACD} = \hat{ABC} + \hat{BAC}$



การพิสูจน์

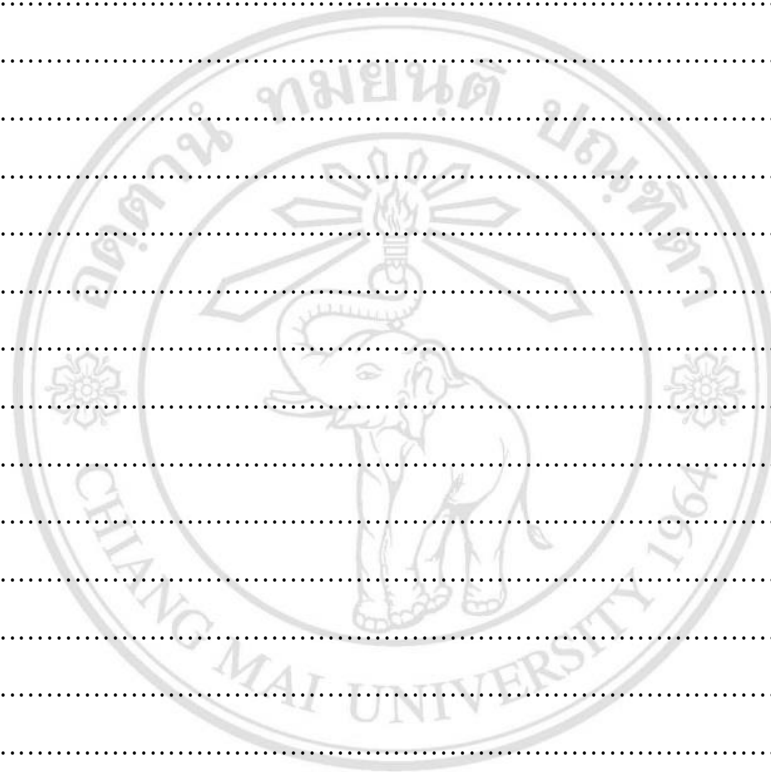
ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

3. กำหนดให้ a, b, c, x และ y เป็นจำนวนเต็มโดยที่ $a \neq 0$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

4. ถ้า k เป็นจำนวนคี่แล้ว $k+1$ จะเป็นจำนวนคู่

(10 คะแนน)



ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright© by Chiang Mai University

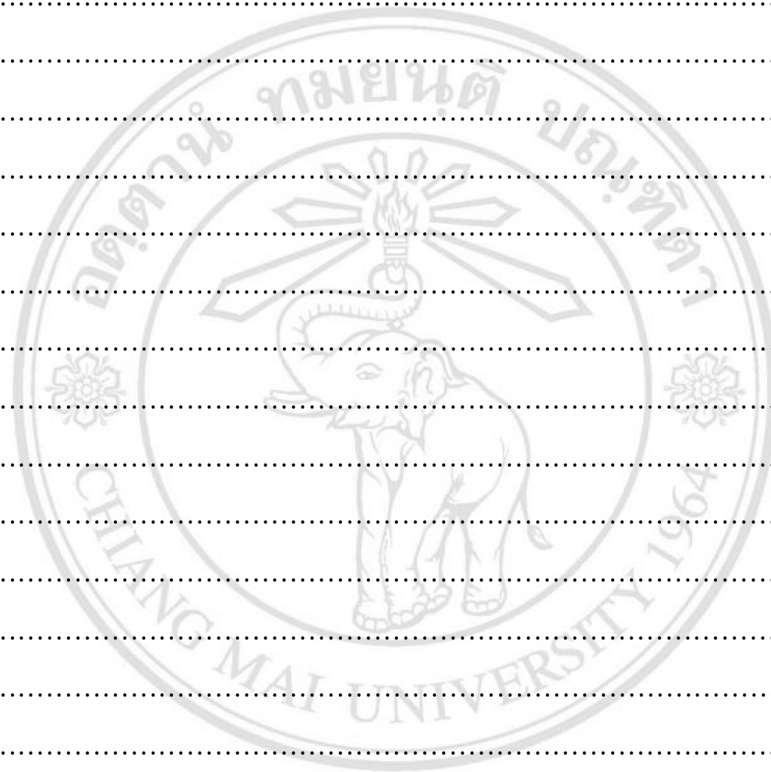
All rights reserved

5. ถ้า $(9k-11)^2$ เป็นจำนวนคู่แล้ว k จะเป็นจำนวนคี่ (10 คะแนน)

