บทที่ 3

การเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่
(Permutations and Combinations)

3.1 n แฟคทอเรียล (n Factorial)

นิยาม n แฟคทอเรียล หมายถึง ผลคูณของจำนวนเต็มบวก ตั้งแต่ 1 ถึง n

แทน n แฟคทอเรียลด้วย n!

จากนิยาม $n! = 1 \times 2 \times 3 \ldots (n-1) \times n$

หรือ $n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3 \times 2 \times 1$

เช่น $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$3! = 3 \times 2 \times 1$

$2! = 2 \times 1$

$1! = 1$

$(n-r)! = (n-r)(n-r-1)(n-r-2)\ldots 3 \times 2 \times 1$

หรือ $n! = n(n-1)!$

เช่น $10! = 10 \times 9!$

$8! = 8 \times 7!$

หมายเหตุ เรานิยาม n! เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกเท่านั้น แต่บางครั้งจำเป็นต้องใช้ 0! จึงกำหนด $0! = 1$

เนื่องจาก $n! = n(n-1)!$

แทน n = 1 ได้ $1! = 1(1-1)!$

$1! = 1 \times 0!$

เนื่องจาก $1! = 1$

ดังนั้น $1 = 1.0!$

จะได้ $1 = 0!$ (1 เป็นเอกลักษณ์ของการคูณ)

ตัวอย่าง 3.1.1 จงหาค่าของ

1) $\frac{7!}{3!}$ 2) $\frac{10!}{8!}$ 3) $\frac{4!7!}{3!5!}$

4) $\frac{n!}{(n-1)!}$ 5) $\frac{(n+1)!}{(n-2)!}$

วิธีทำ 1) $\frac{7!}{3!} = \frac{7x6x5x4x3x2x1}{3x2x1} = 7 \times 6 \times 5 \times 4$

2) $\frac{10!}{8!} = \frac{10 \times 9 \times 8!}{8!} = 10 \times 9 = 90$

3) $\frac{4!7!}{3!5!} = \frac{4 \times 3! \times 7 \times 6 \times 5!}{3!\ 5!} = 4 \times 7 \times 6$

4) $\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$

5) $\frac{(n+1)!}{(n-2)!} = \frac{(n+1)(n)(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = (n+1)n(n-1)$

ตัวอย่าง 3.1.2 จงหาค่า n จากสมการ

1) $\frac{n!}{(n-2)!} = 6$ 2) $\frac{(n+1)!}{(n-2)!} = 336$

3) $\frac{n!}{(n-10)!10!} = \frac{n!}{(n-8)!8!}$

<u>วิธีทำ</u> 1) $\frac{n!}{(n-2)!} = 6$

$$\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 6$$

$n\,(n-1) = 6$

$n\,(n-1) = 3 \times 2$

$\therefore\ n = 3$

2) $\frac{(n+1)!}{(n-2)!} = 336$

$$\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 336$$

$(n+1)\,n\,(n-1) = 336$

$(n+1)\,n\,(n-1) = 8 \times 7 \times 6$

$\therefore\ n = 7$

3) $\frac{n!}{(n-10)!10!} = \frac{n!}{(n-8)8!}$

$n!\,(n-8)!8! = n!\,(n-10)!1!$

$(n-8)!8! = (n-10)!10!$

$(n-8)(n-9)(n-10)!8! = (n-10)!\ 10 \times 9 \times 8!$

$(n-8)(n-9) = 10 \times 9$

$n-8 = 10$

$n = 18$

<u>ตัวอย่าง 3.1.3</u> จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ อยู่ในรูปแฟคทอเรียล

1) $100 \cdot 99 \cdot 98$

2) $10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14$

3) $n(n+1)\ (n+2)$

4) $n\ (n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)$

<u>วิธีทำ</u>

1) $100 \cdot 99 \cdot 98 = \dfrac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97!}{97!} = \dfrac{100!}{97!}$

2) $10 \cdot 11\ \ 12 \cdot 13 \cdot 14 = \dfrac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 9!}{9!} = \dfrac{14!}{9!}$

3) $n(n+1)(n+2) = \dfrac{(n+2)(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!} = \dfrac{(n+2)!}{(n-1)!}$

4) $n(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9) = n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)(n-3)(n+3)$

$$= (n+3)(n+2)(n+1)(n)(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$= \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-4)!}$$

$$= \frac{(n+3)!}{(n-4)!}$$

3.2 <u>วิธีเรียงสับเปลี่ยน</u> (Permutation)

มีสิ่งของหลายสิ่งที่ต่างกัน ถ้าเรานำมาจัดเรียงกันโดยถือว่าลำดับที่ของสิ่งของต่างกันเป็นวิธีที่ต่างกัน วิธีการจัดเช่นนี้เรียกว่าการเรียงสับเปลี่ยน (Permutation) หรือการจัดลำดับ เช่น ab, ba จะเห็นว่าลำดับที่ของ a, b เปลี่ยนไป ลักษณะเช่นนี้จะทำให้ได้วิธีที่ต่างกัน

เช่น จัดเรียงอักษรทีละ 3 ตัวจาก a,b,c จะจัดได้ เป็น abc,acb,bac,bca,cab, cba มีทั้งหมด 6 วิธี หรือจัดทีละ 2 ตัว จะจัดได้คือ ab,ba,ac,ca,bc,cb ซึ่งมี 6 วิธี

จำนวนวิธีทั้ง 6 วิธีนั้นอาจจะคิดได้ดังนี้

ตำแหน่งที่ 1 อาจเป็น a หรือ b หรือ c ก็ได้ ซึ่งเลือกได้ 3 วิธี

ตำแหน่งที่ 2 เลือกได้ 2 วิธี เพราะว่ามีอักษรหนึ่งตัวถูกเลือกไปแล้ว

ตำแหน่งที่ 3 เลือกได้ 1 วิธี เพราะว่าตำแหน่งที่ 1,2 ลงไปแล้วเหลืออักษรเพียงตัวเดียว จึงเลือกได้ 1 วิธี

ดังนั้นจำนวนวิธีทั้งหมด ในการจัดอักษร 3 ตัวจาก a,b,c มาลง 3 ตำแหน่ง กระทำได้ $3 \cdot 2 = 6$ วิธี

ถ้ามีสิ่งของอยู่ n สิ่งซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด และต้องการนำมาเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมด เราจะหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนได้ดังนี้

ตำแหน่งที่ 1 จะวางของสิ่งใดก็ได้ใน n สิ่ง ซึ่งเลือกได้ n วิธี

ตำแหน่งที่ 2 เนื่องจากลงในตำแหน่งที่ 1 ไปแล้ว แล้วจึงเหลือสิ่งของที่จะเลือกลงตำแหน่งที่ 2 อยู่ n-1 สิ่ง นั่นคือตำแหน่งที่ 2 เลือกได้ n-1 วิธี

ตำแหน่งที่ 3 หลังจากลงตำแหน่งที่ 1,2 แล้วจะเหลือสิ่งของให้เลือกลงตำแหน่งที่ 3 ได้ n-2 วิธี

ตำแหน่งที่ n เหลือของอยู่สิ่งเดียว ซึ่งเลือกของลงได้ 1 วิธี

ดังนั้นจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมดเท่ากับ $n(n-1)(n-2)\ldots3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$ วิธี

<u>กฎข้อ 3</u> จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของ n สิ่ง ซึ่งแตกต่างกันทั้งหมดเท่ากับ n! วิธี

<u>ตัวอย่าง 3.2.1</u> ชาย 5 คนยืนเข้าแถวเรียงหนึ่งได้กี่วิธี

<u>วิธีทำ</u> ชาย 5 คนเราถือว่ามีความแตกต่างกัน

ดังนั้นจำนวนวิธีที่จะเข้าแถวเรียงหนึ่งได้ = 5! = 120 วิธี

<u>ตัวอย่าง 3.2.2</u> นำสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด 6 สิ่ง มาจัดเรียงสับเปลี่ยนเป็นแถวตรงได้กี่วิธี

<u>วิธีทำ</u> จำนวนวิธีที่จัดเรียงสับเปลี่ยนเป็นแถวตรงได้เท่ากับ 6! = 720 วิธี

3.3 <u>วิธีเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมดโดยจัดครั้งละ r สิ่ง</u>

ตำแหน่งที่ 1 จัดได้ n วิธี

แต่ละวิธีของการจัดตำแหน่งที่ 1 จัดตำแหน่งที่ 2 ได้ (n-1) วิธี

แต่ละวิธีของการจัดตำแหน่งที่ 1,2 จัดตำแหน่งที่ 3 ได้ (n-2) วิธี

แต่ละวิธีของการจัดตำแหน่งที่ 1,2,3 จัดตำแหน่งที่ 4 ได้ (n-3) วิธี

ในแต่ละวิธีของการจัดตำแหน่งที่ 1,2,....(r-1) จัดตำแหน่งที่ r ได้ n-(r-1) วิธี

$\therefore$ จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของ n สิ่ง ซึ่งแตกต่างกันทั้งหมดโดยนำมาจัดคราวละ r สิ่ง $(r<n) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1)$ วิธี

$$= n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\ldots3\cdot2\cdot1}{(n-1)(n-r-1)(n-r-2)\ldots3\cdot2\cdot1}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!} \text{ วิธี}$$

ใช้สัญลักษณ์ $P_{n,r}$ แทนจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่ง

ซึ่งแตกต่างกันโดยนำมาจัดคราวละ r สิ่ง เช่น $P_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!}$

$$P_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$$

$$P_{5,5} = \frac{5!}{(5-5)!} = 5!$$

$\therefore \quad P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$

<u>กฎข้อ 4</u> จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่งซึ่งแตกต่างกันโดยนำมาจัดคราวละ r สิ่งเท่ากับ

$$P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

<u>หมายเหตุ</u> หนังสือบางเล่มอาจใช้สัญลักษณ์อื่นนอกจาก $P_{n,r}$ เช่น $^{n}P_{r}$ nPr, P(n,r)

<u>ตัวอย่าง 3.3.1</u> จงหาจำนวนวิธีที่จะจัดคน 4 คนเข้านั่งเก้าอี้ 8 ตัวซึ่งวางเรียงกันเป็นเส้นตรง

<u>วิธีทำ</u> มีเก้าอี้ว่าง 8 ตัววางเป็นแนวตรง จะจัดคน 4 คนเข้านั่งเก้าอี้ตัวล่างนั่นคือจัดเก้าอี้ครั้งละ 4 ตัว(ตำแหน่ง) จากทั้งหมด 8 ตัว

ได้ทั้งหมด $= P_{8,4}$ วิธี

$$= \frac{8!}{(8-4)!}$$

$$= \frac{8!}{4!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$$

$$= 1,680 \text{ วิธี}$$

<u>ตัวอย่าง 3.3.2</u> บริษัทมีตำแหน่งว่างต่าง ๆ กันอยู่ 3 ตำแหน่งมีคนมาสมัครเข้าทำงานในตำแหน่งดังกล่าว 7 คนผู้จัดการจะมีโอกาสเลือกผู้สมัครเข้าทำงานทั้งสามตำแหน่งกี่วิธี

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจากมีผู้สมัคร 7 คน (แตกต่างกัน) แต่ต้องการเพียง 3 คน
ดังนั้นจำนวนวิธีที่จะเลือกผู้สมัครเข้าทำงานเท่ากับ $P_{7,3} = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!}$

$= 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ วิธี

<u>ตัวอย่าง 3.3.3</u> จงหาค่า n จากสมการต่อไปนี้

1) $P_{n,2} = 6$

2) $P_{n,3} = 3\,P_{n,2}$

<u>วิธีทำ</u> 1) $P_{n,2} = 6$

$$\frac{n!}{(n-2)!} = 6$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 6$$

$$n(n-1) = 6 = 3 \cdot 2$$

$$n = 3 \quad \#$$

2) $p_{n,3} = 3\,P_{n,2}$

$$\frac{n!}{(n-3)!} = \frac{3n!}{(n-2)!}$$

$$(n-2)! = 3(n-3)!$$

$$(n-2)(n-3)! = 3(n-3)!$$

$$n = 5$$

<u>ตัวอย่าง 3.3.4</u> มีตำแหน่งว่างอยู่ 6 ตำแหน่ง ซึ่งเป็นตำแหน่งสำหรับชาย 4 ตำแหน่ง สำหรับหญิง 2 ตำแหน่ง ถ้ามีผู้สมัครเป็นชาย 8 คน หญิง 5 คน จะมีวิธีบรรจุคนเหล่านี้เข้าทำงานได้ทั้งหมดกี่วิธี

<u>วิธีทำ</u> ชายมาสมัคร 8 คน ต้องการเพียง 4 ตำแหน่ง จัดได้ $P_{8,4}$ วิธี

หญิงมาสมัคร 5 คน ต้องการเพียง 2 ตำแหน่ง จัดได้ $P_{5,2}$ วิธี

จากกฎการคูณ

จำนวนวิธีที่จะบรรจุคนเหล่านี้ เข้าทำงานได้ทั้งหมด $(P_{8,4})(P_{5,2})$

$$= \frac{8!}{(8-4)!} \cdot \frac{5!}{(5-2)!}$$

$$= 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4$$

$$= 33,600$$ วิธี

<u>ตัวอย่าง 3.3.5</u> กำหนดเลขโดด 1 ถึง 9 จงหาว่าจะสร้างเลขบวก 3 หลัก โดยเลขแต่ละหลักไม่ซ้ำกันได้กี่จำนวน

<u>วิธีทำ</u> เลขโดดทั้งหมด 1, 2, 3, ..., 9 ซึ่งมี 9 ตัวที่แตกต่างกัน

ต้องการนำมาสร้างเลข 3 หลัก (ตัว) โดยไม่ซ้ำกันได้เท่ากับ $P_{9,3} = \frac{9!}{(9-3)!}$

$= 9 \cdot 8 \cdot 7$ วิธี

<u>ตัวอย่าง 3.3.6</u> จงหาวิธีที่จะจัดชาย 4 คน กับหญิง 4 คน ให้ยืนเรียงกันเป็นแถว โดยที่

ก. ชายหญิงยืนสลับกัน

ข. หญิงทั้ง 4 ยืนติดกัน

ค. ชายทั้ง 4 ยืนติดกันและหญิงทั้ง 4 คน ยืนติดกัน

วิธีทำ ก. จัดชาย 4 คน กับหญิง 4 คน ยืนแถวสลับกัน ทำได้ 2 แบบคือ

แบบที่ 1 ชายอยู่หัวแถว

ช ญ ช ญ ช ญ ช ญ

ชาย 4 คน จัดยืนแถวได้ 4! วิธี

หญิง 4 คน จัดยืนแถวได้ 4! วิธี

จำนวนวิธีชายหญิงยืนสลับกันเมื่อชายอยู่หัวแถว เท่ากับ 4! 4! วิธี

แบบที่ 2 หญิงอยู่หัวแถว

ญ ช ญ ช ญ ช ญ ช

หญิง 4 คน จัดยืนแถวได้ 4! วิธี

ชาย 4 คน จัดยืนแถวได้ 4! วิธี

ดังนั้นหญิงสลับชาย เมื่อหญิงอยู่หัวแถวทำได้ 4! 4! วิธี

ดังนั้นจำนวนวิธีที่ชาย 4 คน หญิง 4 คน ยืนแถวสลับกันได้ 4! 4! + 4! 4!