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

6. กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็ม ถ้า $2 \mid a^3$ แล้ว a เป็นจำนวนคู่

(10 คะแนน)



ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright© by Chiang Mai University

All rights reserved

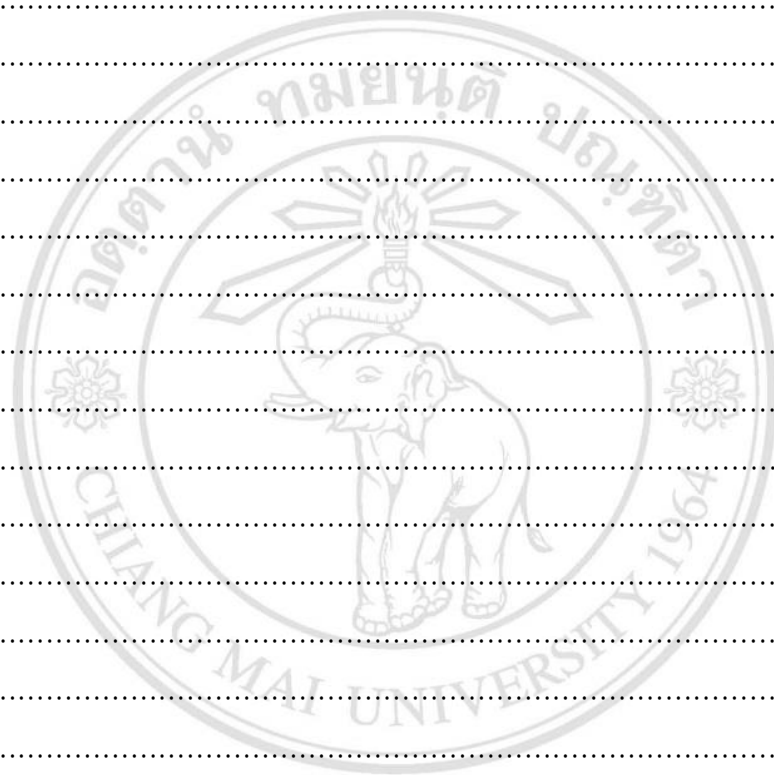
9. ถ้า a เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $4a + 3$ เป็นจำนวนคี่ (10 คะแนน)

(10 คะแนน)



10. ถ้า a เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $4 \mid a(a+1)(a+2)(a+3)$

(10 คะแนน)