= 1152 วิธี

ข. ให้หญิง 4 คน ยืนติดกัน ดังนั้นคิดหญิง 4 คน เป็น 1 คน กับชายอีก 4 คน รวมเป็น 5 คน เท่านั้น จึงจัดได้ 5! วิธี

แต่หญิง 4 คนที่ยืนติดกันยังสับเปลี่ยนกันได้ 4! วิธี

ดังนั้นจำนวนวิธีที่หญิง 4 คน ยืนติดกันเท่ากับ 5! 4! วิธี

= 2880 วิธี

ค. ให้ชาย 4 คน ยืนติดกัน จึงคิดเป็น 1 คน และหญิง 4 คน ยืนติดกันจึงคิดเป็น 1 คน เช่นกัน จึงเป็นการจัดเรียงสับเปลี่ยนคน 2 คน ซึ่งจัดได้เท่ากับ 2! วิธี

ชาย 4 คน ที่ยืนติดกันยังสับเปลี่ยนกันได้อีก 4! วิธี

หญิง 4 คน ที่ยืนติดกันยังสับเปลี่ยนกันได้อีก 4! วิธี

ดังนั้นจำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ 2! 4! 4! = 1152 วิธี

<u>ตัวอย่าง 3.3.7</u> มีหนังสือวิทยาศาสตร์ 5 เล่ม ต่าง ๆ กัน , คณิตศาสตร์ 3 เล่ม ต่าง ๆ กัน ภาษาอังกฤษ 2 เล่ม ที่ต่างกัน ภาษาไทย 1 เล่ม จะมีวิธีเรียงสับเปลี่ยนบนชั้นได้ต่าง ๆ กันกี่วิธี ถ้าต้องการให้หนังสือในหมวดเดียวกันอยู่ติดกัน

<u>วิธีทำ</u> หนังสือมีทั้งหมด 4 หมวด ที่ต่างกัน

ดังนั้นจัดสับเปลี่ยนแต่ละหมวดได้ 4! วิธี

ในหมวดวิทยาศาสตร์จัดสับเปลี่ยนกันได้ 5! วิธี

หนังสือหมวดคณิตศาสตร์สับเปลี่ยนกันได้ 3! วิธี

หนังสือภาษาอังกฤษสับเปลี่ยนกันได้ 2! วิธี

หมวดภาษาไทยสับเปลี่ยนได้ 1! วิธี

ดังนั้นจะจัดเรียงสับเปลี่ยนหนังสือได้ทั้งหมด $= 5!\ 4!\ 3!\ 2!\ 1!$

$= 34{,}560$ #

<u>ตัวอย่าง 3.3.8</u> จัดชาย 6 คน หญิง 4 คน ยืนเรียงแถวตรง โดยให้หญิงยืนแยกกันได้กี่วิธี

<u>วิธีทำ</u> ญ ช ญ ช ญ ช ญ ช ญ ช ญ ช ญ

จัดชาย 6 คน ยืนสลับกัน 6! วิธี

มีช่องว่างอยู่ 7 ช่อง ที่จะให้หญิงยืน ดังนั้นจัดหญิง 4 คน ยืนในช่องเหล่านั้นได้ $P_{7,4}$ วิธี

ดังนั้นจำนวนวิธีที่จัดสับเปลี่ยนทั้งหมด $= 6! \times P_{7,4} = 6! \times \frac{7!}{(7-4)!}$

$= 604{,}800$ วิธี

3.4 <u>วิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่งที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด</u>

พิจารณาการจัดอักษร a, b, c ครั้งละ 3 ตัว จัดได้ $3! = 6$ วิธี คือ

abc, abc, bca

bac, cab, cba

ถ้า b และ c เหมือนกัน สมมติให้เป็น x จะจัดได้เป็น

xxc xcx xcx

xxc cxx cxx

ซึ่งมีทั้งหมด 3 วิธีเท่านั้นคือ xxc, xcx, cxx หรืออาจจะคำนวณได้ดังนี้

ให้จำนวนวิธีจัดเรียงสับเปลี่ยน a, b, c โดยที่ a และ b เหมือนกัน = y วิธี แต่ถ้า a และ b ต่างกัน จะจัดได้เท่ากับ $y \cdot 2!$ วิธี แต่การจัดเรียงสับเปลี่ยน a,b,c ที่ต่างกัน = $3!$ วิธี

ดังนั้น $y \cdot 2! = 3!$

$$y = \frac{3!}{2!} = 3 \text{ วิธี}$$

นั่นคือการจัดเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ 3 สิ่ง ซึ่งเหมือนกัน 2 สิ่ง จัดได้ $\frac{3!}{2!}$ วิธี

ในกรณีที่มีอักษร 4 ตัว คือ a, b, c, d จะจัดเรียงสับเปลี่ยนได้ = $4! = 24$ วิธี แต่ถ้า a และ b เหมือนกัน และ c กับ d เหมือนกัน จะจัดได้เพียง 6 วิธีเท่านั้น ซึ่งอาจจะคำนวณดังนี้

ให้จำนวนวิธีทั้งหมดในการจัดสับเปลี่ยน a, b, c, d เมื่อ a, b เหมือนกัน c,d เหมือนกัน เท่ากับ y วิธี

ถ้า a, b ต่างกันสลับกันได้ $2!$ วิธี c, d ต่างกัน สลับกันได้ $2!$ วิธี

ดังนั้นจำนวนวิธีทั้งหมดในการสับเปลี่ยน a, b, c, d เท่ากับ $y \cdot 2! \cdot 2!$ วิธี แต่จำนวนวิธีในการจัดสับเปลี่ยน a, b, c, d ทั้งหมด = $4!$ วิธี

ดังนั้น $y \cdot 2! \cdot 2! = 4$ วิธี

$$y = \frac{4!}{2!2!} \text{ วิธี}$$

นั่นคือ จำนวนวิธีในการจัดสับเปลี่ยนอักษร a, b, c, d เมื่อ a, b เหมือนกัน c, d เหมือนกัน จัดได้ $\frac{4!}{2!\ 2!} = 6$ วิธี ซึ่งสรุปเป็นกฎได้คือ

<u>กฎข้อที่ 5</u> จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่ง ซึ่งไม่แตกต่างกันทั้งหมด กล่าวคือของ n สิ่งนี้ แบ่งเป็น k กลุ่ม ซึ่งในแต่ละกลุ่มนั้นเหมือนกัน โดยที่กลุ่มที่หนึ่งมี n_1 สิ่ง กลุ่มที่ 2 มี n_2 สิ่ง กลุ่มที่ 3 มี n_3 สิ่ง กลุ่มที่ k มี n_k สิ่ง โดย $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k = n$

จะจัดได้ทั้งหมดเท่ากับ $\frac{n!}{n_2!\ n_3!\ \ldots\ n_k!}$ วิธี

<u>ตัวอย่าง 3.4.1</u> จำนวนวิธีทั้งหมดในการจัดเรียงสับเปลี่ยนจากคำว่า banana มีกี่วิธี

<u>วิธีทำ</u> จากอักษรทั้งหมด 6 ตัวนี้ แบ่งได้เป็น 3 กลุ่ม (พวก) คือกลุ่มของ b กลุ่มของ a และกลุ่มของ n โดยกลุ่มของ b เหมือนกันอยู่ 1 ตัว กลุ่มของ a เหมือนกัน 3 ตัว และกลุ่มของ n เหมือนกัน 2 ตัว

จากกฎข้อที่ 5 จะได้ จำนวนวิธีในการจัดทั้งหมดเท่ากับ $\frac{6!}{1!\ 3!\ 2!} = 60$ วิธี

<u>ตัวอย่าง 3.4.2</u> จัดหนังสือ 5 เล่ม ซึ่งเป็นหนังสือ ค 016 3 เล่ม หนังสือฟิสิกส์ และเคมี อย่างละเล่ม วางบนชั้นได้กี่วิธี

<u>วิธีทำ</u> หนังสือทั้งหมด 5 เล่ม

เป็นหนังสือ ค 016 อยู่ 3 เล่ม ซึ่งเหมือนกัน

เป็นหนังสือฟิสิกส์ 1 เล่ม และเคมี 1 เล่ม

ดังนั้นจัดวางบนชั้นได้ $= \frac{5!}{3!1!1!} = 60$ วิธี

<u>ตัวอย่าง 3.4.3</u> ต้องการประดับไฟตามรั้วที่ยาวตามถนน โดยใช้หลอดไฟ 12 หลอด เป็นหลอดไฟสีแดง 5 หลอด สีเหลือง 3 หลอด และสีเขียว 4 หลอด จะมีวิธีจัดหลอดไฟเหล่านี้ได้กี่วิธี ถ้า 1) เรียงเป็นแถวยาวตามรั้ว

2) เรียงเป็นแถวแต่ให้หลอดชนิดเดียวกันอยู่ติดกัน

<u>วิธีทำ</u> 1) หลอดไฟทั้งหมด 12 หลอด

แบ่งเป็นหลอดสีแดง 5 หลอด ที่เหมือนกัน

หลอดสีเหลือง 3 หลอด (เหมือนกัน)

หลอดสีเขียว 4 หลอด (เหมือนกัน)

ดังนั้นจะจัดได้ทั้งหมด $\frac{12!}{5!\ 3!\ 4!}$ = 27,720 วิธี #

2) เนื่องจากหลอดไฟทั้งหมด 12 หลอด รวม 3 สี (สีแดง 5 หลอด, สีเหลือง 3 หลอด และสีเขียว 4 หลอด) ต้องการให้สีเดียวกันอยู่ติดกัน จึงคัดแต่ละสีเพียง 1 อย่างเท่านั้น ดังนั้นจึงมีหลอดไฟที่ต่างกันเพียง 3 หลอด ซึ่งจัดได้เท่ากับ 3! = 6 วิธี

<u>ตัวอย่าง 3.4.4</u> จงหาจำนวนวิธีที่จะจัดให้คน 10 คน โดยสารรถไฟ ผู้จัดมีตั๋วโดยสารชั้นที่หนึ่ง 2 ใบ ชั้นที่สอง 3 ใบ ชั้นที่สาม 5 ใบ

<u>วิธีทำ</u> ในการจัดนี้เปรียบเหมือนแบ่งคนออกเป็น 3 กลุ่ม โดยกลุ่มแรกมี 2 คน กลุ่มที่ 2 มี 3 คน กลุ่มที่ 3 มี 5 คน

ดังนั้นจำนวนวิธีในการจัดเท่ากับ $\frac{10!}{2!\ 3!\ 5!}$ = 2,520 วิธี

<u>ตัวอย่าง 3.4.5</u> ต้องการคนงาน 6 คน ดูแลความสะอาดอาคาร 3 หลัง โดยหลังที่หนึ่งให้มีคนงาน 3 คน หลังที่สองมีคนงาน 3 คน และหลังที่สามมีคนงาน 1 คน จะจัดได้กี่วิธี

<u>วิธีทำ</u> มีคนงานทั้งหมด 6 คน แบ่งเป็น 3 กลุ่ม โดย

กลุ่มแรกมี 3 คน

กลุ่มที่ 2 มี 2 คน

กลุ่มที่ 3 มี 1 คน

จะจัดได้ทั้งหมดเท่ากับ $\frac{6!}{3!\,2!\,1!} = 60$ วิธี

<u>ตัวอย่าง 3.4.6</u> นักเรียนของโรงเรียนแห่งหนึ่งสมัครไปทัศนาจร 450 คน ถ้าโรงเรียนแห่งนี้มีรถอยู่ 7 คัน ขนาดต่าง ๆ กันดังนี้ บรรทุกนักเรียนได้ 80 คน มี 3 คัน บรรทุกได้ 60 คน มี 2 คัน และบรรทุกได้ 45 คน มี 2 คัน จงหาจำนวนวิธีที่จะจัดนักเรียน 450 คน ให้นั่งรถ 7 คันนี้

<u>วิธีทำ</u> นักเรียน 450 คน ให้ไปกับรถ 7 คัน ก็คือ แบ่งนักเรียนออกเป็น 7 กลุ่ม นั่นเอง

โดยกลุ่มที่ 1, 2, 3 มีกลุ่มละ 80 คน

กลุ่มที่ 4,5 มีกลุ่มละ 60 คน

กลุ่มที่ 6,7 มีกลุ่มละ 45 คน

ดังนั้นจำนวนวิธีในการจัดได้ทั้งหมด $= \frac{450!}{(80!)^3(60!)^2(45!)^2}$ วิธี #

<u>ตัวอย่าง 3.4.7</u> จะมีวิธีจัดหนังสือ ค 016 จำนวน 5 เล่ม และหนังสือ ว 421 จำนวน 6 เล่ม บนหิ้งวางหนังสือได้กี่วิธี ถ้า

ก) ให้หนังสือที่อยู่หัวแถวและท้ายแถวเหมือนกัน

ข) ให้หนังสือที่อยู่หัวแถวและท้ายแถวต่างกัน

<u>วิธีทำ</u> ก) ถ้าให้หนังสือ ค 016 อยู่หัวแถวและท้ายแถว จะจัดได้ 1 วิธี ส่วนตรงกลางเป็นการจัดหนังสือ 9 เล่มคือ ค 016 จำนวน 3 เล่ม (เหมือนกัน) ว 421 จำนวน 6 เล่ม (เหมือนกัน) ซึ่งจัดได้ $\frac{9!}{3!\ 6!}$ วิธี

ดังนั้นจำนวนวิธีจัดเมื่อ ค 016 อยู่หัวแถวและท้ายแถวเท่ากับ

$1 \times \frac{9!}{3!6!} = 84$ วิธี

ถ้าให้หนังสือ ว 421 อยู่หัวแถวและท้ายแถว จัดได้ 1 วิธี ส่วนตรงกลางจะเป็นการจัดหนังสือ 9 เล่ม คือ ค 016 จำนวน 5 เล่ม ว 421 จำนวน 4 เล่ม

ซึ่งจัดได้ $\frac{9!}{5!\ 4!} = 126$ วิธี

ดังนั้นจำนวนวิธีจัดเมื่อ ว 421 อยู่หัวแถวและท้ายแถวจัดได้ $1 \times 126 = 126$ วิธี

จะได้จำนวนวิธีทั้งหมดเมื่อหนังสือที่อยู่หัวแถวและท้ายแถวเป็นชนิดเดียวกันเท่ากับ

$84 + 126 = 210$ วิธี

ข) เมื่อหัวแถวและท้ายแถวต่างกัน

หัวแถวเป็น ค 016 ท้ายแถวเป็น ว 421 ตรงกลางจะเป็นการจัดหนังสือ 9 เล่ม คือ ค 016 จำนวน 4 เล่ม ว 421 จำนวน 5 เล่ม

ซึ่งจัดได้เท่ากับ $\frac{9!}{4!\ 5!} = 126$ วิธี

ถ้าหัวแถวเป็น ว 421 และท้ายแถวเป็น ค 016 ตรงกลางจะจัดได้

$\frac{9!}{4!\ 5!} = 126$ วิธี

ดังนั้นจำนวนวิธีในการจัดหนังสือโดยให้หัวแถวและท้ายแถวตามหนังสือที่ต่างกัน

จะได้ $126 + 126 = 252$ วิธี #

<u>ตัวอย่าง 3.4.8</u> จะสร้างเลขที่มีค่ามากกว่าแสนได้กี่จำนวน จากเลขโดด 3, 2, 0, 2, 3, 2

<u>วิธีทำ</u> ถ้าหลักแสนเป็น 2

หลักแสนจัดได้ 1 วิธี ซึ่งใน 1 วิธีนี้ จัดเลขที่เหลือ 5 ตัว โดย 3 เหมือนกัน 2 ตัว และ 2 เหมือนกัน 2 ตัว

ลงหลักต่าง ๆ ได้เท่ากับ $\frac{5!}{2!\ 2!\ 1!} = 30$ วิธี

ดังนั้นจัดเลขที่มากกว่าแสนได้ $1 \times 30 = 30$ จำนวน

หรือถ้าหลักแสนเป็นเลข 3

หลักแสนจัดได้ 1 วิธี ใน 1 วิธีนี้จัดเลขที่เหลือ 5 ตัว โดยที่มี 3 อยู่ 1 ตัว มี 2 อยู่ 3 ตัว และ 1 มี 1 ตัว ได้เท่ากับ $\frac{5!}{1!\ 3!\ 1!} = 20$ วิธี

ดังนั้นจัดเลขมากกว่าแสนได้ $1 \times 20 = 20$ จำนวน

ดังนั้นสร้างเลขมากกว่าแสนได้ทั้งหมด $= 30 + 20 = 50$ จำนวน #

<u>ตัวอย่าง 3.4.9</u> จะจัดคน 7 คน เข้าพักในบ้านหลังหนึ่ง ซึ่งมี 3 ห้อง ห้องหนึ่งพักได้ 3 คน อีกสองห้องพักได้ห้องละ 2 คน ได้กี่วิธี

<u>วิธีทำ</u> ในการจัดคนเข้าพักในห้องเดียวกันเปรียบเหมือนจัดของที่เหมือนกันนั่นเอง เพราะว่าถึงแม้จะสลับกันอย่างไรก็ยังคงอยู่ในห้องเดียวกัน

แบ่งคน 7 คน ออกเป็น 3 กลุ่ม (แต่ละกลุ่มเหมือนกัน)

กลุ่มแรกมี 3 คน สองกลุ่มที่เหลือมีกลุ่มละ 2 คน แบ่งได้

$\frac{7!}{3!\ 2!\ 2!} = 210$ วิธี

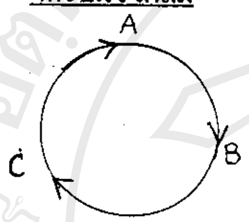
3.5 <u>วิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่แตกต่างกันเป็นวงกลม</u> (Circular permutation)

เมื่อกล่าวถึงวงกลมจะเห็นว่าไม่มีส่วนที่เป็นหัวแถวและท้ายแถว เพราะแต่ละตำแหน่งของวงกลมอาจจะเป็นได้ทั้งหัวแถวและหางแถว ซึ่งต่างจากเส้นตรงหรือแนวตรงที่มีหัวแถวและหางแถว ดังนั้นจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนในแนวตรงกันเชิงวงกลม จึงต้องแตกต่างกันไป