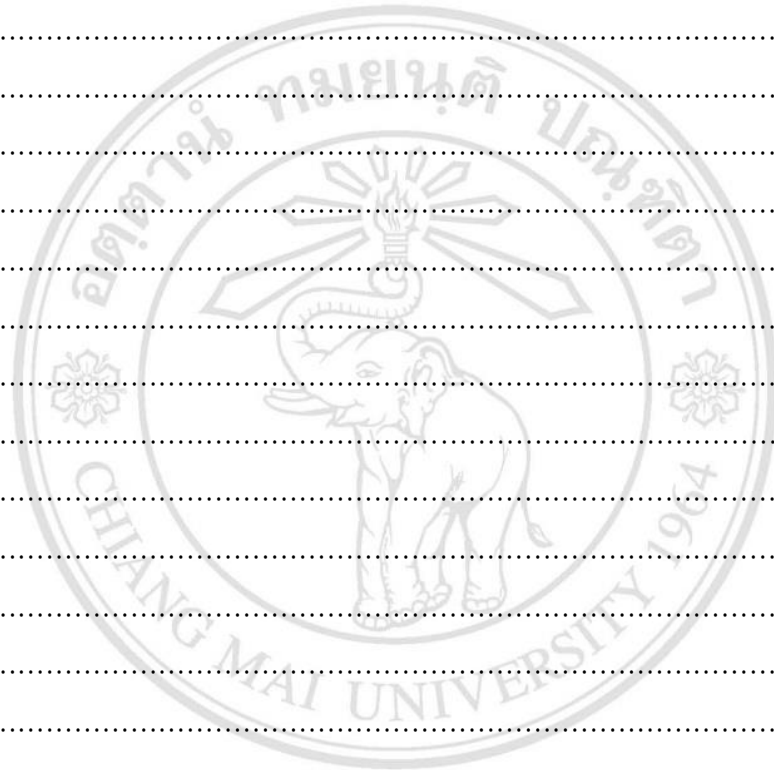


ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

คำสั่ง ข้อ 11.- 12. จงพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $p \leftrightarrow q$

11. a^2 เป็นจำนวนคี่ ก็ต่อเมื่อ $a+2$ เป็นจำนวนคี่

(10 คะแนน)

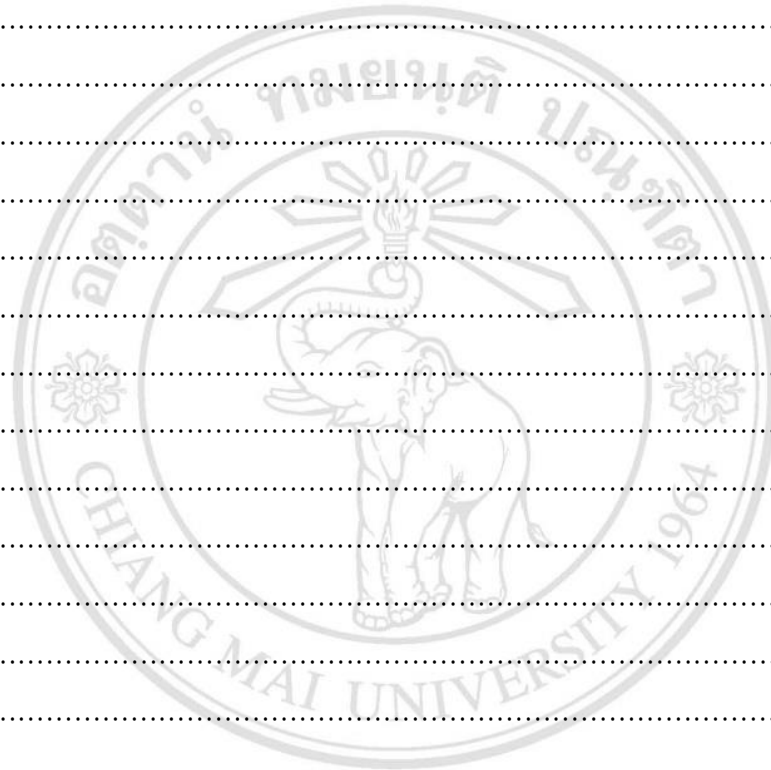


ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright© by Chiang Mai University

.....All rights reserved.....

12. กำหนดให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ จงพิสูจน์ว่า $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $B' \subset A'$ (10 คะแนน)



.....
ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright© by Chiang Mai University

All rights reserved



ภาควิชาคณิตศาสตร์

เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน

เรื่อง การพิสูจน์คณิตศาสตร์เบื้องต้นสำหรับนักเรียนค่ายโอลิมปิก

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน

เรื่อง : การพิสูจน์คณิตศาสตร์เบื้องต้น

ชื่อ.....