<u>พิจารณา</u> วิธีเรียงสับเปลี่ยนของ A, B, C

<u>จัดเป็นเส้นตรง</u> จัดเป็น ABC, BCA, CAB ถือว่าเป็น 3 วิธี

<u>จัดเป็นวงกลม</u>

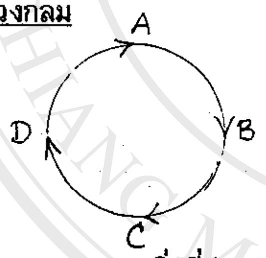


ไม่ว่าจะเริ่มที่ A หรือ B หรือ C ตามลูกศร ถือว่า ABC, BCA, CAB ไม่ทำให้เกิดวิธีที่ต่างกัน ถึงแม้จะมีการเปลี่ยนตำแหน่งก็ตาม แต่ตำแหน่งที่เปลี่ยนนั้น เปลี่ยนไปทั้งชุด (ไม่มีการสลับกัน) จึงถือได้ว่าเป็น 1 วิธีเท่านั้น

ถ้ามีลักษณะที่ต่างกัน 4 ตัวคือ A, B, C, D

<u>จัดเป็นเส้นตรง</u> คือ ABCD, BCDA, CDAB, DABC มี 4 วิธี (ที่แตกต่างกัน)

<u>จัดเป็นวงกลม</u>



พิจารณาจัดตามลูกศรจะได้ ABCD, BCDA, CDAB, DABC แต่วิธีทั้งหมดนี้ ไม่ทำให้แตกต่างกันจึงจัดได้เพียง 1 วิธีเท่านั้น

เนื่องจากของ n สิ่งที่ต่างกันจัดเรียงสับเปลี่ยนในแนวตรงจะได้ = $n!$ วิธี

ใน n วิธีของวิธีเรียงสับเปลี่ยนในแนวตรง จัดเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมได้ 1 วิธี

ดังนั้น $n!$ วิธีของวิธีเรียงสับเปลี่ยนในแนวตรง จัดเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมได้

$\frac{n!}{n} = (n-1)!$ วิธี

ในทางปฏิบัติในการจัดเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมนั้น จากสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกัน เราให้สิ่งของสิ่งหนึ่งอยู่คงที่ ณ ที่ใดที่หนึ่ง แล้วให้สิ่งของที่เหลือสลับที่กันทุกวิธีที่เป็นไปได้ ซึ่งของที่เหลืออยู่ $(n-1)$ สิ่ง สลับที่กันได้ $(n-1)!$ วิธีที่เราให้สิ่งใดสิ่งหนึ่งเป็นหลักอยู่คงที่นั้น เพราะว่า ถ้าสิ่งนั้นเปลี่ยนตำแหน่งไป เมื่อสลับที่กัน อาจจะอยู่ในลักษณะที่เรียงกันแบบชุดเดิม ซึ่งเราถือว่าเป็นวิธีเดียวกัน จากข้างต้นเราสรุปเป็นกฎได้ดังนี้

<u>กฎข้อ 6</u> มีสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกัน จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลม ได้เท่ากับ $(n-1)!$ วิธี

<u>ตัวอย่าง 3.5.1</u> จัดชาย 5 คน นั่งเรียงกันเป็นวงกลมได้กี่วิธี

<u>วิธีทำ</u> ชาย 5 คน ถือว่าแตกต่างกัน

ดังนั้นจำนวนวิธีเรียงกันเป็นวงกลมจัดได้ $(5-1)! = 4! = 24$ วิธี

<u>ตัวอย่าง 3.5.2</u> มีกระถางไม้ประดับอยู่ 6 ชนิด ต่าง ๆ กัน แต่ละชนิดมีลักษณะเหมือนกัน ชนิดละ 2 กระถาง จะนำมาวางรอบเสาธง จะมีวิธีจัดวางได้ทั้งหมดกี่วิธี

<u>วิธีทำ</u> กระถางต้นไม้ทั้งหมดมี 12 กระถาง ซึ่งเหมือนกันอย่างละ 2 กระถาง

ดังนั้นจะวางรอบเสาธงได้ $= \frac{11!}{(2!)^6}$ วิธี

<u>ตัวอย่าง 3.5.3</u> จงหาว่าจำนวนวิธีที่จะจัดชาย 6 คน หญิง 6 คน นั่งรอบโต๊ะกลม

ก) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

ข) ชายสลับกับหญิง

ค) ชาย 2 คน สลับกับหญิง 2 คน

ง) ชายนั่งติดกับชาย หญิงนั่งติดกับหญิง

<u>วิธีทำ</u> ก) ชาย 6 คน หญิง 6 คน รวม 12 คน นั่งรอบโต๊ะกลมได้ $(12-1)! = 11!$ วิธี

ข) ชายสลับกับหญิง

อาจให้ชายหรือหญิงเข้านั่งก่อนก็ได้

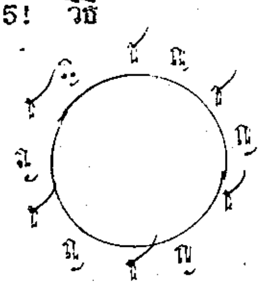
ถ้าชายเข้านั่งก่อน จะนั่งได้ $(6-1)! = 5!$ วิธี

แล้วจัดหญิงเข้านั่ง

ระหว่างชาย ซึ่งมีที่ว่างอยู่ 6 ช่อง

ซึ่งจัดได้ $6!$ วิธี

ดังนั้นจำนวนวิธีที่ต้องการคือ $5!\,6!$ วิธี



ค) ชาย 2 คน สลับกับหญิง 2 คน

เลือกชายหรือหญิงลงนั่งก่อน

ถ้าเลือกชายคนหนึ่งมานั่งก่อน เขาจะเลือกนั่งได้ 2 วิธี ชายที่เหลือ 5 คน เลือกนั่งได้ 5! วิธี

หญิง 6 คน จะจัดนั่งได้ 6! วิธี

ดังนั้นชาย 2 คน สลับหญิง 2 คน นั่งรอบโต๊ะได้ 2 x 5! 6! วิธี

ง) ชายนั่งติดกับชาย หญิงนั่งติดกับหญิง

เนื่องจากชายนั่งติดชาย หญิงนั่งติดหญิง จึงเปรียบเหมือนคน 2 คน นั่งรอบโต๊ะกลม จึงจัดได้ (2-1)! = 1! = 1 วิธี

แต่ชายที่นั่งติดกัน นั่งสลับกันได้ 6! วิธี

และหญิงยังสลับกันได้อีก 6! วิธี

ดังนั้นจำนวนวิธีที่ต้องการคือ 1! 6! 6! วิธี #

<u>ตัวอย่าง 3.5.4</u> สามี-ภรรยา 5 คู่ นั่งรับประทานอาหาร รอบโต๊ะกลม ในจำนวนนี้มี ก และ ข เป็นสามี-ภรรยาคู่หนึ่ง ถ้าไม่ต้องการให้ ก และ ข นั่งติดกัน จะจัดได้กี่วิธี

<u>วิธีทำ</u> สามี-ภรรยา 5 คู่ (มีทั้งหมด 10 คน) จัดนั่งรอบโต๊ะได้ 9! วิธี

ถ้า ก, ข นั่งติดกัน จึงคิดเป็นคนทั้งหมด 9 คน จัดได้ 8! วิธี

ก และ ข นั่งสลับกันได้อีก 2! วิธี

ดังนั้นถ้าให้ ก, ข นั่งติดกันจัดได้ 8! 2! วิธี

ฉะนั้นต้องการไม่ให้ ก, ข นั่งติดกัน จะได้ 9! - 8! 2! = 9 x 8! - 8! · 2

= 8! (9-2)

= 7 x 8! วิธี #

จำนวนวิธีในการจัดเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมที่กล่าวข้างต้น เป็นการนำมาจัดครั้งละทั้งหมด แต่ถ้าเรามีของ n สิ่งที่ต่างกันแล้วนำมาจัดครั้งละ r สิ่ง จะหาได้อย่างไร ให้พิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่าง 3.5.5</u> มีของ 6 สิ่ง ที่แตกต่างกัน นำมาจัดเป็นวงกลมครั้งละ 3 สิ่ง จะจัดได้กี่วิธี

<u>วิธีทำ</u> ของ 6 สิ่งที่ต่างกัน นำมาจัดเรียงสับเปลี่ยนในแนวตรงได้ $P_{6,3}$ วิธี

เนื่องจากจะมี 3 วิธี ในการจัดแนวตรง จะเป็นการจัดเชิงวงกลม 1 วิธี

ดังนั้น $P_{6,3}$ วิธี จะเป็นการจัดเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลม $\frac{P_{6,3}}{3}$ วิธี

นั่นคือ มีของ 6 สิ่งที่ต่างกันนำมาจัดเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลม ครั้งละ 3 สิ่ง

จะจัดได้ $\frac{P_{6,3}}{3} = \frac{6!}{(6-3)!3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3} = 40$ วิธี

จากตัวอย่าง เราสรุปเป็นกรณีทั่วไปได้คือ มีสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกัน นำมาจัดเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลม ครั้งละ r สิ่ง จะจัดได้ทั้งหมด $\frac{P_{n,r}}{r}$ วิธี

หรือ $\frac{n!}{(n-r)!r}$ วิธี

<u>ตัวอย่าง 3.5.6</u> ก. มีคนอยู่ 12 คน เลือกมา 6 คน นั่งรอบโต๊ะกลมได้กี่วิธี

ข. จัด 12 คน นั่งรอบโต๊ะกลม 2 โต๊ะ ๆ ละ 6 คน จะจัดได้กี่วิธี

<u>วิธีทำ</u> ก) นำ 6 คน จาก 12 คน นั่งรอบโต๊ะ ได้เท่ากับ $\frac{P_{12,6}}{6}$ วิธี

จาก $\frac{P_{12,6}}{6} = \frac{12!}{(12-6)!6} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{6}$

$= 2 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ วิธี

ข) เลือก 6 คน จาก 12 คน นั่งรอบโต๊ะได้เท่ากับ $\frac{12!}{6!6}$ วิธี

ในแต่ละวิธียังเลือกอีก 6 คน ที่เหลือ นั่งรอบโต๊ะได้เท่ากับ $(6-1)! = 5!$ วิธี

ดังนั้นจำนวนวิธีที่ต้องการเท่ากับ $\frac{12!}{6!6} \times 5!$ วิธี #

<u>แบบฝึกหัดที่ 3.1</u>

1. ถ้า $P_{n,5} = 2P_{n,3}$ จงหาค่า n
2. ถ้า $P_{n+1,3} = 10$, $P_{n-1,2}$ จงหาค่า n
3. ถ้า $7P_{n,3} = 6\ P_{n+1,3}$ จงหาค่า n
4. นักเรียน 4 คน ยืนเรียงแถวต่ำสูงได้กี่วิธี
5. จากเลขโดด 6 ตัว คือ 1, 2, 3, 4, 5 และ 6 จะสร้างเป็นเลข 6 หลักได้กี่จำนวน
6. จากเลขโดด 9 ตัว คือ 1, 2, 3, ..., 9 จะสร้างเป็นเลข 6 หลักได้กี่จำนวน
7. นักวิ่งแข่ง 4 คน วิ่งเข้าเส้นชัยในอันดับต่าง ๆ กันได้ทั้งหมดกี่วิธี ถ้าไม่มีคนเข้าเส้นชัยพร้อมกัน
8. มีตำแหน่งว่างอยู่ 5 ตำแหน่ง เป็นตำแหน่งเฉพาะชาย 2 ตำแหน่ง ตำแหน่งเฉพาะหญิง 3 ตำแหน่ง ถ้ามีผู้มาสมัครเป็นชาย 4 คน หญิง 5 คน จะมีวิธีเลือกบรรจุเข้าทำงานได้กี่วิธี
9. มีตำแหน่งว่างอยู่ 5 ตำแหน่ง เป็นตำแหน่งเฉพาะชาย 2 ตำแหน่ง อีก 3 ตำแหน่ง จะบรรจุชายหรือหญิงก็ได้ ถ้ามีผู้สมัครเป็นชาย 4 คน หญิง 5 คน จะมีวิธีเลือกบรรจุเข้าทำงานได้กี่วิธี
10. จงหาจำนวนวิธีที่จะจัดอันดับตัวอักษรทั้งหมดจากคำว่า APPAPPINNIA
    1) ให้สระอยู่ติดกัน
    2) ให้สระอยู่แยกกัน

12) จะจัดชาย 6 คน หญิง 6 คน ยืนเรียงแถวได้กี่วิธี
    1) ไม่มีข้อกำหนดเพิ่มเติม
    2) ชายกับหญิงยืนสลับกัน
    3) ชายสองคนสลับกับหญิงสองคน

13) หนังสือ 9 เล่ม วางเรียงกันอยู่บนชั้นหนังสือ เป็นหนังสือหมวดภาษาไทย 4 เล่ม (ต่าง ๆ กัน) หนังสือหมวดภาษาอังกฤษ 3 เล่ม ต่าง ๆ กัน และหนังสือหมวดวิทยาศาสตร์ 2 เล่ม ต่าง ๆ กัน ถ้าจะจัดอันดับหนังสือทั้งหมดนี้ โดยให้หนังสือหมวดเดียวกันอยู่รวมกลุ่มกันเสมอ จะจัดได้กี่วิธี

14) หนังสือคณิตศาสตร์ ค 015 จำนวน 3 เล่ม หนังสือวิทยาศาสตร์ ว 421 จำนวน 2 เล่ม และหนังสืออื่น ๆ อีก 4 เล่ม ต่าง ๆ กัน วางเรียงบนชั้นหนังสือได้กี่วิธี

15) มีหลอดไฟสีต่าง ๆ กันอยู่ 5 สี จำนวน 10 หลอด คือ สีแดง 2 หลอด สีเขียว 2 หลอด สีขาว 2 หลอด สีเหลือง 2 หลอด และสีฟ้า 2 หลอด จะนำมาคิดเป็นรูปวงกลมบนกำแพงรั้ว ได้กี่วิธี

16) จงหาจำนวนวิธีที่จะจัดชาย 4 คน และหญิง 4 คน นั่งรอบโต๊ะกลม โดยให้หญิงนั่งแยกกัน (ไม่มี 2 คนใด นั่งติดกัน)

17) จัดชาย 6 คน หญิง 6 คน นั่งรอบโต๊ะกลม โดยให้ชาย 3 คน สลับกับหญิง 3 คนได้กี่วิธี

18) จัดคน 9 คน นั่งรอบโต๊ะกลมได้กี่วิธี ถ้า

ก. คนอายุน้อยสุดนั่งติดคนอายุมากสุด

ข. คนอายุน้อยสุดไม่นั่งติดคนอายุมากสุด

19) มีเก้าอี้ 6 ตัว เรียงกันเป็นแถวตรง มีคน 3 คน จัดให้นั่งเก้าอี้ 6 ตัวนี้ โดยไม่ให้ทั้งสามนั่งติดกัน จัดได้กี่วิธี

20) ต้องการทาสี 6 สี ลงบนลูกบาศก์หน้าเกลี้ยงหน้าละสี จะทาได้กี่วิธี

3.6 <u>วิธีจัดหมู่</u> (Combinations)

ในการจัดสิ่งของบางครั้งนั้น เราไม่สนใจว่าสิ่งที่เรานำมาจัดนั้น อะไรจะมาก่อนมาหลังเราสนใจเพียงว่า แบ่งได้กี่กลุ่มหรือกี่หมู่ ในกลุ่มนั้นหรือหมู่นั้นมีอะไรบ้าง การสับเปลี่ยนกันภายในกลุ่มของสมาชิก จะไม่ทำให้เกิดวิธีที่ต่างกัน เพราะถึงแม้ว่าสมาชิกของกลุ่มจะสลับกันอย่างไร ก็ยังเป็นสมาชิกของกลุ่มเดิม จะไม่ทำให้เกิดวิธีหรือเกิดกลุ่มใหม่ขึ้นเลย การจัดลักษณะเช่นนี้เรียกว่าวิธีการจัดหมู่ (Combinations) ดังนั้นจำนวนวิธีการจัดหมู่ย่อมแตกต่างไปจากการเรียงสับเปลี่ยนที่ถือลำดับเป็นสำคัญ

พิจารณาการเรียงสับเปลี่ยนในแนวตรงของ A, B, C จะจัดได้ 6 วิธีที่ต่างกันคือ ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA แต่เป็นการจัดหมู่จะจัดได้ 1 วิธีเท่านั้น เพราะในแต่ละวิธี (ทั้ง 6 วิธี) นั้นมีสมาชิกคือ A, B และ C ซึ่งเหมือนกันทุกกลุ่ม การจัดหมู่นั้นถือว่าไม่ทำให้เกิดกลุ่มใหม่ขึ้นมา

จากอักษร A, B, C ถ้านำมาจัดเรียงสับเปลี่ยนคราวละ 2 ตัว จะจัดได้ 6 วิธีคือ AB, BA, BC, CB, AC, CA แต่ถ้าเป็นการจัดหมู่จัดได้ 3 วิธี เท่านั้นคือ AB, BC, AC ส่วนจำนวนวิธีที่เหลือคือ BA, CB, CA เกิดจากการสลับที่ของ AB, BC และ AC ตามลำดับ

นั่นคือ แต่ละกลุ่ม ถ้าถือลำดับเป็นสำคัญจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนจะทำได้อีก 2! วิธี ฉะนั้นจำนวนวิธีจัดหมู่ของ 3 สิ่ง ครั้งละ 2 สิ่ง จะทำได้ $\frac{P_{3,2}}{2!}$ วิธี ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\frac{3!}{(3-2)!\ 2!} = 3$ วิธี ตามที่ได้กล่าวข้างต้น

ถ้ามีอักษรที่ต่างกัน 4 ตัวคือ A, B, C, D นำมาจัดเป็นหมู่ครั้งละ 3 ตัว จะจัดได้ทั้งหมด 4 วิธีคือ ABC, ABC, BCD, ACD แต่ถ้าถือลำดับเป็นสำคัญแต่ละหมู่สับเปลี่ยนกันได้อีก 3! วิธี

ดังนั้นจำนวนวิธีจัดหมู่สิ่งของ 4 สิ่ง ครั้งละ 3 สิ่ง จัดได้ $\frac{P_{4,3}}{3!} = \frac{4!}{(4-3)!\ 3!}$ วิธี จากข้างต้นสรุปเป็นกฎได้ดังนี้

<u>กฎข้อ 7</u> ของ n สิ่งที่แตกต่างกัน เมื่อนำมาจัดหมู่คราวละ r สิ่ง $(r \leq n)$ จะจัดได้เท่ากับ $\frac{n!}{(n-r)!\ r!}$ วิธี

ใช้สัญลักษณ์ $\binom{n}{r}$ หรือ $C_{n,r}$ แทนจำนวนวิธีจัดหมู่สิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง จัดครั้งละ r สิ่ง $(r \leq n)$

นั่นคือ $C_{n,r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\ r!}$

เช่น $C_{6,3} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{(6-3)!\ 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!\ 3!} = 20$

$C_{6,4} = \binom{6}{4} = \frac{6!}{(6-4)!\ 4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2!\ 4!} = 15$

$C_{6,6} = \binom{6}{6} = \frac{6!}{(6-6)!\ 6!} = \frac{6!}{0!6!} = 1$

$C_{6,2} = \binom{6}{2} = \frac{6!}{(6-2)!\ 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!\ 2!} = 15$

นั่นคือ $\binom{6}{2} = \binom{6}{4}$

<u>ข้อสังเกต</u> 1) $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

เพราะว่า $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\ r!}$

$$\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-(n-r))!(n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{(r)!(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

ดังนั้น $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

2. $C_{n,n} = \frac{n!}{0!n!} = \frac{n!}{1\cdot n!} = \frac{n!}{1\cdot n!} = 1$

3. $P_{n,r} = C_{n,r} \cdot r!$

ตัวอย่าง 3.6.1 มีหนังสืออยู่ 10 เล่ม ที่แตกต่างกัน ถ้านักเรียนคนหนึ่งมีสิทธิ์ ยืมได้ 3 เล่ม เขาจะยืมหนังสือได้กี่วิธี

วิธีทำ มีหนังสือที่แตกต่างกันอยู่ 10 เล่ม ยืมได้ 3 เล่ม ก็เป็นการจัดหมู่หนังสือ 10 เล่ม ครั้งละ 3 เล่ม นั่นเอง ซึ่งจะทำได้

เท่ากับ $\binom{10}{3} = \frac{10!}{(10-3)!\ 3!} = 120$ วิธี

ตัวอย่าง 3.6.2 ถ้ามีผู้สมัครเป็นตัวแทนนักเรียน 10 คน จงหาจำนวนวิธีที่

1) เลือกผู้สมัคร 3 คน เป็นตัวแทน

2) เลือกผู้สมัคร 3 คน เป็นประธาน รองประธาน และเลขานุการ

วิธีทำ 1) เลือก 3 คนจาก 10 คน ทำได้ $\binom{10}{3} = \frac{10!}{(10-3)!\ 3!}$

$= \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{7!3!} = 120$ วิธี

2) เลือกผู้สมัครมาดำรงตำแหน่งถือ ลำดับเป็นสำคัญ

ดังนั้นจำนวนวิธีที่จัดเรียงสับเปลี่ยน 3 คน จาก 10 คน ทำได้ $P_{10,3}$ วิธี

เนื่องจาก $P_{10,3} = C_{10,3} \cdot 3!$

$= 120 \cdot 3!$

$= 720$ วิธี #

<u>ตัวอย่าง 3.6.3</u> บริษัทแห่งหนึ่งต้องการรับสมัครชาย 3 คน รับสมัครหญิง 4 คน ถ้ามีผู้ชายมาสมัคร 5 คน ผู้หญิงมาสมัคร 7 คน จะมีจำนวนวิธีที่จะบรรจุได้ทั้งหมดกี่วิธี

<u>วิธีทำ</u> เลือกชาย 3 คน จากทั้งหมด 5 คน ทำได้ $\binom{5}{3}$ วิธี

เลือกหญิง 4 คน จากผู้สมัคร 7 คน ทำได้ $\binom{7}{4}$ วิธี

ดังนั้นจำนวนวิธีที่จะบรรจุเข้าทำงานเท่ากับ $\binom{5}{3}\binom{7}{4} = \frac{5!}{2!\ 3!} \cdot \frac{7!}{3!4!}$

$= 350$ วิธี

<u>ตัวอย่าง 3.6.4</u> คน 7 คน ถ้าทุกคนจับมือกัน จะจับกันได้กี่วิธี

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจากการจับมือกันนั้น เกิดจากคน 2 คน นั่นคือเป็นการเลือกคน 2 คน จาก 7 คน นั่นเอง

ดังนั้นคน 7 คน จับมือกันได้ $\binom{7}{2} = \frac{7!}{(7-2)!\ 2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!2!}$

$= 21$ วิธี #

<u>ตัวอย่าง 3.6.5</u> มีจุดอยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม 7 จุด ต้องการสร้างสามเหลี่ยมบรรจุในวงกลมโดยอาศัยจุดเหล่านี้ เป็นจุดยอดมุมได้กี่รูป

<u>วิธีทำ</u> ในการสร้างรูปสามเหลี่ยมนั้น จะเกิดจากการลากเส้นระหว่างจุด 3 จุด ที่ไม่อยู่ในแนวเดียวกัน ดังนั้นก็เป็นการเลือกจุด 3 จุด จากทั้งหมด 7 จุด

ซึ่งทำได้ $\binom{7}{3} = \frac{7!}{(7-3)!\ 3!} = 35$ วิธี

นั่นคือ เราจะสร้างรูปสามเหลี่ยมได้ 35 รูป #

<u>ตัวอย่าง 3.6.5</u> จุด 8 จุด อยู่บนระนาบ ไม่มี 3 จุดใด อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน จะลากเส้นตรงเชื่อมจุดเหล่านี้ได้กี่เส้น

<u>วิธีทำ</u> ในการเกิดเส้นตรงนั้นต้องอาศัยจุด 2 จุด ดังนั้น ถ้าต้องการเส้นตรง เราต้องเลือกจุด 2 จุด จากทั้งหมด 8 จุด ซึ่งทำได้ $\binom{8}{2} = \frac{8!}{(8-2)!\ 2!}$

$= 28$ วิธี

นั่นคือ เราจะลากเส้นตรงได้ทั้งหมด 28 เส้น #

<u>ตัวอย่าง 3.6.6</u> รูป 6 เหลี่ยมด้านเท่า มีเส้นทะแยงมุมทั้งหมดกี่เส้น

<u>วิธีทำ</u> เส้นทะแยงมุมเกิดจากการลากเชื่อมระหว่างจุด 2 จุด จากจุดทั้งหมด 6 จุด ซึ่งเราทำได้ $\binom{6}{2} = \frac{6!}{(6-2)!\ 2!} = 15$ เส้น

แต่อย่าลืมว่าในจำนวนวิธีทั้ง 15 วิธี (เส้น) นี้เป็นเส้นตรงทั้งหมดที่เราหาได้ (ซึ่งเหมือนกับตัวอย่าง 3.6.5) ซึ่งรวมทั้งเส้นตรงที่ประกอบกันขึ้นเป็นรูป 6 เหลี่ยมด้านเท่าด้วย ซึ่งมีอยู่ 6 เส้น

ดังนั้นเส้นทะแยงมุมของรูป 6 เหลี่ยมด้านเท่ามีทั้งหมดเท่ากับ

$15-6 = 9$ เส้น

<u>ตัวอย่าง 3.6.7</u> มีจุด 10 จุด คือ A, B, C, ... อยู่บนระนาบ และไม่มี 3 จุดใด ๆ อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน จะลากเส้นเชื่อมทั้ง 10 จุด เพื่อให้ได้สามเหลี่ยมที่มี A เป็นจุดยอดได้กี่วิธี

<u>วิธีทำ</u> สามเหลี่ยมที่เราสร้างขึ้นนั้น จะมี A เป็นจุดยอดนั่นคือเราต้องเลือก 2 จุด จากทั้งหมด 9 จุด ซึ่งทำได้ $\binom{9}{2} = \frac{9!}{(9-2)!\ 2!} = 36$ วิธี

ดังนั้นจุด 10 จุด จะสร้างรูปสามเหลี่ยมที่มี A เป็นจุดยอดได้ 36 รูป #

<u>ตัวอย่าง 3.6.8</u> กำหนดจุด 5 จุด บนเส้นรอบวงของวงกลม จะสร้างรูปหลายเหลี่ยมบรรจุในวงกลมโดยใช้จุดเหล่านี้ ได้ทั้งหมดกี่รูป

<u>วิธีทำ</u> จะสร้างรูปสามเหลี่ยมได้ $\binom{5}{3} = \frac{5!}{2!\ 3!} = 10$ รูป

จะสร้างรูปสี่เหลี่ยมได้ $\binom{5}{4} = \frac{5!}{1!\ 4!} = 5$ รูป

จะสร้างรูปห้าเหลี่ยมได้ $\binom{5}{5} = \frac{5!}{0!\ 5!} = 1$ รูป

ดังนั้นจะสร้างรูปเหลี่ยมได้ทั้งหมด $10 + 5 + 1 = 16$ รูป #

<u>ตัวอย่าง 3.6.9</u> ต้องการเชิญแขก 5 คน มาในงานอย่างน้อย 1 คน ได้กี่วิธี

<u>วิธีทำ</u> เชิญ 1 คน ทำได้ $\binom{5}{1} = \frac{5!}{4!\ 1!} = 5$ วิธี

เชิญ 2 คน ทำได้ $\binom{5}{2} = \frac{5!}{3!\ 2!} = 10$ วิธี

เชิญ 3 คน ทำได้ $\binom{5}{3} = \frac{5!}{2!\ 3!} = 5$ วิธี

เชิญ 4 คน ทำได้ $\binom{5}{4} = \frac{5!}{1!\ 4!} = 5$ วิธี

เชิญ 5 คน ทำได้ $\binom{5}{5} = \frac{5!}{0!\ 5!} = 1$ วิธี

ดังนั้นจำนวนวิธีเชิญแขกอย่างน้อย 1 คน จาก 5 คน ทำได้

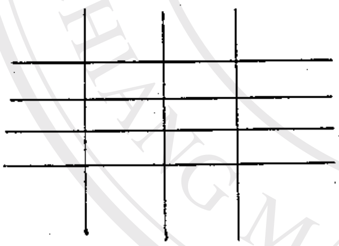
$5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31$ วิธี

หรืออาจจะคิดอีกวิธีหนึ่งคือ แขกแต่ละคนอาจจะถูกเชิญหรือไม่เชิญ ซึ่งมี 2 กรณี (วิธี) ดังนั้นแขก 5 คน จำนวนวิธีที่แตกต่างกันที่เป็นไปได้ทั้งหมดคือ $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$ วิธี แต่ในจำนวนวิธีต่าง ๆ นี้ จะมี 1 วิธีที่ไม่ถูกเชิญมา

ดังนั้นเชิญแขก 5 คน มาในงานอย่างน้อย 1 คน ทำได้ $32-1 = 31$ วิธี #

<u>ตัวอย่าง 3.6.10</u> เส้นขนาน 4 เส้น ลากในแนวนอน ตัดกับเส้นขนาน 3 เส้น ที่ลากในแนวตั้งจะทำให้เกิดรูปสี่เหลี่ยมได้กี่รูป

<u>วิธีทำ</u>



เนื่องจากเส้นขนาน 2 เส้น ในแนวนอน ตัดกับเส้นขนาน 2 เส้นในแนวตั้ง จะทำให้เกิดรูปสี่เหลี่ยมขึ้น นั่นก็คือเป็นการเลือกเส้นขนาน 2 เส้นในแนวนอน จาก 4 เส้น ซึ่งเลือกได้ $\binom{4}{2} = \frac{2!\ 2!}{4!} = 6$ วิธี แต่ละวิธีนี้

เลือกเส้นขนานในแนวตั้ง 2 เส้นจาก 3 เส้นได้ $\binom{3}{2} = \frac{3!}{1!\ 2!} = 3$ วิธี

ดังนั้นรูปสี่เหลี่ยมที่เกิดขึ้นทั้งหมดเท่ากับ $6 \times 3 = 18$ รูป

<u>ตัวอย่าง 3.6.11</u> กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลสีขาวอยู่ 4 ลูก สีแดง 5 ลูก และสีน้ำเงิน 3 ลูก ถ้าหยิบลูกบอล 3 ลูก จากกล่อง จงหาจำนวนวิธีที่

1) ได้สีขาวอย่างน้อย 1 ลูก

2) ได้สีแดงอย่างมาก 2 ลูก

3) ได้สีขาว 1 ลูก สีแดง 1 ลูก และสีน้ำเงิน 1 ลูก

<u>วิธีทำ</u> 1) หยิบลูกบอลมา 3 ลูก ให้ได้สีขาวอย่างน้อย 1 ลูก

หยิบได้สีขาว 1 ลูก จาก 4 ลูก ทำได้ $\binom{4}{1}$ วิธี แต่ละวิธีนี้จะได้ลูกสีอื่น

อีก 2 ลูก จาก 8 ลูก ทำได้ $\binom{8}{2}$ วิธี

ดังนั้นจำนวนวิธีที่ได้บอลสีขาว 1 ลูกคือ $\binom{4}{1}\binom{8}{2}$ วิธี

หยิบให้ได้บอลสีขาว 2 ลูก จาก 4 ลูก ทำได้ $\binom{4}{2}$ วิธี แต่ละวิธีนี้ จำนวนวิธี

จะได้ลูกสีอื่นอีก 1 ลูกจาก 8 ลูก ทำได้ $\binom{8}{1}$ วิธี

ดังนั้นจำนวนวิธีที่ได้บอลสีขาว 2 ลูกคือ $\binom{4}{2}\binom{8}{1}$ วิธี

หยิบให้ได้สีขาว 3 ลูก ทำให้ $\binom{4}{3}\binom{8}{0}$ วิธี

นั่นคือ จำนวนวิธีที่หยิบบอล 3 ลูก ให้ได้สีขาวอย่างน้อย 2 ลูก ทำได้

$$\binom{4}{1}\binom{8}{2} + \binom{4}{2}\binom{8}{1} + \binom{4}{3}\binom{8}{0} = 164 \text{ วิธี}$$

2) หยิบมา 3 ลูก ให้ได้สีแดงอย่างมาก 2 ลูก นั่นคือ ใน 3 ลูกที่หยิบมานั้น อาจจะไม่มีสีแดงเลย หรือมี 1 ลูก หรือ 2 ลูก ก็ได้

จำนวนวิธีที่หยิบไม่ได้สีแดงเลยมี $\binom{5}{0}\binom{7}{3}$ วิธี

จำนวนวิธีที่หยิบได้สีแดง 1 ลูก มี $\binom{5}{1}\binom{7}{2}$ วิธี

จำนวนวิธีที่หยิบได้สีแดง 2 ลูก มี $\binom{5}{2}\binom{7}{1}$ วิธี

ดังนั้นจำนวนวิธีที่หยิบบอล 3 ลูก ได้สีแดงอย่างมาก 3 ลูก มีทั้งหมด $\binom{5}{0}\binom{7}{1} + \binom{5}{1}\binom{9}{2} + \binom{5}{2}\binom{7}{1} = 210$ วิธี