1. ข้อความต่อไปนี้จริงหรือไม่

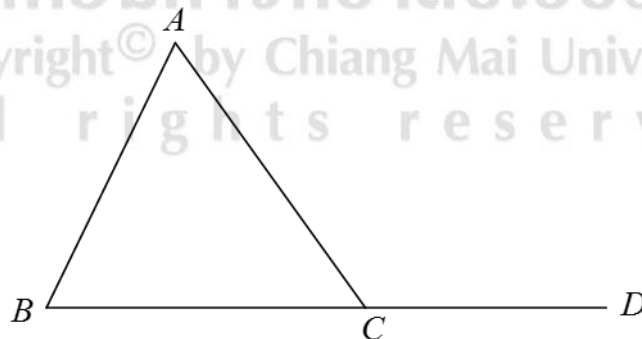
(10 คะแนน)

- ไม่จริง 1.1 ข้อความใดเป็นการให้เหตุผลที่สมเหตุสมผลโดยไม่มีข้อโต้แย้งใด ๆ จะไม่สามารถนำไปใช้อ้างอิงได้
- จริง 1.2 ในวิชาคณิตศาสตร์การพิสูจน์หมายถึงการให้เหตุผลที่สมเหตุสมผลโดยไม่มี ข้อโต้แย้งใด ๆ เพื่อแสดงว่าข้อความนั้นเป็นจริง
- ไม่จริง 1.3 บทนิยามคือการให้ความหมายของคำซึ่งบทนิยามที่ได้นั้นผู้อ่านต้องเข้าใจได้ไม่ตรงกัน
- จริง 1.4 กำหนดให้ $a, b, c \in R$ ถ้า $a = b$ แล้ว $a + c = b + c$
- ไม่จริง 1.5 กำหนดให้ $y \in R$ ถ้า $5y^2 = y$ แล้ว $5y = 1$

2. จงพิสูจน์ข้อความ “ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไปแล้วมุมภายนอกจะมีขนาดเท่ากับผลบวกของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิด”

(10 คะแนน)

ให้ $\triangle ABC$ เป็นตัวแทนของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ และสร้าง $\overline{CD}$ ดังรูป



ต้องการพิสูจน์ว่า $\hat{ACD} = \hat{ABC} + \hat{BAC}$

การพิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $\hat{ACB} + \hat{ACD} = 180^\circ$	ขนาดของมุมตรง
2. $\hat{ABC} + \hat{BAC} + \hat{ACB} = 180^\circ$	ผลรวมของมุมภายในรูปสามเหลี่ยมเท่ากับ 180°
3. $\hat{ACB} + \hat{ACD} = \hat{ABC} + \hat{BAC} + \hat{ACB}$	จากข้อ 1. – 2. และสมบัติของการเท่ากัน
4. $\hat{ACD} = \hat{ABC} + \hat{BAC}$	จากข้อ 3. และสมบัติของการเท่ากัน

คำสั่ง ข้อ 3. – 4. จงพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $p \rightarrow q$ ด้วยการพิสูจน์โดยตรง

3. กำหนดให้ a, b, c, x และ y เป็นจำนวนเต็มโดยที่ $a \neq 0$

“ถ้า $a \mid b$ และ $a \mid c$ แล้ว $a \mid (bx + cy)$ ”

(10 คะแนน)

กำหนดให้ a, b, c, x และ y เป็นจำนวนเต็มโดยที่ $a \neq 0$ ซึ่ง $a \mid b$ และ $a \mid c$

ต้องการพิสูจน์ว่า $a \mid (bx + cy)$

การพิสูจน์

กำหนดให้ $a \mid b$ จะได้ว่า $b = ma$ โดยที่ m เป็นจำนวนเต็ม ... (1)

$a \mid c$ จะได้ว่า $c = na$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม ... (2)

นำ (1) $\times x$ จะได้ $bx = (ma)x = a(mx)$... (3)

นำ (2) $\times y$ จะได้ $cy = (na)y = a(ny)$... (4)

พิจารณา (3) + (4) จะได้ $bx + cy = a(mx) + a(ny)$
 $= a(mx + ny)$

เพราะว่า $mx + ny$ เป็นจำนวนเต็ม นั่นคือ $a \mid (bx + cy)$

#

4. ถ้า k เป็นจำนวนคี่แล้ว $k+1$ จะเป็นจำนวนคู่

(10 คะแนน)

กำหนดให้ k เป็นจำนวนคี่

ต้องการพิสูจน์ว่า $k+1$ เป็นจำนวนคู่

การพิสูจน์

กำหนดให้ k เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่า $k = 2m+1$ โดยที่ m เป็นจำนวนเต็ม

พิจารณา $k+1 = 2m+2 = 2(m+1)$

เพราะว่า $m+1$ เป็นจำนวนเต็ม นั่นคือ $k+1$ เป็นจำนวนคู่

สรุปได้ว่า ถ้า k เป็นจำนวนคี่แล้ว $k+1$ จะเป็นจำนวนคู่

#

คำสั่ง ข้อ 5.-6. จงพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $p \rightarrow q$ ด้วยการพิสูจน์โดยใช้ประพจน์แย้งสลับที่

5. ถ้า $(9k-11)^2$ เป็นจำนวนคู่แล้ว k จะเป็นจำนวนคี่

(10 คะแนน)

จะพิสูจน์ข้อความดังกล่าวโดยใช้ประพจน์แย้งสลับที่ได้ดังนี้

จากข้อความ $(9k-11)^2$ เป็นจำนวนคู่แล้ว k จะเป็นจำนวนคี่ ($p \rightarrow q$)

ใช้ข้อความ ถ้า k จะเป็นจำนวนคู่แล้ว $(9k-11)^2$ เป็นจำนวนคี่ ($\sim q \rightarrow \sim p$) พิสูจน์แทน

กำหนดให้ k จะเป็นจำนวนคู่

ต้องการพิสูจน์ว่า $(9k-11)^2$ เป็นจำนวนคี่

การพิสูจน์

กำหนดให้ k เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่า $k = 2m$ โดยที่ m เป็นจำนวนเต็ม

พิจารณา $(9k-11)^2 = (9(2m)-11)^2$

$$= (18m-11)^2$$

$$= 324m^2 - 396m + 121$$

$$= 2(162m^2 - 198m + 60) + 1$$

เพราะว่า $162m^2 - 198m + 60$ เป็นจำนวนเต็ม ทำให้ $(9k-11)^2$ เป็นจำนวนคี่

สรุปได้ว่า ถ้า k จะเป็นจำนวนคู่แล้ว $(9k-11)^2$ เป็นจำนวนคี่ ($\sim q \rightarrow \sim p$)

นั่นคือ $(9k-11)^2$ เป็นจำนวนคู่แล้ว k จะเป็นจำนวนคี่

#

6. กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็ม ถ้า $2 \mid a^3$ แล้ว a เป็นจำนวนคู่

(10 คะแนน)

จะพิสูจน์ข้อความดังกล่าวโดยใช้ประพจน์แย้งกลับที่ได้ดังนี้

กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็ม

จากข้อความ ถ้า $2 \mid a^3$ แล้ว a เป็นจำนวนคู่ ($p \rightarrow q$)

ใช้ข้อความ ถ้า a เป็นจำนวนคี่ แล้ว 2หาร a^3 ไม่ลงตัว ($\sim q \rightarrow \sim p$) พิสูจน์แทน

กำหนดให้ a เป็นจำนวนคี่

ต้องการพิสูจน์ว่า 2หาร a^3 ไม่ลงตัว

การพิสูจน์

กำหนดให้ a เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่า $a = 2m+1$ โดยที่ m เป็นจำนวนเต็ม

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } a^3 &= (2m+1)^3 \\ &= 8m^3 + 12m^2 + 6m + 1 \\ &= 2(4m^3 + 6m^2 + 3m) + 1 \end{aligned}$$

เพราะว่า $4m^3 + 6m^2 + 3m$ เป็นจำนวนเต็ม ทำให้ a^3 เป็นจำนวนคี่

สรุปได้ว่า ถ้า a เป็นจำนวนคี่ แล้ว 2หาร a^3 ไม่ลงตัว

นั่นคือ ถ้า $2 \mid a^3$ แล้ว a เป็นจำนวนคู่

#

คำสั่ง ข้อ 7.-8. จงพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $p \rightarrow q$ ด้วยการพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง

7. กำหนดให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ จงพิสูจน์ว่า ถ้า $A \subset B$ แล้ว $A \cap B' = \emptyset$ (10 คะแนน)

กำหนดให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ

ต้องการพิสูจน์ว่า เกิดข้อขัดแย้งจากการกำหนดให้ $A \subset B$ และ $A \cap B' \neq \emptyset$ เป็นจริง

การพิสูจน์ กำหนดให้เซต A และเซต B เป็นเซตใด ๆ โดยที่ $A \subset B$ และ $A \cap B' \neq \emptyset$

จาก $A \cap B' \neq \emptyset$ จะได้ว่า $A \cap B'$ มีสมาชิกอย่างน้อย 1 ตัว และสมมติให้เป็น x

ดังนั้น $x \in A \cap B'$ ทำให้ได้ว่า $x \in A$ และ $x \in B'$

นั่นคือ $x \in A$ และ $x \notin B$ จึงเกิดข้อขัดแย้งกับข้อความ $A \subset B$

สรุปได้ว่า กำหนดให้เซต A และเซต B เป็นเซตใด ๆ ถ้า $A \subset B$ แล้ว $A \cap B' = \emptyset$ #

8. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก จงพิสูจน์ว่า ถ้า $a|b$ แล้ว $a \leq b$ (10 คะแนน)

กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก

ต้องการพิสูจน์ว่า เกิดข้อขัดแย้งจากการกำหนดให้ข้อความ $a|b$ และ $a > b$ เป็นจริง

การพิสูจน์ จาก $a|b$ จะได้ว่า $b = am$ โดยที่ m เป็นจำนวนเต็มบวก ... (1)

และ $a > b$ จะได้ว่า $a = b + n$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก ... (2)

แทนค่า (2) ใน (1) จะได้ว่า $b = (b + n)m = bm + nm$

ดังนั้นจึงเกิดข้อขัดแย้งว่า $b = (b + n)m = bm + nm \geq b(1) + n(1) = b + n > b$

เพราะ $m \geq 1$ และ $n \geq 1$

นั่นคือ ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $a|b$ แล้ว $a \leq b$ #

คำสั่ง ข้อ 9. – 10. จงพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $p \rightarrow q$ ด้วยการพิสูจน์โดยการแยกกรณี

9. ถ้า a เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $4a + 3$ เป็นจำนวนคี่ (10 คะแนน)

กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็มซึ่งแบ่งเป็นกรณีได้ทั้งหมด 2 กรณีคือ

a เป็นจำนวนคู่ และ a เป็นจำนวนคี่

ต้องการพิสูจน์ว่า $4a + 3$ เป็นจำนวนคี่

ดังนั้นการพิสูจน์จึงเป็น 2 กรณี คือ

กรณี 1 ถ้า a เป็นจำนวนคู่ แล้ว $4a + 3$ เป็นจำนวนคี่

กรณี 2 ถ้า a เป็นจำนวนคี่ แล้ว $4a + 3$ เป็นจำนวนคี่

การพิสูจน์

กรณี 1

กำหนดให้ a เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่า $a = 2m$ โดยที่ m เป็นจำนวนเต็ม

พิจารณา $4a = 8m$

$$4a + 3 = 8m + 3$$

$$= 8m + 2 + 1$$

$$= 2(4m + 1) + 1$$

เมื่อ $4m + 1$ เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น $4a + 3$ เป็นจำนวนคี่

กรณี 2

กำหนดให้ a เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่า $a = 2n + 1$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม

$$\text{พิจารณา} \quad 4a = 8n + 4$$

$$4a + 3 = 8n + 7$$

$$= 8m + 6 + 1$$

$$= 2(4m + 3) + 1$$

เมื่อ $4m + 3$ เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น $4a + 3$ เป็นจำนวนคี่

จากการพิสูจน์ข้างต้นสรุปได้ว่า ถ้า a เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $4a + 3$ เป็นจำนวนคี่ #