3) หยิบ 3 ลูก ให้ได้สีขาว 1 ลูก สีแดง 1 ลูก และสีน้ำเงิน 1 ลูก วิธีที่ได้สีขาว 1 ลูก ทำได้ $\binom{4}{1}$ วิธี แต่ละวิธีนี้หยิบให้ได้สีแดง 1 ลูก ทำให้ได้ $\binom{5}{1}$ วิธี แต่ละวิธีที่หยิบได้สีขาว และสีแดง หยิบสีน้ำเงินได้ $\binom{3}{1}$ วิธี ดังนั้นหยิบลูกบอล 3 ลูก ให้สีขาว 1 ลูก สีแดง 1 ลูก และสีน้ำเงิน 1 ลูก มีทั้งหมด $\binom{4}{1}\binom{5}{1}\binom{3}{1} = 4 \cdot 5 \cdot 3 = 60$ วิธี #

3.7 <u>วิธีแบ่งหมู่</u> (Partitioning)

3.7.1 <u>สมาชิกแต่ละหมู่ไม่เท่ากัน</u>

พิจารณาจาก A, B, C, D ถ้าเราจะจัดอักษรครั้งละ 3 ตัว จาก 4 ตัว เราสามารถทำได้เท่ากับ $\binom{4}{3} = 4$ วิธีคือ

เอา ABC ไม่เอา D

เอา ABD ไม่เอา C

เอา BCD ไม่เอา A

เอา ACD ไม่เอา B

จากข้างต้นเราจะได้ว่า วิธีทั้งหมดที่เอามาจัดในแต่ละครั้งนั้นจะมีวิธีที่ไม่เอามาจัดอยู่ด้วย ลักษณะเช่นนี้ถือว่าเป็นการแบ่งหมู่ออกเป็น 2 หมู่ โดยหมู่แรก (หมู่ที่เอา) มีสมาชิกสามตัว โดยการเลือก 3 ตัว จาก 4 ตัว ส่วนหมู่ที่ 2 นั้น เมื่อหมู่แรกเลือกไป 3 ตัว จึงเหลืออยู่หมู่ที่ 2 เพียง 4-3 ตัว = 1 ตัว จึงจัดได้ 1 วิธี (ตัว) หรืออาจจะคิดได้ดังนี้

หมู่แรกเป็นการเลือกอักษร 3 ตัว จาก 4 ตัว ทำได้ $\binom{4}{3} = \frac{4!}{(4-3)!\ 3!}$ วิธี แต่ละวิธีที่จัดในหมู่แรก ซึ่งเหลืออักษรให้จัดหมู่ที่ 2 อยู่ (4-3) ตัว เราจัดได้ $\binom{4-3}{1}$ วิธี

ดังนั้นจำนวนวิธีที่แบ่งออกเป็น 2 หมู่ จากอักษร A, B, C, D โดยหมู่แรกมี 3 ตัว หมู่ 2 มี 1 ตัว เราแบ่งได้ทั้งหมด $\frac{4!}{(4-3)!\ 3!} \cdot \frac{(4-3)!}{((4-3)-1)!\ 1!} = \frac{4!}{3!\ 1!}$ วิธี

พิจารณาอักษร A, B, C, D, E ถ้าเรามาแบ่งออกเป็น 2 หมู่ โดยหมู่แรกมีอักษร 3 ตัว หมู่ที่ 2 มีอักษร 2 ตัว

หมู่แรกเลือกอักษร 3 ตัว จาก 5 ตัว ทำได้ $\binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)!\ 3!} = \frac{5!}{2!\ 3!}$

แต่ละวิธีที่เลือกในหมู่แรก หมู่ที่ 2 ซึ่งเหลืออักษรอยู่ (5-3) = 2 ตัว เราเลือกครั้งละ 2 ตัว ทำได้ $\binom{2}{2} = 1$ วิธี

ดังนั้นจำนวนวิธีที่แบ่งออกเป็น 2 หมู่ ๆ แรกมี 3 ตัว หมู่ 2 มี 2 ตัว ทำได้ $\frac{5!}{2!\ 3!} \cdot 1 = \frac{5!}{3!2!}$ วิธี

ใช้สัญลักษณ์ $\binom{5}{3,2}$ แทนการแบ่งของ 5 สิ่ง ออกเป็น 2 หมู่ โดยหมู่แรก มี 3 สิ่ง หมู่ที่ 2 มี 2 สิ่ง โดยที่ $\binom{5}{3,2} = \frac{5!}{3!\ 2!}$

โดยทั่วไปต้องการแบ่งของ n สิ่ง อกเป็น 2 หมู่ โดยหมู่แรกมี n_1 สิ่ง หมู่ที่ 2 มี n_2 สิ่ง จำนวนวิธีแบ่งหมู่เท่ากับ $\binom{n}{n1,n2} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2!}$ วิธี โดยที่ $n_1 + n_2 = n$

ถ้าสิ่งของ n สิ่ง ต้องการแบ่งออกเป็นหลาย ๆ หมู่ ก็จะได้ในทำนองเดียวกัน ซึ่งสรุปเป็นกฎได้ดังนี้

<u>กฎข้อ 8</u> จำนวนวิธีแบ่งของ n สิ่งออกเป็น k หมู่ หมู่แรกมี n_1 สิ่ง หมู่ 2 มี n_2 สิ่ง ... หมู่ที่ k มี n_k สิ่ง เท่ากับ

$$\binom{n}{n1,n2,n3,\ldots,nk} = \frac{n!}{n_1!\ n_2!\ n_3!\ \ldots\ n_k!} \text{ วิธี}$$

เมื่อ $n_1+n_2+n_3+\ldots+n_k = n$

<u>ตัวอย่าง 3.7.2</u> มีดินสอสีต่าง ๆ กัน 9 แท่ง แบ่งออกเป็น 3 กลุ่ม กลุ่มที่หนึ่งมี 4 แท่ง กลุ่มที่สองมี 3 แท่ง และกลุ่มที่สามมี 2 แท่ง จะแบ่งได้กี่วิธี

<u>วิธีทำ</u> จำนวนวิธีแบ่งหมู่ $= \dfrac{9!}{4!\ 3!\ 2!}$

$= 1,260$ วิธี

3.7.2 <u>สมาชิกแต่ละหมู่เท่ากัน</u>

ในกรณีที่แบ่งออกเป็นหมู่ ๆ ละเท่า ๆ กัน จะทำให้การแบ่งมีวิธีที่ซ้ำกันเกิดขึ้น เช่น การแบ่งตัวอักษร A, B, C และ D ออกเป็นหมู่ละ 2 ตัว จะจัดได้ดังนี้

หมู่ที่ 1	หมู่ที่ 2
A, B	C, D
A, C	B, D
A, D	B, C
B, C	A, D
B, D	A, C
C, D	A, B

จากลูกศรที่โยงต่อกัน จะเห็นว่าเป็นวิธีเดียวกัน แทนที่จะได้ทั้งหมด 6 วิธี ซึ่งแบ่งได้เพียง 3 วิธี เท่านั้น หรืออาจคิดดังนี้

จากอักษรทั้งหมด 4 ตัว แบ่งเป็น 2 หมู่ ๆ ละ 2 ตัว

หมู่ที่ 1 เลือก 2 ตัว จาก 4 ตัว ทำได้ $\binom{4}{2} = \dfrac{4!}{2!\ 2!}$ วิธี

แต่ละวิธีในหมู่ที่ 1 หมู่ที่ 2 เลือกได้ $\binom{2}{2} = 1$ วิธี

ดังนั้นจำนวนวิธีในการแบ่งเท่ากับ $\dfrac{4!}{2!\ 2!} \cdot 1 = 6$ วิธี

แต่ในจำนวน 6 วิธี นี้มีวิธีที่ซ้ำกันอยู่ 2! วิธี ซึ่ง 2! วิธี นี้เกิดจากการที่ทั้ง 2 หมู่ สลับที่กัน

ดังนั้นจำนวนวิธีในการแบ่งหมู่นี้ต้องหารด้วยวิธีที่ซ้ำกันคือ 2!

นั่นคือ จำนวนวิธีในการแบ่งเท่ากับ $\frac{6}{2!} = 3$ วิธี

ดังนั้น จึงสรุปได้ว่า ถ้าแบ่งสิ่งของที่ต่างกันออกเป็นหมู่ ๆ ละ เท่า ๆ กัน n หมู่ จะมีวิธีที่ซ้ำกัน n! วิธี คือ เท่ากับจำนวนวิธีที่กลุ่ม n กลุ่ม สลับที่กัน จึงต้องหารออกด้วย n! วิธีเสมอ

<u>กฎข้อที่ 9</u> การแบ่งสิ่งของ n สิ่ง ที่แตกต่างกันออกเป็น k หมู่ที่เท่ากัน หมู่ละ n_1 สิ่ง

จำนวนวิธีแบ่งเท่ากับ $\frac{n!}{(n_1!)^k \cdot k!}$

<u>ตัวอย่างที่ 3.7.2.1</u> แบ่งสมุด 12 เล่ม ที่แตกต่างกัน ออกเป็น 3 หมู่ ๆ ละเท่ากัน จะแบ่งได้กี่วิธี

<u>วิธีทำ</u> จำนวนวิธีในการแบ่ง $= \frac{12!}{(4!)^3\ 3!}$ วิธี

$= \frac{12!}{4!\ 4!\ 4!\ 3!}$ วิธี

<u>ตัวอย่างที่ 3.7.2.2</u> แบ่งนักเรียน 10 คน ออกเป็น 3 หมู่ โดยหมู่ที่ 1, 2 มี หมู่ละ 3 คน และหมู่ที่ 3 มี 4 คน ได้กี่วิธี

<u>วิธีทำ</u> จะเห็นว่ามีกลุ่มที่เท่ากันอยู่ 2 กลุ่ม

จำนวนวิธีแบ่งเท่ากับ $= \frac{10!}{3!\ 3!\ 2!\ 4!}$ วิธี

$= 2,100$ วิธี

[2! ที่นำไปหารนั้นเกิดจากการสลับกันของ 2 หมู่ ที่เท่ากัน ซึ่งการสลับกันไม่ทำให้เกิดวิธีใหม่]

<u>ตัวอย่าง 3.7.2.3</u> จงหาจำนวนวิธีที่จะจัดคน 10 คน เข้าพักบ้านหลังหนึ่ง ซึ่งมี 2 ห้องนอน ห้องหนึ่งจุได้ 6 คน และอีกห้องจุดได้ 5 คน

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจากมีอยู่ทั้งหมด 10 คน แต่ห้องที่พักจุคนได้ 11 คน จึงแยกออกเป็น 2 กรณีดังนี้

<u>กรณีที่ 1</u> เลือก 6 คนจาก 10 คน เข้าพักในห้องที่จุได้ 6 คน

สามารถทำได้ $= \binom{10}{6} = \frac{10!}{6!\ 4!}$ วิธี

ห้องที่จุคนได้ 5 คน เราจัดเข้าพักได้ $\binom{4}{4} = 1$ วิธี

<u>กรณีที่ 2</u>

หรือจัดคนเข้าพักห้อง 6 คน เพียง 5 คน ทำได้ $\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!\ 5!}$

ดังนั้นจำนวนวิธีทั้งหมด $= \frac{10!}{6!\ 4!} + \frac{10!}{5!\ 5!}$

$= 210 + 252$

$= 462$ วิธี

<u>แบบฝึกหัด 3.2</u>

1) ถ้า $\binom{35}{n-5} = \binom{35}{2n+1}$ จงหา n

2) ถ้า $\binom{n}{r} = 84$ และ $P_{n,r} = 504$ จงหา n

3) ข้อสอบวิชาหนึ่งมี 8 ข้อ ผู้เข้าสอบจะต้องทำข้อ 1 และเลือกทำข้ออื่น ๆ อีก 4 ข้อ รวมเป็น 5 ข้อ จงหาว่าผู้เข้าสอบคนหนึ่ง ๆ จะเลือกทำข้อสอบได้กี่วิธี

4) นักเรียนห้องหนึ่งมี 11 คน ถ้าจะเลือกผู้แทนไปในงานแห่งหนึ่ง 5 คน โดยให้หัวหน้าห้องรวมอยู่ด้วย จะมีวิธีเลือกคณะผู้แทนได้ทั้งสิ้นกี่วิธี

5) มีจุด 12 จุด อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม จำนวนเส้นตรงที่ลากต่อระหว่างจุดทุกจุดบนเส้นรอบวง มีกี่เส้น

6) มีจุดอยู่ 10 จุด บนระนาบและมีอยู่ 4 จุด เรียงในแนวเส้นตรงเดียวกัน จะลากเส้นตรงเชื่อมจุดเหล่านี้ได้กี่เส้น

7) จุด 9 จุด อยู่บนพื้นราบเดียวกัน และไม่มี3 จุดใด ๆ อยู่ในเส้นตรงเดียวกัน จากหลักความจริงที่ว่า จุด 3 จุด ซึ่งไม่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน เขียนวงกลม ผ่านได้ 1 วง จงหาว่าจะมีวงกลมผ่านจุด 9 จุดนี้ ได้ทั้งหมดกี่วง

8) ทีมฟุตบอล 10 ทีม ถ้าแข่งขันโดยพบกันหมดทุกทีม จะมีการจัดแข่งขันทั้งหมดกี่ครั้ง

9) นักเรียนห้องหนึ่งเป็นชาย 8 คน หญิง 6 คน ถ้าจะเลือกผู้แทน 6 คน ให้เป็นชาย 4 คน หญิง 2 คน จะเลือกได้กี่วิธี

10) เส้นขนาน 4 เส้นตัดกับเส้นขนาน 5 เส้น จะเกิดรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ทั้งสิ้นกี่รูป

11) เส้นขนาด m เส้น ตัดกับเส้นขนาน n เส้น จะเกิดรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานทั้งสิ้นกี่รูป

12) เส้นขนาน 3 เส้น ตัดกับเส้นขนาน k เส้น ทำให้เกิดรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน 18 รูป จงหา k

13) มีลูกบอลสีแดง 5 ลูก สีเขียว 4 ลูก สีเหลือง 3 ลูก จะมีวิธีหยิบลูกบอลมา 6 ลูก ทั้งหมดกี่วิธี ถ้า

ก) หยิบมาสีละ 2 ลูก

ข) สีเขียวอย่างมาก 3 ลูก

ค) ไม่มีสีเขียวรวมอยู่ด้วย

14) มีลูกแก้ว 5 ลูกที่ต่างกัน แบ่งออกเป็น 2 กอง ๆ ละ 4 ลูก จะมีกี่วิธี

15) แบ่งของ 8 สิ่ง ที่แตกต่างกันออกเป็น 3 กลุ่ม กลุ่มละ 2 สิ่ง 2 กลุ่ม และอีกกลุ่มหนึ่งมี 2 สิ่ง ได้กี่วิธี

16) จัดคน 10 คน เข้าพักบ้านพักหลังหนึ่ง ซึ่งมี 4 ห้อง ได้กี่วิธี ถ้า

ก) แต่ละห้องไม่เกิน 3 คน

ข) จัดให้พักห้องละ 2 คน 2 ห้อง ห้องละ 3 คน 2 ห้อง

3.8 วิธีแจกแจง (Distributions)

แบ่งออกเป็น 2 กรณี ดังนี้

3.8.1 วิธีแจกแจงของที่แตกต่างกัน

พิจารณาการทิ้งจดหมาย 3 ฉบับ ลงตู้ไปรษณีย์ 2 ตู้ ดังนี้ โดย จ$_1$, จ$_2$, จ$_3$ แทนจดหมาย 3 ฉบับที่แตกต่างกัน

	ตู้ที่ 1	ตู้ที่ 2
วิธีที่ 1	จ$_1$จ$_2$จ$_3$	
วิธีที่ 2	จ$_1$จ$_2$	จ$_3$
วิธีที่ 3	จ$_1$จ$_3$	จ$_2$
วิธีที่ 4	จ$_3$จ$_2$	จ$_1$
วิธีที่ 5	จ$_1$	จ$_2$จ$_3$
วิธีที่ 6	จ$_2$	จ$_1$จ$_3$
วิธีที่ 7	จ$_3$	จ$_1$จ$_2$
วิธีที่ 8		จ$_1$จ$_2$จ$_3$

จะได้จำนวนวิธีทั้งหมด 8 วิธี ในจำนวนวิธีทั้งหมดนี้ อาจจะมีบางวิธีที่มีบางตู้ อาจจะไม่ถูกทิ้งจดหมาย เช่นวิธีที่ 1, 8 ขณะที่อีกตู้หนึ่งทิ้งจดหมายลงหมด นั่นคือ จดหมายแต่ละฉบับนั้น มีสิทธิ์ที่จะทิ้งหรือไม่ทิ้งในตู้ใดตู้หนึ่งก็ได้ รวม 2 วิธี (คือทิ้งจดหมายกับไม่ถูกทิ้งจดหมาย) หรือเราจะคิดดังนี้