10. ถ้า a เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $4 \mid a(a+1)(a+2)(a+3)$ (10 คะแนน)

กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็มซึ่งแบ่งเป็นกรณีได้ทั้งหมด 4 กรณีคือ a หารด้วย 4 ลงตัว,
 a หารด้วย 4 เหลือเศษ 1, a หารด้วย 4 เหลือเศษ 2 และ a หารด้วย 4 เหลือเศษ 3

ต้องการพิสูจน์ว่า $4 \mid a(a+1)(a+2)(a+3)$

ดังนั้นการพิสูจน์จึงเป็น 4 กรณี คือ

กรณี 1 ถ้า a หารด้วย 4 ลงตัว แล้ว $4 \mid a(a+1)(a+2)(a+3)$

กรณี 2 ถ้า a หารด้วย 4 เหลือเศษ 1 แล้ว $4 \mid a(a+1)(a+2)(a+3)$

กรณี 3 ถ้า a หารด้วย 4 เหลือเศษ 2 แล้ว $4 \mid a(a+1)(a+2)(a+3)$

กรณี 4 ถ้า a หารด้วย 4 เหลือเศษ 3 แล้ว $4 \mid a(a+1)(a+2)(a+3)$

การพิสูจน์

กรณี 1

กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็มที่หารด้วย 4 ลงตัว จะได้ว่า $a = 4w$ โดยที่ w เป็นจำนวนเต็ม

พิจารณา

$$a(a+1)(a+2)(a+3) = 4w(4w+1)(4w+2)(4w+3)$$

$$= 4[w(4w+1)(4w+2)(4w+3)]$$

เนื่องจาก $w(4w+1)(4w+2)(4w+3)$ เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น $4 \mid a(a+1)(a+2)(a+3)$

กรณี 2

กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็มที่หารด้วย 4 เหลือเศษ 1 จะได้ว่า $a = 4x + 1$ โดยที่ x เป็นจำนวนเต็ม

พิจารณา

$$\begin{aligned}a(a+1)(a+2)(a+3) &= (4x+1)(4x+2)(4x+3)(4x+4) \\ &= 4[(4x+1)(4x+2)(4x+3)(x+1)]\end{aligned}$$

เนื่องจาก $(4x+1)(4x+2)(4x+3)(x+1)$ เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น

$$4 \mid a(a+1)(a+2)(a+3)$$

กรณี 3

กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็มที่หารด้วย 4 เหลือเศษ 2 จะได้ว่า $a = 4y + 2$ โดยที่ y เป็นจำนวนเต็ม

พิจารณา

$$\begin{aligned}a(a+1)(a+2)(a+3) &= (4y+2)(4y+3)(4y+4)(4y+5) \\ &= 4[(4y+2)(4y+3)(y+1)(4y+5)]\end{aligned}$$

เนื่องจาก $(4y+2)(4y+3)(y+1)(4y+5)$ เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น $4 \mid a(a+1)(a+2)(a+3)$

กรณี 4

กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็มที่หารด้วย 4 เหลือเศษ 3 จะได้ว่า $a = 4z + 3$ โดยที่ z เป็นจำนวนเต็ม

พิจารณา

$$\begin{aligned}a(a+1)(a+2)(a+3) &= (4z+3)(4z+4)(4z+5)(4z+6) \\ &= 4[(4z+3)(z+1)(4z+5)(4z+6)]\end{aligned}$$

เนื่องจาก $(4z+3)(z+1)(4z+5)(4z+6)$ เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น

$$4 \mid a(a+1)(a+2)(a+3)$$

จากการพิสูจน์ทั้ง 4 กรณี สรุปได้ว่า ถ้า a เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $4 \mid a(a+1)(a+2)(a+3)$ #

คำสั่ง ข้อ 11. – 12. จงพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $p \leftrightarrow q$

11. a^2 เป็นจำนวนคี่ ก็ต่อเมื่อ $a+2$ เป็นจำนวนคี่

(10 คะแนน)