จดหมายฉบับที่ 1 เลือกลงตู้ได้ 2 วิธี (คืออาจจะทิ้งลงตู้ที่ 1 หรือ 2 ก็ได้) ในแต่ละวิธีที่เลือกทิ้งฉบับที่ 1 เลือกฉบับที่ 2 ทิ้งลงตู้ได้ 2 วิธี แต่ละวิธีที่เลือกฉบับที่ 1, 2 เลือกฉบับที่ 3 ทิ้งลงตู้ได้ 2 วิธี จากกฎการคูณ จะได้จำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ $2 \times 2 \times 2 = 2^3$ $= 8$ วิธี

<u>กฎข้อ 10</u> จำนวนวิธีแจกแจงของ r สิ่งที่แตกต่างกัน ลงในกล่อง n ใบ เท่ากับ

$$\underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{r \text{ ครั้ง}} = n^r \text{ วิธี}$$

<u>ตัวอย่าง 3.8.1.1</u> จงหาจำนวนวิธีที่แจกแจงลูกบอล 5 ลูก ที่แตกต่างกันลงในกล่อง 3 ใบ

<u>วิธีทำ</u> จากโจทย์ $r = 5$, $n = 3$

ดังนั้นจำนวนวิธีที่ต้องการคือ $3^5 = 243$ วิธี

<u>ตัวอย่าง 3.8.12</u> เหรียญ 10 เหรียญที่แตกต่างกันแบ่งให้เด็ก 5 คน จะแบ่งได้ทั้งหมดกี่วิธี

<u>วิธีทำ</u> จากโจทย์ $r = 10$, $n = 5$

ดังนั้นจำนวนวิธีที่ต้องการคือ 5^{10} วิธี

<u>ตัวอย่าง 3.8.1.3</u> จงหาจำนวนวิธีที่คน 5 คน ที่เกิดในวันต่าง ๆ ใน 1 ปี

ก) ไม่มีข้อเพิ่มเติม

ข) ทั้ง 5 คนเกิดในวันที่ไม่ซ้ำกันใน 1 ปี

<u>วิธีทำ</u> ก) จากโจทย์ $r = 5$, $n = 365$ (1 ปีมี 365 วัน)

ดังนั้นจำนวนวิธีที่ต้องการคือ 365^5 วิธี

ข) คนที่ 1 จำนวนวิธีที่เกิดได้ 365 วิธี

คนที่ 2 จำนวนวิธีที่เกิดได้ 364 วิธี

คนที่ 3 จำนวนวิธีที่เกิดได้ 363 วิธี

คนที่ 4 จำนวนวิธีที่เกิดได้ 362 วิธี

คนที่ 5 จำนวนวิธีที่เกิดได้ 361 วิธี

ดังนั้นจำนวนวิธีที่ต้องการคือ $365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot 362 \cdot 361$ วิธี

ตัวอย่าง 3.8.1.4 เครื่องมือไฟฟ้าชนิดหนึ่งมีวงจรสวิทช์เปิด – ปิดอยู่ 50 ตัว ณ เวลาใด ๆ สวิทช์แต่ละตัวอาจจะเปิดหรือปิด จงหาจำนวนสถานะทั้งหมดที่เป็นไปได้ของเครื่องมือนี้

วิธีทำ จำนวนสถานะทั้งหมด $= \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2}_{50 \text{ ครั้ง}} = 2^{50}$ วิธี

ตัวอย่าง 3.8.1.5 ข้อสอบถูก–ผิด ชุดหนึ่งมีคำตอบทั้งหมด 10 ข้อ จงหา

ก) วิธีที่จะตอบทั้งหมดที่เป็นไปได้

ข) วิธีทั้งหมดที่จะตอบถูก 5 ข้อ ผิด 5 ข้อ

วิธีทำ ก) จำนวนวิธีทั้งหมดที่จะตอบได้ $= 2^{10}$ วิธี

ข) จำนวนวิธีที่จะตอบถูก 5 ข้อ ผิด 5 ข้อ $= P_{10,5}$

$$= \frac{10!}{(10-5)!}$$

$$= 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30,140$$

[คำตอบถูกข้อแรก มีวิธีเป็นไปได้ จากข้อ 10 ข้อ คำตอบถูกข้อที่ 2 มาจาก 9 ข้อ ซึ่งไม่นับข้อแรก]

3.8.2 วิธีแจกแจงสิ่งของที่เหมือนกัน

จากพิจารณาการทิ้งจดหมาย 3 ฉบับที่ต่างกันลงตู้ไปรษณีย์ 2 ตู้ เราทำได้ $2^3 = 8$ วิธี แต่ถ้าจดหมายทั้ง 3 ฉบับเหมือนกัน (copy) ทั้ง 3 ฉบับ จำนวนวิธีย่อมแตกต่างออกไป เรามาพิจารณาดังนี้

ให้ 0 แทนจดหมาย

วิธีที่ 1	000	-	วิธีที่ 8		000
วิธีที่ 2	00	0	วิธีที่ 7	0	00
วิธีที่ 3	0	00	วิธีที่ 6	00	0
วิธีที่ 4	-	000	วิธีที่ 5	000	-

จะเห็นว่าวิธีที่ 1 เป็นวิธีเดียวกับวิธีที่ 5 , วิธีที่ 2 เป็นวิธีเดียวกับวิธีที่ 6, วิธีที่ 3 เป็นวิธีเดียวกับวิธีที่ 7 และวิธีที่ 4 เป็นวิธีเดียวกับวิธีที่ 8

ดังนั้นจำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ 4 วิธี จำนวนวิธีทั้งหมดที่แตกต่างกันนี้ เราจะเห็นว่า "|" ตรงกลาง เลื่อนไป-มา จะทำให้เกิดวิธีที่แตกต่างกันออกไป 4 วิธีดังนี้

วิธีที่ 1 000|

วิธีที่ 2 00|0

วิธีที่ 3 0|00

วิธีที่ 4 |000

จากการแจกแจงข้างต้น เราจะเห็นว่าจำนวนวิธีทั้งหมดนั้นเกิดจากการจัดเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของทั้งหมด 4 อย่าง โดยเหมือนกัน 3 อย่าง ซึ่งจำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ $\frac{4!}{3!}$ $= 4 = \binom{3+2-1}{2-1}$ วิธี

จากการพิจารณาข้างต้น เราสรุปได้ว่า ในการทิ้งจดหมายที่เหมือนกันทั้ง 3 ฉบับลงตู้ไปรษณีย์ 2 ตู้ ทำได้ทั้งหมด $\binom{3+2-1}{2-1} = 4$ วิธี

ต่อไปพิจารณาสิ่งของที่เหมือนกัน 5 ชิ้น จะใส่ลงในกล่อง 4 ใบ จะทำได้ทั้งหมดกี่วิธี โดยแต่ละกล่อง จะใส่สิ่งของกี่ชิ้นหรือไม่ใส่ก็ได้

จากภาพแสดง 3 วิธีของ การจัดของลงกล่อง โดยที่ 0 แทนสิ่งของ

วิธีที่ 1	0	00	0	0
วิธีที่ 2	00	00		0
วิธีที่ 3	0000		0	

จาก 3 วิธีข้างบนอาจเขียนได้เป็น

1	2	3	4	5	6	7	8
0	|	0	0	|	0	|	0
0	0	|	0	0	|	|	0
0	0	0	0	|	|	0	|

โดยที่ "|" แทนที่กั้นของให้เป็น 4 พวก และ 0 แทนสิ่งของ จะเห็นว่าจากข้างบนที่กั้นของจะอยู่ในตำแหน่ง 257, 367, 568 ซึ่งก่อให้เกิดการแบ่งได้ 3 วิธี ตำแหน่งของที่กั้นทั้ง 3 จะมีได้ $\binom{8}{3} = 56$ วิธี ซึ่งแต่ละวิธีเป็นวิธีหนึ่งของการแจกแจงที่แตกต่างกันของสิ่งของลงกล่อง

ดังนั้นการแบ่งของ 5 ชิ้น ที่เหมือนกันลงในกล่อง ทำได้ $\binom{8}{3}$ วิธี

สมมติให้จำนวนของคือ $r = 5$

จำนวนกล่องคือ $n = 4$

จะเห็นว่า $\binom{8}{3} = \binom{5+4-1}{4-1} = \binom{r+n-1}{n-1}$

ซึ่งเป็นกรณีทั่วไปของการแจกแจงของที่เหมือนกัน 5 สิ่งลงในกล่อง 4 กล่อง เราทำได้ $\binom{r+n-1}{n-1}$ วิธี

<u>กฎข้อ 11</u> จำนวนวิธีในการจัดสิ่งของ r สิ่งที่ไม่แตกต่างกันลงใน n กล่อง มีทั้งหมด $\binom{r+n-1}{n-1}$ วิธี

ตัวอย่าง 3.8.2.1 มีลูกบอลอยู่ 5 ลูก ยังไม่ได้ทาสี มีสีอยู่ 4 สี ต้องการให้ลูกบอลแต่ละลูก ถูกทาด้วยสีใดสีหนึ่ง จะมีวิธีได้กี่วิธี

วิธีทำ โจทย์ข้อนี้เปรียบเหมือนการจัดสิ่งของที่เหมือนกัน 5 สิ่ง ลงในกล่อง 4 ใบ ซึ่งสิ่งของก็คือลูกบอล และกล่องก็คือจำนวนสีที่มีอยู่

ดังนั้นจำนวนวิธีทั้งหมด $= \binom{5+4-1}{4-1}$

$= \binom{8}{3} = 56$ วิธี #

ตัวอย่าง 3.8.2.2 ร้านอาหารเตรียมอาหารชนิดหนึ่งไว้ โดยให้มีรสจืด, เค็ม และรสหวานให้เลือก ลูกค้าคนหนึ่งต้องการเลือกอาหารชนิดนี้ 6 ถ้วย จะมีวิธีเลือกได้กี่วิธี

วิธีทำ จากโจทย์ $r = 6,\ n = 3$

ดังนั้นจำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ $\binom{6+3-1}{3-1} = \binom{8}{2} = 28$ วิธี

ตัวอย่าง 3.8.2.3 มีขนมอยู่ 5 ชนิด ต้องการจัดลงในกล่อง ซึ่งบรรจุได้ 12 ชิ้น จะมีวิธีการบรรจุให้ครบ 12 ชิ้นได้กี่วิธี โดยมีขนมอย่างน้อย 1 ชิ้น ของแต่ละชนิดในแต่ละกล่อง

วิธีทำ หยิบขนมแต่ละชนิด 1 ชิ้น ลงไปไว้ในกล่องก่อน แล้วจะเหลือที่ว่างในกล่องอีก 7 ที่ ซึ่งใน 7 ที่นี้ จะสามารถเลือกขนมได้

$\binom{7+5-1}{5-1} = \binom{11}{4} = 330$ วิธี

<u>ตัวอย่าง 3.8.2.4</u> จงหาจำนวนวิธีแจกผลไม้ ซึ่งมีแอบเปิล 5 ลูก ส้ม 6 ลูก มะนาว 4 ลูก และฝรั่ง 6 ลูก ให้กับคน 4 คน โดย

ก) ไม่มีข้อกำหนดเพิ่ม

ข) แต่ละคนได้ฝรั่งอย่างน้อย 1 ลูก

<u>วิธีทำ</u> ก) จำนวนวิธีที่แจกแอปเปิลเท่ากับ $\binom{5+4-1}{4-1} = \binom{8}{3}$ วิธี

จำนวนวิธีที่แจกส้ม เท่ากับ $\binom{6+4-1}{4-1} = \binom{9}{3}$ วิธี

จำนวนวิธีที่แจกมะนาว เท่ากับ $\binom{4+4-1}{4-1} = \binom{7}{3}$ วิธี

จำนวนวิธีที่แจกฝรั่ง เท่ากับ $\binom{6+4-1}{4-1} = \binom{9}{3}$ วิธี

ดังนั้นจำนวนวิธีที่แจกผลไม้ทั้งหมดเท่ากับ

$\binom{8}{3}\binom{8}{3}\binom{7}{3}\binom{9}{3}$ วิธี

ข) แต่ละคนได้ฝรั่ง 1 ลูก ดังนั้นเหลือฝรั่งที่ต้องแจกอีก 6-3 = 3 ลูก

ดังนั้นจำนวนวิธีที่ต้องการคือ $\binom{8}{3}\binom{9}{3}\binom{7}{3}\binom{3+4-1}{4-1}$

$= \binom{8}{3}\binom{9}{3}\binom{7}{3}\binom{6}{3}$ วิธี

<u>ตัวอย่าง 3.8.2.5</u> จงหาจำนวนวิธีที่แจกแจงลูกบอลที่เหมือนกัน 4 ลูก และลูกบอลที่แตกต่างกัน 5 ลูก ลงในกล่องที่แตกต่างกัน 6 ใบ โดย

ก) ไม่มีข้อกำหนดเพิ่ม

ข) แต่ละกล่องมีบอลที่แตกต่างกันอย่างน้อยกล่องละ 1 ลูก

ค) แต่ละกล่องมีลูกบอลที่เหมือนกันอย่างมากกล่องละ 1 ลูก

<u>วิธีทำ</u> ก) แจกแจงบอลสีต่างกัน 5 ลูก ลงใน กล่อง 5 ใบ

ทำได้ 6^5 วิธี

แจกแจงบอลที่เหมือนกันทำได้ $\binom{4+6-1}{6-1} = \binom{10}{5}$ วิธี

ดังนั้นจำนวนวิธีที่ต้องการคือ $6^5\binom{10}{5}$ วิธี

ข) ต้องการให้แต่ละกล่องมีบอลสีต่างกันอย่างน้อย กล่องละ 1 ลูก

เนื่องจากมีบอลที่ต่างกัน 5 ลูก มีกล่อง 6 ใบ ดังนั้นจะมีอยู่ 1 ใบที่ว่าง

ดังนั้นจำนวนวิธีที่กล่องว่างมี $\binom{6}{1} = 6$ วิธี

และบอลที่เหลือสลับกันได้ $5!$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีที่ต้องการคือ $5! \cdot 6 = 720$ วิธี

ค) แต่ละกล่องมีบอลที่เหมือนกันอย่างมากกล่องละ 1 ลูก

จำนวนวิธีแจกแจงลูกบอลที่เหมือนกัน 4 ลูก ลงกล่อง 6 ใบ โดยที่อย่างมากกล่องละ 1 ลูก คือ จำนวนวิธีเลือกกล่อง 4 ใบ จาก 6 ใบ

ซึ่งทำได้ $\binom{6}{4}$ วิธี

จำนวนวิธีแจกแจงบอลที่ต่างกัน 5 ลูก ลงกล่อง 6 ใบ เท่ากับ 6^5 วิธี

ดังนั้นจำนวนวิธีทั้งหมด $= \binom{6}{4} 6^5$ วิธี

$$= \frac{6!}{2!\ 4!} \cdot 6^5$$
$$= 15 \cdot 6^5 \text{ วิธี}$$

<u>ตัวอย่าง 3.8.2.6</u> จงหาจำนวนชุดของคำตอบที่เป็นจำนวนเต็มของสมการ

$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 10$ เมื่อ $X_1 \geq 0$; $i = 1, 2, 3, 4$

<u>วิธีทำ</u> จากปัญหานี้จะเห็นว่าคล้ายกับการแจกแจงของที่เหมือนกัน r สิ่งลงในกล่องที่ต่างกัน n ใบ โดยที่ X_1, X_2, X_3, X_4 เป็นกล่องที่ต่างกัน 4 ใบ และ 10 หมายถึงจำนวนที่มีสิ่งของที่เหมือนกันอยู่ $r = 10$ สิ่ง ดังนั้นจำนวนวิธีที่ต้องการคือ

$\binom{10+4-1}{4-1} = \binom{13}{3}$ วิธี

<u>ตัวอย่าง 3.8.2.7</u> จงหาจำนวนชุดคำตอบที่เป็นจำนวนเต็มของสมการ

$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 20$ เมื่อ

ก) $X_1 \geq 0$

ข) $X_1 > 0$

ค) $X_1 \geq 2,\ X_2 \geq 2,\ X_3 \geq 5,\ X_4 \geq 0$

<u>วิธีทำ</u> ก) เมื่อ $X_1 \geq 0$

จำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ $\binom{20+4-1}{4-1} = \binom{23}{3}$ วิธี

ข) $X_1 > 0$

ถ้าเทียบกับการแจกแจงของสิ่งของ จะหมายถึงว่า แต่ละกล่องต้องมีของอย่างน้อย 1 สิ่ง ดังนั้นกล่องแต่ละใบ (X_1) จะมีของอยู่แล้ว 1 สิ่ง เหลือสิ่งของที่ต้องการแจกแจงอีก 20-4 = 16 ดังนั้นสมการที่ได้ใหม่คือ

$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 20-4 = 16$ เมื่อ $X_1 \geq 0$ จะได้จำนวนวิธี

ทั้งหมด $= \binom{16+4-1}{4-1} = \binom{19}{5}$ วิธี

ค) $X_1 \geq 2$, $X_2 \geq 2$, $X_3 \geq 5$, $X_4 \geq 0$

เมื่อเทียบกับการแจกแจงของสิ่งของแล้ว หมายถึงว่า กล่องที่ 1, 2 มีอย่างน้อย 2 สิ่ง กล่องที่ 3 มีของอย่างน้อย 5 สิ่ง และกล่องที่ 4 อาจจะใส่สิ่งของหรือไม่ใส่ก็ได้

ดังนั้นจำนวนวิธี $= C\Big((20-2-2-5) + (4-1), (4-1)\Big)$

$= \binom{14}{3}$ วิธี

<u>แบบฝึกหัด 3.1</u>

1) จดหมาย 5 ฉบับ ทิ้งลงตู้ไปรษณีย์ 3 ตู้ ได้กี่วิธี

2) นก 10 ตัว เกาะต้นไม้ 5 ต้น ได้กี่วิธี

3) จงหาจำนวนวิธีที่แจกแจงบอล 6 ลูกที่แตกต่างกันลงในกล่อง 4 ใบ

4) จงหาจำนวนวิธีที่แจกเหรียญ 20 อันที่ต่างกัน ให้กับเด็ก 10 คน

5) จงหาจำนวนวิธีที่คน 20 คน ที่เกิดในเดือนต่าง ๆ

6) จะมีกี่วิธีในการส่งขนม 10 ชิ้น จากขนม 5 ชนิด

ก) ไม่มีข้อกำหนดเพิ่ม

ข) ต้องมีขนมอย่างน้อยชนิดละ 1 ชิ้น

7) จงหาจำนวนวิธีหยิบลูกบอล 15 ลูก จากสีแดง สีขาว สีดำ ซึ่งแต่ละวิธีมีมากมาย

8) แจกแจงบอล 10 ลูกที่เหมือนกันลงใน 6 กล่อง ได้กี่วิธี

9) มีสีอยู่ 3 สี ต้องการทาสีบ้าน 6 หลัง ๆ ละสี ได้กี่วิธี

10) จงหาจำนวนวิธีแจกผลไม้ ซึ่งมีแอบเปิล 6 ลูก ส้ม 4 ลูก มะนาว 5 ลูก ให้กับเด็ก 3 คน โดย

ก) ไม่มีข้อกำหนดเพิ่ม

ข) แต่ละคนได้แอบเปิ้ลอย่างน้อย 2 ลูก

ค) แต่ละคนได้ส้มอย่างน้อย 1 ลูก

11) จงหาจำนวนชุดคำตอบที่เป็นจำนวนเต็มของสมการ

$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 20$ เมื่อ $X_i \geq 0$, $i = 1,2,3,4$

12) จงหาจำนวนชุดของคำตอบที่เป็นจำนวนเต็มของสมการ

$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 25$ เมื่อ

ก) $X_i \geq 0$

ข) $X_i > 0$

ค) $X_1, X_2 \geq 3$, $X_3, X_4 \geq 2$, $X_5 \geq 0$

ง) $X_i \geq 0$ และ $X_1 \leq 8$

จ) $X_i \geq 0$ และ $X_3 \leq 16$

3.9 สัมประสิทธิ์ทวินามและทฤษฎีบททวินาม

[Binomial Coefficients and Theorem]

จากบทที่ผ่านมาใช้สัญลักษณ์ $C_{n,r} = \binom{n}{r}$ แทนการจัดหมู่สำหรับสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง จัดครั้งละ r สิ่ง สำหรับในหัวข้อนี้สัญลักษณ์ $\binom{n}{r}$ จะเป็นสัมประสิทธิ์ของทฤษฎีบททวินาม หรืออาจกล่าวได้ว่า ถ้าหากเราหาสัมประสิทธิ์ของทฤษฎีบททวินามได้ ก็หมายถึงว่า เราสามารถหาจำนวนวิธีในการจัดหมู่ของสิ่งของที่แตกต่างกันได้ ซึ่งเราจะได้รายละเอียดในช่วงต่อไป

3.9.1 สามเหลี่ยมปาสคาล (Pascal's Triangle)

จากบทที่ 1 เราทราบมาแล้วว่า

1) $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$; $\binom{n}{n} = 1$

2) $\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \binom{n}{r}$

โดยเฉพาะข้อ 2 ซึ่งเรียกว่ากฎของปาสคาล (Pascal's Rule) จากกฎข้อ 2 นี้ ทำให้เราสามารถหา $\binom{n}{r}$ ได้จากผลบวกของ $\binom{n-1}{r-1}$ กับ $\binom{n-1}{r}$ นั่นคือดูจากค่าที่มีมาก่อน จะสามารถสร้างตารางสำหรับ $\binom{n}{r}$ ใด ๆ ได้ ตารางที่สร้างขึ้นสำหรับบางค่า $\binom{n}{r}$ จะมีลักษณะคล้ายกับเป็นรูปสามเหลี่ยม จึงเรียกว่าสามเหลี่ยมปาสคาล (Pascal's Triangle)

<u>วิธีสร้างตาราง</u>

1) เขียนตัวเลขตั้งแต่ 0, 1, 2, ... ในแนวนอนเป็นค่าของ r ส่วนในแนวตั้งเป็นค่าของ n

2) หาค่าของ $\binom{n}{0}$ ทุก ๆ ค่าของ n ซึ่ง $\binom{n}{0} = 1$ เขียนเป็นแถวตามแนวตั้งให้ตรงกับ $r = 0$

3) หาค่า $\binom{1}{1} = 1$ เขียนให้ตรงกับแถวและหลักที่ $n = 1, r = 1$ หาค่า $\binom{2}{2} = 1$, $\binom{3}{3} = 1$ ไปเรื่อย ๆ ทุก ๆ ค่าของ $\binom{n}{n}$ เขียนให้ตรงกับแถวและหลักที่ $r = n$

4) หาค่า $\binom{2}{1} + \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = 2$ เขียนให้ตรงตามแถวและหลัก $n = 2, r = 1$

5) หาค่า $\binom{3}{1}$ และ $\binom{3}{2}$ โดยดูจาก

$\binom{3}{1} = \binom{2}{0} + \binom{2}{1} = 1 + 2 = 3$ และ

$\binom{3}{2} = \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 2 + 1 = 3$ เขียนให้ตรงหลัก

จะสังเกตเห็นว่า ถ้า $\binom{n}{r}$ ต่อ ๆ ไป ก็คือผลบวกของคู่บน ดังตาราง

ค่า r / ค่า n	0 1 2 3 4 ...
0	1
1	1 + 1
2	1 + 2 + 1
3	1 + 3 + 3 + 1
4	1 + 4 + 6 + 4 + 1
.	....

จากตาราง $\binom{4}{2} = 6$ ได้มาจาก $\binom{3}{1} + \binom{3}{2} = 3 + 3 = 6$

จากตารางเราอาจนำมาเขียน อีกอย่างหนึ่งที่เรียกว่าสามเหลี่ยมปาสคาลได้คือ

n = 0						1						r = 0
n = 1					1		1					r = 1
n = 2				1		2		1				r = 2
n = 3			1		3		3		1			r = 3
n = 4		1		4		6		4		1		r = 1
n = 5	1		5		10		10		5		1	r = 5

จากตารางจะได้ว่าค่าของเลขแถวล่างได้มาจากผลบวกของคู่บน เมื่อสร้างตารางได้แล้วก็สามารถหาค่า $\binom{n}{r}$ ได้โดยง่าย เช่นจากตาราง $\binom{5}{2} = 10$; $\binom{4}{3} = 4$, $\binom{3}{1} = 3$ เป็นต้น

3.9.2 <u>ทฤษฎีบททวินาม</u> (Binomial Theorem)

พิจารณาจากการกระจายต่อไปนี้

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = a + b$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

....

ถ้าเราเขียนเฉพาะสัมประสิทธิ์ (Coefficient) ของพจน์ต่าง ๆ จะได้ดังนี้

<u>นิพจน์</u>	<u>สัมประสิทธิ์</u>
$(a+b)^0$	1
$(a+b)^1$	1 1
$(a+b)^2$	1 2 1
$(a+b)^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4$	1 4 6 4 1

จะเห็นว่าสัมประสิทธิ์ของพจน์ต่าง ๆ นั้นตรงกับค่าในรูปสามเหลี่ยมปาสคาล ซึ่งเป็นค่า $\binom{n}{r}$ ต่าง ๆ ฉะนั้นในการพิจารณาดังกล่าว เมื่อ a, b เป็นจำนวนใด ๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก เราได้สูตรว่า

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

สูตรนี้มีชื่อว่า ทฤษฎีบททวินาม เป็นการกระจายการยกกำลังให้เป็นผลบวกของพจน์ต่าง ๆ และเรียก $\binom{n}{r}$ ว่า "สัมประสิทธิ์ของทวินาม"

<u>ข้อสังเกต</u> การกระจาย $(a+b)^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

1) เมื่อกระจาย $(a+b)^n$ จะได้ $n+1$ พจน์

2) พจน์แรกและพจน์สุดท้ายมีสัมประสิทธิ์เป็น $\binom{n}{0}$ และ $\binom{n}{n}$ ตามลำดับ

3) กำลังของ a เริ่มจาก n แล้วลดลงทีละ 1 จนถึง 0

กำลังของ b เริ่มจาก 0 แล้วเพิ่มทีละ 1 จนถึง n

4) แต่ละพจน์ของการกระจาย กำลังของ a และ b รวมกันเท่ากับ n เสมอ

<u>ตัวอย่าง 3.9.1</u> จงใช้ทฤษฎีบททวินามในการกระจาย

1) $(2a+6)^5$

2) $(x^2-2)^7$

3) $\left(\frac{x}{2} + y\right)^6$

<u>วิธีทำ</u> 1)

$$(2a+b)^5 = [(2a) + b]^5$$

$$= (2a)^5 + \binom{5}{1}(2a)^4 b + \binom{5}{2}(2a)^3 b^2 + \binom{5}{3}(2a)^2 0^2$$

$$+ \binom{5}{4}(2a)b^3 + b^5$$

2)

$$(x^2-2)^7 = [x^2 + (-2)]^7$$

$$= \binom{2}{x}^7 + \binom{7}{1}(x^2)^6(-2) + \binom{7}{2}(x^2)^5(-2)^2$$

$$+ \binom{7}{3}(x^2)^4(-2)^3 + \binom{4}{7}(x^2)^3 + \binom{7}{5}(x^2)^2(-2)^5$$

$$+ \binom{7}{6}(x^2)(-2)^6 + (-2)^7$$

$$= x^{14} - 14x^{12} + 84x^{10} - 280x^8 + 560x^6 - 672x^4 + 448x^2 - 128$$

3)

$$\left(\frac{x}{2} + y\right)^6 = \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \binom{6}{1}\left(\frac{x}{2}\right)^5 y + \binom{6}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 y^2 + \binom{6}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^2 y^4 + \binom{6}{5}\binom{x}{2} y^5 + y^6$$

$$= \frac{1}{64}x^6 + \frac{3}{16}x^5 y + \frac{15}{16}x^4 y^2 + \frac{5}{2}x^2 y^4 + 3xy^5 + y^6$$

<u>พจน์ทั่วไปของการกระจาย $(a+b)^n$</u>

ให้ T_1 เป็นพจน์ที่ 1 จากการกระจาย $(a+b)^n$

ดังนั้น $T_1 = \binom{n}{0} a^{n-0} b^0$

T_2 เป็นพจน์ที่ 2 ของการกระจาย $(a+b)^n$

ดังนั้น $T_2 = \binom{n}{1} a^{n-1} b$

T_3 เป็นพจน์ที่ 3 ของการกระจาย $(a+b)^n$

ดังนั้น $T_3 = \binom{n}{2} a^{n-2} b^1$

ดังนั้น $T_{r+1} = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$ เป็นพจน์ที่ r+1 ของการกระจาย $(a+b)^n$

และมีสัมประสิทธิ์เป็น $\binom{n}{r}$

<u>ตัวอย่าง 3.9.2</u> จงเขียนพจน์ที่ 5 จากการกระจาย $(2x-4)^8$

<u>วิธีทำ</u> พจน์ที่ 5 ของการกระจาย $(2x-y)^8 = [(2x)+(-y)]^8$

$\therefore T_5 = T_{4+1} = \binom{8}{4} (2x)^{8-4} (-y)^4$

$= 1120\ x^4 y^4$ #

<u>ตัวอย่าง 3.9.3</u> จงเขียนพจน์ที่ 4 ของการกระจาย $(x - \frac{2}{x})^{10} = [x + (\frac{-2}{x})]^{10}$

จะได้ $n = 10$, $r + 1 = 4 ===> r + 3$

$\therefore$ พจน์ที่ 4 ของการกระจาย $\left(x - \frac{2}{10}\right)^{10}$ คือ

$$\binom{10}{3}x^{10-3}\left(\frac{-2}{x}\right)^3 = \frac{10!}{7!\ 3!}x^7\left(\frac{-8}{x^3}\right)$$

$$= -960x^4 \quad \#$$

<u>ตัวอย่าง 3.9.4</u> จงหาสัมประสิทธิ์ของ x^{10} ในการกระจาย $(2x^2 + x)^8$

<u>วิธีทำ</u> ให้พจน์ที่มี x^{10} เป็นพจน์ที่ $r+1$

$$\therefore T_{r+1} = \binom{8}{r}(2x^2)^{8-r}(x)^r$$

$$= \binom{8}{r}(2^{8-r})(x^{16-2r})(x)^r$$

$$= \binom{8}{r}(2^{8-r})(x^{16-r})$$

จะได้ $x^{16-r} = x^{10} \implies 16-r = 10$

$$\implies r = 6$$

ดังนั้นสัมประสิทธิ์ของ x^{10} ในการกระจาย $(2x^2+x)^8$ คือ

$$\binom{8}{6}(2^{8-6}) = \frac{8!}{2!6!}\cdot 2^6$$

$$= 1792 \quad \#$$

<u>ตัวอย่าง 3.9.5</u> จงหาพจน์ที่ไม่มี x จากการกระจาย $(2x^2-3x)^{10}$

<u>วิธีทำ</u> ให้พจน์ที่ไม่มี x (คือเทอม x^0) จากการกระจาย $(2x^2-3x)^{10}$

คือพจน์ที่ $r+1$

จาก $T_{r+1} = \binom{10}{r}(2x^2)^{10-r}(-3)^r$

$$= \binom{10}{r}(2^{10-r})(x^{20-2r})(-3)^r$$

$$= \binom{10}{r}(2^{10-r})(-3)^r x^{20}$$

จะได้ $x^{20-r} = x^o$ ===> $20-2r = 0$

===> $r = 10$

ดังนั้นพจน์ที่ไม่มี x (x^o) คือพจน์ที่ 10 ซึ่งมีค่า = $\binom{10}{10}(2^{10-10})(-3)^{10}$

$= 59049$ #

<u>ตัวอย่าง 3.9.6</u> จงใช้ทฤษฎีบททวินามเขียนจำนวนที่กำหนดให้ในรูปทศนิยม 4 ตำแหน่ง

1) $(1.02)^4$

2) $(0.98)^{12}$

<u>วิธีทำ</u> 1) $(1.02)^4 = (140.02)^4$

$$= 1^4 + \binom{4}{1}(1)^3(0.02) + \binom{4}{2}1^2(0.02)^2$$

$$+ \binom{4}{3}(1)(0.02)^3 + (0.02)^4$$

$$= 1 + 4(0.02) + 6(0.0004) + 4(0.02)^3 + (0.02)^4$$

$$= 1 + 0.08 + 0.00244 + 0.0000324 + 0.00000016$$

$$= 1.08243216$$

$$= 1.0824$$ #

2) $(0.98)^{12} = (1-0.02)^{12}$

$$= [1 + (-0.01)]^{12}$$

$$= 1 + \binom{12}{1} 1^{12} (-0.02) + \binom{12}{2} 1^{10} (-0.02)^2$$

$$+ \binom{12}{2} 1^{9} (-0.02)^3 + \ldots + \binom{12}{12} 1^{0} (-0.02)^{12}$$

$$= 1 - 12(0.02) + 66(0.0004) - 220(0.000008) + \ldots$$

$$= 1-0.24 - 0.0264 - 0.001760 + \ldots$$

$$= 1.0264 - 0.2418$$

$$= 0.7846$$

3.9.2 <u>การใช้ $\binom{n}{r}$ เมื่อ n ไม่เป็นจำนวนเต็มบวก</u>

โดยปกติแล้วเราใช้สัญลักษณ์ $\binom{n}{r}$ เมื่อ n, r เป็นจำนวนเต็มบวก เมื่อขยายสัญลักษณ์ เราจะนิยามกรณีที่ n ไม่เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนี้

<u>นิยาม</u> เมื่อ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ r เป็นจำนวนเต็ม กำหนด $\binom{x}{r}$ ดังนี้

ถ้า $r > 0$; $\binom{x}{r} = \dfrac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-r+1)}{r!}$ ------(1)

$r = 0$; $\binom{x}{0} = 1$ -------------(2)

$r < 0$; $\binom{x}{r} = 0$ -------------(3)

จากที่นิยามไว้เราได้สูตรต่าง ๆ ดังนี้

1) ถ้า n กับ r เป็นจำนวนเต็มบวก และถ้า $r > n$ จะได้ว่า

$$\binom{n}{r} = 0$$

แสดงได้ดังนี้

จาก $$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}$$

ถ้า $r > n$ จะได้ $(n-r+1) \leqslant 0$

ดังนั้น $$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots3\cdot2\cdot1\cdot0\ (-1)(-2)\ldots(n-r+1)}{r!}$$

$$= 0$$

2) ถ้า r เป็นจำนวนเต็ม และ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ

$$\binom{x}{r-1} + \binom{x}{r} = \binom{x+1}{r}$$

จาก $$\binom{x}{r-1} + \binom{x}{r} = \frac{x!}{(x-r+1)!(r-1)!} + \frac{x!}{(x-r)!r!}$$

$$= \frac{x!}{(x-r+1)(x-r)!(r-1)!} + \frac{x!}{(x-r)!r(r-1)!}$$

$$= \frac{x!}{(x-r)!(r-1)!}\left[\frac{1}{(x-r+1)} + \frac{1}{r}\right]$$

$$= \frac{x!}{(x-r)!(r-1)!}\left[\frac{(r+x-r+1)}{(x-r+1)} \cdot \frac{1}{r}\right]$$

$$= \frac{x!}{(x-r)!(r-1)!}\left[\frac{(x+1)}{[x+1+r]r}\right]$$

$$= \frac{(x+1)x!}{[x+1-r](x-r)!\ r(r-1)!}$$

$$= \frac{(x+1)!}{(x+1-r)!r!}$$

$$= \binom{x+1}{r} \qquad \#$$

จากสูตร 1) ถ้า $m > 0$

$$\text{จะได้} \binom{-m}{r} = \frac{\overbrace{-m(-m-1)(-m-2)\ldots(-m-r+1)}^{r \text{ จำนวน}}}{r!}$$

$$= \frac{(-1)^r m(m+1)(m+2)\ldots(m+r-1)}{r!}$$

$$= (-1)^r \binom{m+r-1}{r}$$

ดังนั้น $\binom{-m}{r} = (-1)^r \binom{m+r-1}{r}$; $m > 0$ ------(4)

<u>ตัวอย่าง 3.9.2.1</u> จงหาค่าของ

ก) $\binom{-1}{4}$ ข) $\binom{3}{-4}$

ค) $\binom{r}{-2}$ ง) $\binom{1.2}{4}$

<u>วิธีทำ</u> ก) จาก (4) จะได้

$$\binom{-1}{4} = (-1)^4 \binom{1+4-1}{4}$$

$$= 1 \qquad \#$$

ข) $\binom{3}{-4}$ เนื่องจาก $-4 < 0$ ดังนั้นจาก 3)

$$\binom{3}{-4} = 0$$

ค) $\binom{-2}{r}$ เนื่องจาก $-m < 0 \implies m > 0$ จาก (4)

จะได้ $\binom{-2}{r} = (-1)^r \binom{2+r-1}{r}$

$$= (-1)^r \binom{r+1}{r}$$

$$= (-1)^r (r+1)$$ #

ง) จาก (4) จะได้

$$\binom{-1.2}{4} = (-1)^4 \binom{1.2+4-1}{4}$$

$$= \binom{4.2}{4}$$

$$= \frac{(4.2)(4.2-1)(4.2-4)(4.2-3)}{4!}$$

$$= \frac{35.4816}{24}$$

$$= 1.4784$$ #

3.9.3 <u>ทฤษฎีบททวินาม เมื่อยกกำลังเป็นจำนวนเต็มลบหรือเศษส่วน</u>

จากทฤษฎีบททวินาม ถ้าเรากระจาย $(1+t)^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ $(1+t)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}t + \binom{n}{2}t^2 + \ldots + \binom{n}{n}t^n$; t เป็นจำนวนจริง

แต่ถ้า n เป็นจำนวนเต็มลบ หรือเศษส่วน เราจะกระจายได้ในทำนองเดียวกัน แต่จำนวนพจน์จะมีต่อไปเรื่อย ๆ ไม่มีที่สิ้นสุด และค่า t อยู่ระหว่าง -1 ถึง 1 ดังนั้น ถ้า $n = x$ เป็นจำนวนเต็มลบหรือเศษส่วน

$$(1+t)^x = \binom{x}{0} + \binom{x}{1}t + \binom{x}{2}t^2 + \ldots \; ; -1 < t < 1 \text{ ----(5)}$$

หรือแทนค่า $\binom{x}{r} = \dfrac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-r+1)}{r!}$ ใน (5)

จะได้ว่า

$$(1+t)^r = 1 + xt + \frac{x(x-1)}{2!}t^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}t^3 + \ldots \; ;$$

$$-1 < t < 1 \quad \text{----------(6)}$$

<u>ตัวอย่าง 3.9.3.1</u> จงกระจาย $(1+t)^{-1}$

<u>วิธีทำ</u>

$$(1+t)^{-1} = 1 + (-1)t + \frac{(-1)(-1-2)}{2!}t^2 + \frac{(-1)(-1-1)(-1-2)}{3!}t^3 + \ldots$$

$$= 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots \; ; -1 < t < 1$$

3.9.4 <u>เครื่องหมายแสดงผลรวม</u> (Summation Notation)

ในบางครั้งการเขียนการบวกกันของเลขหลาย ๆ จำนวน อาจจะทำให้ไม่สะดวกในการเขียนหรืออาจจะยืดยาวไป เพื่อความสะดวก เราจึงกำหนดสัญลักษณ์แทนผลบวก เพื่อให้สูตรต่าง ๆ สั้นลง เรากำหนดสัญลักษณ์ดังนี้

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n \qquad \text{---------------(7)}$$

1) Σ เป็นอักษรกรีก อ่านว่า "ซิกม่า" (sigma) เมื่อนำมาใช้แสดงผลรวมเราอ่านว่า summation

2) $\sum_{i=1}^{n} X_i$ อ่านว่า summation X_i เมื่อ i เท่ากับ 1 ถึง n หมายความว่า เป็นผลรวมของ X ตัวที่ 1 ถึงตัวที่ n

3) i เป็นตัวแสดงว่า X เป็นตัวที่เท่าใด เช่น X_1 หมายถึง X ตัวที่ 1 ถ้าเขียน X_i หมายถึง X ตัวใด ๆ บางที่เราใช้ j หรือ k หรืออักษรอื่นแทนก็ได้

<u>ตัวอย่าง 3.9.4.1</u> ถ้า $X_1 = 3$, $X_2 = -1$, $X_3 = 4$, $X_4 = 2$

1) $\sum_{i=1}^{4} X_i$ 2) $\sum_{j=1}^{3} X_j$ 3) $\sum_{k=2}^{4} X_k$

<u>วิธีทำ</u> 1) $\sum_{i=1}^{4} X_i = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$

$= 3 + (-1) + 4 + 2$

$= 8$ #

2) $\sum_{j=1}^{3} X_j = X_1 + X_2 + X_3$

$= 3 + (-1) + 4$

$= 6$ #

3) $\sum_{k=2}^{4} X_k = X_2 + X_3 + X_4$

$= (-1) + (4) + (2)$

$= 5$ #

<u>ตัวอย่าง 3.9.4.2</u> ถ้า $X_1 = 2,\ X_2 = 1\ ,\ X_3 = 0,\ X_4 = -2$

$Y_1 = -1,\ Y_2 = 3,\ Y_3 = -3,\ Y_4 = 4$

จงหา 1) $\sum_{i=1}^{4} X_i Y_i$

2) $\sum_{i=1}^{4} X_i \sum_{i=1}^{4} Y_i$

3) $\sum_{i=1}^{3} Y_i^2$

4) $\sum_{i=2}^{4} (2Y_i^2 - Y_{i+1})$

<u>วิธีทำ</u> 1)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4} X_i Y_i &= X_1Y_1 + X_2Y_2 + X_3Y_3 + X_4Y_4\\ &= (2)(-1) + (1)(3) + (0)(-3) + (-2)(4)\\ &= -2 + 3 + 0 - 8\\ &= -7\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4} X_i \sum_{i=1}^{4} Y_i &= (X_1+X_2+X_3+X_4)(Y_1+Y_2+Y_3+Y_4)\\ &= (2+1+0+(-2))((-1)+(3)+(-3)+4)\\ &= (1)(3)\\ &= 3\end{aligned}$$

<u>ข้อสังเกต</u> $\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i \neq \sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} Y_i$

3)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3} Y_i^2 &= Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2\\ &= (-1)^2 + (3)^2 + (-3)^2\\ &= 19\end{aligned}$$

4) $\sum_{i=2}^{4}(2Y_i^2 - Y_i + 1) = (2y_2^2 - Y_2 + 1) + (2Y_3^2 - Y_3 + 1) + (2Y_4^2 - Y_4 + 1)$

$= [2(3)^2 - 3 + 1] + [2(-3)^2 - (-3)+1]$

$+ [2(4)^2 - 4 + 1]$

$= (18-3+1) + (18+3+1) + (32-4+1)$

$= (16+22+29)$

$= 67$ #

<u>ตัวอย่าง 3.9.4.3</u> จงเขียนผลบวกต่อไปนี้ โดยใช้สัญลักษณ์ของผลรวม

1) $1(\frac{1}{2})^0 + 2(\frac{1}{2})^1 + 3(\frac{1}{2})^2 + \ldots + n(\frac{1}{2})^{n-1}$

2) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots$

3) กระจาย $(a+b)^n$ แล้วเขียนโดยสัญลักษณ์ผลรวม

<u>วิธีทำ</u> 1) $1(\frac{1}{2})^0 + 2(\frac{1}{2})^1 + 3(\frac{1}{2})^2 + \ldots + n(\frac{1}{2})^{n-1}$

ให้ x เป็นตัวแปรแทน n แปรตั้งแต่ 1 ถึง n

ดังนั้นเขียนได้เป็น $\sum_{x=1}^{n} x(\frac{1}{2})^{x-1}$ #

2) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots$

หาพจน์ที่ n ได้ $\frac{1}{n(n+1)}$ ถ้าให้ y เป็นตัวแปรแทน n แปรตั้งแต่ 1 ถึง ∞

ดังนั้น $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

$= \sum_{y=1}^{\infty}\frac{1}{y(y+1)}$

3) กระจาย $(a+b)^n$ ได้ดังนี้

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^{n-0}\,b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots +$$

$$+ \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0b^n$$

ค่าสัมประสิทธิ์ทวินาม แปรตั้งแต่ $\binom{n}{0}$ ถึง $\binom{n}{n}$

กำลังของ a แปรตั้งแต่ n-0, n-1, n-2, ... จนถึง n-n (=0)

กำลังของ b แปรตั้งแต่ 0, 1, 2, ... จนถึง n

ให้ k เป็นตัวแปรตั้งแต่ 0 ถึง n ดังนั้นเขียนได้ดังนี้

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \qquad \#$$

3.9.5 <u>ทฤษฎีการใช้ Σ</u>

<u>ทฤษฎีบท 1</u> ถ้า X, Y, Z เป็นตัวแปร 3 ตัว จะได้

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i + Y_i + Z_i) = \sum_{i=1}^{n}X_i + \sum_{i=1}^{n}Y_i + \sum_{i=1}^{n}Z_i \quad ---(8)$$

<u>พิสูจน์</u>

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(X_i + Y_i + Z_i) &= (X_1+Y_1+Z_1)+(X_2+y_2+Z_2)+(X_3+Y_3+Z_3)+\ldots \\ &\quad + (X_n+Y_n+Z_n) \\ &= (X_1+X_2+X_3+\ldots+X_n)+(Y_1+Y_2+Y_3+\ldots+Y_n) \\ &\quad + (Z_1+Z_2+Z_3+\ldots Z_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n}X_i + \sum_{i=1}^{n}Y_i + \sum_{i=1}^{n}Z_i \quad \#\end{aligned}$$

<u>ทฤษฎีบท 2</u> ถ้า C เป็นค่าคงที่จะได้

$$\sum_{i=1}^{n} CX_i = C\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \text{------------(9)}$$

<u>พิสูจน์</u> $\sum_{i=1}^{n} CX_i = CX_1 + CX_2 + CX_3 + \ldots + CX_n$

$= C(X_1+X_2+X_3+\ldots+X_n)$

$= C\sum_{i=1}^{n} X_i$ #

<u>ทฤษฎีบท 3</u> ถ้า C เป็นค่าคงที่ จะได้

$$\sum_{i=1}^{n} C = nC \qquad \text{-------------------(10)}$$

<u>พิสูจน์</u> $\sum_{i=1}^{n} C = \underbrace{C + C + C + \ldots + C}_{n \text{ ตัว}}$

$= nC$ #

<u>หมายเหตุ</u> เครื่องหมาย Summation บางทีอาจจะไม่เขียน i มีค่าจากไหนถึงไหน ถ้าเป็นที่รู้กันแล้วว่า i จาก 1 ถึง n เช่น $\sum_{i=1}^{n} X_i$ อาจเขียนได้เป็น $\sum X_i$

<u>ตัวอย่าง 3.9.5.1</u> ถ้า $X_1 = 2, X_2 = -3, Y_1 = 3, Y_2 = 1$ จงหา

1) $\sum_{i=1}^{2} (3X_i + Y_i + 1)$

2) $\sum_{i=1}^{2} (X_i - Y_i)$

3) $\sum_{i=1}^{4} 6$

<u>วิธีทำ</u> 1) $\sum_{i=1}^{2}(3X_i+Y_i+1) = \sum_{i=1}^{2}3X_i + \sum_{i=1}^{2}Y_i + \sum_{i=1}^{2}1$

$= 3\sum X_i + \sum y + \sum 1$

$= 3(2+(-3)) + (3+1) + (2)(1)$

$= -3 + 4 + 2$

$= 3$

2) $\sum_{i=1}^{2}(X_i-Y_i) = \sum_{i=1}^{2}X_i + \sum_{i=1}^{2}(-1)(Y_i)$

$= \sum_{i=1}^{2}X_i + (-1)\sum_{i=1}^{2}Y_i$

$= \sum X - \sum y$

$= (2 + (-3)) - (3+1)$

$= -1-4$

$= -5$ #

3) $\sum_{i=1}^{4}6 = \sum_{i=1}^{4}(2+4)$

$= \sum 2 + \sum 4$

$= 4(2) + 4(4) = 24$

หรือ $\sum_{i=1}^{4}6 = 4(6)$

$= 24$ #

<u>แบบฝึกหัดที่ 3.4</u>

1) จงใช้ทฤษฎีบททวินามในการกระจาย

1) $(a-2b)^4$

2) $(2x-3y)^7$

3) $\left(\frac{2}{x} + x^2\right)^4$

2) จงหาเทอมที่ 4 ของ $(x^2+y^2)^{11}$

3) จงหาเทอมที่ 9 ของ $\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x}\right)^{12}$

4) จงหาเทอมที่ไม่มี x ในการกระจาย $(2x^2 + \frac{1}{x})^{12}$

5) จงกระจาย $(2-x)^7$

6) จงหาค่าของ

1) $\binom{1/2}{4}$

2) $\binom{3}{-1}$

3) $\binom{2}{5}$

4) $\binom{-1}{3}$

5) $\binom{-1/2}{3}$

7) จงกระจาย $(2-x)^3$

8) จงกระจาย $(1-x)^{-1}$

9) จงหาค่าโดยประมาณของ $\sqrt{1.02}$ (คิดทศนิยม 3 ตำแหน่ง)

10) จงกระจายโดยไม่มีเครื่องหมาย Σ

1) $\sum_{i=6}^{10} W_i^2$

2) $\sum_{n=2}^{4} (x_n+n)$

3) $\sum_{j=1}^{5} 3(S_j-2)$

11) จงกระจายในรูปโพลิโนเมียล

1) $\sum_{i=2}^{4} (2x+i)^2$

2) $\sum_{x=1}^{10} (x-y)^2$

12) กำหนด $X_1 = -2$, $X_2 = 3$, $X_3 = 1$, $Y_1 = 4$, $Y_2 = 0$, $Y_3 = -5$

จงหาค่าของ

1) $\sum_{i=1}^{3} X_i Y_i$

2) $\sum_{i=2}^{3} (2X_i+Y_i-3)$

3) $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} X_i Y_j$

13) จงเขียนให้อยู่ในรูปเครื่องหมาย Σ

1) $1\cdot2 + 2\cdot3 + 3\cdot4 + \dots + n(n+1)$

2) $a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots$

3) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$