จะต้องพิสูจน์ ถ้า a^2 เป็นจำนวนคี่ แล้ว $a+2$ เป็นจำนวนคี่ ($\rightarrow$) และ
ถ้า $a+2$ เป็นจำนวนคี่แล้ว a^2 เป็นจำนวนคี่ ($\leftarrow$)

การพิสูจน์

($\rightarrow$) โดยการใช้การพิสูจน์ประพจน์แย้งสลับที่ กล่าวคือ พิสูจน์ข้อความ

ถ้า $a+2$ เป็นจำนวนคู่แล้ว a^2 เป็นจำนวนคู่แทน

กำหนดให้ $a+2$ เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่า $a+2=2m$ โดยที่ m เป็นจำนวนเต็ม

นั่นคือ $a=2m-2$

$$\begin{aligned}\text{พิจารณา } a^2 &= (2m-2)^2 \\ &= 4m^2 - 8m + 4 \\ &= 2(2m^2 - 4m + 2)\end{aligned}$$

เนื่องจาก $2m^2 - 4m + 2$ เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า a^2 เป็นจำนวนคู่

ดังนั้น ถ้า $a+2$ เป็นจำนวนคู่แล้ว a^2 เป็นจำนวนคู่

นั่นคือ ถ้า a^2 เป็นจำนวนคี่ แล้ว $a+2$ เป็นจำนวนคี่

($\leftarrow$) โดยการใช้การพิสูจน์ตรง

กำหนดให้ $a+2$ เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่า $a+2=2n+1$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม

นั่นคือ $a=2n-1$

$$\begin{aligned}\text{พิจารณา } a^2 &= (2n-1)^2 \\ &= 4n^2 - 4n + 1 \\ &= 2(2n^2 - 2n) + 1\end{aligned}$$

เนื่องจาก $2n^2 - 2n$ เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า a^2 เป็นจำนวนคี่

ดังนั้น ถ้า $a+2$ เป็นจำนวนคี่แล้ว a^2 เป็นจำนวนคี่

จากการพิสูจน์ข้างต้นสรุปได้ว่า a^2 เป็นจำนวนคี่ ก็ต่อเมื่อ $a+2$ เป็นจำนวนคี่

#

12. กำหนดให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ จงพิสูจน์ว่า $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $B' \subset A'$ (10 คะแนน)

กำหนดให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ

จะต้องพิสูจน์ ถ้า $A \subset B$ แล้ว $B' \subset A'$ ($\rightarrow$) และ
ถ้า $B' \subset A'$ แล้ว $A \subset B$ ($\leftarrow$)

การพิสูจน์

($\rightarrow$) กำหนดให้ $A \subset B$ และให้ $x \in B'$
จะได้ $x \notin B$ ดังนั้น $x \notin A$
ทำให้ได้ว่า $x \in A'$ เพราะฉะนั้น $B' \subset A'$
ดังนั้น ถ้า $A \subset B$ แล้ว $B' \subset A'$

($\leftarrow$) กำหนดให้ $B' \subset A'$ และให้ $y \in A$
จะได้ $y \notin A'$ ดังนั้น $y \notin B'$
ทำให้ได้ว่า $y \in B$ เพราะฉะนั้น $A \subset B$
ดังนั้น ถ้า $B' \subset A'$ แล้ว $A \subset B$

จากการพิสูจน์ข้างต้นสรุปได้ว่า กำหนดให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $B' \subset A'$ #

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-สกุล	นายปิยพงศ์ จักรบุญมา	
วัน เดือน ปี เกิด	27 กันยายน 2529	
ประวัติการศึกษา	ปีการศึกษา 2547	มัธยมศึกษาปีที่ 6 (วิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์)
		โรงเรียนบุญวาทย์วิทยาลัย จังหวัดลำปาง
	ปีการศึกษา 2552	การศึกษาระดับบัณฑิต (คณิตศาสตร์)
ประวัติการทำงาน		มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
	ปีการศึกษา 2553	โรงเรียนบุญวาทย์วิทยาลัย จังหวัดลำปาง



ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved