รายงานวิจัย

เรื่อง

การพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอน การแจกแจงปกติ การแจกแจงทวินาม และการแจกแจงปัวซอง

คณะผู้ดำเนินการวิจัย

สุรีย์ ชูประทีป หัวหน้าโครงการวิจัย

ปรีชา ล่ามช้าง ผู้ร่วมวิจัย

โครงการนี้ได้รับทุนวิจัย จากคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

พ.ศ. 2541

ชื่อเรื่อง : การพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอน การแจกแจงปกติ การแจก แจงทวินาม และ การแจกแจงปัวซอง

คณะผู้วิจัย : สุรีย์ ชูประทีป [1] ปรีชา ล่ามช้าง [2]

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีจุดประสงค์เพื่อ จัดทำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอน เรื่องการแจกแจงปกติ การแจกแจงทวินาม และการแจกแจงปัวซอง การดำเนินงานนี้เป็นการพัฒนาสื่อการสอนให้ทันสมัยโดยใช้เทคโนโนโลยีขั้นสูง

ผลของการวิจัยคือ ได้โปรแกรมช่วยสอนในสาขาวิชาสถิติ มีการผสมผสานกันในเนื้อหาสถิติ ภาพ และเสียงที่เรียกว่า ระบบมัลติมิเดีย ถ้าหากนำโปรแกรมนี้ไปบันทึกลงที่ศูนย์บริการอินเทอร์เน็ต ผู้เรียนสามารถเรียนผ่านระบบอินเทอร์เน็ตและเลือกเรียนตามหัวข้อที่สนใจตลอดจนทดสอบความรู้ ด้วยตนเอง

[1] อาจารย์ประจำภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

[2] รองศาสตราจารย์ประจำภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Research Title : Program Development on Computer Aided Instruction for Normal , Binomial and Poisson Distribution

Research Team : Suree Chooprateep [1] , Preecha Lamchang [2]

Abstract

The purpose of this research was to create computer- aided instruction programs for normal , binomial and poisson distributions. In its wider context , this would help develop new teaching media using high technology.

The results demonstrated that multi-media could be used to develop programs combining statistical theory ,pictures and sound . If these programs are made available on the internet server, students will be able to study the theory by using the internet and by being able to choose according to their interests and needs. The programs will also provide for self-administration tests.

[1] Instructor , Department of Statistics , Faculty of Science , Chiang Mai University.

[2] Associate Professor , Department of Statistics , Faculty of Science , Chiang Mai. University.

คำนำ

ในยุคปัจจุบัน คอมพิวเตอร์ได้เข้ามามีบทบาทในชีวิตประจำวันเป็นอย่างมาก หรือเป็นยุคที่เราเรียกว่ายุคข่าวสารไร้พรมแดน ในด้านวิชาการทุกสาขาวิชาวิชา ต่างพยายามนำคอมพิวเตอร์มาช่วยสอนในรูปแบบต่าง ๆ เช่น เพื่อเป็นสื่อการสอน การออกแบบโครงสร้าง การวิเคราะห์ข้อมูล หรือการนำเสนอข้อมูลในรูปแบบต่าง ๆ ทำให้ผู้ที่ศึกษาเกิดความสนใจมากขึ้น การนำคอมพิวเตอร์มาช่วยสร้างบทเรียนจึงค่อย ๆ แพร่หลายในวงการศึกษา ผู้วิจัยจึงเห็นว่า น่าจะมีการพัฒนาโปรแกรม คอมพิวเตอร์ช่วยสอนในสาขาสถิติเช่นกัน ทั้งนี้ได้กำหนดบทเรียน ได้แก่ การแจกแจงปกติ การแจกแจงทวินาม และการแจกแจงปัวซอง โครงการนี้ถือว่าเป็นโครงการนำร่องสำหรับการพัฒนาโปรแกรมช่วยสอนของภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ โปรแกรมที่พัฒนาเสร็จแล้ว หากนำไปลงที่ศูนย์บริการอินเทอร์เน็ต ผู้เรียนสามารถเรียนในระบบอินเทอร์เน็ตได้

โครงการวิจัยนี้สำเร็จลุล่วงด้วยดีโดยได้รับความช่วยเหลือ และได้รับความอนุเคราะห์จากหลายฝ่ายดังนี้

1. อาจารย์จงภพ ชูประทีป ศึกษานิเทศก์ กรมสามัญศึกษา เขตการศึกษา 8 เป็นที่ปรึกษาในด้านการจัดทำโปรแกรม และตรวจสอบแก้ไข ข้อบกพร่องของโปรแกรม
2. ผู้บริหารภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ที่สนับสนุนให้บุคลากรทำการวิจัย
3. ผู้บริหารคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ที่สนับสนุนเงินทุนวิจัยในปีงบประมาณ 2541
4. นักศึกษาชั้นปีที่ 3 สาขาวิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ที่มีส่วนร่วมในการทดลองเรียนจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนชุดนี้

ผู้วิจัยจึงขอขอบคุณมา ณ โอกาสนี้อีกครั้งหนึ่ง

คณะผู้วิจัย

สารบัญ

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญของปัญหา

ลักษณะการเรียนการสอนโดยทั่วไปในสาขาวิชาสถิติ อาจกล่าวได้ว่าแบ่งเป็นสองลักษณะ ลักษณะแรกเป็นการเรียนการสอนในลักษณะบรรยาย กล่าวคือผู้สอนจะใช้อุปกรณ์การสอนแบบธรรมดา ได้แก่ กระดาน หรือแผ่นใส ประกอบคำบรรยาย อีกลักษณะหนึ่งเป็นกระบวนวิชาที่มีปฏิบัติการ ซึ่งต้องมีการวิเคราะห์ คำนวณข้อมูลที่ประกอบด้วยตัวเลขจำนวนมาก และมีการคำนวณที่ยุ่งยากสลับซับซ้อน อุปกรณ์ที่นำมาช่วยสอนได้แก่ คอมพิวเตอร์ โดยทำการวิเคราะห์ข้อมูลด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป

การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม จัดเป็นเนื้อหาส่วนหนึ่งในสาขาวิชาสถิติ การเรียนการสอนเรื่องนี้อยู่ในลักษณะของการบรรยาย ซึ่งโดยทั่วไปจะสอนโดยใช้กระดานหรือแผ่นใส เนื้อหาเป็นเรื่องเกี่ยวกับคุณลักษณะ และรูปแบบของตัวแปรสุ่ม โดยกล่าวถึงลักษณะของฟังก์ชันความน่าจะเป็นและการประยุกต์ใช้กับข้อมูล การอธิบายจะอธิบายรูปแบบฟังก์ชัน และมีการแสดงรูปภาพประกอบในเนื้อหา การแจกแจงความน่าจะเป็นที่สำคัญในสาขาสถิติพื้นฐาน ได้แก่ การแจกแจงปกติ การแจกแจงทวินาม และการแจกแจงปัวซอง ผู้วิจัยพิจารณาแล้วเห็นว่าน่าจะมีการพัฒนาโปรแกรมช่วยสอนการแจกแจงทั้งสามการแจกแจงนี้ เพื่อเป็นการพัฒนาในด้านการเรียนการสอน และเพื่อให้นักศึกษาสามารถเรียนรู้ได้ด้วยตนเอง หรือสามารถทบทวนบทเรียนได้ โดยการใช้สื่อด้านคอมพิวเตอร์

ในปัจจุบันได้มีผู้พัฒนาโปรแกรมประกอบการเรียนการสอน ในแขนงวิชาต่าง ๆ และเป็นที่รู้จักกันในลักษณะของ “คอมพิวเตอร์ช่วยสอน” หรือ “CAI” ซึ่งย่อมาจาก Computer Aided Instruction ผู้ที่พยายามนำเอาคอมพิวเตอร์มาเป็นสื่อด้านการสอน ต่างมีจุดประสงค์ในการสร้างเนื้อหาให้สอดคล้องกับเรื่องราวที่ผู้วิจัยสนใจอยู่ และปรับปรุงรูปแบบการสอนให้เป็นที่น่าสนใจ สวยงาม ดึงดูดใจ ทำให้ผู้เรียนเกิดความสนใจอยากเรียนมากขึ้น อีกทั้งยังเปิดโอกาสให้บุคคลอื่นที่สนใจศึกษาในเรื่องดังกล่าว สามารถศึกษาเนื้อหาจากโปรแกรมช่วยสอนได้อีกด้วย

ผู้วิจัยเห็นว่าการพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนการแจกแจงปกติ การแจกแจงทวินาม และการแจกแจงปัวซอง เป็นการพัฒนาการใช้สื่อการสอนจากการอธิบายแบบธรรมดาให้เป็นการอธิบายโดยใช้สื่อคอมพิวเตอร์ อันจะก่อให้เกิดประโยชน์ต่อนักศึกษาหรือผู้เรียนให้มีความสนใจมากยิ่งขึ้น อีกทั้งผู้เรียนสามารถทบทวนบทเรียนและทดสอบความรู้หลังจากเรียนแล้วด้วยตนเอง การพัฒนาโปรแกรมช่วยสอนดังกล่าวนี้จะสร้างตามเนื้อหาในบทเรียนสาขาสถิติเบื้องต้น เฉพาะเรื่องการแจกแจงปกติ การแจกแจงทวินาม และการแจกแจงปัวซอง โดยมีการอธิบายด้วยตัวอักษร ภาพ และเสียง เป็นองค์ประกอบ

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อจัดทำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนเรื่อง การแจกแจงปกติ การแจกแจงทวินาม และการแจกแจงปัวซอง

2. เพื่อจัดทำคู่มือการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอน เรื่องการแจกแจงปกติ การแจกแจงทวินาม และการแจกแจงปัวซอง

3. พัฒนาการเรียนการสอน ในรูปแบบใหม่โดยมีทั้งภาพ และเสียง เป็นองค์ประกอบ

1.3 ขอบเขตของการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ กำหนดขอบเขตของเนื้อหา และออกแบบสร้างโปรแกรมช่วยสอนบทเรียน และแสดงฟังก์ชันความน่าจะเป็น พร้อมรูปภาพของฟังก์ชันในแต่ละหัวข้อ ดังนี้

การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง ประกอบด้วย เรื่องการแจกแจงปกติ

การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง ประกอบด้วย เรื่องการแจกแจงทวินาม และการแจกแจงปัวซอง

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. สามารถนำไปช่วยสอนในกระบวนวิชาสถิติที่มีเนื้อหาเกี่ยวกับเรื่อง ทฤษฎีการแจกแจงความน่าจะเป็นของการแจกแจงปกติ การแจกแจงทวินาม และการแจกแจงปัวซอง

2. นักศึกษาสามารถทบทวนบทเรียนได้ด้วยตัวเอง และเกิดความสนใจและเข้าใจในเนื้อหามากขึ้น เพราะได้เห็นทั้งภาพ และเสียง

3. นำไปสู่การพัฒนาด้านการเรียนการสอนในบทเรียนอื่น ๆ สาขาวิชาสถิติ

1.5 นิยามศัพท์

การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete Probability Distribution) คือความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มที่เป็นตัวแปรชนิดไม่ต่อเนื่อง (discrete variable) ลักษณะของตัวแปรสุ่มเป็นตัวเลขจำนวนนับ เช่น จำนวนจุดบนหน้าลูกเต๋าหรือจำนวนอุบัติเหตุที่เกิดขึ้นในเขตอำเภอเมืองเชียงใหม่ในช่วงเวลา 08.00- 09.00 น.

การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบต่อเนื่อง (Contineous Probability Distribution) คือ ความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มที่เป็นตัวแปรชนิดต่อเนื่อง (continuous variable) ลักษณะของตัวแปรเป็นเลขจำนวนจริงที่ได้จากการชั่ง ตวง วัด หรือหน่วยวัดมีจุดทศนิยมได้ เช่น ความสูง ความยาว น้ำหนัก ปริมาณต่าง ๆ เป็นต้น

อินเทอร์เน็ต (Internet) เป็นระบบเครือข่ายคอมพิวเตอร์ที่เชื่อมโยงกันได้ทั่วโลก โดยผ่านศูนย์คอมพิวเตอร์ ข้อมูลข่าวสารต่าง ๆ สามารถสื่อสารกันได้ในลักษณะที่เรียกว่าไร้พรมแดน อินเทอร์เน็ตใช้กันอย่างกว้างขวางในวงการศึกษา การเมือง ด้านการวิทยาศาสตร์ ด้านธุรกิจและอื่น ๆ

อินทราเน็ต (Intranet) เป็นระบบเครือข่ายคอมพิวเตอร์ที่เชื่อมโยงกัน คล้ายกับ Internet ต่างกันเฉพาะการเชื่อมโยงนั้นเป็นการเชื่อมโยงเฉพาะในองค์กรเท่านั้น

เว็บไซท์ (Web Site) เป็นสถานีที่ให้บริการในระบบอินเทอร์เนต ในปัจจุบันมีสถานีบริการนี้เกิดขึ้นแล้วมากกว่าหนึ่งล้านสถานี แต่ละสถานีจะบริการให้แก่สมาชิกของตนเอง

เว็บเพจ (Web Page) ภาพประกอบในแต่ละหน้าของเอกสาร หรือบทเรียนที่สร้างขึ้น

เบราซ์เซอร์ (Browser) เป็นโปรแกรมใช้สำหรับอ่านโปรแกรมที่สร้างขึ้นด้วยภาษา HTML เบราซ์เซอร์ จะใช้อ่านข้อมูลต่าง ๆ บนเครือข่ายอินเทอร์เน็ตหรืออินทราเน็ต

บทที่ 2
วิธีดำเนินการวิจัย

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อสร้างโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนการแจกแจงปกติ การแจกแจงทวินาม และการแจกแจงปัวซอง ในการพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนนี้ จะแบ่งวิธีการดำเนินงานออกเป็นสามตอน คือ

2.1 การสร้างองค์ประกอบของบทเรียน

2.2 การสร้างโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

2.3 การเขียนรายงานการวิจัย และคู่มือการใช้โปรแกรมสำหรับผู้ที่ต้องการศึกษา

วิธีการในแต่ละตอนผู้วิจัยดำเนินการดังนี้

2.1 การสร้างองค์ประกอบของบทเรียน

ผู้วิจัยได้จัดแบ่งขั้นตอนการศึกษาและวางแผนดังนี้

2.1.1 กำหนดขอบเขตของบทเรียน

2.1.2 จัดทำเนื้อหาในบทเรียน และตัวอย่าง

2.1.3 จัดทำแบบทดสอบ

2.1.1 กำหนดขอบเขตของบทเรียน

บทเรียนที่สร้างขึ้นมาจะเหมาะสมสำหรับนักศึกษาระดับปริญญาตรี และเป็นบทเรียนขั้นพื้นฐานสำหรับนักศึกษาทั่วไปที่กำลังศึกษาวิชาสถิติ ในเรื่องของการแจกแจงปกติ การแจกแจงทวินาม และการแจกแจงปัวซอง

2.1.2 จัดทำเนื้อหาในบทเรียนและตัวอย่าง

ในบทเรียนจะแบ่งบทเรียนออกเป็น 3 ส่วนคือ การแจกแจงปกติ การแจกแจงทวินาม และการแจกแจงปัวซอง

ในแต่ละส่วนจะมีหัวข้อย่อยเพื่อความสะดวกในการศึกษา ในหัวข้อย่อยจะประกอบไปด้วยเนื้อหาเรื่องราวโดยอธิบายลักษณะของข้อมูลในแต่ละการแจกแจง ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวน คุณสมบัติพิเศษของการแจกแจง การหาความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มโดยการคำนวณจากฟังก์ชันและหาค่าได้จากตารางการแจกแจงของแต่ละการแจกแจง

ในแต่ละส่วนของบทเรียน จะมีตัวอย่างประกอบพร้อมคำอธิบาย ในบางส่วนมีบทพิสูจน์สูตรทางคณิตศาสตร์

2.1.3 จัดทำแบบทดสอบ

ในการศึกษาแต่ละส่วนของบทเรียนได้มีแบบทดสอบ เพื่อให้ผู้เรียนได้ลองทำในแบบทดสอบ และได้จัดทำเฉลยไว้อย่างละเอียด เพื่อผู้เรียนเปิดอ่านได้เมื่อต้องการคำตอบ

จากการดำเนินการในขั้นตอนที่ 2.1.1 ถึง 2.1.3 สรุปเนื้อหาในบทเรียนทั้งสามส่วนเพื่อนำไปเชื่อมโยงการนำเสนอเป็นบทเรียนดังนี้

ตอนที่ 1 การแจกแจงปกติ

การแจกแจงปกติเป็นการแจกแจงที่สำคัญรูปแบบหนึ่ง ของการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบต่อเนื่อง ข้อมูลที่มีลักษณะสอดคล้องกับการแจกแจงปกติมีมากมายหลายชนิด ส่วนใหญ่จะเป็นข้อมูลที่พบโดยทั่วไป เช่น ความสูงของคน ผลผลิตของพืช คะแนนการสอบต่าง ๆ ในส่วนของเนื้อหาของการแจกแจงปกติ มีการอธิบายตามหัวข้อดังนี้

ก. เนื้อหาในบทเรียน

กล่าวถึงลักษณะของข้อมูลที่มีการการแจกแจงปกติ และโค้งปกติ ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนการแจกแจงปกติ การแจกแจงปกติมาตรฐาน การหาความน่าจะเป็นจากพื้นที่ใต้โค้งปกติ การประมาณการแจกแจงทวินามด้วยการแจกแจงปกติ และการประมาณการแจกแจงปัวซองด้วยการแจกแจงปกติ ในส่วนของเนื้อหาต่าง ๆ จะมีการยกตัวอย่างประกอบในแต่ละส่วน

ข. ตัวอย่างในบทเรียน

ตัวอย่างต่าง ๆ ที่ปรากฏในเนื้อหา จะนำมาจัดกลุ่มของตัวอย่างการแจกแจงปกติ เพื่อสะดวกในการค้นหาตัวอย่าง บางตัวอย่างเป็นการนำเอาการแจกแจงปกติไปประยุกต์ใช้กับข้อมูลในหลาย ๆ ลักษณะ ผู้เรียนสามารถเลือกดูตัวอย่างที่สนใจได้

ค. แบบทดสอบ

หลังจากการเรียนจากเนื้อหาและตัวอย่างแล้ว ผู้เรียนสามารถทดสอบความรู้จากแบบทดสอบของการแจกแจงปกติได้ และในขณะเดียวกันก็สามารถที่จะย้อนกลับไปศึกษาบทเรียนที่เกี่ยวข้องกับแบบทดสอบนั้น ๆ ได้ โดยเลือกศึกษาจากเมนูด้านซ้ายหรือกรณีที่ต้องการคำอธิบายวิธีทำแบบทดสอบในข้อนั้น ๆ ก็สามารถเลือกคลิกที่เมนู Help จากแถบเมนูตัวเลือกด้านล่างของแบบทดสอบได้ ซึ่งจะปรากฏกรอบหน้าต่าง (Popup window) ที่อธิบายวิธีทำแบบฝึกหัดของข้อนั้น ๆ

ง. ตารางแจกแจงปกติมาตรฐาน

ผู้เรียนสามารถดูตารางการแจกแจงปกติมาตรฐาน ในขณะที่กำลังศึกษาอยู่หรือขณะทำแบบทดสอบ โดยเลือกคลิกออกมาดูค่าความน่าจะเป็นได้จากตาราง เพื่อนำค่าจากตารางไปใช้ประโยชน์ขณะนั้นได้

ตอนที่ 2 การแจกแจงทวินาม

การแจกแจงทวินามเป็นการแจกแจงรูปแบบหนึ่งของการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบไม่ต่อเนื่อง ลักษณะของตัวแปรที่มีการแจกแจงทวินาม จำแนกเป็นเหตุการณ์ที่สนใจ และเหตุการณ์ที่ไม่สนใจ การทดลองที่ง่าย ๆ ได้แก่การโยนเหรียญ n ครั้ง แล้วสังเกตุจำนวนการขึ้นหัวหรือก้อยอย่างใดอย่างหนึ่ง เป็นต้น ในส่วนเนื้อหาของการแจกแจงทวินาม มีการอธิบายตามหัวข้อดังนี้

ก. เนื้อหาในบทเรียน

ในส่วนของเนื้อหาจัดแบ่งออกเป็นส่วนย่อย ๆ ได้แก่ ลักษณะการทดลองแบบทวินามพร้อมการยกตัวอย่าง ฟังก์ชันความน่าจะเป็นทวินาม ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนการคำนวณความน่าจะเป็นจากฟังก์ชัน และการใช้ตารางทวินามแทนการคำนวณด้วยฟังก์ชันพร้อมยกตัวอย่างลักษณะต่าง ๆ

ข. ตัวอย่างในบทเรียน

ในส่วนของตัวอย่างในบทเรียน เป็นการรวบรวมตัวอย่างต่าง ๆ ที่มีในเนื้อหาแยกออกมาเป็นส่วนของตัวอย่าง เพื่อสะดวกในการทบทวนอีกครั้งหนึ่ง

ค. แบบทดสอบ

เมื่อผู้เรียนผ่านเนื้อหาและตัวอย่างในบทเรียนแล้ว สามารถทดสอบความรู้ในส่วนของแบบทดสอบนี้ได้ และมีเฉลยแบบทดสอบแต่ละข้อสามารถคลิกดูได้ทันทีเมื่อต้องการคำอธิบาย

ง. ตารางการแจกแจงทวินาม

ผู้เรียนสามารถหาค่าความน่าจะเป็น โดยไม่ต้องคำนวณจากฟังก์ชันการแจกแจงทวินาม แต่สามารถดูได้จากตารางการแจกแจงทวินาม ซึ่งเป็นตารางที่แสดงค่าความน่าจะเป็นตามค่า n และ p โดยเลือกจากเมนูในส่วนของการแจกแจงทวินาม

ตอนที่ 3 การแจกแจงปัวซอง

การแจกแจงปัวซองเป็นรูปแบบหนึ่งของการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบไม่ต่อเนื่อง โดยที่ทราบค่าเฉลี่ยของจำนวนความสำเร็จที่เกิดขึ้นต่อหน่วยหนึ่ง ซึ่งอาจเป็นเวลา พื้นที่หรือขอบเขตหนึ่ง ในส่วนเนื้อหาการแจกแจงปัวซองแบ่งเป็นส่วนต่าง ๆ ดังนี้

ก. เนื้อหาในบทเรียน

ในส่วนนี้มีการอธิบายลักษณะการแจกแจงแบบปัวซอง ลักษณะโดยทั่วไปของตัวแปรที่มีลักษณะการแจกแจงปัวซอง ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของการแจกแจงปัวซอง ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงปัวซอง คุณสมบัติเฉพาะของปัวซองที่เรียกว่า reproductive properties การประมาณการแจกแจงทวินามด้วยการแจกแจงปัวซองพร้อมกับยกตัวอย่างการคำนวณความน่าจะเป็นต่าง ๆ

ข. ตัวอย่างในบทเรียน

ในส่วนของตัวอย่างมีลักษณะการหาความน่าจะเป็น โดยตัวแปรสุ่มมีค่าใด ๆ หรือการหาค่าความน่าจะเป็นระหว่างช่วงของค่าตัวแปรที่สนใจ และมีตัวอย่างการประมาณการแจกแจงทวินามด้วยการแจกแจงปัวซอง

ค. แบบทดสอบ

เมื่อผู้เรียนเข้าใจเนื้อหาการแจกแจงปัวซองแล้ว สามารถทำการทดสอบจากแบบทดสอบ โดยผู้เรียนทำการทดสอบได้ด้วยตนเอง เช่นเดียวกับการแจกแจงปกติและทวินาม ถ้าหากต้องการตรวจสอบคำตอบสามารถเลือกจากเมนูบนหน้าจอได้

ง. ตารางการแจกแจงปัวซอง

ในการหาความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปัวซอง โดยใช้ตารางปัวซอง สามารถเลือกดูได้จากเมนู ตารางปัวซองแสดงค่าความน่าจะเป็นเรียงตามค่าพารามิเตอร์ λ เราสามารถนำค่าในตารางไปใช้ได้โดยไม่ต้องคำนวณจากฟังก์ชันความน่าจะเป็น

2.2 การสร้างโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

ผู้วิจัยได้ดำเนินการสร้างโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนการแจกแจงปกติ การแจกแจงทวินาม และการแจงแจกปัวซองตามขั้นตอนดังนี้

2.2.1 ศึกษาและวางแผนระบบโปรแกรม

2.2.2 เลือกภาษาที่ใช้พัฒนาโปรแกรม

2.2.3 ศึกษาเทคนิคและจัดรูปแบบการนำเสนอบทเรียน

2.2.4 จัดรูปแบบการเชื่อมโยงเนื้อหาที่เกี่ยวข้องและสัมพันธ์กัน

2.2.5 ศึกษาเทคนิคและจัดรูปแบบของแบบการทดสอบพร้อมเฉลย

2.2.6 การสร้างโปรแกรม

2.2.7 ทดสอบโปรแกรม

2.2.8 เขียนคู่มือการใช้โปรแกรมสำหรับผู้ใช้

2.2.1 ศึกษาและวางแผนระบบโปรแกรม

ในการจัดทำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอน ผู้วิจัยพิจารณาความเหมาะสมในหลาย ๆ ประเด็น เพื่อให้ได้บทเรียนที่สามารถเรียนจากสื่อคอมพิวเตอร์ ประเด็นที่สำคัญประเด็นหนึ่งคือ ผู้เรียนสามารถหาอ่านหรือเรียนรู้ได้ง่ายจากคอมพิวเตอร์ โดยไม่เกิดความยุ่งยากในเรื่องของซอฟแวร์ด้วย ผู้วิจัยพิจารณาว่าในปัจจุบันนี้เป็นยุคข้อมูลข่าวสารที่ระบบเครือข่ายคอมพิวเตอร์ได้มีบทบาทอย่างกว้างขวาง และใช้กันอย่างแพร่หลายในวงการศึกษา ธุรกิจ และอื่น ๆ อีกมากมาย ระบบดังกล่าวคือ อินเทอร์เน็ต ผู้วิจัยจึงทำการพัฒนาโปรแกรมเพื่อใช้ในระบบอินเทอร์เน็ต หรืออินทราเน็ต เพื่อที่นักศึกษาสามารถค้นคว้าและอ่านได้ และสามารถใช้ได้กับคอมพิวเตอร์ทั่วไปที่เชื่อมโยงในระบบอินเทอร์เน็ต เพียงแต่ทราบว่าบทเรียนอยู่ใน เว็บไซต์ใดเท่านั้น ผู้เรียนสามารถเลือกเข้าไปศึกษาได้ทันที

2.2.2 เลือกภาษาที่ใช้พัฒนาโปรแกรม

สำหรับภาษาที่พัฒนาเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนการแจกแจงปกติ การแจกแจงทิวนาม และการแจกแจงปัวซอง ผู้วิจัยใช้ภาษา HTML ซึ่งย่อมาจากคำว่า Hyper Text Markup Language เป็นภาษาที่นิยมใช้กันทั่วไปบนอินเทอร์เน็ต แฟ้มเอกสาร HTML ที่สร้างขึ้นสามารถนำไปแสดงผลได้ด้วยโปรแกรมเว็บเบราเซอร์ เช่น โปรแกรม Netscape Navigator หรือ Mosaic โปรแกรมเว็บเบราเซอร์ ถูกนำมาใช้อย่างแพร่หลายบนอินเทอร์เน็ต สามารถแสดงผลในรูปของข้อความ รวมทั้งการผสมผสานภาพและเสียงเข้าไปด้วย นอกจากนี้ยังสามารถทำงานแบบโต้ตอบกับผู้ใช้ (interactive) อีกด้วย การพัฒนาโปรแกรมด้วยภาษา HTML มีความสามารถในการแสดงภาพเคลื่อนไหว ในการอธิบายด้วยรูปภาพหรือกราฟ จะทำให้ผู้เรียนเกิดความสนใจยิ่งขึ้น และสามารถเขียนโปรแกรมเพื่อเสริมแต่งเว็บเพจให้สวยงามได้ คุณสมบัติที่น่าสนใจอีกอย่างหนึ่งของภาษา HTML คือ สามารถเชื่อมโยงเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกันหรือสัมพันธ์กันได้ดี ทำให้เกิดการต่อเนื่องในด้านการศึกษา

การสร้างโปรแกรมช่วยสอนนี้ นอกจากจะใช้ภาษา HTML แล้วยังมีบางส่วนของการแสดงผลจะใช้ภาษา JavaScript เข้ามาเสริมเพื่อให้การแสดงผลดึงดูดความสนใจมากขึ้น เช่น การขอความช่วยเหลือในกรณีที่ไม่สามารถแก้ปัญหาโจทย์แบบฝึกหัดได้ จะแสดงเป็น

หน้าต่างเล็ก ๆ (Popup window) เสริมขึ้นมาเมื่อผู้เรียนทำความเข้าใจกับการแก้โจทย์ปัญหา แล้วปิด window นั้น กลับเข้ามาสู่เนื้อหาที่ศึกษาค้างไว้ต่อไป หรือการนำเอา JavaScript มาช่วยในการทำเมนู ที่ดูน่าสนใจคือ เมื่อเลื่อนเมาส์ผ่านรายการเลือก จะทำให้รายการเลือกเปลี่ยนสีไปเป็นสีอื่น เพื่อดึงดูดความสนใจ เป็นต้น

ในส่วนของรูปภาพประกอบเนื้อหาต้องใช้โปรแกรมที่มีความสามารถทางด้านกราฟฟิคโดยเฉพาะ เช่น โปรแกรม Paint ที่มีอยู่ใน Window 95 สามารถสร้างภาพที่เป็นเส้นโค้ง เป็นต้น และนำภาพที่ได้ไปตัดต่อและปรับสภาพให้เป็นรูปภาพแบบโปร่งแสง มีส่วนขยายของแฟ้มข้อมูลเป็น gif เพื่อนำไปใช้การแสดงผลข้อความ (textmode) นอกจากนี้ภาพบางภาพที่ต้องการความเคลื่อนไหวเพื่อให้ดูน่าสนใจ จะต้องใช้โปรแกรม Gif Animation ช่วยสร้างภาพเคลื่อนไหว ซึ่งจะสามารถนำไปใช้ร่วมกับภาษา HTML ได้

2.2.3 ศึกษาเทคนิคและจัดรูปแบบการนำเสนอบทเรียน

การจัดรูปแบบเพื่อแสดงเนื้อหาในบทเรียนเป็นเรื่องสำคัญ ผู้เรียนจะศึกษาจากคอมพิวเตอร์ ในขณะที่ศึกษาอยู่นั้นจะต้องรู้ว่ากำลังอยู่ในส่วนใดของโปรแกรม ดังนั้นจึงต้องทำการแบ่งหน้าจอออกเป็นสองส่วน ในส่วนแรกจะเป็นหน้าต่างของเมนู ซึ่งมีทั้งเมนูหลัก และเมนูย่อย กับอีกส่วนหนึ่งคือ หน้าต่างของเนื้อหาในบทเรียน ในส่วนของบทเรียนจะจัดแบ่งออกเป็นไฟล์เล็ก ๆ ประกอบกันเข้าจนเป็นเนื้อหาในแต่ละตอน ในขณะที่ศึกษาจากหน้าจอคอมพิวเตอร์จึงมีหน้าต่างอยู่สองหน้าต่าง ดูได้ไปพร้อมกัน เมื่อใดที่ต้องการออกจากบทเรียนในส่วนนั้นเพื่อไปดูส่วนอื่นก็สามารถเลือกที่เมนูย่อยในหน้าต่างด้านซ้ายมือได้ทันที

ในการนำเสนอบทเรียน บางส่วนมีการอธิบายด้วยโค้งฟังก์ชัน หรือพื้นที่ใต้โค้งจะต้องมีการใช้เทคนิคการแทรกรูปกราฟเข้ามา เพื่อก่อให้เกิดความเข้าใจเพิ่มขึ้น

2.2.4 จัดรูปแบบการเชื่อมโยงเนื้อหาที่เกี่ยวข้องและสัมพันธ์กัน

ในบทเรียน จะมีเนื้อหาบางส่วนที่ต้องการอธิบายเพิ่มเติม หรือโยงเนื้อหาไปยังส่วนอื่น ๆ เพื่อทำให้เกิดความเข้าใจมากขึ้น จึงต้องทำเนื้อหาหรือข้อความให้เป็นลักษณะพิเศษเด่นขึ้นมา เพื่อเปิดโอกาสให้ผู้เรียนเลือกคลิกเข้าไปสู่เนื้อหาที่เป็นส่วนอธิบายเพิ่มเติม หากผู้เรียนทราบแล้วก็ไม่จำเป็นต้องเลือกคลิกก็ได้ การอธิบายสูตรทางคณิตศาสตร์ก็มีข้อความให้เลือกว่าต้องการพิสูจน์สูตรหรือไม่ หากไม่ต้องการสามารถผ่านไปได้โดยไม่คลิกในส่วนที่ต้องการพิสูจน์ การจัดรูปแบบในลักษณะนี้จะต้องวางแผนว่าจะเชื่อมโยงเนื้อหาในส่วนใดไปส่วนใดต่อไป

2.2.5 ศึกษาเทคนิค และจัดรูปแบบของแบบการทดสอบพร้อมเฉลย

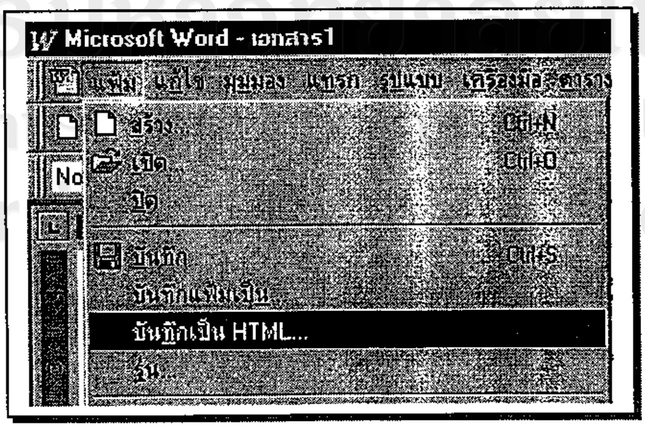
หลังจากการศึกษา ส่วนของเนื้อหาในบทเรียนแต่ละส่วนคือ การแจกแจงปกติ การแจกแจงทวินาม และการแจกแจงปัวซอง ผู้เรียนสามารถเลือกทำแบบทดสอบได้ด้วยตัวเอง แบบทดสอบเป็นแบบปรนัยให้เลือก 4 คำตอบ ก ข ค และ ง หากผู้เรียนเลือกข้อคำตอบแล้ว จะมีการโต้ตอบว่าถูกหรือผิด ถ้าหากต้องการตรวจสอบคำตอบที่ถูกต้องในข้อนั้นก็สามารถเลือกเข้าไปดูได้

2.2.6 การสร้างโปรแกรม

โปรแกรมช่วยสอนนี้ สร้างขึ้นโดยยึดหลักของภาษา HTML เป็นภาษาแกน โดยมีเครื่องมือ หรือโปรแกรมที่ช่วยในการสร้าง แยกได้เป็น 4 ส่วนคือ

1. ส่วนของเนื้อหา ซึ่งแสดงผลเป็นข้อความ , สัญลักษณ์ ต่าง ๆ
2. ส่วนของภาพนิ่ง
3. ส่วนของภาพเคลื่อนไหว
4. ส่วนของเทคนิคการแสดงผลหน้าจอ

1. ส่วนของเนื้อหา ในส่วนนี้จะประกอบไปด้วยเนื้อหา (contents) ซึ่งส่วนใหญ่จะแสดงผลในรูปของข้อความ (text mode) แต่มีบางส่วนจำเป็นต้องแสดงผลเป็นรูปภาพ (graphics) เช่น สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ หรือสัญลักษณ์ทางสถิติต่าง ๆ เครื่องมือที่สำคัญในการสร้างส่วนนี้ คือ โปรแกรม Microsoft Word รุ่น 97 ซึ่งนำมาใช้พิมพ์เนื้อหาทั้งหมด และมีความสามารถในด้านการพิมพ์สัญลักษณ์ต่าง ๆได้ดี การจัดพิมพ์เนื้อหาในเบื้องต้น จะบันทึกเป็นแฟ้มข้อมูลเอกสาร (.doc) จากนั้นจะนำแฟ้มข้อมูลที่ได้มาทำการแบ่งเป็นแฟ้มย่อย ๆ ตามความเหมาะสมเนื้อหาที่จะนำเสนอ จากนั้นนำแฟ้มข้อมูลย่อย ๆ เหล่านั้นมาแปลงเป็นแฟ้มเอกสาร htm ซึ่งในโปรแกรม Microsoft Word จะมีเครื่องมือสำหรับแปลงแฟ้มข้อมูลเอกสารเป็น source code ที่มีส่วนขยายเป็น htm ได้ ดังรูป



การแปลงแฟ้มเอกสาร เป็น source code ของ HTML นั้นในส่วนที่เป็นสัญลักษณ์ต่าง ๆ จะถูกแปลงเป็นแฟ้มประเภทรูปภาพมีส่วนขยายเป็น gif แต่การแสดงผลโดยรวมยังไม่สมบูรณ์ เช่น วรรคตอนไม่ถูกต้อง ขนาดของตัวอักษรยังไม่ดีพอ การวางตำแหน่งรูปภาพที่เป็นสัญลักษณ์ต่าง ๆ ยังไม่ถูกตำแหน่งนัก จึงต้องมีการปรับรูปแบบการแสดงผลอีกครั้งโดยใช้โปรแกรม Netscape Composer เป็นโปรแกรมสำหรับปรับแต่ง เพิ่มเติมรูปภาพ สีพื้น สีตัวอักษร และอื่นๆ ให้เหมาะสมอีกทีหนึ่ง

2. ส่วนของภาพนิ่ง

จากเนื้อหาในข้อ 1 บางส่วนของเนื้อหาจำเป็นต้องมีภาพประกอบ เพื่อสร้างความเข้าใจให้แก่ผู้เรียน เช่นภาพ เส้นโค้งต่าง ๆ การสร้างภาพเส้นโค้งต่าง ๆ จะใช้โปรแกรมสำหรับสร้าง 2 โปรแกรมด้วยกันคือ โปรแกรม Paint ที่ติดตั้งมาพร้อมกับโปรแกรม Microsoft Windows 95 อีกโปรแกรมหนึ่งคือ Adobe Photoshop ทั้งสองโปรแกรมมีความสามารถในการจัดการเกี่ยวกับการสร้าง ตกแต่ง แก้ไขรูปภาพได้ดี รูปภาพที่สร้างขึ้นจะต้องบันทึกอยู่ในรูปแบบที่มีส่วนขยายเป็น jpg หรือ gif จึงจะสามารถแสดงผลร่วมกับภาษา HTML ได้

3. ส่วนของภาพเคลื่อนไหว

การสร้างภาพเคลื่อนไหว มีขั้นตอนเหมือนกับการสร้างภาพนิ่งในข้อ 2 แต่จะมีความยุ่งยากมากกว่า เพราะต้องสร้างภาพนิ่งหลาย ๆ ภาพที่นำมาเรียงกันแล้วจะได้ภาพที่สมบูรณ์ เช่นเดียวกันกับการสร้างภาพยนต์การ์ตูน โปรแกรมที่ใช้ในการสร้างภาพเคลื่อนไหว มี 3 โปรแกรมคือ โปรแกรม Paint , โปรแกรม Adobe Photoshop และที่เพิ่มขึ้นมาคือ โปรแกรม Gif Animator ที่ใช้สำหรับรวมภาพนิ่งต่าง ๆ มาแสดงแบบต่อเนื่องเป็นภาพเคลื่อนไหว

4. ส่วนของเทคนิคการแสดงผลหน้าจอภาพ

ในส่วนนี้เป็นส่วนที่สำคัญที่สุด เพราะต้องมีการวางแผน และออกแบบการนำเสนอต่าง ๆ ให้เหมาะสม การจัดแบ่งหน้าจอภาพ (frame) การจัดทำการเชื่อมโยง (link) การวางตำแหน่งของรูปภาพ ซึ่งในส่วนนี้จะต้องอาศัยความรู้ในการเขียนโปรแกรมภาษา HTML นอกจากนี้ยังต้องมีความรู้ในการใช้ภาษา JavaScript เพื่อเป็นการเสริมแต่งให้การแสดงผลดูดีและน่าสนใจยิ่งขึ้น

ตัวอย่างที่ 1 โปรแกรมภาษา HTML ในการแบ่งจอภาพออกเป็น 2 ส่วน คือ ส่วนซ้าย แสดงผลแฟ้มข้อมูลที่ชื่อ lift.htm ในพื้นที่ 25 % ของจอภาพ และส่วนขวาแสดงผลแฟ้มข้อมูล right.htm ในพื้นที่ 75 % ของจอภาพ

```
<HTML>
<FRAMESET COLS="25%,*">
        <FRAME src="left.htm" NAME="LEFT" SCROLLING="NO" MARGINHEIGHT=0
MARGINWIDTH=0 >
        <FRAME src="right.htm" NAME="MAIN" MARGINHEIGHT=15 MARGINWIDTH=20>
</FRAMESET>
</HTML>
```

ตัวอย่างที่ 2 โปรแกรมภาษา HTML แฟ้มข้อมูล left.htm แสดงการแบ่งหน้าจอภาพทางด้านซ้ายจากที่ได้ในตัวอย่างที่ 1 ออกเป็น 2 ส่วนคือส่วนบนแสดงผลแฟ้มข้อมูล logo.htm 27 % ของพื้นที่ด้านซ้าย และส่วนล่างแสดงผลแฟ้มข้อมูล normal.htm

```
<HTML>
<HEAD>
<TITLE>Introduction Statistic</TITLE>
</HEAD>
<FRAMESET ROWS="27%,*" BORDER=0 FRAMEBORDER="NO" FRAMESPACING=0>
        <FRAME src=" logo.htm" NAME="LEFT_TOP" SCROLLING="NO"
                FRAMEBORDER="NO" MARGINHEIGHT=0 MARGINWIDTH=0>
        <FRAME src="normal.htm" NAME="LEFT_DOWN" SCROLLING="YES"
                FRAMEBORDER="NO" SCROLLING="AUTO" MARGINHEIGHT=0
        MARGINWIDTH=0>
</FRAMESET>
</HTML>
```

ตัวอย่างที่ 3 โปรแกรมภาษา HTML แฟ้มข้อมูล logo.htm แสดงผลในส่วนบนซ้ายของจอภาพที่ถูกแบ่งโดยตัวอย่างที่ 2

```
<HTML>
<Title>
        Logo
</Title>
<BODY BACKGROUND="pic\CultTextL.jpg">
<FONT SIZE=-2></FONT> 
<CENTER><TABLE BORDER=0 COLS=1 WIDTH="26%" >
<TR>
<TD ALIGN=CENTER VALIGN=TOP><IMG SRC="pic\stat3.gif" HEIGHT=34 WIDTH=145>
</TD>
</TR>
</TABLE></CENTER>
<CENTER><B><FONT FACE="EucrosiaUPC">
<A HREF="table.htm" TARGET="LEFT_DOWN">Table</A></FONT></B></CENTER>
<CENTER><B><FONT FACE="EucrosiaUPC">
<A HREF="right.htm" TARGET=" MAIN">Main Menu</A></FONT></B></CENTER>
</BODY>
</HTML>
```

ตัวอย่างที่ 4 การแสดงผลของแฟ้มข้อมูล HTML จำนวน 5 แฟ้มข้อมูลรวมกันคือ

index.htm , left.htm , logo.htm , normal.htm , right.htm

2.2.7 ทดสอบโปรแกรม

เมื่อทำโครงสร้างทั้งหมดและสร้างเนื้อหา ตลอดจนการเชื่อมโยงไฟล์ต่าง ๆ เสร็จแล้ว จะทำการทดสอบโปรแกรม และการเชื่อมโยงของโปรแกรมต่าง ๆ ว่าทำงานตามความต้องการหรือไม่ เมื่อทำการปรับปรุงให้เสร็จแล้ว ได้ทดลองใช้งานโดยให้นักศึกษาปริญญาตรีสาขาวิชาสถิติ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ จำนวน 10 คน ทดลองใช้โปรแกรมที่สร้างขึ้น และประเมินผลความพึงพอใจในการใช้โปรแกรมดังกล่าวแล้วนำผลที่ได้พร้อมข้อเสนอแนะมาปรับปรุงโปรแกรมให้ดีขึ้น

2.2.8 เขียนคู่มือการใช้โปรแกรมสำหรับผู้ใช้และรายงานการวิจัย

สร้างคู่มือการใช้โปรแกรมสำหรับผู้ใช้โปรแกรม เพื่อให้ผู้ใช้ได้ทราบว่า จะพบเห็นข้อความหรือข้อเลือกเช่นใด จะเลือกคลิกข้อความต่าง ๆ ได้ ผู้ใช้จะได้ทราบขอบเขตการใช้งานของโปรแกรมดังกล่าวนี้ และเขียนรายงานการวิจัยซึ่งเป็นการสรุปงานที่ได้ดำเนินการทั้งหมด

บทที่ 3
ผลการวิจัย

ในการพัฒนาโปรแกรมช่วยสอนการแจกแจงปกติ การแจกแจงทวินามและการแจกแจงปัวซอง เป็นการพัฒนาสื่อด้านการเรียนการสอนในสาขาสถิติโดยใช้คอมพิวเตอร์เข้ามาช่วยในการสอน ผลการวิจัยได้โปรแกรมช่วยสอนในสาขาวิชาสถิติเบื้องต้น ที่มีการผสมผสานกันระหว่างเนื้อหาสถิติ ภาพนิ่ง ภาพเคลื่อนไหว และเสียง อันเป็นรูปแบบการเรียนการสอนแบบใหม่

ในส่วนของการสร้างโปรแกรมมีการออกแบบโครงสร้างของโปรแกรม โดยจัดทำข้อมูลเป็นแฟ้มย่อย ๆ เสียก่อน แต่ละแฟ้มของข้อมูลมีความแตกต่างกันขึ้นยอู่กับว่าแฟ้มนั้นมีลักษณะเป็นข้อความหรือรูปภาพ โปรแกรมที่พัฒนาจนสำเร็จนี้ ได้มาจากการเชื่อมโยงแฟ้มข้อมูลที่สร้างขึ้นมาทั้งหมด

การพัฒนาโปรแกรมช่วยสอนมี 2 ส่วน คือ ส่วนของเนื้อหาวิชาการสถิติ และส่วนการจัดทำโปรแกรม

3.1 เนื้อหาวิชาการสถิติ

ประกอบด้วยส่วนต่าง ๆ ดังนี้

3.1.1 เนื้อหาวิชาสถิติแบ่งเป็น 3 ตอนคือ การแจกแจงปกติ การแจกแจงทวินาม และการแจกแจงปัวซอง

3.1.2 ตัวอย่างประกอบเนื้อหาในแต่ละตอน

3.1.3 แบบทดสอบในแต่ละตอน

3.1.4 ตารางการแจกแจงความน่าจะเป็นของการแจกแจงปกติ การแจกแจงทวินาม และการแจกแจงปัวซอง

เนื้อหาในหัวข้อ 3.1.1 - 3.1.4 แสดงไว้ในภาคผนวก

3.2 โปรแกรมและแฟ้มข้อมูล

การจัดทำโปรแกรมประกอบด้วยแฟ้มข้อมูลที่สร้างขึ้นจากโปรแกรมต่าง ๆ ดังนี้

3.2.1 โปรแกรมที่นำมาใช้ในการพัฒนาโปรแกรมช่วยสอน ได้แก่

ก. Microsoft word รุ่น 97

ข. Paint

ค. Adobe Photoshop

ง. Gif Animator

จ. โปรแกรมภาษา HTML และ JavaScript

3.2.2 จำนวนแฟ้มข้อมูลที่สร้างขึ้นมีจำนวนทั้งหมด 1,074 แฟ้ม ประกอบด้วยแฟ้มต่าง ๆ ดังนี้

ก. แฟ้มที่เป็นข้อความ ซึ่งมีส่วนขยายของแฟ้มเป็น htm จำนวน 395 แฟ้ม

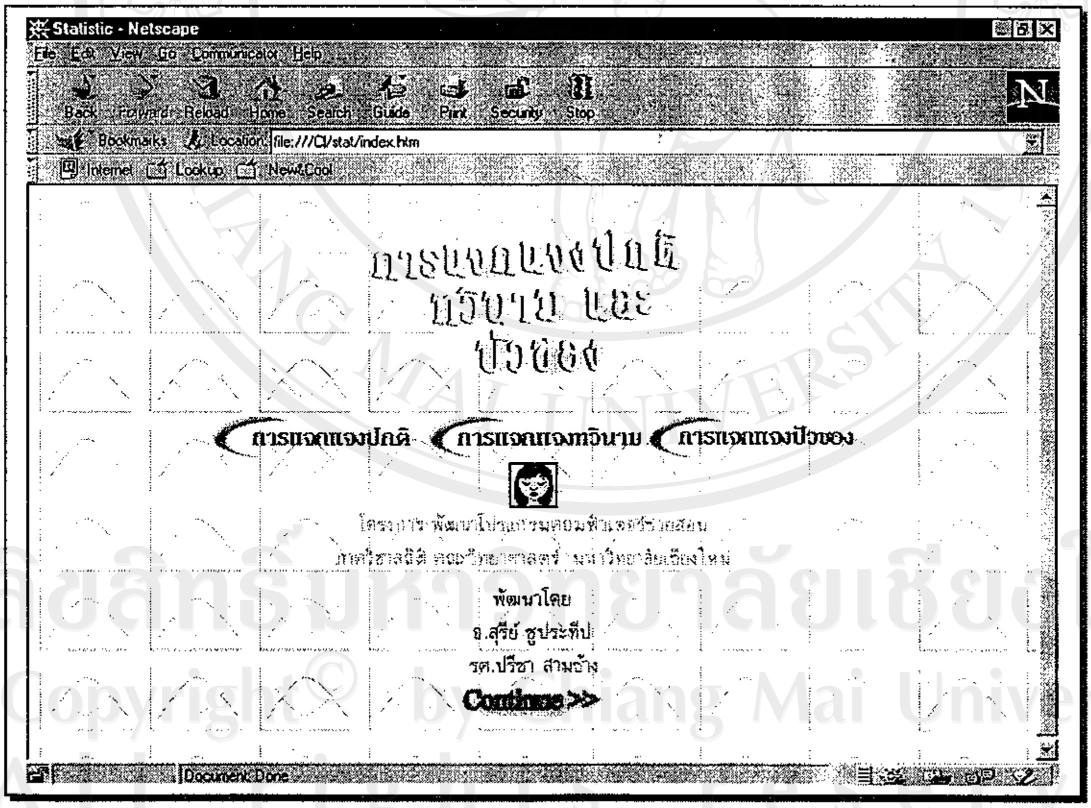
ข. แฟ้มรูปภาพ ซึ่งมีส่วนขยายของแฟ้มเป็น gif , jpg และ bmp จำนวน 632 แฟ้ม

ค. แฟ้มรูปภาพ ซึ่งมีส่วนขยายของแฟ้มเป็น jpg จำนวน 20 แฟ้ม

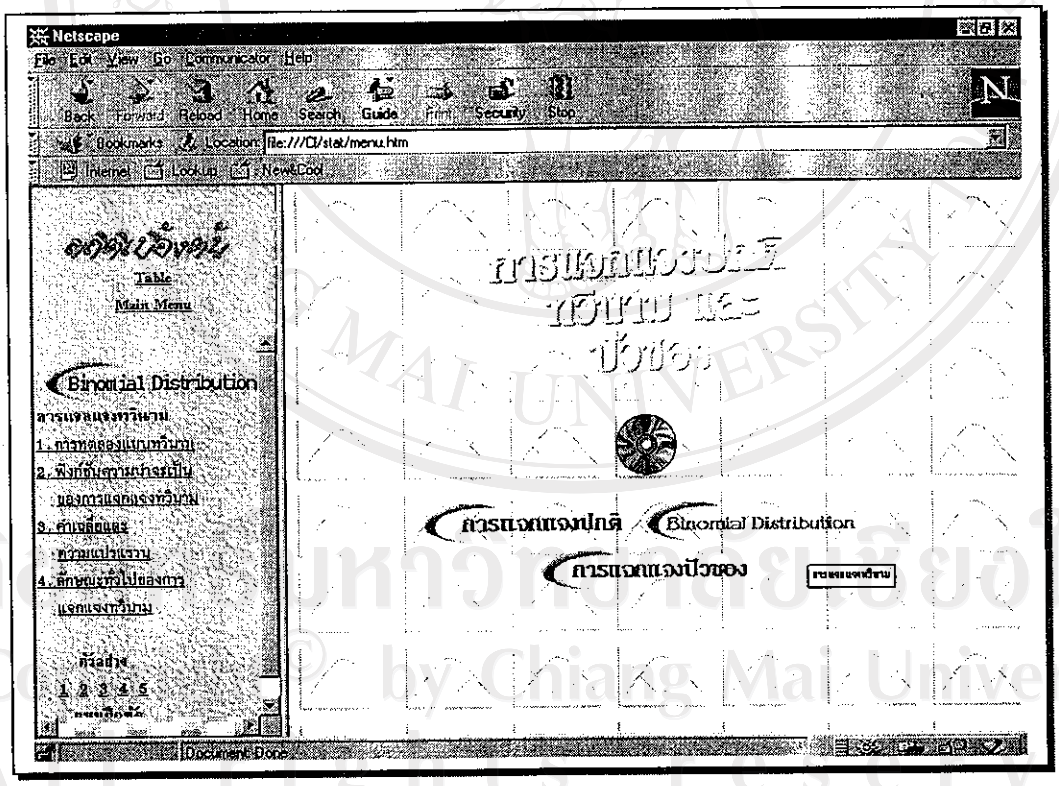
โปรแกรมที่พัฒนาขึ้นนี้จะถูกนำไปจัดเก็บในเว็บไซท์ของคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ นักศึกษาที่สนใจจะศึกษา สามารถศึกษาผ่านระบบอินเทอร์เน็ตได้

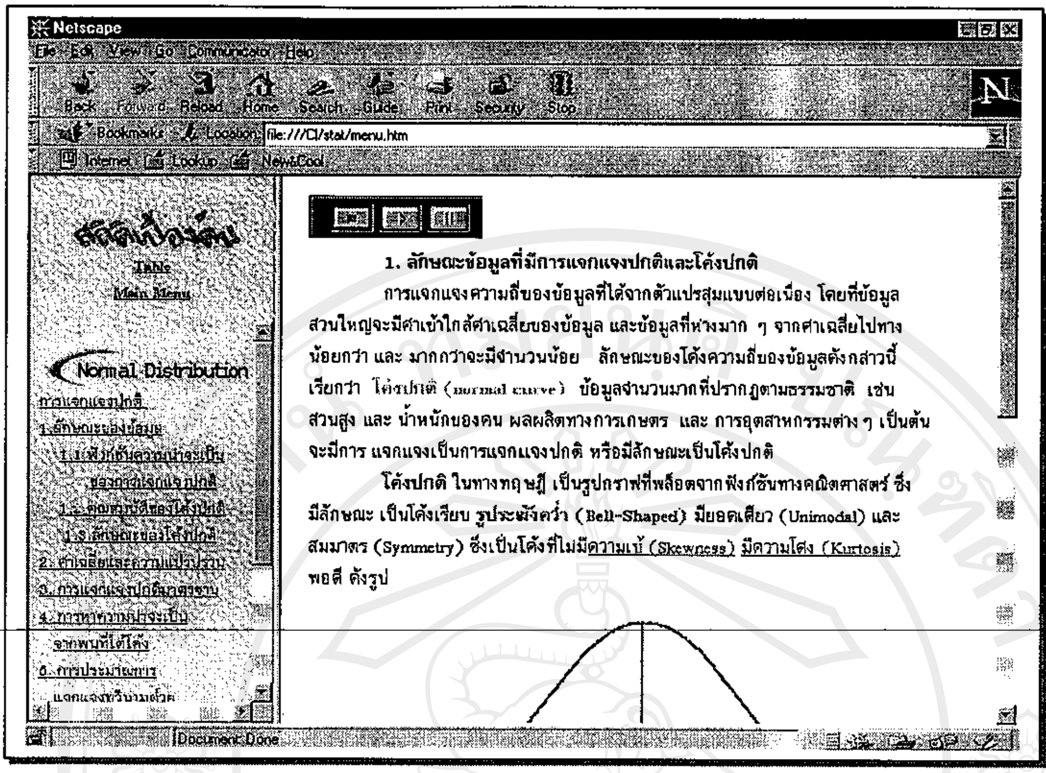
3.3 ผลการพัฒนาโปรแกรม

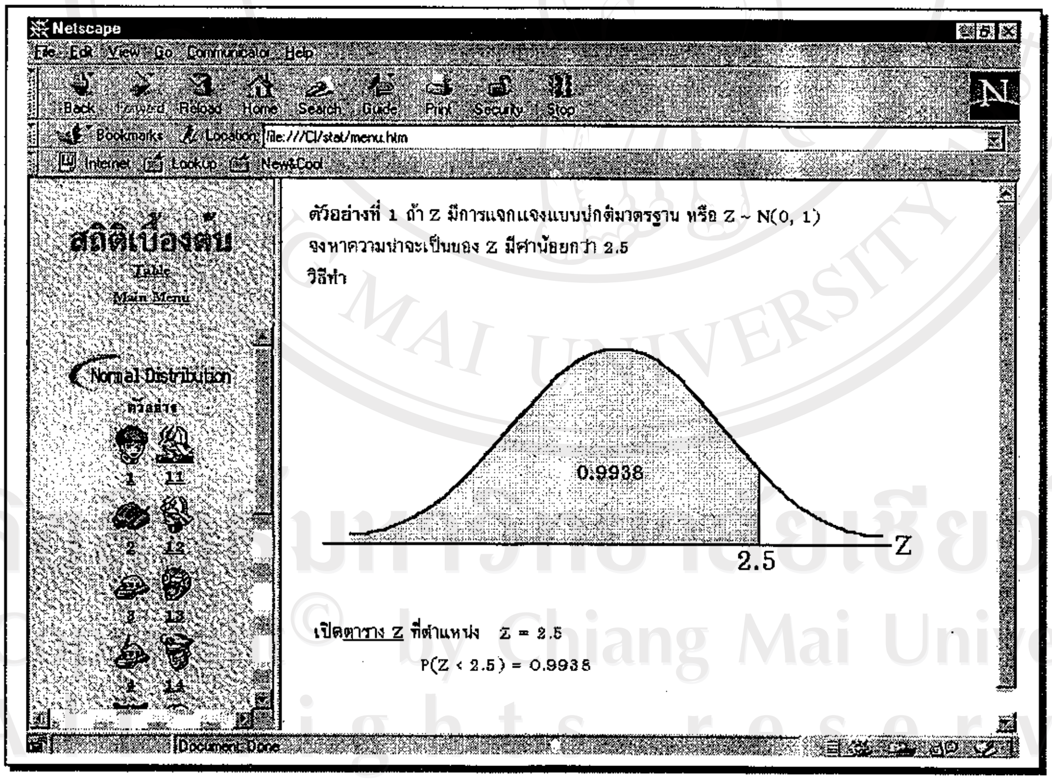
โปรแกรมที่สร้างเสร็จเมื่อนำมาอ่านด้วยโปรแกรมเบราเซอร์จะได้ภาพที่ปรากฏหน้าจอ แสดงโดยสังเขป ดังนี้

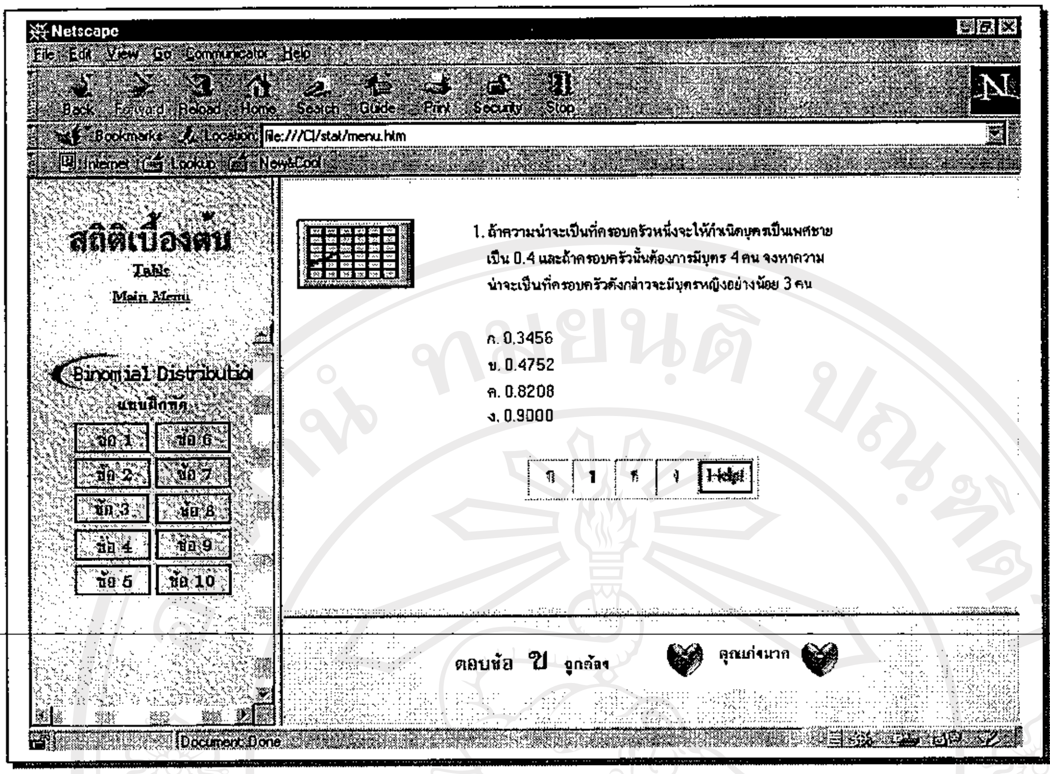


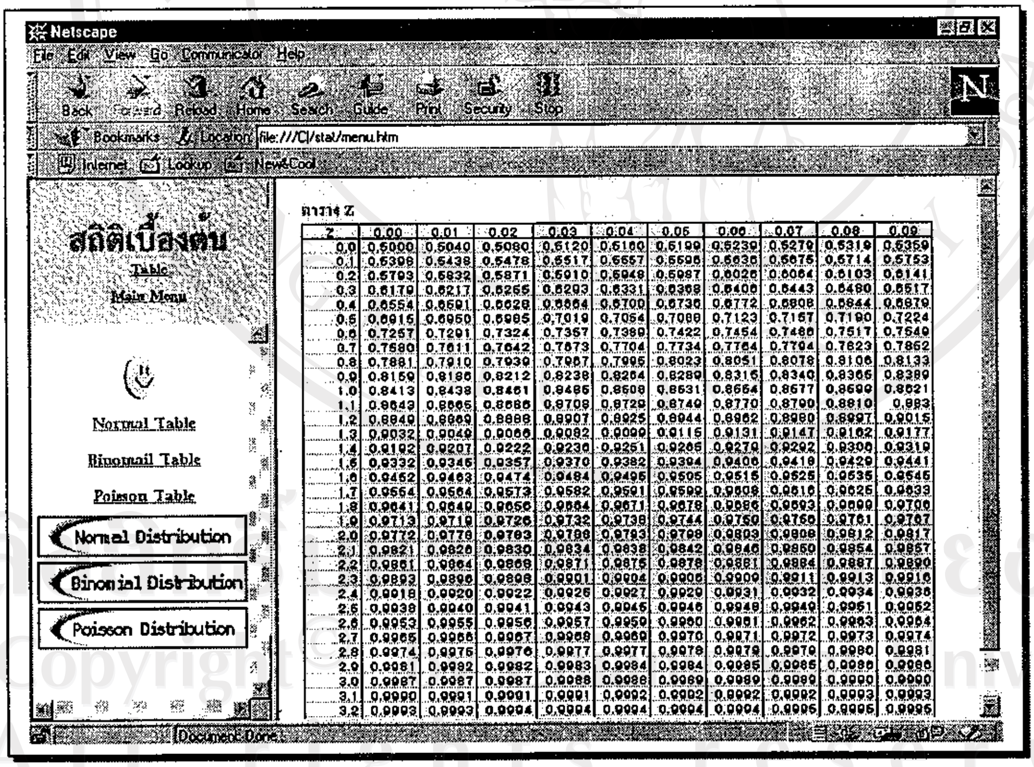

Netscape
File Edit View Go Communicator Help
Back Forward Reload Home Search Guide Print Security Stop
Bookmarks Location: file:///C|/stat/menu.htm
Internet Lookup New&Cool
Table
Main Menu
Normal Distribution
การแจกแจงปกติ
การแจกแจงทวินาม
การแจกแจงปัวซอง
Document: Done


Netscape
File Edit View Go Communicator Help
Back Forward Reload Home Search Guide Print Security Stop
Bookmarks Location: file:///C|/stat/menu.htm
Internet Lookup New&Cool
Table
Main Menu
Binomial Distribution
การแจกแจงปกติ
Binomial Distribution
การแจกแจงปัวซอง
Document: Done


Netscape
File Edit View Go Communicator Help
Back Forward Reload Home Search Guide Print Security Stop
Bookmarks Location: file:///C|/stat/menu.htm
Internet Lookup New&Cool
Table
Main Menu
Normal Distribution
1. ลักษณะข้อมูลที่มีการแจกแจงปกติและโค้งปกติ
การแจกแจงความถี่ของข้อมูลที่ได้จากตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง โดยที่ข้อมูลส่วนใหญ่จะมีค่าเข้าใกล้ค่าเฉลี่ยของข้อมูล และข้อมูลที่ห่างมาก ๆ จากค่าเฉลี่ยไปทางน้อยกว่า และ มากกว่าจะมีจำนวนน้อย ลักษณะของโค้งความถี่ของข้อมูลดังกล่าวนี้ เรียกว่า โค้งปกติ (normal curve) ข้อมูลจำนวนมากที่ปรากฏตามธรรมชาติ เช่น ส่วนสูง และ น้ำหนักของคน ผลผลิตทางการเกษตร และ การอุตสาหกรรมต่าง ๆ เป็นต้น จะมีการ แจกแจงเป็นการแจกแจงปกติ หรือมีลักษณะเป็นโค้งปกติ
โค้งปกติ ในทางทฤษฎี เป็นรูปกราฟที่พล็อตจากฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ ซึ่งมีลักษณะ เป็นโค้งเรียบ รูประฆังคว่ำ (Bell-Shaped) มียอดเดียว (Unimodal) และ สมมาตร (Symmetry) ซึ่งเป็นโค้งที่ไม่มีความเบ้ (Skewness) มีความโด่ง (Kurtosis) พอดี ดังรูป
Document: Done


Netscape
File Edit View Go Communicator Help
Back Forward Reload Home Search Guide Print Security Stop
Bookmarks Location: file:///C|/stat/menu.htm
Internet Lookup New&Cool
สถิติเบื้องต้น
Table
Main Menu
Normal Distribution
ตัวอย่างที่ 1 ถ้า Z มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน หรือ Z ~ N(0, 1)
จงหาความน่าจะเป็นของ Z มีค่าน้อยกว่า 2.5
วิธีทำ
0.9938
2.5
Z
เปิดตาราง Z ที่ตำแหน่ง Z = 2.5
P(Z < 2.5) = 0.9938
Document: Done


Netscape
File Edit View Go Communicator Help
Back Forward Reload Home Search Guide Print Security Stop
Bookmarks Location: file:///C|/stat/menu.htm
Internet Lookup New&Cool
สถิติเบื้องต้น
Table
Main Menu
Binomial Distributio
แบบฝึกหัด
ข้อ 1 ข้อ 6
ข้อ 2 ข้อ 7
ข้อ 3 ข้อ 8
ข้อ 4 ข้อ 9
ข้อ 5 ข้อ 10
1. ถ้าความน่าจะเป็นที่ครอบครัวหนึ่งจะให้กำเนิดบุตรเป็นเพศชาย
เป็น 0.4 และถ้าครอบครัวนั้นต้องการมีบุตร 4 คน จงหาความ
น่าจะเป็นที่ครอบครัวดังกล่าวจะมีบุตรหญิงอย่างน้อย 3 คน
ก. 0.3456
ข. 0.4752
ค. 0.8208
ง. 0.9000
ก ข ค ง Help!
ตอบข้อ ข ถูกต้อง
คุณเก่งมาก
Document: Done


Netscape
File Edit View Go Communicator Help
Back Forward Reload Home Search Guide Print Security Stop
Bookmarks Location: file:///C|/stat/menu.htm
Internet Lookup New&Cool
สถิติเบื้องต้น
Table
Main Menu
Normal Table
Binomail Table
Poisson Table
Normal Distribution
Binomial Distribution
Poisson Distribution
ตาราง Z
Z 0.00 0.01 0.02 0.03 0.04 0.05 0.06 0.07 0.08 0.09
0.0 0.5000 0.5040 0.5080 0.5120 0.5160 0.5199 0.5239 0.5279 0.5319 0.5359
0.1 0.5398 0.5438 0.5478 0.5517 0.5557 0.5596 0.5636 0.5675 0.5714 0.5753
0.2 0.5793 0.5832 0.5871 0.5910 0.5948 0.5987 0.6026 0.6064 0.6103 0.6141
0.3 0.6179 0.6217 0.6255 0.6293 0.6331 0.6368 0.6406 0.6443 0.6480 0.6517
0.4 0.6554 0.6591 0.6628 0.6664 0.6700 0.6736 0.6772 0.6808 0.6844 0.6879
0.5 0.6915 0.6950 0.6985 0.7019 0.7054 0.7088 0.7123 0.7157 0.7190 0.7224
0.6 0.7257 0.7291 0.7324 0.7357 0.7389 0.7422 0.7454 0.7486 0.7517 0.7549
0.7 0.7580 0.7611 0.7642 0.7673 0.7704 0.7734 0.7764 0.7794 0.7823 0.7852
0.8 0.7881 0.7910 0.7939 0.7967 0.7995 0.8023 0.8051 0.8078 0.8106 0.8133
0.9 0.8159 0.8186 0.8212 0.8238 0.8264 0.8289 0.8315 0.8340 0.8365 0.8389
1.0 0.8413 0.8438 0.8461 0.8485 0.8508 0.8531 0.8554 0.8577 0.8599 0.8621
1.1 0.8643 0.8665 0.8686 0.8708 0.8729 0.8749 0.8770 0.8790 0.8810 0.883
1.2 0.8849 0.8869 0.8888 0.8907 0.8925 0.8944 0.8962 0.8980 0.8997 0.9015
1.3 0.9032 0.9049 0.9066 0.9082 0.9099 0.9115 0.9131 0.9147 0.9162 0.9177
1.4 0.9192 0.9207 0.9222 0.9236 0.9251 0.9265 0.9279 0.9292 0.9306 0.9319
1.5 0.9332 0.9345 0.9357 0.9370 0.9382 0.9394 0.9406 0.9418 0.9429 0.9441
1.6 0.9452 0.9463 0.9474 0.9484 0.9495 0.9505 0.9515 0.9525 0.9535 0.9545
1.7 0.9554 0.9564 0.9573 0.9582 0.9591 0.9599 0.9608 0.9616 0.9625 0.9633
1.8 0.9641 0.9649 0.9656 0.9664 0.9671 0.9678 0.9686 0.9693 0.9699 0.9706
1.9 0.9713 0.9719 0.9726 0.9732 0.9738 0.9744 0.9750 0.9756 0.9761 0.9767
2.0 0.9772 0.9778 0.9783 0.9788 0.9793 0.9798 0.9803 0.9808 0.9812 0.9817
2.1 0.9821 0.9826 0.9830 0.9834 0.9838 0.9842 0.9846 0.9850 0.9854 0.9857
2.2 0.9861 0.9864 0.9868 0.9871 0.9875 0.9878 0.9881 0.9884 0.9887 0.9890
2.3 0.9893 0.9896 0.9898 0.9901 0.9904 0.9906 0.9909 0.9911 0.9913 0.9916
2.4 0.9918 0.9920 0.9922 0.9925 0.9927 0.9929 0.9931 0.9932 0.9934 0.9936
2.5 0.9938 0.9940 0.9941 0.9943 0.9945 0.9946 0.9948 0.9949 0.9951 0.9952
2.6 0.9953 0.9955 0.9956 0.9957 0.9959 0.9960 0.9961 0.9962 0.9963 0.9964
2.7 0.9965 0.9966 0.9967 0.9968 0.9969 0.9970 0.9971 0.9972 0.9973 0.9974
2.8 0.9974 0.9975 0.9976 0.9977 0.9977 0.9978 0.9979 0.9979 0.9980 0.9981
2.9 0.9981 0.9982 0.9982 0.9983 0.9984 0.9984 0.9985 0.9985 0.9986 0.9986
3.0 0.9987 0.9987 0.9987 0.9988 0.9988 0.9989 0.9989 0.9989 0.9990 0.9990
3.1 0.9990 0.9991 0.9991 0.9991 0.9992 0.9992 0.9992 0.9992 0.9993 0.9993
3.2 0.9993 0.9993 0.9994 0.9994 0.9994 0.9994 0.9994 0.9995 0.9995 0.9995
Document: Done

บรรณานุกรม

จิตเกษม พัฒนาศิริ. **เริ่มสร้างโฮมเพจด้วย HTML**. กรุงเทพมหานคร : บริษัทวิตตี้กรุ๊ปจำกัด , 2537.

จิตเกษม พัฒนาศิริ. **เสริมแต่งโฮมเพจให้มีชีวิตชีวาด้วย JavaScript**. กรุงเทพมหานคร : บริษัทวิตตี้กรุ๊ปจำกัด , 2541.

ปรีชา ล่ามช้าง . **สถิติสำหรับสังคมศาสตร์** . มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ , 2538.

มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ คณะวิทยาศาสตร์ คณาจารย์ภาควิชาสถิติ. **สถิติเบื้องต้น** . มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ , 2541.

วิสาข์ เกษประทุม. **ความน่าจะเป็นและสถิติเบื้องต้น** . กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์พัฒนาศึกษา.

สุรีย์ ชูประทีป . **สถิติพื้นฐาน** . มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ , 2542.

อำพล ธรรมเจริญ . **ทฤษฎีความน่าจะเป็นและสถิติ**. กรุงเทพมหานคร : โอเอสพริ้นติ้ง, 2526 .

E.A.Maxwell , Introduction to Statistical Thinking , Prentice-Hall inc., Englewood Cliffs,New Jersey, 1983.

ภาคผนวก

ในส่วนของภาคผนวกประกอบด้วยส่วนต่าง ๆ ดังนี้

ก. คู่มือการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอน เรื่องการแจกแจงปกติ การแจกแจงทวินาม และการแจกแจงปัวซอง

ข. เนื้อหาการแจกแจงปกติ การแจกแจงทวินาม และการแจกแจงปัวซอง

ค. ตารางการแจกแจงปกติ

ง. ตารางการแจกแจงทวินาม

จ. ตารางการแจกแจงปัวซอง

ฉ. ประวัติผู้วิจัย

คู่มือการใช้โปรแกรม

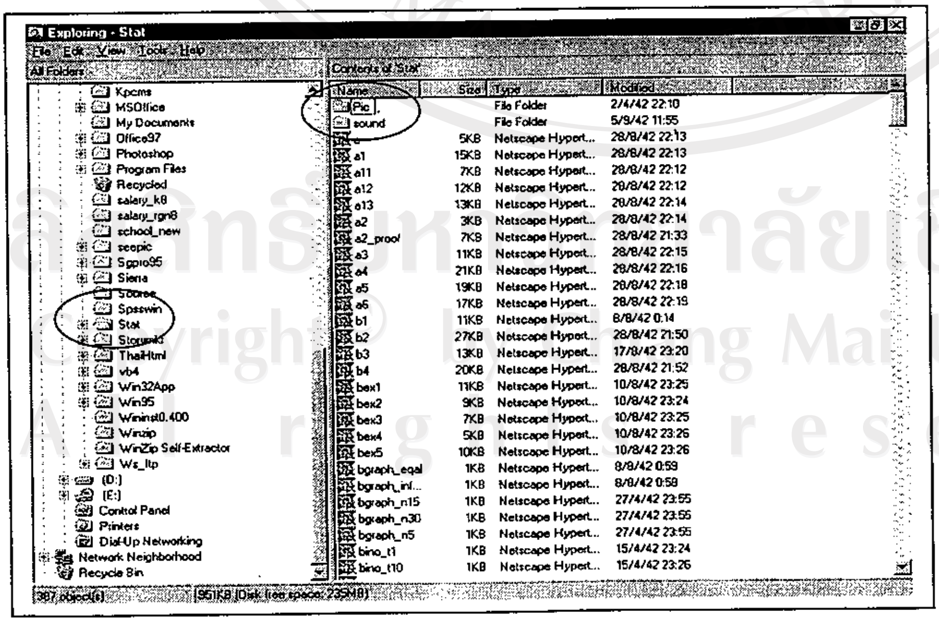
1. คุณสมบัติของโปรแกรม

เนื่องจากโปรแกรมนี้เป็นโปรแกรมที่พัฒนาด้วยภาษา HTML ซึ่งเป็นภาษาสากล ที่ใช้สำหรับเผยแพร่ข้อมูลบน Internet โดยทั่วไป ดังนั้นการใช้งาน โปรแกรมชุดนี้จะต้องมีโปรแกรมที่เรียกว่า เบราเซอร์ (Browser) เพื่อใช้อ่านข้อมูลอีกทีหนึ่ง สำหรับเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ไม่มีโปรแกรมเบราเซอร์ ขอแนะนำให้ทำการติดตั้งโปรแกรม เบราเซอร์ที่ชื่อว่า Netscape Communication รุ่น 4.03 ขึ้นไป ซึ่งจะเหมาะสมกับโปรแกรม CAI นี้ โดยสามารถติดตั้งจากแผ่น Compact Disc ที่แนบมากับโปรแกรมชุดนี้ หรือ ดาวน์โหลด (Down load) ได้ฟรีจาก www.netscape.com ส่วนโปรแกรมเบราเซอร์ อื่น ๆ การใช้งานอาจมีปัญหาการแสดงภาษาไทย นอกจากนี้เพื่อความสมบูรณ์ในการแสดงผล ขอแนะนำให้ปรับการแสดงความละเอียดของจอภาพ เป็น 800 X 600 แสดงสีอย่างน้อย 256 สี

2. การติดตั้งและใช้งาน

2.1 การติดตั้งโปรแกรมจากแผ่น Compact Disc ลง Hard disk

การติดตั้งโปรแกรมลง Hard disk สามารถทำได้โดยการคัดลอกไฟล์ทั้งหมด ลงใน Hard disk ทั้งนี้รวมทั้งไฟล์ที่อยู่ใน Folder pic และ Folder sound ซึ่งเมื่อคัดลอกแล้วจะต้องมีไฟล์และโฟลเดอร์ ตัวอย่างเช่นคัดลอกไฟล์ไว้ในโฟลเดอร์ที่ชื่อว่า Stat ดังนั้นภายในโฟลเดอร์ Stat จะต้องมีโฟลเดอร์ pic และ sound อยู่ด้วย ดังรูป

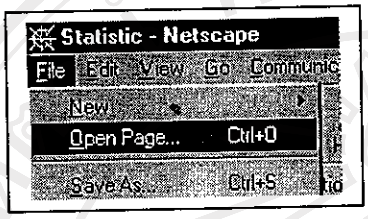


2.2 เริ่มต้นการใช้งานจาก Hard disk หรือใช้งาน โดยตรงจากแผ่น Compact Disc

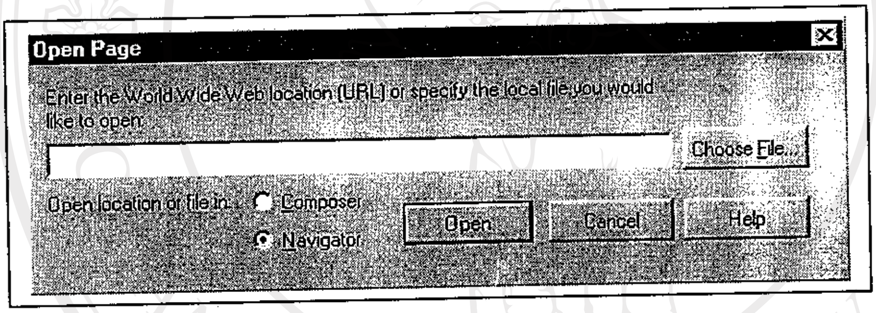
ผู้ใช้สามารถใช้งานโปรแกรมได้จาก Hard disk ที่ติดตั้งโปรแกรมตามขั้นตอนที่ 2.1 หรือใช้งานโดยตรงจาก Compact Disc โดยมีขั้นตอนดังนี้

2.2.1 เปิดโปรแกรมเบราเซอร์ Netscape Communication

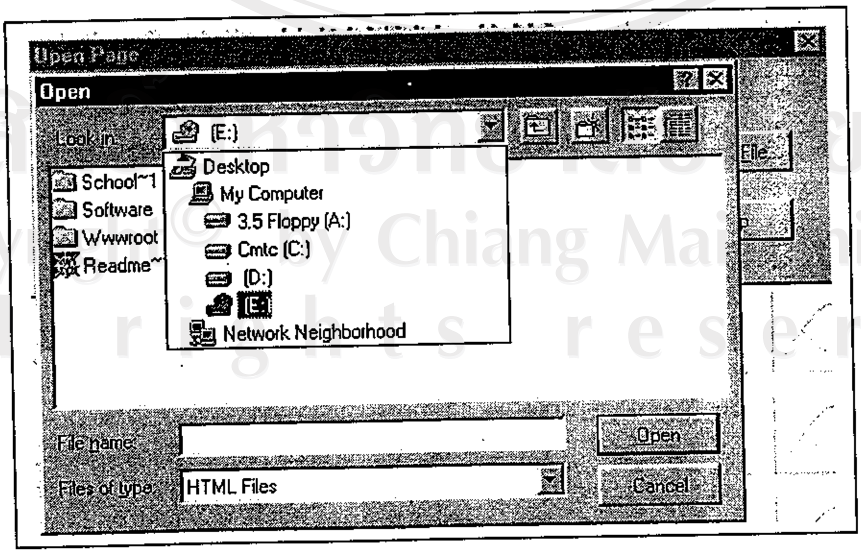
2.2.2 ที่เมนู File เลือก Open Page ดังรูป

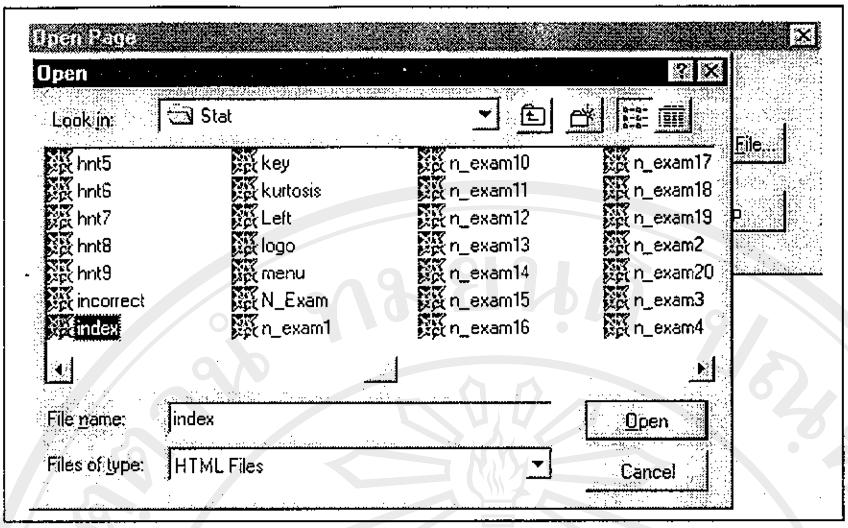


2.2.3 เมื่อปรากฏหน้าต่างให้เลือกแฟ้มข้อมูล

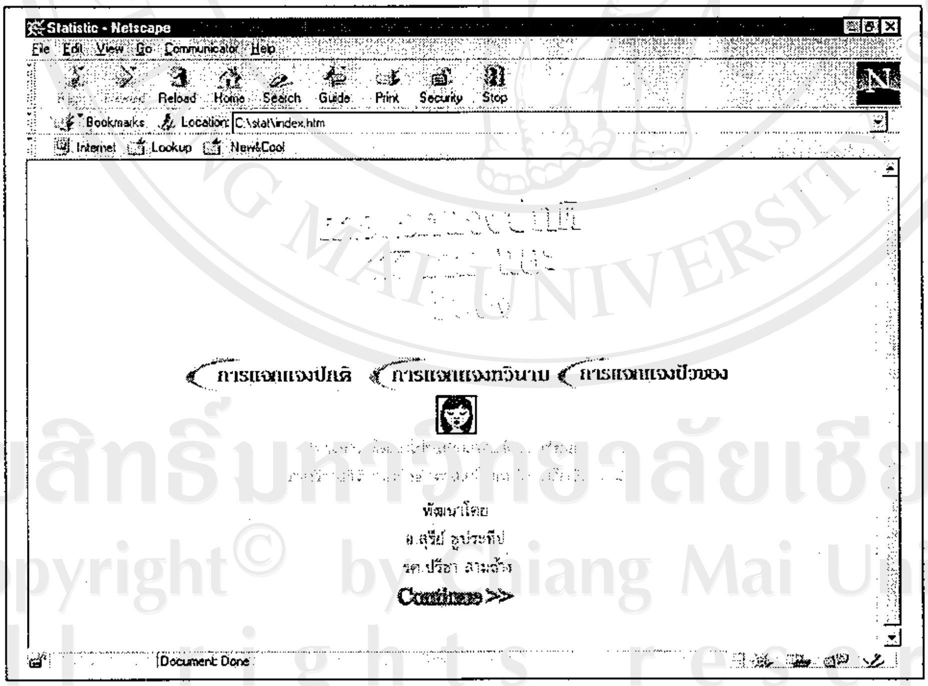


2.2.4 กดปุ่ม **Choose File...** จะปรากฏหน้าต่างให้เลือกไฟล์ที่ชื่อ **index.htm** ซึ่งอยู่ใน Folder **Statistics** จาก Hard disk หรือ Drive ที่เก็บแผ่น Compact Disc แล้วกดปุ่ม **Open**





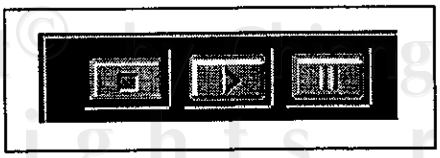
2.2.5 โปรแกรมจะแสดงหน้าแรกของโปรแกรม ซึ่งถ้าเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ใช้งานมีระบบเสียง ก็จะมีเสียงแจ้งเรื่องเกี่ยวกับโปรแกรม ผู้ใช้งานอาจกดปุ่ม Continue เพื่อเชื่อมโยงไปยังเมนู เพื่อเรียนเนื้อหาต่อไป



3. การเข้าถึงเนื้อหาที่ต้องการเรียน

3.1 จากเมนู จะพบว่ามีการแบ่งส่วนของหน้าจอภาพออกเป็น 2 ส่วน คือส่วนซ้าย และส่วนขวา ในส่วนขวาจะเป็นเมนูหลัก ผู้ใช้สามารถเลือกเนื้อหาที่จะเรียนได้ 3 เรื่อง คือ การแจกแจงปกติ การแจงแจงทวินาม และการแจกแจงปัวซอง โดยการคลิกเมาส์ 1 ครั้งที่หัวข้อนั้น ๆ สำหรับส่วนซ้ายของจอภาพจะเป็นเมนูย่อยของเนื้อหาที่เลือกจากเมนูหลัก จะสังเกตุว่าในหัวข้อย่อยจะเป็นตัวหนังสือที่ขีดเส้นใต้ และเมื่อนำตัวชี้ของเมาส์ไปวางบนหัวข้อนั้น ๆ ตัวชี้ของเมาส์จะเปลี่ยนเป็นรูปมือ ซึ่งแสดงว่ามีการเชื่อมโยงข้อมูลไปยังเนื้อหาที่เกี่ยวข้อง ผู้ใช้สามารถคลิกเมาส์ตรงส่วนนั้น ๆ เพื่อเข้าไปศึกษาเนื้อหาที่เกี่ยวข้องได้

3.2 ในกรณีที่เครื่อคอมพิวเตอร์ที่ใช้ติดตั้งระบบเสียงไว้ด้วย ในหัวข้อที่สำคัญ ๆ ผู้เรียนจะสามารถขอฟังเสียงอธิบายได้ จากปุ่มเล่นเสียงที่ปรากฏอยู่ในหน้านั้น ๆ

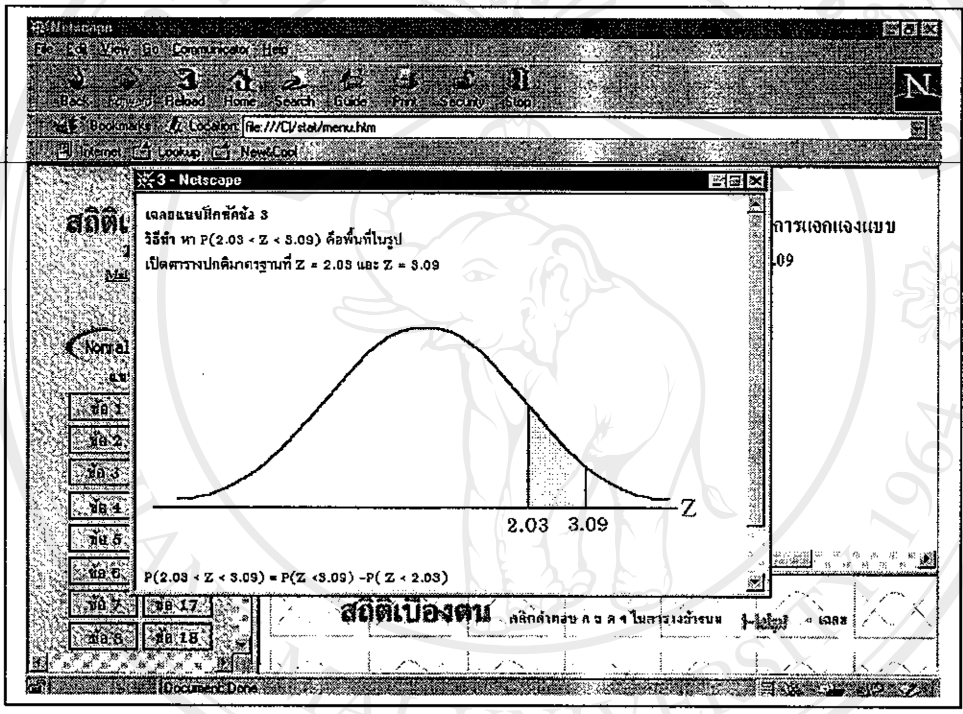


4. การทำแบบฝึกหัด ในแต่ละเรื่องจะมีแบบฝึกหัดท้ายบท เพื่อให้ผู้เรียนได้ทดสอบความรู้ที่ได้เรียนมา โดยสามารถเลือกได้จากเมนูต่อจากรายการย่อยส่วนซ้ายของจอภาพ

เมื่อคลิกรายการ แบบฝึกหัด จะได้เมนูของแบบฝึกหัดทุกข้อขึ้นมา ผู้เรียนสามารถเลือกทำข้อใดก่อนก็ได้โดยไม่ต้องเรียงลำดับ โดยการคลิกที่ตารางคำตอบ ก ข ค ง

ในกรณีที่ผู้เรียนต้องการขอความช่วยเหลือหรือต้องการทราบคำตอบว่าแต่ละข้อมีวิธีการคิดอย่างไร ก็สามารถเลือกคลิกที่ตารางคำตอบในช่อง **Help!** จะมีหน้าต่างเฉลยวิธีทำแบบฝึกหัดผุดขึ้นมา เมื่อผู้เรียนได้ศึกษาเฉลยเสร็จแล้วต้องทำการปิดหน้าต่างโดยการคลิกที่ปุ่มรูป **X** มุมบนด้านขวาของหน้า

ต่างที่ผุดขึ้น ถ้าไม่ทำการปิดหน้าต่างนี้เมื่อทำข้อต่อไปจะทำให้หน้าต่างถูกเปิดค้างไว้และถูกนำไปไว้ด้านหลังของหน้าต่างหลัก ซึ่งมีผลในการขอความช่วยเหลือครั้งต่อไปถูกบังอยู่ด้านหลังไม่สามารถเห็นได้ วิธีแก้ไขกรณีนี้คือให้ย่อหน้าต่างหลักลง (คลิกที่ปุ่มเครื่องหมาย " – " ที่มุมบนด้านขวามือ)จะพบหน้าต่างเล็กที่แสดงข้อความเฉลยแบบฝึกหัด ให้ปิดหน้าต่างนี้ลง แล้วจึงทำการเปิดหน้าต่างหลักขึ้นมาอีกครั้งหนึ่ง



ในกรณีที่ทำแบบฝึกหัดโดยเลือกคำตอบในตารางคำตอบ ถ้าตอบถูกจะมีข้อความแจ้งให้ทราบในส่วนล่างของจอภาพว่าคำตอบผิด ผู้เรียนสามารถเลือกคำตอบอื่น ๆ ได้อีกจนกว่าจะถูก หรือเลือกขอความช่วยเหลือ (**Help!**)

สรุปหลักการในการใช้งาน

1. ผู้เรียนสามารถเลือรายการที่ต้องการได้โดยการเลื่นตัวชี้ของเมาส์ไปยังตำแหน่งข้อความที่ต้องการ ถ้าตัวชี้ของเมาส์จะเปลี่ยนเป็นรูปมือแสดงว่าในส่วนนั้นมีการเชื่อมโยง (Link) ไปยังเรื่องที่เกี่ยวข้อง ให้คลิกเมาส์ 1 ครั้งเพื่อเข้าสู่เนื้อหานั้น ๆ

2. ผู้เรียนสามารถเลือกฟังเสียงคำบรรยายได้ในกรณีที่หน้านั้น ๆ มีรูปภาพแสดงปุ่มให้เล่นเสียงได้

3. ผู้เรียนสามารถกลับเข้าสู่เมนูหลัก และดูตาราง ได้โดยการคลิกเมาส์ ตำแหน่งข้อความ **Main menu** หรือ **Table** ด้านบนซ้ายของจอภาพ ซึ่งจะแสดงอยู่ตลอดเวลาที่ใช้งาน

4. ในกรณีที่มีการแสดงเนื้อหาย่อย ๆ ที่เป็นการอธิบายความหมายของคำหรือนิยาม แล้วมีหน้าต่างเล็กผุดขึ้น ผู้เรียนต้องทำการปิดหน้าต่างเล็ก ๆ นั้นเมื่ออ่านข้อความจนเข้าใจแล้วโดยการคลิกที่ปุ่ม X ที่มุมบนด้านขวามือก่อนทุกครั้ง

เนื้อหาสถิติแบ่งเป็น 3 ตอน ดังนี้

ตอนที่ 1 การแจกแจงปกติ

ตอนที่ 2 การแจกแจงทวินาม

ตอนที่ 3 การแจกแจงปัวซอง

การแจกแจงปกติ

Normal Distribution

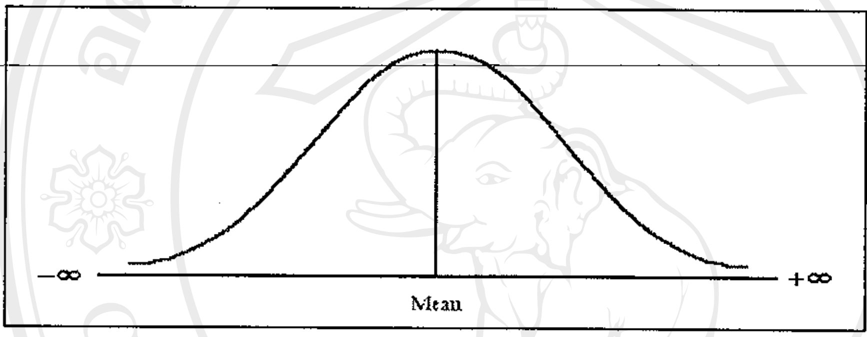
เนื้อหาการแจกแจงปกติ

1. ลักษณะข้อมูลที่มีการแจกแจงปกติและโค้งปกติ
2. ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนการแจกแจงปกติ
3. การแจกแจงปกติมาตรฐาน
4. การหาความน่าจะเป็นจากพื้นที่ใต้โค้งปกติ
5. การประมาณการแจกแจงทวินามด้วยการแจกแจงปกติ
6. การประมาณการแจกแจงปัวซองด้วยการแจกแจงปกติ

1. ลักษณะข้อมูลที่มีการแจกแจงปกติและโค้งปกติ

การแจกแจงความถี่ของข้อมูลที่ได้จากตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง โดยที่ข้อมูลส่วนใหญ่จะมีค่าเข้าใกล้ค่าเฉลี่ยของข้อมูล และข้อมูลที่ห่างมาก ๆ จากค่าเฉลี่ยไปทางน้อยกว่าและมากกว่าจะมีจำนวนน้อย ลักษณะของโค้งความถี่ของข้อมูลดังกล่าวนี้ เรียกว่า **โค้งปกติ** ข้อมูลจำนวนมากที่ปรากฏตามธรรมชาติ เช่น ส่วนสูง และน้ำหนักของคน ผลผลิตทางการเกษตร และการอุตสาหกรรมต่าง ๆ เป็นต้น จะมีการแจกแจงเป็นการแจกแจงปกติ หรือมีลักษณะเป็นโค้งปกติ

โค้งปกติ ในทางทฤษฎี เป็นรูปกราฟที่พล็อตจากฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ ซึ่งมีลักษณะเป็นโค้งเรียบ รูประฆังคว่ำ (Bell-Shaped) มียอดเดียว (Unimodal) และสมมาตร (Symmetry) มีความโด่ง (Kurtosis) พอดี ดังรูป



รูปที่ 1 แสดงรูปโค้งปกติ

การแจกแจงปกตินี้บางทีเรียกว่า Gaussion distribution ชื่อนี้ตั้งขึ้นเพื่อเป็นเกียรติแก่นักคณิตศาสตร์ผู้หนึ่ง ชื่อ Gauss (1777-1855) ซึ่งได้ศึกษาลักษณะของโค้งปกติ และได้สมการโค้งปกติ โดยศึกษาจากความคลาดเคลื่อนของการวัดซ้ำ ๆ ในกลุ่มเดิม

เหตุผลที่การแจกแจงปกติเป็นการแจกแจงที่สำคัญมีดังต่อไปนี้

1. มีตัวแปรสุ่มหลายอย่างที่ได้จากการสังเกต หรือจากการทดลอง มีการแจกแจงปกติ หรือใกล้เป็นการแจกแจงปกติ
2. ตัวแปรสุ่มบางอย่างอาจมีการแจกแจงไม่เป็นการแจกแจงปกติ และไม่ใกล้การแจกแจงปกติ แต่สามารถแปลงให้เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงใกล้การแจกแจงปกติโดยสมการง่าย ๆ
3. การคำนวณค่าความน่าจะเป็นของการแจกแจงบางชนิด เช่น การแจกแจงทวินาม และการแจกแจงปัวซอง สามารถประมาณค่า ด้วยการ แจกแจงปกติ
4. ตัวแปรบางอย่างที่ใช้เป็นรากฐานของการตรวจสอบทางสถิติ มีการแจกแจงปกติ เช่น ค่าความคลาดเคลื่อน

1.1 ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของการแจกแจงปกติ

ตัวแปรสุ่ม X ที่มีลักษณะเป็นการแจกแจงแบบปกติโดยมีค่าพารามิเตอร์ คือ ค่าเฉลี่ย μ และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ ซึ่งฟังก์ชันของความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X จะสามารถกำหนดด้วย

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

โดยที่ π และ e เป็นค่าคงที่

$$\pi = 3.142857\ldots \quad e = 2.71828\ldots$$

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติ มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ □σ□เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $X \sim N(\mu, \sigma)$

ตัวอย่าง ถ้า X มีการแจกแจงแบบปกติ มีค่าเฉลี่ยเป็น 50 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 25 เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ดังนี้ $X \sim N(50, 25)$

1.2 คุณสมบัติของเส้นโค้งปกติ

1. ค่าเฉลี่ย มัธยฐาน และฐานนิยมของข้อมูล จะมีค่าเท่ากันและอยู่ ณ ตำแหน่งตรงกลางของโค้งปกติ

2. เส้นโค้งปกติจะต้องมีความโด่งพอเหมาะโดยถือว่าโค้งปกติควรมีความโด่งในลักษณะ Mesokurtic

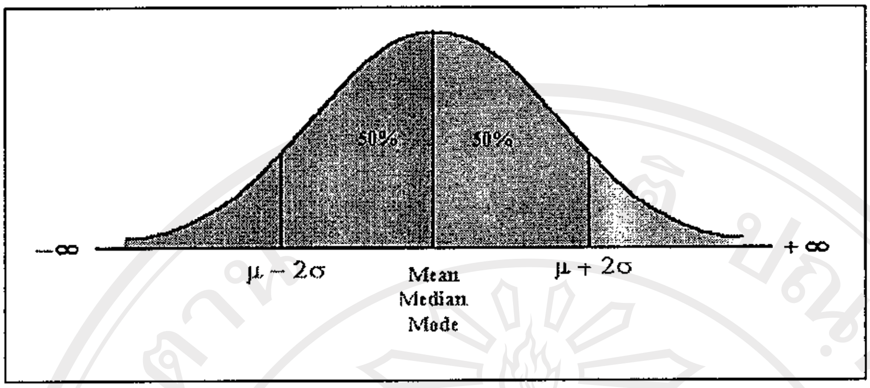
3. เส้นโค้งปกติมีลักษณะคล้ายรูประฆังคว่ำ เส้นโค้งทั้งสองข้างจะมีลักษณะสมมาตรกับแกนตั้งที่ลากผ่านค่าเฉลี่ย เช่น ความสูงของเส้นโค้งตรงจุด $x = \mu + 2\sigma$ จะเท่ากับความสูงของเส้นโค้งตรงจุด $x = \mu - 2\sigma$

4. เส้นโค้งปกติจะไม่มีความเบ้ หรือความเบ้ของเส้นโค้งปกติจะเท่ากับ 0

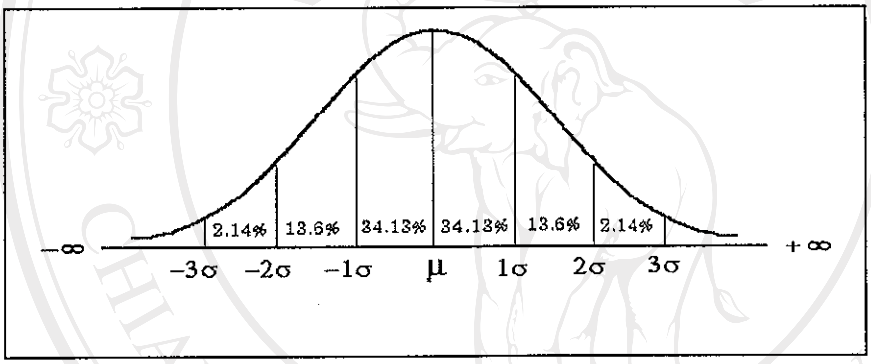
5. เส้นโค้งปกติ จะมีแกน X เป็น Asymptote คือปลายเส้นโค้งทั้งสองข้าง จะไม่ตัดแกน X ไม่ว่า X จะมีค่ามากหรือน้อยเพียงใด

6. พื้นที่ทั้งหมดใต้เส้นโค้งปกติเหนือแกนนอน มีค่าเท่ากับ 1 และ เนื่องจาก เส้นโค้งมีลักษณะสมมาตร ดังนั้น ณ ตำแหน่งที่แบ่งครึ่งตรงกลางหรือตรงค่ามัธยฐานจะมีพื้นที่ข้างละ 0.5 ของพื้นที่ทั้งหมด

7. พื้นที่ใต้โค้งปกติระหว่างจุด $\mu \pm \sigma$ มีประมาณ 68% ของพื้นที่ทั้งหมด และพื้นที่ใต้โค้งปกติระหว่างจุด $\mu \pm 2\sigma$ มีประมาณ 95% ของพื้นที่ทั้งหมด และพื้นที่ใต้โค้งปกติระหว่างจุด $\mu \pm 3\sigma$ มีประมาณ 99% ของพื้นที่ทั้งหมด



รูปที่ 2 แสดงพื้นที่ใต้โค้งปกติสมมาตรที่ค่าเฉลี่ย มัธยฐานและฐานนิยม



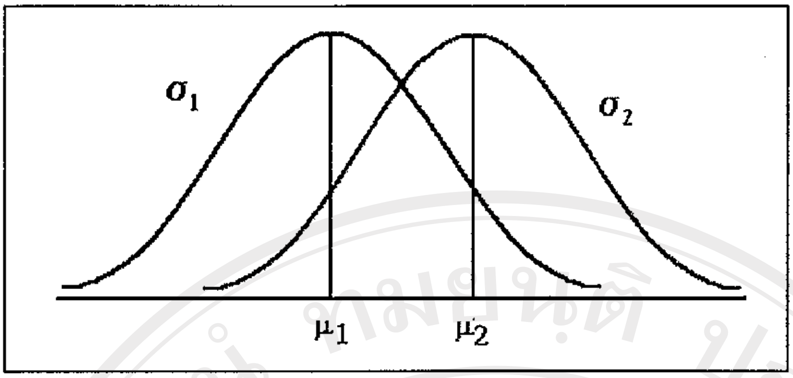
รูปที่ 3 แสดงพื้นที่ใต้โค้งปกติ ณ ตำแหน่งต่าง ๆ

1.3 ลักษณะของโค้งปกติที่มีค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานแตกต่างกัน

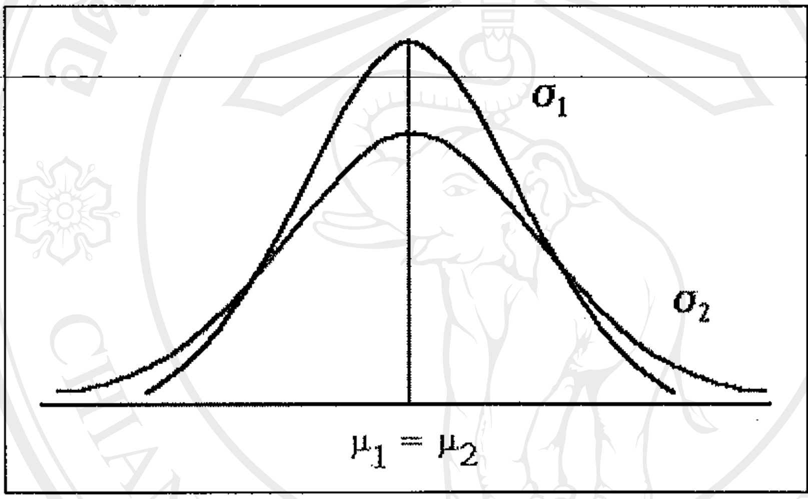
ลักษณะของโค้งปกติจะขึ้นอยู่กับค่าเฉลี่ย (□) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (σ) กล่าวคือ ค่าเฉลี่ยจะบอกตำแหน่งของส่วนสูงสุดของโค้ง และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน จะบอกว่าโค้งปกตินั้นแบนหรือโด่งมากน้อยเพียงใด

จุดเปลี่ยนเว้าของโค้งปกติอยู่ที่จุด $x = \mu \pm \sigma$ ดังนั้นถ้า σ มีค่ามากจุดเปลี่ยนเว้าจะอยู่ห่างจากค่า μ มาก ทำให้โค้งปกตินั้นมีลักษณะแบน แต่ถ้า σ มีค่าน้อย จุดเปลี่ยนเว้าจะอยู่ใกล้ μ โค้งจะมีลักษณะโด่ง

ค่าเฉลี่ย และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ในการระบุตำแหน่งที่ตั้งและรูปร่างของโค้งในลักษณะต่าง ๆ กัน สามารถแสดงได้ ดังรูป

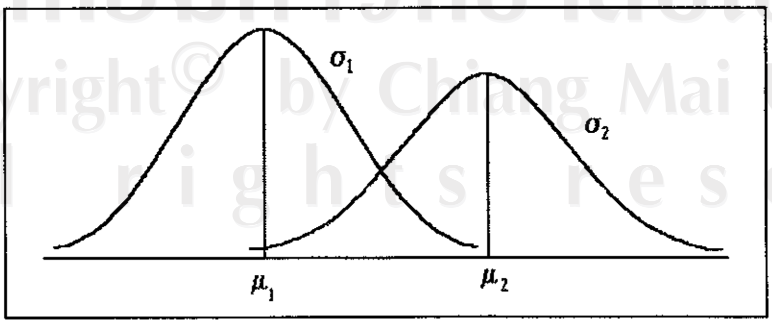


รูปที่ 4 เส้นโค้งปกติที่มี $\mu_1 < \mu_2$ แต่ $\sigma_1 = \sigma_2$



รูปที่ 5 เส้นโค้งปกติที่มี $\mu_1 = \mu_2$ แต่ $\sigma_1 < \sigma_2$

ลักษณะของเส้นโค้งปกติทั้งสองจะแตกต่างกัน เส้นโค้งปกติมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานมากกว่าจะมีลักษณะแบน และลาดต่ำกว่าเส้นโค้งปกติที่มีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานน้อยกว่า แต่ตำแหน่งของจุดยอดอยู่ที่เดียวกัน



รูปที่ 6 เส้นโค้งปกติที่มี $\mu_1 < \mu_2$ และ $\sigma_1 < \sigma_2$

ลักษณะของเส้นโค้งปกติทั้งสองมีตำแหน่งต่างกัน และลักษณะของโค้งก็แตกต่างกัน กล่าวคือ โค้งที่มี σ น้อยกว่าจะสูงหรือโด่งกว่า ส่วนโค้งที่มีค่า σ มากกว่า

2. ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงปกติ

การแจกแจงปกติจะมีค่าเฉลี่ยหรือค่าคาดหวัง และความแปรปรวนเป็นดังนี้

$$E(X) = \mu$$

$$V(X) = \sigma^2$$

พิสูจน์ว่า $E(X) = \mu$

ค่าคาดหวัง $E(X)$ คือค่าเฉลี่ย (mean)

จากนิยาม $$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2} dx$$

กำหนดให้ $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ จะได้ $x = \sigma z + \mu$, $dx = \sigma dz$

ได้ $$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\sigma z + \mu)}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \sigma dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma z}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} \frac{dz^2}{2} + \mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-\frac{1}{2}z^2} \right]_{-\infty}^{\infty} + \mu \cdot 1$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}(0) + \mu$$

$$= \square\square\square\square$$

พิสูจน์ว่าความแปรปรวน $V(X) = \sigma^2$

จากสูตร $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ เราต้องหา $E(X^2)$ ก่อน

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2} dx$$

ให้ $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ เราได้

$$E(X^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma z+\mu)^2 e^{-z^2/2}\ dz$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2/2} dz + \frac{2\mu\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-z^2/2} dz + \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz$$

พจน์กลางเมื่อ integrate แล้วจะมีค่าเป็น 0 เช่นเดียวกับข้างบน

ส่วนพจน์ท้ายเฉพาะ $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2}\ dz$ มีค่าเท่ากับ 1

สำหรับพจน์แรกหาค่าได้ ดังนี้

$$\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2/2}\ dz = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-z^2/2}\ \frac{dz^2}{2}$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z d(-e^{-z^2/2})$$

(Integrate by part)

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left[-ze^{-z^2/2}\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\ dz$$

$$= 0 + \sigma^2 \cdot 1 = \sigma^2$$

ดังนั้นได้ $E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$

ฉะนั้นหา $V(X)$ ได้ดังนี้

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

3. การแจกแจงปกติมาตรฐาน

จากสมการของเส้นโค้งปกติ

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

ในกรณี $\mu = 0$ และ $\sigma = 1$ สมการของเส้นโค้งปกติจะเป็นดังนี้

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

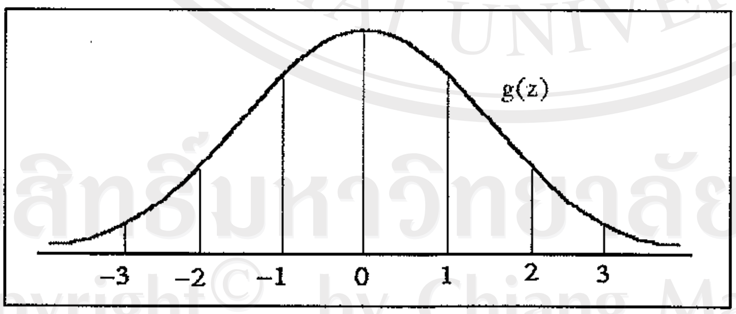
เราจะเรียกการแจกแจงปกติที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และความแปรปรวนเท่ากับ 1 นี้ว่า การแจกแจงปกติมาตรฐาน (standard normal distribution) และโดยปกติมักจะใช้อักษร Z แทนตัวแปรสุ่มของการแจกแจงปกติมาตรฐาน ซึ่งแปลงค่าจากตัวแปรสุ่ม X โดยใช้สูตร

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

จะได้สมการของโค้งปกติมาตรฐานเป็นดังนี้

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad , \quad -\infty < z < \infty$$

เมื่อเขียนกราฟของสมการจะได้ลักษณะของโค้งดังรูป



ค่าเฉลี่ยของการแจกแจงอยู่ที่จุด Z = 0 และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 1 ความแปรปรวนเท่ากับ 1 จุดเปลี่ยนเว้าอยู่ที่จุด Z = -1 และ Z = 1 เนื่องจากการแจกแจงแบบนี้เป็นกรณีเฉพาะของการแจกแจงปกติ ดังนั้นคุณสมบัติต่าง ๆ ก็เป็นเช่นเดียวกันกับการแจกแจงปกติ

ค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของการแจกแจงปกติมาตรฐาน

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปกติ ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ และความแปรปรวนเท่ากับ σ^2 การแปลงค่าตัวแปรสุ่ม X ให้เป็นตัวแปรสุ่มปกติ Z โดยใช้สูตร $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ จะได้ว่า Z มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และความแปรปรวนเท่ากับ 1

สามารถหาค่าเฉลี่ยหรือ E(Z) และความแปรปรวน หรือ V(Z) ดังนี้

$$
\begin{aligned}
E(Z) &= E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) \\
&= \frac{1}{\sigma}E(X-\mu) \\
&= \frac{1}{\sigma}E[(X)-\mu] \\
&= \frac{1}{\sigma}[E(X)-E(\mu)] \\
&= \frac{1}{\sigma}[\mu-\mu] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V(Z) &= V\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) \\
&= \frac{1}{\sigma^2}V(X-\mu) \\
&= \frac{1}{\sigma^2}[V(X)-V(\mu)]
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก $V(X) = \sigma^2$ และ $V(\mu) = 0$

จึงได้ $V(Z) = \frac{1}{\sigma^2}[\sigma^2]$

$$= 1$$

4. การหาความน่าจะเป็นจากพื้นใต้โค้งปกติ

การหาพื้นที่ใต้โค้งปกติ ของการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่องที่อยู่ระหว่าง X = a และ X = b เท่ากับการหาความน่าจะเป็นระหว่าง X = a และ X = b ก็

คือการหา $P(a < X < b)$ จะได้จากการอินทิกรัล (Integral) ฟังก์ชันการแจกแจงปกติจาก $X = a$ ถึง $X = b$ ดังนี้

$$f(x) = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

ซึ่งสามารถหาค่าเป็นตัวเลขได้สำหรับทุก ๆ ค่าของ X เมื่อทราบค่าของ μ และ σ แต่ไม่เป็นการง่ายสำหรับการที่จะหาพื้นที่ใต้เส้นโค้งสำหรับทุก ๆ ค่าของ μ และ σ ที่เปลี่ยนไปโดยใช้การอินทิเกรท (integrate) เพื่อให้ได้พื้นที่ใต้เส้นโค้งตามที่ต้องการ ทั้งนี้เพราะรูปของสมการยุ่งยาก จึงมีผู้สร้างตารางมาตรฐานของพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติ (ดูตาราง Z) ซึ่งแสดงถึงพื้นที่ใต้เส้นโค้งระหว่าง $Z = 0$ ถึง $Z = Z_1$ โดยที่ Z เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปกติมาตรฐาน ซึ่งมีค่าเฉลี่ย (Mean) เท่ากับ 0 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 1 ตารางนี้ จะใช้ได้กับข้อมูลทั่วไป ดังนั้นก่อนที่จะใช้ตารางนี้จึงจำเป็นจะต้องเปลี่ยนข้อมูลดิบ (X) ที่ได้มาให้เป็นค่ามาตรฐาน (Z) เสียก่อน โดยใช้สูตร

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

ในการหาความน่าจะเป็นระหว่าง $X = x_1$ และ $X = x_2$ จึงทำการแปลงค่าให้อยู่ในรูปของ Z คือการหาความน่าจะเป็นระหว่าง $Z = z_1$ และ z_2 หรือ

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

เขียนในรูปแบบที่ง่ายขึ้นเป็น

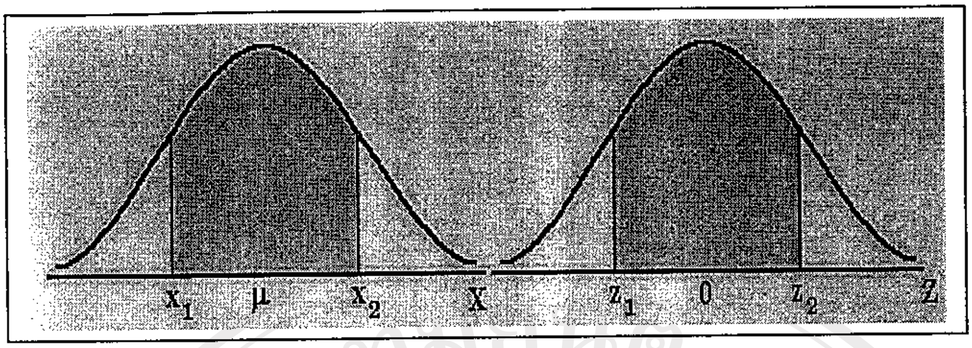
$$P(x_1 < X < x_2) = P(z_1 < Z < z_2)$$

โดยที่

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma}$$

และ $$z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma}$$

แสดงพื้นที่ดังรูป



เพื่อความสะดวกในการคำนวณหาความน่าจะเป็นในช่วง z_1 ถึง z_2 นักคณิตศาสตร์ได้สร้างตารางแสดงพื้นที่ใต้โค้งปกติมาตรฐาน ซึ่งได้จากการอินทิเกรทฟังก์ชันหรือสมการของโค้งปกติมาตรฐาน

โดยคุณสมบัติของฟังก์ชันความน่าจะเป็น พื้นที่ใต้โค้งทั้งหมดมีค่าเท่ากับ 1 หรือ 100% ตารางแสดงพื้นที่ใต้โค้งปกติ มีหลายรูปแบบ จากตารางแบบใดแบบหนึ่งช่วยให้เราสามารถหาพื้นที่ใต้โค้งได้สะดวก

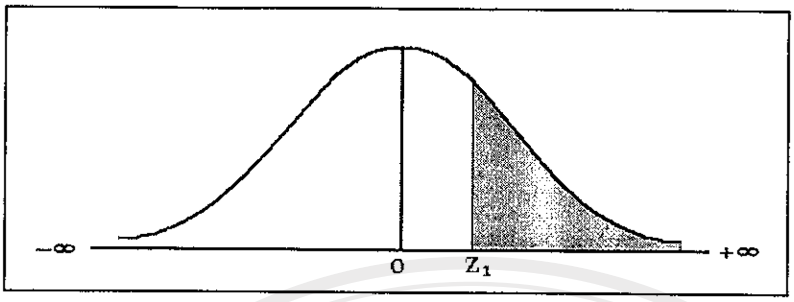
สำหรับตารางที่แสดงในบทเรียนนี้ เป็นตารางซึ่งให้พื้นที่ใต้โค้งสะสมตั้งแต่ ค่า Z เท่ากับ -∞ ถึง z เมื่อ z มีค่าเป็นบวก ซึ่งหมายถึง

$$P(-\infty < Z < z_1) = \int_{-\infty}^{z_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

ที่ตำแหน่ง Z = 0 จะมีพื้นที่ = 0.5000 หรือ

$$P(-\infty < Z < z_1) = \int_{-\infty}^{z_1=0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0.50000$$

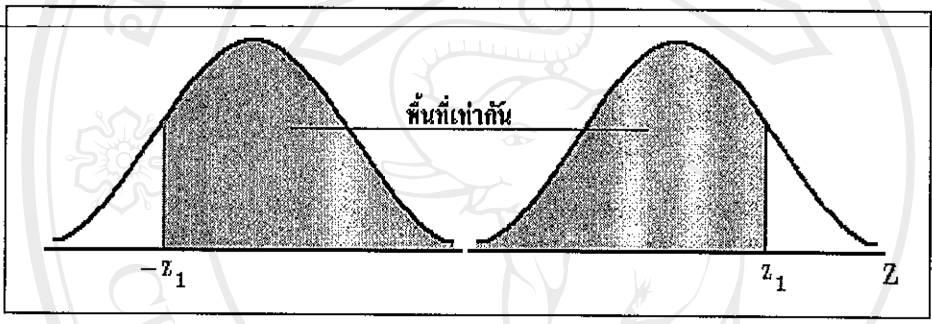
เมื่อกำหนดค่า Z ให้ เราสามารถหาพื้นที่ใต้โค้งได้ และสามารถจะหาพื้นที่ใต้โค้งส่วนอื่น ๆ ได้ทั้งหมดด้วย เช่นต้องการหาพื้นที่ใต้โค้งดังรูป



$P(Z > z_1) \quad = \quad 1 - P(-\infty < Z < z_1)$

ค่า $P(-\infty < Z < z_1)$ สามารถหาค่าได้จากตาราง

ในบางครั้งสามารถหาค่าพื้นที่จากความสมมาตรของโค้งปกติได้เช่น การหาค่า $P(Z > -z_1) = P(Z < z_1)$ ดังรูป



หรือ $P(-z_1 < Z < \infty) \quad = \quad P(-\infty < Z < z_1)$

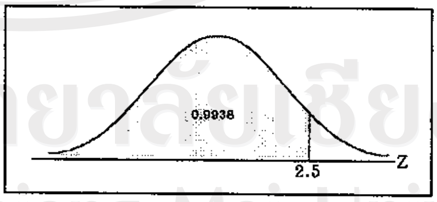
ค่า $P(-\infty < Z < z_1)$ สามารถหาค่าได้จากตารางปกติมาตรฐาน

ตัวอย่างที่ 1 ถ้า Z มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน หรือ $Z \sim N(0, 1)$ จงหาความน่าจะเป็นของ Z มีค่าน้อยกว่า 2.5

วิธีทำ

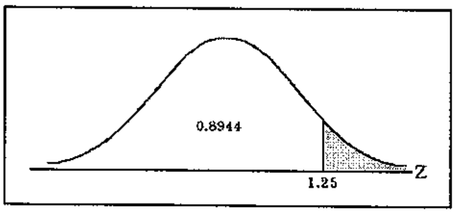
เปิดตาราง Z ที่ตำแหน่ง Z = 2.5

$P(Z < 2.5) = 0.9938$



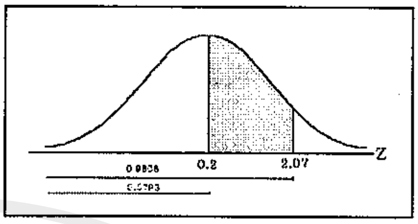
ตัวอย่างที่ 2 ถ้า $Z \sim N(0, 1)$ จงหาความน่าจะเป็นของ Z มีค่ามากกว่า 1.25

$$\begin{aligned} P(Z > 1.25) &= 1 - P(Z < 1.25) \\ &= 1 - 0.8944 \\ &= 0.1056 \end{aligned}$$



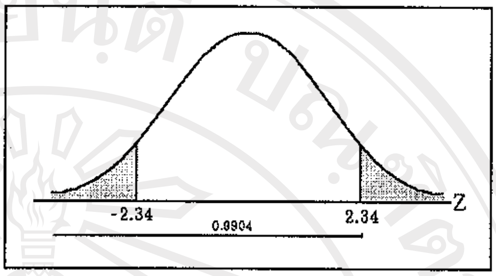
ตัวอย่างที่ 3 ถ้า $Z \sim N(0, 1)$ จงหา $P(0.2 < Z < 2.07)$

$$P(0.2 < Z < 2.07) = P(Z < 2.07) - P(Z < 0.2)$$
$$= 0.9808 - 0.5793$$
$$= 0.4015$$



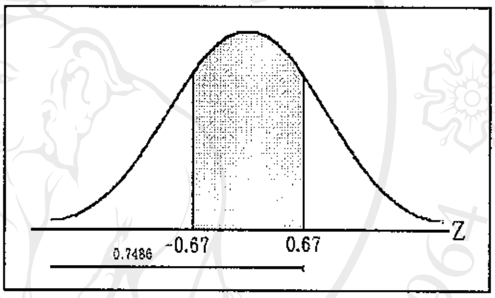
ตัวอย่างที่ 4 ถ้า $Z \sim N(0, 1)$ จงหา $P(Z < -2.34)$

$$P(Z < -2.34) = 1 - P(Z < 2.34)$$
$$= 1 - 0.9904$$
$$= 0.0096$$



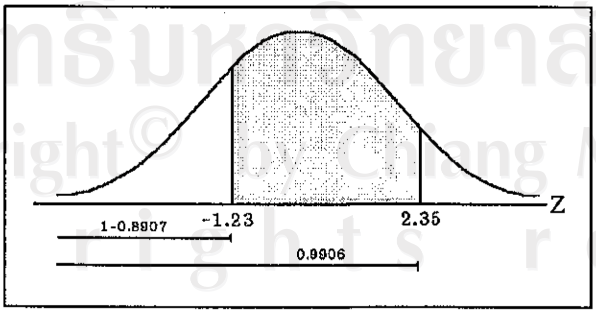
ตัวอย่างที่ 5 ถ้า $Z \sim N(0, 1)$ จงหา $P(Z > -0.67)$

$$P(Z \geq -0.67) = P(Z \leq 0.67)$$
$$= 0.7486$$



ตัวอย่างที่ 6 ถ้า $Z \sim N(0, 1)$ จงหา $P(-1.23 \leq Z \leq 2.35)$

$$P(-1.23 \leq Z \leq 2.35) = P(Z < 2.35) - P(Z < -1.23)$$
$$= .9906 - [1 - P(Z < 1.23)]$$
$$= .9906 - [1 - 0.8907]$$
$$= 0.8813$$



ตัวอย่างที่ 7 ถ้าตัวแปรสุ่ม X เป็นอายุการใช้งานของถ่านไฟฉาย(หน่วย:ชั่วโมง) และ X มีการแจกแจงแบบปกติ ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 106 และมีความแปรปรวนเท่ากับ 256 จงหาความน่าจะเป็นของ X ที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ 98

วิธีทำ เนื่องจาก X มีการแจกแจงแบบปกติ ต้องเปลี่ยนเป็นการแจกแจงแบบปกติมาตรฐานโดยการแทนค่า $\mu = 106$, $\sigma = \sqrt{256} = 16$ และ $X = 98$, ลงในสูตร $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

$$P(X \le 98) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{98-106}{16}\right)$$

$$\begin{aligned} P(X \le 98) &= P(Z \le -0.5) \\ &= 1 - P(z \le 0.5) \\ &= 1 - 0.6015 \\ &= 0.3085 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 8 ถ้าตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแบบปกติ ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 106 และมีความแปรปรวนเท่ากับ 256 จงหาความน่าจะเป็นของ X ที่มีค่ามากกว่า 106

วิธีทำ เนื่องจาก X มีการแจกแจงแบบปกติ ต้องเปลี่ยนเป็นการแจกแจงแบบปกติมาตรฐานโดยการแทนค่า $\mu = 106$, $\sigma = \sqrt{256} = 16$ และ $X = 106$ ลงในสูตร $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

$$P(X > 106) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{106-106}{16}\right)$$

$$\begin{aligned} P(X > 106) &= P(Z > 0) \\ &= 1 - 0.5 \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 9 ถ้าตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแบบปกติ ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 3 และมีความแปรปรวนเท่ากับ 4 จงหาความน่าจะเป็นของ X มีค่าอยู่ระหว่าง 3 ถึง 5

วิธีทำ เนื่องจาก X มีการแจกแจงแบบปกติ ต้องเปลี่ยนเป็นการแจกแจงแบบปกติมาตรฐานโดยการแทนค่า $\mu = 3$, $\sigma = \sqrt{4} = 2$ และ

แทนค่า $X_1 = 3$, $X_2 = 5$ ลงในสูตร $Z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$

จะได้ว่า $z_1 = \dfrac{x_1-\mu}{\sigma} = \dfrac{3-3}{2} = 0$

$z_2 = \dfrac{x_2-\mu}{\sigma} = \dfrac{5-3}{2} = 1$ นั่นคือ

$$
\begin{aligned}
P(3 < X < 5) &= P(z_1 < Z < z_2) \\
&= P(Z < z_2) - P(Z < z_1) \\
&= P(Z < 1) - P(Z < 0) \\
&= 0.8413 - 0.5 \\
&= 0.3413
\end{aligned}
$$

ตัวอย่างที่ 10 การผลิตสินค้าชนิดหนึ่ง ความยาวของสินค้ามีการแจกแจงแบบปกติโดยมีค่าเฉลี่ย 4.26 นิ้ว และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 0.23 นิ้ว จะมีสินค้าชนิดนี้กี่ เปอร์เซ็นต์ที่มีความยาวเกิน 5 นิ้ว

วิธีทำ ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแทนความยาวของสินค้า

จะหา $P(X > 5)$

แทนค่า $x = 5$, $\mu = 4.62$ และ $\sigma = 0.23$ ลงในสูตร $Z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$

จะได้ว่า $P(X > 5) = P\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma} > \dfrac{5-4.62}{0.23}\right)$

$$
\begin{aligned}
P(X > 5) &= P(Z > 1.65) \\
&= 1 - P(Z < 1.65) \\
&= 1 - 0.9505 \\
&= 0.0495
\end{aligned}
$$

ตัวอย่างที่ 11 ในการทดสอบความสามารถของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 120 คน ปรากฏว่า มีคะแนนเฉลี่ย 60 คะแนน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 10 คะแนน ด.ช. มานะ สอบได้ 75 คะแนน ด.ญ. มาลี สอบได้ 80 คะแนน และ ด.ช. คาวี สอบได้ 50 คะแนน ถ้าการแจกแจงของคะแนนเป็นโค้งปกติ จงหาว่ามีนักเรียนสอบได้ต่ำกว่า ด.ช.มานะ ด.ญ. มาลี และ ด.ช.คาวี ตามลำดับคิดเป็นร้อยละเท่าใด

วิธีทำ ให้ X คือ ตัวแปรสุ่มแทน คะแนนสอบของนักเรียน
เนื่องจาก X มีการแจกแจงแบบปกติ ต้องเปลี่ยนเป็นการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน โดยการแทน $\mu = 60$ และ $\sigma = 10$
กำหนดให้ คะแนนของ ด.ช.มานะ ด.ญ. มาลี และ ด.ช. คาวี คือ x_1 , x_2 ,x_3 ตามลำดับ จะได้ว่า

คะแนนมาตรฐานของด.ช.มานะ = $Z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{75-60}{10} = 1.5$

คะแนนมาตรฐานของด.ญ.มาลี = $Z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{80-60}{10} = 2$

คะแนนมาตรฐานของด.ช.คาวี = $Z_3 = \frac{x_3 - \mu}{\sigma} = \frac{50-60}{10} = -1$

ต้องการหาร้อยละของนักเรียนที่ได้คะแนนต่ำกว่า ด.ช. มานะ คือ การหาความน่าจะเป็นที่นักเรียนจะได้คะแนนต่ำกว่า ด.ช. มานะ คือ $P(X < 75)$

$$P(X < 75) = P(Z < 1.5) = 0.9332$$

ดังนั้นจะมีนักเรียนร้อยละ 93.32 ที่ได้คะแนนต่ำกว่า ด.ช. มานะ

ต้องการหาร้อยละของนักเรียนที่ได้คะแนนต่ำกว่า ด.ญ. มาลี คือการหาความน่าจะเป็นนักเรียนจะได้คะแนนต่ำกว่า ด.ญ. มาลี คือ $P(X < 80)$

$$P(X < 80) = P(Z < 2) = 0.9772$$

ดังนั้นจะมีนักเรียนร้อยละ 97.72 ที่ได้คะแนนต่ำกว่า ด.ญ. มาลี

ต้องการหาร้อยละของนักเรียนที่ได้คะแนนต่ำกว่า ด.ช. คาวี คือการหาความน่าจะเป็นที่นักเรียนจะได้คะแนนต่ำกว่า ด.ช. คาวี คือ $P(X < 50)$

$$P(X < 50) = P(Z < -1)$$
$$P(Z < 50) = 1 - P(Z < 1)$$

$= 1 - 0.8413$

$= 0.1587$

ดังนั้นจะมีนักเรียนร้อยละ 15.87 ที่ได้คะแนนต่ำกว่า ด.ช. คาวี

ตัวอย่างที่ 12 คะแนนเฉลี่ยสะสม GPA ของนักศึกษา 500 คน มีการแจกแจงเป็นโค้งปกติ มีค่าเฉลี่ย 2.40 และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 1.10 จงหาจำนวนนักศึกษาที่คาดว่าจะมีคะแนนเฉลี่ยสะสม ตั้งแต่ 2.75 ถึง 3.55

วิธีทำ ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแทนคะแนนเฉลี่ยสะสม

จะได้ว่า $\mu = 2.40$ และ $\sigma = 1.10$

กำหนดให้ $x_1 = 2.75$ $x_2 = 3.55$ จากสูตร $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ จะได้ว่า

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{2.75 - 2.40}{1.10} = 0.32$$

$$z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{3.55 - 2.40}{1.10} = 1.05$$ นั่นคือ

$$P(2.75 < X < 3.55) =z P(0.32 < Z < 1.05)$$

$$= 0.8731 - 0.6255$$

$$= 0.2276$$

ดังนั้น จำนวนนักศึกษาที่มีคะแนนเฉลี่ยสะสม 2.8 ถึง 3.5 มีจำนวน

$.2276 \times 500 = 113.8$ หรือประมาณ 114 คน

ตัวอย่างที่ 13 สำหรับตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติ จงแสดงว่า 68.26% ของข้อมูลทั้งหมดจะมีค่าอยู่ระหว่าง $x_1 = \mu - \sigma$ และ $x_2 = \mu + \sigma$

วิธีทำ เนื่องจาก X มีการแจกแจงแบบปกติ ต้องเปลี่ยนเป็นการแจกแจงแบบปกติมาตรฐานโดยแทนค่า $x_1 = \mu - \sigma$ และ $x_2 = \mu + \sigma$

จากสูตร $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

ที่จุด $x_1 = \mu - \sigma$ จะได้

$$z_1 = \frac{x_1-\mu}{\sigma} = \frac{(\mu-\sigma)-\mu}{\sigma} = \frac{-\sigma}{\sigma} = -1$$

ที่จุด $x_2 = \mu + \sigma$ จะได้

$$z_2 = \frac{x_1-\mu}{\sigma} = \frac{(\mu+\sigma)-\mu}{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma} = 1$$

ดังนั้น $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = P(-1 < Z < 1)$

$= P(Z < 1) - P(Z < -1)$

$= 0.8413 - 0.1587$

$= 0.6826$ หรือร้อยละ 68.26

ตัวอย่างที่ 14 ถ้าข้อมูลรายได้ต่อเดือนของผู้ปกครองนักเรียนแห่งหนึ่ง มีการกระจายเป็นโค้งปกติโดยมีรายได้เฉลี่ย 15,200 บาทต่อเดือน และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของรายได้ 1,250 บาท จงหาว่ามีกี่ % ของผู้ปกครองนักเรียนที่มีรายได้ต่อเดือนตั้งแต่ 17,700 บาทขึ้นไป

วิธีทำ ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มของรายได้ต่อเดือนของผู้ปกครองนักเรียน และ X มีการแจกแจงแบบปกติต้องเปลี่ยนเป็นการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน โดยการแทนค่า $x = 17{,}700$ $\mu = 15{,}200$ และ $\sigma = 1{,}250$ ลงในสูตร

$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ จะได้ว่า

$$P(X \geq 17{,}700) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{17{,}700-15{,}200}{1{,}250}\right)$$

ดังนั้น $P(X \geq 17{,}700) = P(Z \geq 2)$

$= 1 - P(Z < 2)$

$= 1 - 0.9772$

$= 0.0228$

ดังนั้นมีผู้ปกครองนักเรียนประมาณร้อยละ 2.28 มีรายได้ตั้งแต่ 17,700 บาทขึ้นไป

ตัวอย่างที่ 15 คะแนนสอบความถนัดทางช่างเพื่อคัดเลือกเข้าทำงาน มีการแจกแจงปกติมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 75 คะแนน และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 8 คะแนน ถ้าผลการคัดเลือกเข้าทำงาน ปรากฏว่าผู้ที่ได้คะแนนตั้งแต่ 90 ขึ้นไป ได้เข้าทำงานและปรากฏว่า มีจำนวน 12 คน มีผู้เข้าสอบกี่คน

วิธีทำ ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแทนคะแนนของผู้ที่สอบความถนัดทางช่าง เนื่องจาก X มีการแจกแจงแบบปกติ ต้องเปลี่ยนเป็นการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน โดยการแทนค่า $x = 90$, $\mu = 75$ และ $\sigma = 8$ ลงในสูตร

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$ จะได้ว่า

$$= \frac{90-75}{8}$$

$$= 1.87$$

ดังนั้น $P(X \geq 90) = P(Z > 1.87)$

$$= 1 - P(Z \leq 1.87)$$

$$= 1 - 0.9693 = 0.0307$$ หรือประมาณ 3%

ให้ N เป็นจำนวนผู้เข้าสอบทั้งหมด

$$\frac{3N}{100} = 12$$

$N = 400$ นั่นคือมีผู้เข้าสอบ 400 คน

5. การประมาณการแจกแจงทวินามด้วยการแจกแจงปกติ

(Normal Approximation to the Binomial Distribution)

การทดลองแบบทวินาม คือ การทดลองใด ๆ ที่ประกอบด้วยการกระทำซ้ำ ๆ กัน n ครั้งที่เป็นอิสระกัน และผลที่เกิดขึ้นเป็นไปได้เพียงสองอย่างคือ

1. ความสำเร็จ (success) ด้วยความน่าจะเป็น p
2. ความไม่สำเร็จ (failure) ด้วยความน่าจะเป็น $q = 1 - p$

ตัวแปรสุ่มของการทดลองแบบทวินาม เรียกว่า ตัวแปรสุ่มทวินาม และการหาความน่าจะเป็นของทุก ๆ ค่าของตัวแปรสุ่มทวินาม เรียกว่าการแจกแจงทวินาม ใช้สัญลักษณ์ $X \sim b(x ; n , p)$

นิยาม ตัวแปรสุ่มจะมีการแจกแจงทวินามก็ต่อเมื่อการแจกแจงความน่าจะเป็นของ X คือ

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

เมื่อ $x = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$

ค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่มทวินามคือ $E(X) = np$

ความแปรปรวนของตัวแปรสุ่มทวินามคือ $V(X) = npq$

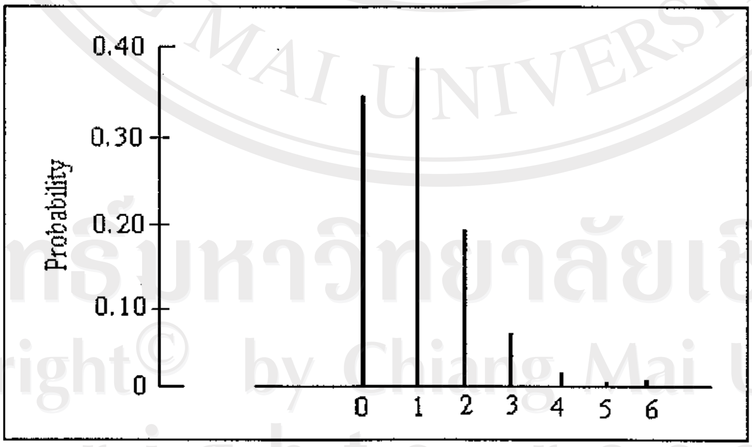
ลักษณะที่น่าสนใจของการแจกแจงทวินามก็คือ ความแปรปรวน V(X)

จาก $V(X) = npq = np(1 - p) = np - np^2$

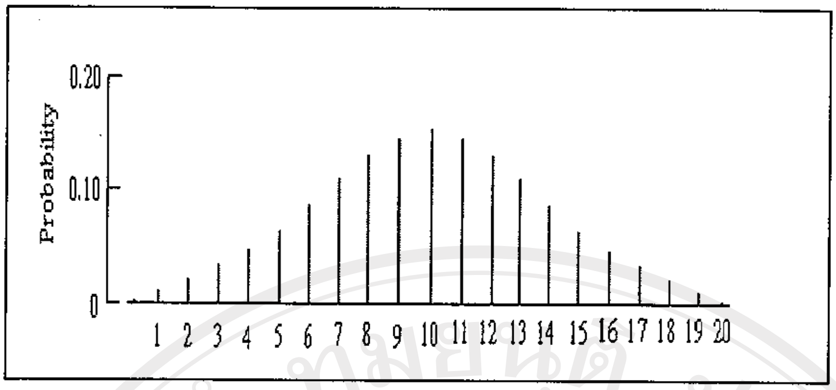
จะเห็นว่าถ้า n คงที่ ค่า V(X) จะขึ้นอยู่กับค่า p

เมื่อ $p = 0$ และ $p = 1$ จะได้ค่า $V(X) = 0$ และเมื่อ $p = 0.5$ จะได้ V(X) มีค่าสูงที่สุด

ถ้า n มีค่ามาก p เข้าใกล้ 0.5 เช่น $n = 200$, $p = 0.6$ ถ้าต้องการหาค่า $p(x = 150) = \binom{200}{150} (.6)^{150} (0.4)^{50}$ จะเห็นได้ว่าการคำนวณค่อนข้างจะยุ่งยาก และถ้าค่า n ยิ่งมีค่ามากขึ้น เข้าใกล้ค่าอนันต์ การแจกแจงแบบทวินาม ก็จะมีลักษณะการแจกแจงเข้าใกล้ลักษณะการแจกแจงปกติดังรูป



$n = 10$, $p = 0.1$



$n = 100$, $p = .10$

ดังนั้นเราสามารถประมาณการแจกแจงทวินามด้วยการแจกแจงปกติ เมื่อ n มีค่ามาก ๆ และ p มีค่าเข้าใกล้ 0.5 และการประมาณจะใช้ได้ผลดี ถ้า np หรือ nq มีค่ามากกว่า

เนื่องจากในการประมาณการแจกแจงทวินามด้วยการแจกแจงปกตินั้น จะต้องปรับตัวแปรเชิงสุ่มทวินามให้เป็นตัวแปรต่อเนื่องก่อน โดยการบวกเพิ่มด้วย 0.5 หรือลบออกด้วย 0.5 ซึ่งการจะบวกเข้าหรือลบออกนั้นให้พิจารณาที่เครื่องหมาย (> , < , =) ว่าต้องการให้ครอบคลุมค่าของตัวแปรสุ่มนั้นหรือไม่เช่น

เมื่อให้ X เป็นตัวแปรสุ่มทวินาม และ Xc เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง

$P(X \leq 20) = P(X_c < 20.5)$ ซึ่งครอบคลุมค่า $X = 20$

$P(X \geq 20) = P(X_c > 19.5)$ ซึ่งครอบคลุมค่า $X = 20$

$P(X = 20) = P(19.5 < X_c < 20.5)$

$P(X < 20) = P(X \leq 19) = P(X_c < 19.5)$ ซึ่งไม่ครอบคลุมค่า $X = 20$

$P(X > 20) = P(X \geq 21) = P(X_c \geq 20.5)$ ซึ่งไม่ครอบคลุมค่า $X = 20$

$P(18 < X < 25) = P(19 \leq X \leq 24) = P(18.5 < X_c < 24.5)$

หลังจากนั้นนำค่าตัวแปรที่ทำการปรับให้เป็นตัวแปรต่อเนื่องแล้วนำมาแปลงให้เป็นการแจกแจงปกติมาตรฐาน Z โดยใช้สูตร

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

โดย $\mu = np$, $\sigma = \sqrt{npq}$

และสามารถนำค่า Z ที่ได้ หาค่าความน่าจะเป็นและพื้นที่ใต้โค้งปกติ โดยการเปิดตารางการแจกแจงปกติมาตรฐานซึ่งจะเป็นการง่ายและสะดวกกว่าการคำนวณโดยใช้สูตรของการแจกแจงแบบทวินาม

ตัวอย่างที่16 บริษัทผลิตยาแห่งหนึ่ง ได้ผลิตยากล่อมประสาท ก่อนออกจำหน่ายได้ทำการตรวจสอบคุณภาพ สรุปยืนยันได้ว่า 80% ของผู้ป่วยทั้งหมดที่ใช้ยา แล้วมีอาการ

ดีขึ้น ถ้าโรงพยาบาลแห่งหนึ่งใช้ยากล่อมประสาทชนิดนี้กับผู้ป่วย 150 คน จงหาความน่าจะเป็นที่ผู้ป่วยใช้ยานี้แล้วมีอาการไม่ดีขึ้น 30 คน

วิธีทำ ให้ Y แทนจำนวนผู้ป่วยที่รับประทานยานี้ แล้วมีอาการไม่ดีขึ้น

$Y \sim b(y\ ;150, 0.2)$ ซึ่ง $n \to \infty$

$\mu = np = 150 \times 0.2 = 30$ และ $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{150 \text{ X } 0.2 \text{ X } 0.8}$

$= 4.9$

$$P(Y = 30) = P(29.5 < Y_c < 30.5)$$

$$= P\left(\frac{29.5-30}{4.9} < Z < \frac{30.5-30}{4.9}\right)$$

$$= P(-0.10 < Z < 0.10) = 0.0796$$

นั่นคือ ในการรักษาผู้ป่วยด้วยยาดังกล่าว 150 คน ผู้ป่วยจะมีอาการไม่ดีขึ้น 30 คน ด้วยความน่าจะเป็น 0.0796

ตัวอย่างที่ 17 โรงพยาบาลแห่งหนึ่งมีเตียงรับคนไข้ได้เพียงวันละ 50 คน และในบรรดาคนไข้เหล่านี้มีอยู่ประมาณ 10% ที่ต้องการความสะดวกสบาย โดยขอห้องพักพิเศษ ปรากฏว่าในเช้าวันหนึ่ง เจ้าหน้าที่สำรวจพบว่ามีห้องพิเศษว่างอยู่ 3 ห้อง และถ้าวันนั้นมีคนไข้ 50 คน จงคาดหมายว่าในวันดังกล่าวจะมีคนไข้มาแสดงความจำนงขอพักห้องพิเศษกี่ราย

วิธีทำ ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแทนจำนวนคนไข้ที่จองห้องพิเศษ

: 0 , 1, 2,..........50

$n = 50\ ,\ p = 0.1$

$X \sim b(x\,;50\,,0.1)$

$E(X) = np = 50 \times 0.1 = 5$

คาดว่าในวันดังกล่าวจะมีคนไข้แสดงความจำนงขอพักห้องพิเศษ 5 ราย

ตัวอย่างที่ 18 ทอดลูกเต๋าเที่ยงตรง 1 ลูก 120 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าจะขึ้นหน้า 6 น้อยกว่า15 ครั้ง

วิธีทำ ให้ X เป็นจำนวนครั้งที่ลูกเต๋าขึ้นหน้า 6

X มีการแจกแจงทวินามที่มี $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$, $n = 20$

หาความน่าจะเป็นดังนี้

$$P(X<15)=\sum_{X=1}^{14}\binom{140}{X}\left(\frac{1}{6}\right)^{X}\left(\frac{5}{6}\right)^{120-X}$$

การหาความน่าจะเป็นด้วยการแจกแจงทวินามจะคำนาณยากขึ้น เพราะ n มีค่ามาก จึงประมาณความน่าจะเป็นด้วยการแจกแจงแบบปกติดังนี้

$$\mu = np = 120\left(\frac{1}{6}\right) = 20$$

$$\sigma^2 = npq = 120\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right) = 16.67$$

$$\sigma = \sqrt{16.67} = 4.08$$

$$P(X<15) \cong P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{14.5-20}{4.08}\right)$$

$$= P(Z \le -1.35)$$

$$= 0.0885$$

6. การประมาณการแจกแจงปัวซองด้วยการแจกแจงปกติ

(Normal Approximation to the Poisson Distribution)

การทดลองแบบปัวซอง เป็นการทดลองที่ค่าของตัวแปรสุ่ม X แสดงจำนวนครั้งของความสำเร็จในช่วงเวลาหนึ่งหน่วยที่กำหนดให้ หรือภายในบริเวณหนึ่งที่กำหนด เรียกว่า

การทดลองแบบปัวซอง (Poisson Experiment) ช่วงเวลาที่กำหนดอาจเป็น 1 นาที 1 ชั่วโมง เป็นต้น ส่วนบริเวณที่กำหนดอาจจะเป็นส่วนหนึ่งของพื้นที่หรือปริมาณก็ได้

ตัวอย่างการทดลองแบบปัวซอง เช่น บันทึกจำนวนครั้งที่รับโทรศัพท์ในช่วงเวลาพักเที่ยง 1 ชั่วโมง ของพนักงานรับโทรศัพท์คนหนึ่ง

การแจกแจงของตัวแปรสุ่มปัวซอง X เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$X \sim P(x\,;\lambda)$$

โดยที่ λ คือ ค่าเฉลี่ยของจำนวนครั้งของความสำเร็จที่เกิดขึ้นในช่วงของเวลา หรืออาณาบริเวณใดบริเวณหนึ่ง และ λ มีค่า เท่ากับความแปรปรวน อีกนัยหนึ่ง λ เป็นพารามิเตอร์ของการแจกแจงปัวซอง

นิยาม ถ้า X เป็นจำนวนของความสำเร็จในการทดลองแบบปัวซอง X จะมีการแจกแจงปัวซอง ซึ่งมีความน่าจะเป็นของจำนวนความสำเร็จที่เกิดขึ้นในช่วงเวลาหนึ่ง หรืออาณาบริเวณหนึ่ง คือ

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

เมื่อ $x = 0, 1, 2, 3, \ldots \infty$

$e = 2.71828\ldots.$

โดยที่ λ คือ ค่าเฉลี่ยของจำนวนครั้งของความสำเร็จที่เกิดขึ้นในช่วงเวลา หรืออาณาบริเวณหนึ่ง

ให้ตัวแปร X มีการแจกแจงปัวซอง ถ้า λ มีค่ามากแล้วตัวแปร X จะมีการแจกแจงเข้าใกล้การแจกแจงแบบปกติ

เนื่องจากในการประมาณการแจกแจงปัวซองด้วยการแจกแจงปกตินั้น จะต้องปรับตัวแปรเชิงสุ่มปัวซองให้เป็นตัวแปรต่อเนื่องก่อน โดยการบวกเพิ่มด้วย 0.5 หรือลบออกด้วย 0.5 ซึ่งการจะบวกเข้าหรือลบออกนั้นให้พิจารณาที่เครื่องหมาย (> , < , =) ว่าต้องการให้ครอบคลุมค่าของตัวแปรสุ่มนั้นหรือไม่เช่น

เมื่อให้ X เป็นตัวแปรสุ่มปัวซองและ Xc เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง

$P(X \leq 20) = P(X_c < 20.5)$ ซึ่งครอบคลุมค่า $X = 20$

$P(X \geq 20) = P(X_c > 19.5)$ ซึ่งครอบคลุมค่า $X = 20$

$P(X = 20) = P(19.5 < X_c < 20.5)$

$P(X < 20) = P(X \leq 19) = P(X_c < 19.5)$ ซึ่งไม่ครอบคลุมค่า $X = 20$

$P(X > 20) = P(X \geq 21) = P(X_c \geq 20.5)$ ซึ่งไม่ครอบคลุมค่า $X = 20$

$$P(18 < X < 25) \quad = \quad P(19 \le X \le 24) \quad = \quad P(18.5 \le X_c \le 24.5)$$

หลังจากนั้นนำค่าตัวแปรที่ทำการปรับให้เป็นตัวแปรต่อเนื่องแล้วนำมาเปลี่ยนให้เป็นการแจกแจงปกติมาตรฐาน Z โดยใช้สูตร

$$Z \;=\; \frac{x-\mu}{\sigma}$$

โดย $\mu = \lambda$, $\sigma = \sqrt{\lambda}$

และสามารถนำค่า Z ที่ได้ หาค่าความน่าจะเป็นและพื้นที่ใต้โค้งปกติ โดยการเปิดตารางการแจกแจงปกติมาตรฐาน ซึ่งจะเป็นการง่ายและสะดวกกว่าการคำนวณโดยใช้สูตรของการแจกแจงปัวซอง

ตัวอย่างที่ 19 ถ้าโดยเฉลี่ยแล้ว อนุภาคของสารกัมมันตภาพวิ่งผ่านเครื่องวัด 69 อนุภาคต่อวินาที จงหาความน่าจะเป็นที่ในช่วงเวลา 2 วินาที จะมีอนุภาควิ่งผ่านเครื่องวัดมากกว่า 150 อนุภาค

วิธีทำ ให้ X แทนจำนวนอนุภาคที่วิ่งผ่านเครื่องวัดในช่วงเวลา 2 วินาที และหาได้ว่าโดยเฉลี่ยแล้วอนุภาคของสารกัมมันตภาพวิ่งผ่านเครื่องวัด 138 อนุภาคต่อสองวินาที ดั้งนั้น $\lambda = 138$ และเนื่องจาก λ มีค่ามาก จึงประมาณการแจกแจงปัวซองด้วยการแจกแจงแบบปกติ โดยที่

$$\mu = 138 \qquad \text{และ } \sigma = \sqrt{138} = 11.74$$

และ เนื่องจาก X เป็นตัวแปรแบบไม่ต่อเนื่อง จึงปรับให้เป็นตัวแปรแบบต่อเนื่องจะได้

$$P(X > 150) \;=\; P(X_c > 150.5)$$

$$= P\left(Z > \frac{150.5-138}{11.74}\right)$$

$$= P\,(Z > 1.06)$$

$$= 0.1446$$

นั่นคือ ในช่วงเวลา 2 วินาที จะมีอนุภาควิ่งผ่านเครื่องวัดมากกว่า 150 อนุภาค ด้วยความน่าจะเป็น 0.1446

ตัวอย่างที่ 20 ระหว่างเวลา 8.30 ถึง 16.30 น. ปรากฏว่ามีผู้โทรศัพท์เข้ามาที่สำนักงานแห่งหนึ่ง โดยเฉลี่ยแล้ว 36 ครั้งต่อชั่วโมง จงหาความน่าจะเป็นที่ในช่วงเวลาดังกล่าวจะมีผู้โทรศัพท์เข้ามา 30 ครั้งต่อชั่วโมง

วิธีทำ ให้ X แทนครั้งที่จะมีผู้โทรศัพท์เข้ามาภายใน 1 ชม. โดยมีค่าเฉลี่ย 36 ครั้งต่อชั่งโมง ดังนั้น $\lambda = 36$

$X \sim P(x\,;\,36)$

และเนื่องจาก λ มีค่ามาก จึงประมาณการแจกแจงปัวซองด้วยการแจกแจงแบบปกติ โดยที่

$\mu = 3 \,, \sigma = \sqrt{36} = 6$

และ เนื่องจาก X เป็นตัวแปรแบบไม่ต่อเนื่อง จึงปรับให้เป็นตัวแปรแบบต่อเนื่องก่อน

$$P(X = 30) = P(29.5 < Xc < 30.5)$$

$$= P\left(\frac{29.5-36}{6} < \frac{x-}{} < \frac{30.5-36}{6}\right)$$

$$= P(-1.08 < Z < -0.92)$$

$$= P(Z < -0.92) - P(Z < -1.08)$$

$$= P(Z < 1.08) - P(Z < 0.92)$$

$$= 0.8599 - 0.8212$$

$$= 0.0387$$

แบบทดสอบการแจกแจงปกติ

1. จงหาความน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน มีค่าน้อยกว่า 1.54

    ก. 0.9256

    ข. 0.9332

    ค. 0.9382

    ง. 0.0618

2. จงหาความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน ที่มีค่าไม่ต่ำกว่า 0.5

    ก. 0.3085

    ข. 0.5199

    ค. 0.4801

    ง. 0.6915

3. จงหาความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปกติมาตรฐาน มีค่าอยู่ในช่วง 2.03 ถึง 3.09

    ก. 0.9990

    ข. 0.0202

    ค. 0.9798

    ง. 0.9788

4. จงหาความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน ที่มีค่าน้อยกว่า -.24

    ก. 0.9793

    ข. 0.0082

    ค. 0.9918

    ง. 0.0207

5. จงหาค่าของ $P(-2.74 < Z < 1.53)$ เมื่อ Z คือตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปกติ แบบมาตรฐาน

    ก. 0.9339

    ข. 0.0661

    ค. 0.0031

    ง. 0.9032

6. ถ้าตัวแปร X มีค่าการแจกแจงแบบปกติ ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเป็น 100 และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 10 จงหาความน่าจะเป็นที่ค่า X ใดๆ ที่สุ่มขึ้นมาจะมีค่าระหว่าง 100 และ 110

   ก. 0.8413

   ข. 0.1587

   ค. 0.8340

   ง. 0.3413

7. อายุการใช้งานของหลอดไฟยี่ห้อหนึ่ง มีการแจกแจงแบบปกติด้วยค่าเฉลี่ย 68 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 3 ชั่วโมง ถ้าหากซื้อหลอดไฟมา 1 หลอด จงหาความน่าจะเป็นที่หลอดไฟที่ซื้อมานั้นมีอายุการใช้งานนานกว่า 74 ชั่วโมง แต่ไม่เกิน 77 ชั่วโมง

   ก. 0.0233

   ข. 0.0228

   ค. 0.0014

   ง. 0.0215

8. ปริมาณของรังสีคอสมิคที่บุคคลผู้หนึ่งจะได้รับเมื่อบินข้ามประเทศโซเวียตโดยสายการบินไอพ่นสายหนึ่งมีลักษณะเป็นตัวแปรสุ่มซึ่งมี $\mu = 4.35$, $\sigma = 0$
จงหาความน่าจะเป็นที่คน ๆ หนึ่งบนสายการบินนี้จะได้รับรังสีคอสมิค มากกว่า 5 mrem

   ก. 0.8643

   ข. 0.1357

   ค. 0.7286

   ง. 0.2714

9. กำลังการผลิตของเครื่องจักรในโรงงานแห่งหนึ่ง มีการแจกแจงแบบปกติ มีค่าเฉลี่ย 250 ชิ้นต่อวัน และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 35 ชิ้น ถ้ามีเครื่องจักรอยู่ 3 เครื่อง ที่สามารถผลิตสินค้าได้เกินวันละ 285 ชิ้น จงหาว่าจำนวนเครื่องจักรในโรงงานแห่งนี้มีทั้งหมดเท่าไร

   ก. 9

   ข. 10

   ค. 15

   ง. 19

10. ถ้าคะแนนวิชาภาษาอังกฤษของนลินีคือ 70 โดยมี $\mu = 500$ และมีค่า $\sigma = 20$ ส่วนจินตนา ซึ่งเรียนอยู่คนละห้องได้ 350 คะแนน โดยมีค่า $\mu = 300$ และมี ค่า $\sigma = 20$ ถามว่าระหว่างนลินีกับจินตนา ใครเก่งกว่ากัน

    ก. นลินีเก่งกว่าจินตนา

    ข. จินตนาเก่งกว่านลินี

    ค. จินตนาและนลินีเก่งเท่ากัน

    ง. ข้อมูลไม่เพียงพอที่จะสรุปได้ว่าใครเก่งกว่ากัน

11. ถ้าปริมาณของกาแฟที่บรรจุในขวดขนาด 4 ออนซ์ มีลักษณะเป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติ ซึ่งมี $\sigma = 0.04$ ออนซ์ ถ้ามีเพียง 2 % ของขวดกาแฟทั้งหมดซึ่งบรรจุกาแฟน้อยกว่า 4 ออนซ์ ปริมาณเฉลี่ยของกาแฟที่บรรจุในขวดจะมีค่าเป็นเท่าใด

    ก. 4.082

    ข. 3.918

    ค. 4.000

    ง. 4.218

12. ถ้าต้องการให้มีพื้นที่ตรงกลางของรูปโค้งปกติมาตรฐานต่อไปนี้มีค่า 90 % ของพื้นที่ทั้งหมดจงหาค่าของ z_1 และ z_2 ที่มีค่าสมมาตรกัน

    ก. $z_1 = -1.000$, $z_2 = 1.000$

    ข. $z_1 = -1.282$, $z_2 = 1.282$

    ค. $z_1 = -1.645$, $z_2 = 1.645$

    ง. $z_1 = -1.960$, $z_2 = 1.960$

13. ถ้าเราเรียกคนที่สูงเกิน 72 นิ้วขึ้นไป ว่า "คนสูง" คนที่สูง 64 ถึง 72 นิ้ว ว่า " คนสันทัด" และคนที่เตี้ยกว่า 64 นิ้วว่า " คนเตี้ย " จากการสำรวจความสูงของนักเรียนในโรงเรียนแห่งหนึ่งได้ผลดังนี้คือ คนสูง ร้อยละ 8 คนสันทัดร้อยละ 87 คนเตี้ยร้อยละ 5 สมมุติว่าการแจกแจงความสูงของคนเหล่านี้เป็นการแจกแจงปกติ จงหามัชฌิมเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานความสูง

    ก. $\mu = 68.314$, $\sigma = 2.623$

    ข. $\mu = 64.000$, $\sigma = 2.623$

    ค. $\mu = 68.315$, $\sigma = 1.645$

    ง. $\mu = 64.000$, $\sigma = 1.645$

14. สำนักงานเร่งรัดพัฒนาชนบท ทำการประกวดราคาซื้อยางรถยนต์ไว้ใช้ในราชการจำนวน 616 เส้น โดยระบุไว้ในเงื่อนไขการประกวดราคาว่ายางรถยนต์ชนิดนั้นจะต้องรับประกันอายุการใช้งานเป็นระยะทาง 30,000 กม. และบริษัทที่ประมูลได้ต้องยินดีให้เปลี่ยนคืนถ้ายางชำรุดในระยะทางประกัน ปรากฏว่าบริษัทที่ชนะการประกวด เป็นผู้จำหน่ายยางที่มีอายุการใช้งานเป็นระยะทาง 32,000 กม. ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 1,000 กม. อยากทราบว่าในระยะทางประกัน สำนักงานขอเปลี่ยนยางเป็นร้อยละเท่าใดของจำนวนที่สั่งซื้อ

ก. 2.25

ข. 2.28

ค. 22.50

ง. 22.75

15. โอกาสที่ทรานซิสเตอร์ที่ผลิตได้ของโรงงานแห่งหนึ่ง จะเสียเท่ากับ 0.005 และความน่าจะเป็นที่ทรานซิสเตอร์ที่ผลิตได้แต่ละตัวจะเสียนั้นมีค่าคงที่ตลอด ถ้าผลิตทรานซิสเตอร์ทั้งหมด 10,000 ตัว จงหาความน่าจะเป็นที่ทรานซิสเตอร์จะเสียมากกว่า 60 ตัว

ก. 0.5885

ข. 0.4115

ค. 0.0681

ง. 0.9115

16. โรงพยาบาลแห่งหนึ่งมีเตียงพอที่จะรับคนไข้ได้เพียงวันละ 50 คน และในบรรดาคนไข้เหล่านี้ มีอยู่ประมาณ 10% ที่ต้องการความสะดวกสบายโดยขอห้องพักพิเศษ ในเช้าวันหนึ่งเจ้าหน้าที่สำรวจแล้วพบว่ามีห้องพิเศษว่างอยู่ 3 ห้อง และถ้าวันนั้นมีคนไข้ 50 คน จงหาความน่าจะเป็นที่คนไข้ต้องการห้องพิเศษเกิน 3 ห้อง

ก. 0.1736

ข. 0.6736

ค. 0.3264

ง. 0.7611

17. ทอดลูกเต๋า 1 ลูก 120 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าจะขึ้นหน้า 6 น้อยกว่า 15 ครั้ง

ก. 0.5000

ข. 0.5885

ค. 0.4115

ง. 0.0885

18. ถ้าโดยเฉลี่ยแล้วอนุภาคของสารกัมมันตรังสีวิ่งผ่านเครื่องวัด 69 อนุภาค ต่อวินาที จงหาความน่าจะเป็นที่ในช่วงเวลา 5 วินาที จะมีอนุภาควิ่งผ่านเครื่องวัดระหว่าง 300 และ 400 อนุภาค

ก. 0.9901

ข. 0.9115

ค. 0.4401

ง. 0.9885

19. จำนวนของการโทรศัพท์ในที่ชุมชนเป็นประจำวันระหว่าง 13.00 น. ถึง 14.00 น. เฉลี่ยแล้วเป็น 324 ครั้ง ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 18 ครั้ง จะมีความน่าจะเป็นเท่าใด ที่จะมีผู้โทรศัพท์เข้ามามากกว่า 300 ครั้ง ในช่วงเวลานั้น

ก. 0.9115

ข. 0.9049

ค. 0.9406

ง. 0.9429

20. สหกรณ์แท็กซี่จำกัด ในกรุงเทพมหานคร พบว่าโดยเฉลี่ยแล้วใน 1 สัปดาห์ จะมีล้อรถยนต์แบน 9 ล้อ ถ้าการแจกแจงของจำนวนล้อรถยนต์ที่แบนนี้เป็นแบบปัวซอง จงหาความน่าจะเป็นที่จะมีล้อรถยนต์แบนอย่างน้อย 40 ล้อต่อเดือน

ก. 0.2912

ข. 0.7190

ค. 0.2810

ง. 0.7088

การแจกแจงทวินาม

Binomial Distribution

เนื้อหาการแจกแจงทวินาม

1. การทดลองแบบทวินาม
2. ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของการแจกแจงทวินาม
3. ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของทวินาม
4. ลักษณะทั่วไปของการแจกแจงทวินาม

การทดลองแบบทวินาม

การทดลองแบบทวินาม มีลักษณะทั่ว ๆ ไปดังนี้

- การทดลองประกอบด้วยการกระทำซ้ำ ๆ กัน n ครั้ง
- ในการกระทำแต่ละครั้งจะเกิดผลขึ้นได้ 2 อย่าง คือ

  ความสำเร็จ (success)

  ความไม่สำเร็จ (failure)

- ความน่าจะเป็นของความสำเร็จที่เกิดขึ้นจากการกระทำแต่ละครั้งเป็นดังนี้

  p เป็นความน่าจะเป็นของความสำเร็จ

  q เป็นความน่าจะเป็นของความไม่สำเร็จ

  โดยที่ $p + q = 1$ หรือ $q = 1 - p$

- การทดลองหรือการกระทำแต่ละครั้งเป็นอิสระกัน

ตัวอย่างการทดลองแบบทวินาม

การโยนเหรียญเที่ยงตรงหนึ่งอัน จำนวน 5 ครั้ง สนใจเหตุการณ์ที่เกิดหัวอธิบายได้ดังนี้

การโยนเหรียญทั้ง 5 ครั้ง เป็นอิสระกัน ผลที่ได้ในแต่ละครั้งไม่ขึ้นต่อกัน โดยแต่ละครั้งมีโอกาสเกิดเหตุการณ์คือหัวและก้อย ถ้าสนใจการขึ้นหัวคือความสำเร็จ ดังนั้นการขึ้นก้อยคือความไม่สำเร็จ

S = เหตุการณ์ที่เกิดขึ้นในการโยน 1 ครั้ง

= {H, T} เมื่อ H = หัว

T = ก้อย

เมื่อเป็นเหรียญเที่ยงตรงความน่าจะเป็นในการเกิดหัวแต่ละครั้งจะเท่ากันคือ

$$P(H) = \frac{1}{2} = 0.5$$

ในการทดลองโยนเหรียญแต่ละครั้งจึงทราบความน่าจะเป็นในการเกิดหัว ซึ่งเป็นความน่าจะเป็นของความสำเร็จ และมีค่าเท่ากันในแต่ละครั้งของการทดลอง เรียกการทดลองแบบนี้ว่าการทดลองแบบทวินาม

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของการแจกแจงทวินาม

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่ม แทนจำนวนเหตุการณ์ที่สำเร็จหรือสนใจ และมีการกระทำซ้ำ ๆ กัน n ครั้ง ซึ่งมีค่าความน่าจะเป็นของความสำเร็จในเหตุการณ์ที่สนใจเท่ากับ p และความน่าจะเป็นของความไม่สำเร็จเท่ากับ q โดยที่ $q = 1 - p$ จะเรียกการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X ว่าเป็นการแจกแจงทวินาม เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $b(x\,;\,n\,,\,p)$ โดยมีฟังก์ชันของการแจกแจงเป็นดังนี้

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^{x} q^{n-x} \quad \text{เมื่อ } x = 0, 1, 2, 3, \dots, n$$

อธิบายลักษณะการแจกแจงความน่าจะเป็นทวินาม

ตัวอย่างง่าย ๆ ที่อธิบายการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X เช่นการโยนเหรียญอันหนึ่งสามครั้ง ถ้าให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่แทนจำนวนหัวที่เกิดขึ้น

ดังนั้น $X = 0, 1, 2, 3$

และ Sample space ของการทดลองคือ

S = {HHH, HHT, HTH, THH, HTT, TTH, THT, TTT}

ในการโยนเหรียญแต่ละครั้งเป็นอิสระกัน ความน่าจะเป็นที่จะขึ้นหัวเท่ากับ p ความน่าจะเป็นที่จะขึ้นก้อยเท่ากับ q

การหาความน่าจะเป็นของการเกิดหัวจำนวน 0, 1, 2 และ 3 ครั้งจะหาได้ดังนี้

$$P(X = 0) = P(TTT) = q^{3}$$

$$P(X = 1) = P(HTT) + P(TTH) + P(THT)$$
$$= (p\,.\,q\,.\,q) + (q\,.\,q\,.\,p) + (q\,.\,p\,.\,q) = 3p^{1}q^{2}$$

$$P(X = 2) = P(HHT) + P(HTH) + P(THH)$$
$$= (p\,.\,p\,.\,q) + (p\,.\,q\,.\,p) + (q\,.\,p\,.\,p) = 3p^{2}q^{1}$$

$$P(X = 3) = P(HHH) = p\,.\,p\,.\,p = p^{3}$$

จากการหาความน่าจะเป็นของการโยนเหรียญข้างต้นสามารถเขียนเป็นตารางการแจกแจงความน่าจะเป็นได้ดังนี้

X	P(X)
0	q^3
1	$3p^1q^2$
2	$3p^2q^1$
3	p^3

การแจกแจงของตัวแปรสุ่ม X ซึ่งเป็นตัวแปรสุ่มแบบทวินามนี้ เรียกว่า การแจกแจงทวินาม สามารถเขียนอธิบายได้ดังนี้

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มทวินาม เขียนด้วยสัญลักษณ์ $b(x ; n , p)$ การแจกแจงความน่าจะเป็นของ X ขึ้นอยู่กับจำนวนครั้งในการกระทำซ้ำ ๆ กัน n ครั้ง และความน่าจะเป็นของความสำเร็จ โดยกำหนดให้ p เป็นความน่าจะเป็นของความสำเร็จในการกระทำแต่ละครั้ง

q เป็นความน่าจะเป็นของความไม่สำเร็จในการทำแต่ละครั้ง

ในการหารูปแบบฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ $b(x; n, p)$ จะพิจารณาถึงจำนวนวิธีทั้งหมดของการทดลองที่ประกอบด้วยความสำเร็จ X ครั้ง และความไม่สำเร็จ $(n - x)$ ครั้ง ซึ่งมีจำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ $\binom{n}{x}$ วิธี หรือ $^{n}C_{x}$ วิธี ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\frac{n!}{x!(n-x)!}$

เนื่องจากการกระทำแต่ละครั้งเป็นอิสระกัน ในแต่ละวิธีของการเกิดความสำเร็จ x ครั้ง แต่ละครั้งมีความน่าจะเป็น p และเกิดความไม่สำเร็จ $(n - x)$ ครั้ง แต่ละครั้งมีความน่าจะเป็น q

ดังนั้นแต่ละวิธีของความสำเร็จ x ครั้ง และความไม่สำเร็จ $(n - x)$ ครั้ง มีค่าความน่าจะเป็นเท่ากับ p^xq^{n-x}

มีจำนวนวิธีทั้งหมดที่จะเกิดเหตุการณ์เท่ากับ $^{n}C_{x}$ วิธี ความน่าจะเป็นเขียนได้ดังนี้

$$\underbrace{p^xq^{n-x} + p^xq^{n-x} + \ldots + p^xq^{n-x}}_{^{n}C_{x}\ \text{วิธี}} = {}^{n}C_{x}p^xq^{n-x}$$

ดังนั้น $b(x ; n, p) = {}^{n}C_{x}p^xq^{n-x}$ โดยที่ $x = 0, 1, 2, \ldots, n$

และเนื่องจาก $p + q = 1$

$$(q+p)^n = {}^{n}C_{0}p^0q^n + {}^{n}C_{1}pq^{n-1} + {}^{n}C_{2}p^2q^{n-2} + \ldots + {}^{n}C_{n}p^nq^0$$

จะได้ $1 = b(0 ; n , p) + b(1 ; n , p) + ... + b(n; n , p)$

นั่นคือ $\sum_{x=0}^{n} {}^{n}C_x p^x q^{n-x} = 1$

หมายความว่าผลรวมความน่าจะเป็นของทุกค่าของตัวแปรสุ่ม X มีค่าเท่ากับ 1 ซึ่งเป็นคุณสมบัติของการแจกแจงความน่าจะเป็นทั่ว ๆ ไป

จากการโยนเหรียญหนึ่งอันสามครั้ง อธิบายในลักษณะของการใช้สูตรดังนี้

x : จำนวนหัวที่ขึ้นจากการโยน 3 ครั้ง

X = 0, 1, 2, 3

ถ้าทราบว่าความน่าจะเป็นในการเกิดหัวแต่ละครั้งเท่ากับ 0.5 และความน่าจะเป็นในการเกิดก้อยเท่ากับ 0.5

$P(X = x) = b(x; n, p) = b(x ; 3, 0.5) = {}^{n}C_x (0.5)^x (0.5)^{n-x}$

ดังนั้น $P(X = 0) = b(0; 3, 0.5) = {}^{3}C_0 (0.5)^0 (0.5)^3 = 0.125$

$P(X = 1) = b(1; 3, 0.5) = {}^{3}C_1 (0.5)^1 (0.5)^2 = 0.375$

$P(X = 2) = b(2; 3, 0.5) = {}^{3}C_2 (0.5)^2 (0.5)^1 = 0.375$

$P(X = 3) = b(3; 3, 0.5) = {}^{3}C_3 (0.5)^3 (0.5)^0 = 0.125$

ตัวอย่าง นักบาสเกตบอลคนหนึ่งมีความสามารถในการยิงลูกบอลลงห่วง 80% ถ้าเขายิงลูกบอลทั้งหมด 4 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่

ก. เขายิงลูกบอลลงห่วง 2 ครั้ง

ข. เขายิงลูกบอลลงห่วงอย่างน้อย 3 ครั้ง

ค. เขายิงลูกบอลลงห่วงทั้ง 4 ครั้ง

วิธีทำ จากโจทย์ทราบว่า $n = 4$, $p = 0.80$, $q = 1-p = 0.20$

X : จำนวนครั้งที่ลูกบอลลงห่วง

x = 0, 1, 2, 3, 4

สูตร $P(X=x) = {}^{n}C_x p^x q^{n-x}$

ก. ความน่าจะเป็นที่เขายิงลูกบอลลงห่วง 2 ครั้งเท่ากับ

$$P(X = 2) = {}^{4}C_2 p^2 q^2$$

$$= 6(0.8)^2(0.2)^2 = 0.1536$$

ข. ความน่าจะเป็นที่เขายิงลูกบอลลงห่วงอย่างน้อย 3 ครั้ง เท่ากับ

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4)$$
$$= {}^4C_3 p^3 q^1 + {}^4C_4 p^4 q^0$$
$$= 4(0.8)^3(0.2)^1 + (0.8)^4$$
$$= 0.4096 + 0.4096 = 0.8192$$

ค. ความน่าจะเป็นที่เขายิงลูกบอลลงห่วงทั้ง 4 ครั้ง

$$P(X = 4) = {}^4C_4 p^4 q^0$$
$$= (0.8)^4$$
$$= 0.4096$$

การคำนวณความน่าจะเป็นจากฟังก์ชันความน่าจะเป็นของการแจกแจงทวินาม อาจยุ่งยากขึ้น ถ้า n มีค่ามากขึ้นโดยที่ p มีค่าเป็นจุดทศนิยม ฉะนั้นเพื่อให้ง่ายขึ้น ความน่าจะเป็นดังกล่าวอาจหาได้จากตารางแจกแจงทวินาม โดยตารางทวินามได้คำนวณค่าความน่าจะเป็นในบางส่วนไว้แล้ว การดูตารางทวินามจะดูจากค่า n และค่า p แล้วสามารถอ่านค่าความน่าจะเป็นของทุก ๆ ค่าของ X ดังตัวอย่างที่ 1.2

ตัวอย่าง ความน่าจะเป็นที่ผู้ป่วยจะหายจากการเป็นโรคชนิดหนึ่งเป็น 0.4 ถ้ามีผู้ป่วยที่เป็นโรคนี้ 15 คน จงหาความน่าจะเป็นที่

ก) มีผู้ที่หายจากโรคนี้อย่างน้อยที่สุด 10 คน

ข) มีผู้ที่หายจากโรคนี้ตั้งแต่ 3 ถึง 8 คน

วิธีทำ ให้ X : เป็นจำนวนผู้ป่วยที่หายจากโรคนี้

: 0 , 1 , 2 ,... , 15

p = ความน่าจะเป็นที่ผู้ป่วยจะหายจากโรคนี้เท่ากับ 0.4

q = ความน่าจะเป็นที่ผู้ป่วยจะไม่หายจากโรคนี้เท่ากับ 0.6

ก. ความน่าจะเป็นที่มีผู้หายจากโรคนี้อย่างน้อย 10 คน คือ

$$P(X \geq 10) = \sum_{X=10}^{15} {}^{15}C_x (0.4)^x (0.6)^{15-x}$$
$$= \binom{15}{10}(0.4)^{10}(0.6)^5 + \binom{15}{11}(0.4)^{11}(0.6)^4 +$$
$$\ldots + \binom{15}{15}(0.4)^{15}$$

เปิดตารางทวินามที่ $n = 15$, $p = 0.40$

$$P(X \geq 10) = .0245 + .0074 + .0016 + .0003 + .0000 + .0000$$

$$= .0338$$

ข. ความน่าจะเป็นที่มีผู้ที่หายจากโรคนี้ตั้งแต่ 3 ถึง 8 คน คือ 0.0338

$$P(3 \leq x \leq 8) = \sum_{X=3}^{8} \binom{15}{X} (0.4)^{x}(0.6)^{15-x}$$

$$= \binom{15}{3}(0.4)^{3}(0.6)^{12} + \binom{15}{4}(0.4)^{4}(0.6)^{11} + \ldots + \binom{15}{8}(0.4)^{8}(0.6)^{7}$$

เปิดตารางทวินามที่ $n = 15$, $P = 0.4$

$$P(3 \leq x \leq 8) = .0634 + .1268 + .1859 + .2066 + .1771 + .1181$$

$$= .8779$$

ตัวอย่าง ถ้าในโรงเรียนระดับมัธยมศึกษาแห่งหนึ่ง มีนักเรียนจำนวนมาก และทราบว่านักเรียนใส่แว่นสายตาสั้น จำนวน 15% ของทั้งหมด ถ้าสุ่มนักเรียนจำนวน 10 คน จากโรงเรียนนี้ จงหาความน่าจะเป็นต่อไปนี้

ก. ได้นักเรียนสายตาสั้น จำนวน 3 คน

ข. ได้นักเรียนสายตาสั้นอย่างมาก 3 คน

ค. ได้นักเรียนสายตาสั้นมากกว่า 3 คน

วิธีทำ ให้ X แทนจำนวนนักเรียนสายตาสั้น

$x = 0, 1, 2, 3, \ldots, 10$

X มีการแจกแจงทวินามหรือ $X \sim b(x\,;\,10\,,\,0.15)$

เปิดตารางการแจกแจงทวินามที่ $n = 10$, $p = 0.15$

ก. $P(X = 3) = 0.1298$

ข. $P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$

$= 0.1969 + 0.3474 + 0.2759 + 0.1298$

$= 0.95$

ค. $P(X > 3) = P(x = 4) + P(X = 5) + \ldots + P(X = 10)$

$= 1 - P(X \leq 3)$

$= 1 - 0.95 = 0.05$

ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงทวินาม

ถ้าตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแบบทวินาม หรือเขียนเป็นสัญลักษณ์ $b(x; n, p)$ จะมีค่าเฉลี่ย (mean) และความแปรปรวน (variance) ดังนี้

$E(X) = np$

$V(X) = npq$

แสดงการพิสูจน์ ค่าเฉลี่ย (mean)

ค่าความแปรปรวน (variance)

พิสูจน์ค่าเฉลี่ย $E(X) = np$

X_i เป็นตัวแปรสุ่มทวินามสำหรับการกระทำครั้งที่ i

$i = 1, 2, 3, \ldots n$

กำหนดให้ $X = 0, 1$ เมื่อ 1 เป็นค่าของความสำเร็จ และ 0 เป็นค่าของความไม่สำเร็จในการทดลองหรือการกระทำแต่ละครั้ง

p = ความน่าจะเป็นของความสำเร็จ

q = ความน่าจะเป็นของความ ไม่สำเร็จ

ดังนั้น $P(X_i = 1) = p$

$P(X_i = 0) = q$

นิยามค่าเฉลี่ย $E(X) = \sum xp(X=x) = 1(p) + 0(q) = p$

เนื่องจาก x แทนจำนวนของความสำเร็จ

ดังนั้น $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$

$$
\begin{aligned}
E(X) &= E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) \\
&= E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n) \\
&= p + p + \ldots + p \text{ (n ครั้ง)} \\
&= np
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $E(X) = np$

พิสูจน์ ความแปรปรวน $V(X) = npq$

นิยามความแปรปรวน $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \longrightarrow (1)$

ในการกระทำแต่ละครั้งของ X_i

กำหนดให้ $X = 0, 1$ เมื่อ 1 เป็นค่าของความสำเร็จ

และ 0 เป็นค่าของความไม่สำเร็จ

$P(X_i = 1) = p$

$P(X_i = 0) = q$

จากค่าเฉลี่ย $E(X_i) = p$

$$E(X_i^2) = \Sigma x^2 p(X = x) = (1)^2(p) + (0)^2(q) = p$$

จากสมการ (1) จะได้ $V(X) = P - P^2 = P(1 - P) = pq$

เนื่องจาก $X = X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_n$

และ $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$ เป็นอิสระต่อกัน

ดังนั้น $V(X) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)$

$= pq + pq + pq + ... pq$ (จำนวน n ครั้ง)

$= npq$

นั่นคือ $V(X) = npq$

ตัวอย่าง ถ้าความน่าจะเป็นของกลอนประตูที่ชำรุดเท่ากับ 0.01 จงหาค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของจำนวนกลอนประตูที่ชำรุด ถ้ามีกลอนประตูทั้งหมด 4,000 อัน

วิธีทำ ค่าเฉลี่ย $E(X) = np$

$$E(X) = 4{,}000 \times 0.01 = 40$$

นั่นคือ เราคาดว่าจะพบกลอนประตูที่ชำรุด 40 อัน จากทั้งหมด 4,000 อัน

ความแปรปรวน $= V(X) = npq$

$$V(X) = 4{,}000 \times 0.01 \times 0.99 = 39.6$$

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $= \sqrt{npq}$

$$= \sqrt{39.6} = 6.29$$

นั่นคือ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลอนที่ชำรุด เท่ากับ 6.29 อัน

ตัวอย่าง จากการสำรวจครั้งหนึ่งพบว่า ในตำบลหนึ่งมีครอบครัวที่มีบุตร 4 คน จำนวน 2,000 ครอบครัวถ้าความน่าจะเป็นที่จะมีบุตรชายและหญิงมีค่าเท่ากัน จงคาดคะเน จำนวนครอบครัวที่

ก) มีบุตรชายอย่างน้อย 1 คน

ข) มีบุตรชาย 2 คน

วิธีทำ ให้ X แทนจำนวนบุตรชาย

$x = 0, 1, 2, 3, 4$

ความน่าจะเป็นที่จะมีบุตรชาย = ความน่าจะเป็นจะมีบุตรหญิง = 0.5

$X \sim b(x ; 4 , 0.5)$

ก) เปิดตารางการแจกแจงทวินามที่ $n = 4$, $p = 0.5$ หาค่า $P(X \geq 1)$

$$P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$$

$$= 1 - P(X = 0)$$

$$= 1 - 0.0625 = 0.9375$$

จากสูตร $E(X) = np$

เมื่อจำนวนครอบครัวทั้งหมด = n = 2,000 ครอบครัว

และ p = ความน่าจะเป็นที่มีบุตรชายอย่างน้อย 1 คน = 0.9375

$$E(X) = 2{,}000 \times 0.9375 = 1{,}875$$

นั่นคือ คาดว่าจำนวนครอบครัวที่มีบุตรชายอย่างน้อย 1 คน มี 1,875 ครอบครัว

ข) เปิดตารางการแจกแจงทวินาม $n = 4$, $p = 0.5$ หาค่า $p(x = 2)$

$$P(x = 2) = 0.3750$$

ครอบครัวที่มีบุตรชาย 2 คน คาดว่ามีจำนวน = $E(X) = np$

เมื่อ n = 2,000 และ p เป็นความน่าจะเป็นที่มีบุตรชาย 2 คน = 0.3750

$$E(X) = 2{,}000 \times 0.3750 = 750$$

นั่นคือ คาดว่าจำนวนครอบครัวที่มีบุตรชาย 2 คน มี 750 ครอบครัว

4. ลักษณะทั่วไปของการแจกแจงทวินาม

การกระทำ (การทดลอง) หนึ่ง แบ่งเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นเป็น 2 อย่างคือ

ก. เหตุการณ์ที่ต้องการ

ข. เหตุการณ์ที่ไม่ต้องการ

ทราบความน่าจะเป็นในการเกิดเหตุการณ์ที่ต้องการในการกระทำแต่ละครั้งมีค่าเท่ากับ p หากมีการกระทำซ้ำ ๆ กัน n ครั้ง การทดลองแบบนี้เรียกว่า การทดลองแบบทวินาม (Binomial experiment)

ตัวอย่างการทดลองแบบทวินาม

1) ทดลองโยนเหรียญหนึ่ง จำนวน 20 ครั้ง สนใจการเกิดหัว โดยทราบว่าความน่าจะเป็นที่จะเกิดหัวมีค่าเท่ากับ 0.5

ลักษณะนี้จะทราบว่า สิ่งที่สนใจคือจำนวนครั้งของการเกิดหัว (H) ซึ่งอาจมีค่าเป็นจำนวน 0, 1, 2, ... , 20 โดยมีค่า $p = 0.5$ และ $n = 20$

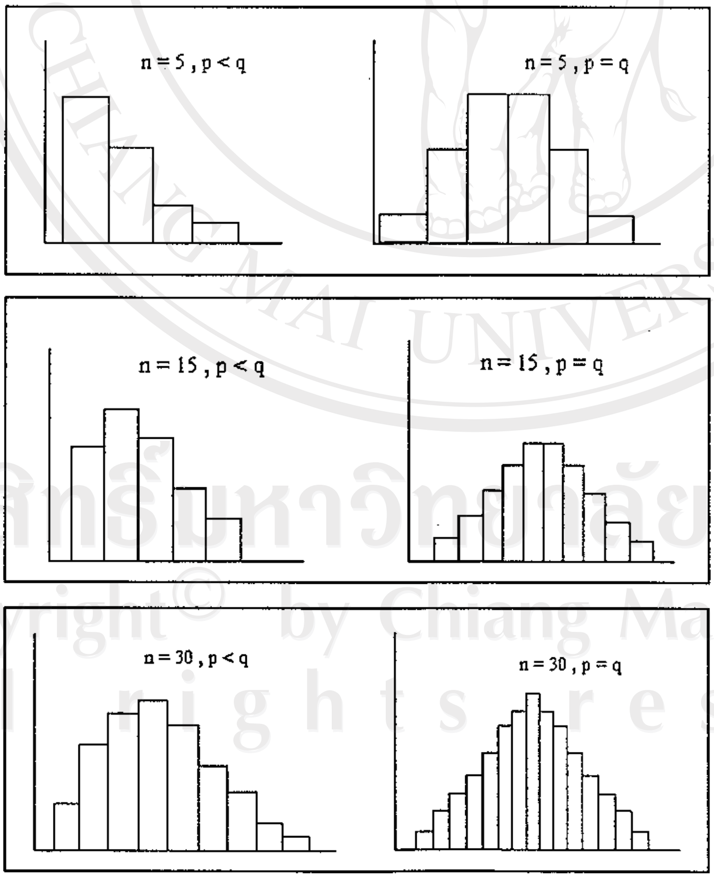
2) การมีบุตรของสามีภรรยาคู่หนึ่ง ถ้าจะมีบุตรจำนวน 4 คน สนใจการมีบุตรชาย โดยทราบว่าความน่าจะเป็นที่เกิดบุตรชายมีค่าเท่ากับ 0.50

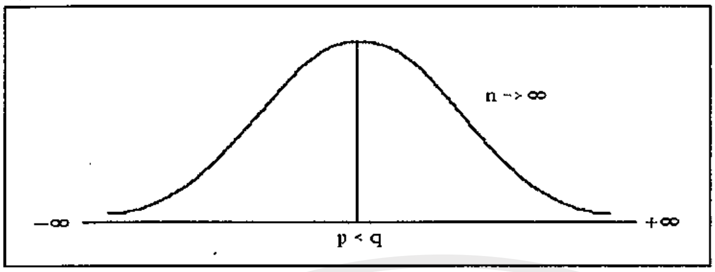
ลักษณะนี้จะทราบว่าสิ่งที่สนใจคือจำนวนบุตรชาย ซึ่งอาจมีค่าเป็นจำนวน 0, 1, 2, 3 หรือ 4 โดยมีค่า $p = 0.5$ และ $n = 4$

ลักษณะของการแจกแจงทวินาม ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ คือ n กับ p แต่ค่า p จะทำให้การแจกแจงมีลักษณะแตกต่างกันมาก กล่าวคือ ถ้าให้ n มีค่าเท่ากัน แล้วค่า p จะทำให้ลักษณะของการแจกแจงแตกต่างกัน ดังนี้

- ถ้า p มีค่าน้อยกว่า 0.5 $(0.0 < p < 0.5)$
  กราฟของการแจกแจงจะมีลักษณะเบ้ทางขวา หรือเบ้ทางบวก
- ถ้า p มีค่าเท่ากับ 0.5
  กราฟของการแจกแจงจะมีลักษณะสมมาตร
- ถ้า p มีค่ามากกว่า 0.5 $(0.5 < p < 1)$
  กราฟของการแจกแจงจะมีลักษณะเบ้ทางซ้ายหรือเบ้ทางลบ

แสดงกราฟของการแจกแจงทวินาม เมื่อ $n = 5, 15, 30$ และ p มีค่าต่าง ๆ เมื่อ $p < 0.5$ กราฟของการแจกแจงทวินามจะมีลักษณะเบ้ขวา และเมื่อ $p = q$ กราฟการแจกแจงทวินามจะสมมาตร ดังรูป



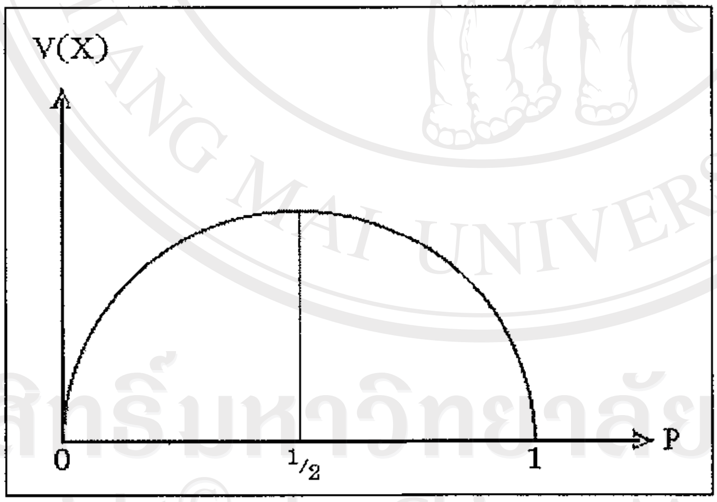


ถ้า n มีขนาดเพิ่มขึ้น การแจกแจงจะลดความเบ้ลง รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่แสดงลักษณะการกระจายของ $(q+p)^n$ จะแคบเข้า โดยเฉพาะถ้า n มีค่าใหญ่มาก เข้าใกล้จำนวนอนันต์ การแจกแจงของตัวแปรสุ่มจะมีลักษณะต่อเนื่องกัน เส้นโค้งจะมีลักษณะสมมาตรกันซึ่งเราสามารถที่จะประมาณค่าของการแจกแจงทวินามได้ โดยใช้การแจกแจงปกติ ซึ่งได้กล่าวไว้ในเนื้อหาของการแจกแจงปกติ

ลักษณะที่น่าสนใจอีกอย่างหนึ่งก็คือค่าความแปรปรวน V(X)

จาก $V(X) = npq = np(1-p) = np - np^2$

จะเห็นว่าถ้า n คงที่ ค่า V(X) จะขึ้นอยู่กับค่า p สามารถเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ของ V(X) กับ p ได้ดังนี้



เมื่อ $p = 0$ และ $p = 1$ จะได้ค่า $V(X) = 0$

เมื่อ $p = \frac{1}{2}$ จะได้ V(X) มีค่าสูงที่สุด

จากกราฟแสดงให้เห็นว่า เมื่อ p มีค่าเข้าใกล้ $\frac{1}{2}$ ความแปรปรวนของการแจกแจงจะมีค่าสูงกว่าเมื่อ p มีค่าเข้าใกล้ 0 หรือ 1

แบบทดสอบการแจกแจงทวินาม

1. ถ้าความน่าจะเป็นที่ครอบครัวหนึ่งจะให้กำเนิดบุตรเป็นเพศชายเป็น 0.4 และถ้าครอบครัวนั้นต้องการมีบุตร 4 คน จงหาความน่าจะเป็นที่ครอบครัวดังกล่าวจะมีบุตรหญิงอย่างน้อย 3 คน

    ก. 0.3456

    ข. 0.4752

    ค. 0.8208

    ง. 0.9000

2. ถ้าทราบว่า 30% ของสุนัขที่ใช้ในการทดลองอย่างหนึ่ง จะตายหลังจากที่ได้ให้ยาที่ใช้ทดลองจำนวนหนึ่ง ถ้าในการทดลองครั้งหนึ่งต้องใช้สุนัขจำนวน 5 ตัว จงหาจำนวนเฉลี่ยของสุนัขที่ตายในการทดลอง

    ก. 1.5

    ข. 2

    ค. 2.5

    ง. 3.0

3. ในการทดลองปลูกพันธุ์ไม้ชนิดหนึ่ง ปรากฏผลว่าอัตราส่วนของดอกสีแดง ต่อดอกสีขาวเท่ากับ 1 : 3 ถ้าทดลองปลูกพันธุ์ไม้ดังกล่าว 10 แปลง ๆ ละ 5 ต้น จงหาว่าจะมีกี่แปลงที่ให้ดอกสีขาวอย่างน้อย 2 ต้น

    ก. 5

    ข. 8

    ค. 9

    ง. 12

4. โรงงานอุตสาหกรรมแห่งหนึ่ง พบว่า สินค้าชนิดหนึ่งที่ผลิตขึ้นมานั้น ใช้ไม่ได้ 10% ถ้าสุ่มสินค้าชนิดนั้นมา 5 ชิ้น จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้สินค้าดี ทั้ง 5 ชิ้น

    ก. 0.5905

    ข. 0.3280

    ค. 0.0729

    ง. 0.0529

5. จงหาความน่าจะเป็นที่นาย ก. จะยิงปืนถูกเป้า 1 นัด ในการยิงปืน 3 นัด ถ้ากำหนดให้ความน่าจะเป็นที่นาย ก. จะยิงปืนถูกเป้าในแต่ผิดเป็น 0.8

ก. 0.5120

ข. 0.3840

ค. 0.0960

ง. 0.990

6. ความน่าจะเป็นที่คนไข้จะหายจากการเป็นโรคชนิดหนึ่งเป็น 0.4 ถ้ามีคนไข้ที่เป็นโรคนี้ 15 คน จงหาว่าจะมีคนไข้ที่หายจากโรคนี้โดยเฉลี่ยกี่คน

ก. 6 คน

ข. 8 คน

ค. 9 คน

ง. 10 คน

7. ถ้าโอกาสของผู้ป่วยด้วยโรคตับอักเสบจะตายเท่ากับ 0.20 โรงพยาบาลแห่งหนึ่งมีผู้ป่วยด้วยโรคตับอักเสบ 10 ราย โรงพยาบาลแห่งนี้จะมีโอกาสพบผู้ตายด้วยโรคตับอักเสบ 5 คน อยู่เท่าใด

ก. 0.0264

ข. 0.0319

ค. 0.0327

ง. 0.0530

8. ในการสอบครั้งหนึ่งข้อสอบนั้นประกอบด้วยคำถาม 20 ข้อ ซึ่งเป็นข้อสอบแบบปรนัย แต่ละข้อให้เลือกคำตอบถูกต้องที่สุดในข้อเลือก ก, ข, ค และ ง ถ้าหากมีนักศึกษาคนหนึ่งเดาคำตอบทุกข้อ จงหาความน่าจะเป็นที่นักศึกษาจะตอบถูกมากกว่า 10 ข้อ

ก. 0.0030

ข. 0.0040

ค. 0.0050

ง. 0.0060

9. สุ่มหยิบไพ่ 10 ใบ จากสำรับที่มี 52 ใบ โดยหยิบทีละใบแล้วใส่คืน จงหาความน่าจะเป็นที่ ได้ไพ่เป็นโพธิ์แดง 4 ใบ

ก. 0.1877

ข. 0.2816

ค. 0.2503

ง. 0.1460

10. ในการผลิตสินค้าชนิดหนึ่งพบว่ามีสินค้าที่ไม่ได้คุณภาพจำนวนร้อยละ 5 ของสินค้าที่ผลิตได้ ถ้าในการสุ่มตรวจสินค้า 12 ชิ้น จงหาความน่าจะเป็นที่จะไม่พบสินค้าที่ไม่ได้คุณภาพเลย

ก. 0.0988

ข. 0.3413

ค. 0.4401

ง. 0.5404

การแจกแจงปัวซอง

Poisson Distribution

เนื้อหาการแจกแจงปัวซอง

1. ลักษณะของการทดลองแบบปัวซอง
2. สมการของการแจกแจงปัวซอง
3. ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงปัวซอง
4. การประมาณการแจกแจงทวินามด้วยการแจกแจงปัวซอง

1. ลักษณะการทดลองแบบปัวซอง

การทดลองที่ทำให้ได้ค่าของตัวแปรสุ่ม X

เมื่อ X แทนจำนวนครั้งของความสำเร็จที่เกิดขึ้นจากการทดลองแบบสุ่มในช่วงเวลาหนึ่งที่กำหนดให้ หรือภายในขอบเขตหนึ่งที่กำหนดให้ เรียกว่า **การทดลองแบบปัวซอง** (Posson experiment)

ช่วงเวลาที่กำหนดให้มีได้หลายรูปแบบ เช่น หน่วยวินาที นาที ชั่วโมง วัน สัปดาห์ เดือน ปี ส่วนขอบเขตอื่น ๆ ได้แก่ ส่วนหนึ่งของเส้นตรง พื้นที่ปริมาตร

ตัวอย่างลักษณะข้อมูลที่สอดคล้องกับการแจกแจงปัวซอง เช่น

- จำนวนครั้งที่รับโทรศัพท์ในช่วง เวลา 10.00 - 10.10 น. ของพนักงานรับโทรศัพท์คนหนึ่ง
- จำนวนอุบัติเหตุรถยนต์ที่ชนกัน ณ สี่แยกแห่งหนึ่งในช่วงเวลา 8.00 - 8.30 น.
- จำนวนรอยตำหนิบนเนื้อผ้า 1 ตารางฟุต
- จำนวนเม็ดเลือดขาวในเลือด 1 ลูกบาศก์เซนติเมตร

ลักษณะของการทดลองปัวซองโดยทั่วไป เป็นดังนี้

1. เราทราบค่าเฉลี่ย (λ) ของจำนวนความสำเร็จ (succuss) ที่ปรากฏขึ้นในช่วงเวลาหนึ่งหรือขอบเขตหนึ่งที่กำหนดให้
2. ความน่าจะเป็นของความสำเร็จแต่ละครั้ง จะเกิดขึ้นในช่วงเวลาหรือขอบเขตใด ๆ สั้นมาก โดยที่ความน่าจะเป็นของความสำเร็จนั้น จะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับความยาวของช่วงเวลาหรือขนาดของขอบเขต
3. ความน่าจะเป็นที่ความสำเร็จจะเกิดขึ้นมากกว่าหนึ่งครั้ง ในช่วงเวลานั้นหรือในขอบเขตนั้นจะมีค่าน้อยมาก ประมาณได้ด้วยศูนย์
4. จำนวนความสำเร็จที่เกิดขึ้นในช่วงเวลาใดเวลาหนึ่ง หรือขอบเขตหนึ่งจะไม่มีผลต่อการเกิดหรือไม่เกิดของความสำเร็จในช่วงเวลาอื่น

2. ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของการแจกแจงปัวซอง

การแจกแจงปัวซอง ตั้งชื่อตาม S.D. Poisson เป็นผู้คิดขึ้นในปี ค.ศ. 1837 การแจกแจงปัวซอง เป็นการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่อง

นิยาม ถ้า X เป็นจำนวนความสำเร็จของการทดลองแบบปัวซอง X จะมีการแจกแจงปัวซอง ซึ่งมีค่าเฉลี่ยของจำนวนความสำเร็จในช่วงเวลาหรือขอบเขตดังกล่าว เป็น λ และความแปรปรวน λ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $p(x;\lambda)$ แล้วฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X กำหนดได้ดังนี้

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \quad \text{เมื่อ} \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

และ $e = 2.71828\ldots$

ตามคุณสมบัติของฟังก์ชันความน่าจะเป็นสรุปได้ว่า

ก. ผลรวมความน่าจะเป็นทุก ๆ ค่าของตัวแปร X เท่ากับ 1

ข. ค่าเฉลี่ยของตัวแปร X เท่ากับ λ หรือ $E(X) = \lambda$

ค. ความแปรปรวนของตัวแปร X เท่ากับ λ หรือ $V(X) = \lambda$

ตัวอย่างที่ 1 ผ้าพลาสติกที่ผลิตโดยเครื่องจักรจะมีรอยตำหนิ โดยเฉลี่ยม้วนละ 3 แห่ง ถ้าซื้อผ้าพลาสติกที่ผลิตโดยเครื่องจักรดังกล่าว 1 ม้วน จงหาความน่าจะเป็นที่จะมีรอยตำหนิไม่เกิน 2 แห่ง

วิธีทำ ให้ X แทนรอยตำหนิในผ้า 1 ม้วน

$x = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$X \sim p(x\,;3)$

$$P(X \leq 2) = \sum_{x=0}^{2} \frac{e^{-3}3^{x}}{x!}$$

$$= \frac{e^{-3}3^{0}}{0!} + \frac{e^{-3}3^{1}}{1!} + \frac{e^{-3}3^{2}}{2!} = 8.5e^{-3}$$

ในการคำนวณค่าความน่าจะเป็นจากฟังก์ชันความน่าจะเป็นของการแจกแจงปัวซองอาจยุ่งยาก เนื่องจากฟังก์ชันความน่าจะเป็นดังกล่าวมีค่าคงที่ e อยู่ด้วย เพื่อให้การหาความน่าจะเป็นดังกล่าวสะดวกขึ้น อาจใช้ตารางแจกแจงปัวซอง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2 ถ้าจำนวนเด็กในภาคใต้ที่ถูกจับไปเรียกค่าไถ่ในรอบ 10 ปีที่ผ่านมา โดยเฉลี่ยเป็น 5 คน จงหาความน่าจะเป็นที่เด็กในภาคใต้จะถูกจับไปเรียกค่าไถ่ 7 คนในรอบ 10 ปี

วิธีทำ ให้ X แทนจำนวนเด็กที่ถูกจับไปเรียกค่าไถ่ในรอบ 10 ปี

$X \sim p(x\,;5)$

$$P(X = 7) = \frac{e^{-5}3^{7}}{7!}$$

จะหาค่าความน่าจะเป็นจากตารางปัวซอง เมื่อ $\lambda = 5$ และ $x = 7$

$P(X = 7) = .1044$

ตัวอย่างที่ 3 จำนวนเฉลี่ยของตั๊กแตนต่อพื้นที่นา 1 ตารางวาในเนื้อที่นาทั้งหมด 100 ตารางวา เท่ากับ 10 ตัว จงหาความน่าจะเป็นที่มีตั๊กแตนเกิน 15 ตัว ต่อพื้นที่นา 1 ตารางวา

วิธีทำ ให้ X แทนจำนวนตั๊กแตนต่อพื้นที่นา 1 ตาราง

$X \sim p(x\,;\,10)$

$$P(X > 15) = 1 - P(X \le 15)$$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{15} \frac{e^{-10}(10)^x}{x!}$$

$$= 1 - 0.9513$$

$$= 0.0487$$

ตัวอย่างที่ 4 พนักงานรับโทรศัพท์ ณ สำนักงานแห่งหนึ่ง จะรับโทรศัพท์โดยเฉลี่ย วันละ 14 ครั้ง

ก. จงหาความน่าจะเป็นที่พนักงานรับโทรศัพท์ไม่น้อยกว่า 10 ครั้ง ในวันพรุ่งนี้

ข. ถ้าเดือนหน้า บริษัทดังกล่าวทำงาน 20 วัน คาดว่าจะมีกี่วันที่พนักงาโทรศัพท์ไม่น้อยกว่า 10 ครั้ง

วิธีทำ ก ให้ X แทนจำนวนครั้งที่พนักงานจะต้องรับโทรศัพท์ในวันพรุ่งนี้

โดยที่ $x = 0, 1, 2, \ldots$

$X \sim P(x\,;\,14)$

จากตารางความน่าจะเป็นของการแจกแจงปัวซอง ที่ $\lambda = 14$

$$P(X \ge 10) = 1 - P(X \le 9)$$

$$= 1 - (.0000 + .0000 + \ldots + .0473)$$

$$= 0.8907$$

วิธีทำ ข จากข้อ ก ทราบความน่าจะเป็นที่พนักงานรับโทรศัพท์ไม่น้อยกว่า 10 ครั้งเท่ากับ .8907

ให้ Y แทนจำนวนวันที่พนักงานรับโทรศัพท์ไม่น้อยกว่า 10 ครั้ง

$y = 0, 1, 2, \ldots 20$; $Y \sim b(y\,,\,n = 20\,,\,p = .8907)$

$$E(Y) = np$$

$$= 20 \times .8907$$

$= 17.814$ หรือประมาณ 18 วัน

3. ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงปัวซอง

ถ้าตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแบบปัวซองหรือเขียนเป็นสัญลักษณ์ $P(x\ ;\ \lambda)$ จะมีค่าเฉลี่ย (mean) และความแปรปรวน (variance) ดังนี้

$$E(X) = \lambda$$
$$V(X) = \lambda$$

แสดงการพิสูจน์ ค่าเฉลี่ย (mean) และ ความแปรปรวน (variance)

พิสูจน์ค่าเฉลี่ย $E(X) = \lambda$

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงแบบปัวซอง

โดยที่มีฟังก์ชันความน่าจะเป็นคือ $P(X = x) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$ เมื่อ $x = 0, 1, 2, \ldots$

และ $\displaystyle\sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} = 1$

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} xp(x)$$
$$= \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$
$$= \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$
$$= \lambda \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$
$$= \lambda \qquad \left(\text{เพราะว่า } \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = 1\right)$$

พิสูจน์ค่าความแปรปรวน $V(X) = \lambda$

และ $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$$= E\{(X)(X-1)\} + E(X) - (E(X))^2 \quad \text{(ให้ เป็นสมการ A)}$$

พิจารณาเทอม

$$
\begin{aligned}
E\{(X)(X-1)\} &= \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)p(x) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \\
&= \sum_{x=2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{(x-2)!} \\
&= \lambda^{2} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-2}}{(x-2)!} \\
&= \lambda^{2} \qquad \left(\text{เพราะว่า } \sum_{x=2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-2}}{(x-2)} = 1\right)
\end{aligned}
$$

แทนค่า E {(X)(X - 1)} ในสมการ A

$$
\begin{aligned}
V(X) &= \lambda^{2} + \lambda - \lambda^{2} \\
&= \lambda
\end{aligned}
$$

นอกจากนี้การแจกแจงปัวซองมีคุณสมบัติ (Reproductive Properties)

4. คุณสมบัติ Reproductive Propertics

คุณสมบัติข้อนี้กล่าวว่า "ตัวแปรอิสระตั้งแต่สองตัวขึ้นไป มีการแจกแจงเป็นอย่างเดียวกัน ถ้าผลบวกของตัวแปรสุ่มเหล่านั้น (ซึ่งเป็นตัวแปรสุ่มด้วย) มีการแจกแจงเป็นแบบเดิม เราเรียกว่าการแจกแจงนั้นมีคุณสมบัติ Reproductive Properties"

การแจกแจงปัวซองมีคุณสมบัติ Reproductive ดังนี้

ถ้า $X_1, X_2, \ldots X_n$ เป็นตัวแปรสุ่มอิสระ

โดยที่ X_i มีการแจกแจงปัวซอง ซึ่งมีพารามิเตอร์ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ ตามลำดับ

ให้ $Z = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$

จะได้ว่า Z มีการแจกแจงปัวซองที่มีพารามิเตอร์ $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$

ตัวอย่างเช่น

ระหว่างเวลา 9.00-10.00 น. โดยเฉลี่ยแล้วจะมีโทรศัพท์เข้าสำนักงานแห่งหนึ่ง 8 ครั้ง และระหว่าง 10.00-11.00 น. โดยเฉลี่ยแล้วจะมีโทรศัพท์เข้าสำนักงานนั้น 5 ครั้ง สามารถกล่าวได้ว่า ระหว่างเวลา 9.00-11.00 น. โดยเฉลี่ยแล้วจะมีโทรศัพท์เข้าสำนักงานนั้น 13 ครั้ง

ตัวอย่างที่ 5 ถ้าโดยเฉลี่ยแล้วอนุภาคชนิดหนึ่งจะวิ่งผ่านเครื่องวัดวินาทีละ 5 ตัว จงหาความน่าจะเป็นที่จะมีอนุภาควิ่งผ่านเครื่องวัด จำนวน 9 ตัว ในเวลา 3 วินาที

วิธีทำ ให้ X แทนจำนวนอนุภาคที่วิ่งผ่านเครื่องวัดในเวลา 3 วินาที

$x = 0, 1, 2, \ldots$

$X \sim P(x ; \lambda)$

พารามิเตอร์ λ ของ X กรณีนี้จะมีค่าเท่ากับ $5 + 5 + 5 = 15$

ดังนั้น $X \sim P(x ; 15)$ จึงเปิดตารางปัวซองที่ $\lambda = 15$

$P(X = 9) = 0.0324$

5. การประมาณการแจกแจงทวินามด้วยการแจกแจงปัวซอง

(Poisson Approximation to the Binomial Distribution)

ในการหาค่าความน่าจะเป็นของการแจกแจงทวินาโดยการคำนวณจากฟังก์ชันของการแจกแจงทวินามนั้น ในกรณีที่ n มีค่ามากจะคำนวณค่อนข้างยากเพราะเป็นค่ายกกำลังหลาย ๆ ครั้ง และถ้า n เป็นจำนวนมากมีค่าเข้าใกล้อนันต์ จะหาค่าความน่าจะเป็นจากสูตรทวินามไม่ได้เลย เราสามารถประมาณค่าความน่าจะเป็นทวินามด้วยการแจกแจงปัวซองได้ ในกรณีที่ n มีค่ามาก p มีค่าน้อย ๆ และค่า np มีค่าคงที่ ค่าความน่าจะเป็นของการแจกแจงทวินามจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าความน่าจะเป็นของการแจกแจงปัวซอง สามารถพิสูจน์ดังนี้

ทฤษฎีบท ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงทิวนาม $b(x ; n, p)$ ถ้า $n \to \infty$, $P \to 0$ โดยที่ np เป็นค่าคงที่แล้ว การแจกแจงทวินามจะประมาณได้ ด้วยการแจกแจงปัวซอง $p(x ; \lambda)$ โดยที่ $\lambda = np$

พิสูจน์ จาก

$$b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$= \frac{n!}{X!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-x+1)}{x!} p^x q^{n-x}$$

และ $\lambda = np$, $p = \frac{\lambda}{n}$ ดังนั้น

$$b(x;n,p) \quad = \quad \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-x+1)}{x!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \quad 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)\frac{\lambda^x}{x!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}$$

เมื่อ $n \to \infty$ ขณะที่ x กับ μ ยังมีค่าคงที่ ดังนั้น

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{x-1}{n}\right) \quad = \quad 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x} \quad = \quad 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n} \quad = \quad e^{-\lambda}$$

จะได้ $$b(x;n,p) \to \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$b(x;n,p) \to p(x;\lambda)$$

การแจกแจงปัวซองจะเป็นตัวประมาณค่าที่ดี ของการแจกแจงทวินามเมื่อ $P \le 0.10$ และ $n \ge 30$

ตัวอย่างประมาณค่าการแจกแจงทวินามด้วยการแจกแจงปัวซอง

ตัวอย่างที่ 6 สมมติว่าเฉลี่ยแล้วทุก ๆ 1,000 คน ที่ดื่มสุรา จะติดสุราจำนวน 1 คน จงหาความน่าจะเป็นที่สุ่มคนที่ดื่มสุรามา 8,000 คน แล้วติดสุราน้อยกว่า 7 คน

วิธีทำ ให้ X แทนจำนวนคนที่ติดสุรา และให้ P_x : ความน่าจะเป็นที่คนจะติดสุรา

$$P_x \quad = \quad \frac{1}{1000} \quad = \quad 0.001$$

$x = 0, 1, 2, \ldots, 8{,}000$ โดยที่ $X \sim b(x\,;\,8{,}000\,,\,0.001)$

เมื่อ X มีการแจกแจงทวินาม โดยที่ $n = 8{,}000$ ซึ่งมีค่ามาก และ $p = .001$ ซึ่งมีค่าน้อย จึงสามารถประมาณด้วยการแจกแจงปัวซอง

โดยค่าเฉลี่ย $\lambda = np = 8{,}000 \times .001 = 8$

$$P(X < 7) = \sum_{x=0}^{6} \frac{e^{-8} 8^x}{x!}$$

หรือเปิดตารางปัวซองที่ $\lambda = 8$

$$P(X < 7) = 0.0003 + 0.0027 + \ldots + 0.1221$$

$$= 0.3133$$

ตัวอย่างที่ 7 ถ้าในการฉีดวัคซีนชนิดหนึ่ง ปรากฏว่าคนหนึ่ง ๆ จะแพ้วัคซีนด้วยความน่าจะเป็น 0.001 ในการฉีดวัคซีนครั้งหนึ่ง จำนวน 2,000 คน จงหาความน่าจะเป็นต่อไปนี้

ก. มีคนแพ้วัคซีนมากกว่า 2 คน

ข. มีคนไม่แพ้วัคซีน 1,990 คน

วิธีทำ ให้ X แทนจำนวนคนแพ้วัคซีน

$x = 0, 1, 2, \ldots, 2{,}000$ โดยที่ $X \sim b(x\,;\,2{,}000\,,\,0.001X$

เนื่องจาก n มีค่ามาก และ p มีค่าน้อย (0.001) จึงสามารถประมาณด้วยการแจกแจงปัวซอง โดยที่

$\lambda = np$ หรือ $\lambda = 2000 \times 0.001 = 2$

ก. $P(X > 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)]$

$$= \left[\frac{e^{-2} \cdot 2^0}{0!} + \frac{e^{-2} \cdot 2^1}{1!} + \frac{e^{-2} \cdot 2^2}{2!}\right]$$

$$= 1 - [0.1353 + 0.2707 + 0.2707]$$

$$= 0.3233$$

ข. ถ้ามีคนไม่แพ้วัคซีน จำนวน 1990 คน แล้วจะมีคนแพ้วัคซีน จำนวน 10 คน

$$P(X - 10) = \frac{e^{-2} \cdot 2^{10}}{10!} = 0.0000$$

แบบทดสอบการแจกแจงปัวซอง

1. ที่สี่แยกแห่งหนึ่งมีจำนวนอุบัติเหตุรถชนกันเฉลี่ยสัปดาห์ละ 3 ราย จงหาความน่าจะเป็นที่จะเกิดอุบัติเหตุรถชนกันที่สี่แยกนี้ จำนวน 5 ราย ในสัปดาห์สุดท้ายของเดือน
   ก. 0.0504
   ข. 0.1008
   ค. 0.1680
   ง. 0.2240
2. สมมุติว่าหนังสือเล่มหนึ่งหนา 500 หน้า มีที่พิมพ์ผิดแบบสุ่มโดยทั่วไป 300 แห่ง จงหาค่าความน่าจะเป็นที่เปิดหนังสือเล่มนี้ แบบสุ่มขึ้นมาหน้าหนึ่ง จะมีที่พิมพ์ผิดจำนวน 2 แห่ง
   ก. 0.0988
   ข. 0.4281
   ค. 0.5269
   ง. 0.9769
3. ท้องนาแห่งหนึ่งมีหนูโดยเฉลี่ยไร่ละ 10 ตัว จงหาความน่าจะเป็นที่นาแหลงหนึ่ง ซึ่งมี 1 ไร่ จะมีหนูนาเกินกว่า 15 ตัว
   ก. 0.0217
   ข. 0.0347
   ค. 0.0488
   ง. 0.0521
4. ถ้าอัตราการตายของประชากรในประเทศไทยเฉลี่ยแล้ว 2 คนต่อนาที จงหาความน่าจะเป็นที่จะมีประชากรตายอย่างน้อย 2 คนต่อนาที
   ก. 0.2707
   ข. 0.4060
   ค. 0.5940
   ง. 0.6040
5. ในการผลิตกระสุนปืนในระยะยาวปรากฏว่าจะมีข้อบกพร่อง 4% จงหาความน่าจะเป็นที่ในจำนวนกระสุนปืน 100 ลูก จะไม่มีข้อบกพร่องเลย
   ก. 0.0733
   ข. 0.0183
   ค. 0.2268
   ง. 0.3425

6. ความน่าจะเป็นที่รถยนต์คันใหม่จากโรงงานแห่งหนึ่งจะมีระบบห้ามล้อมเสีย 0.001 ถ้าสุ่มตัวอย่างจากจากโรงงานนี้มา 1,000 คัน จงหาความน่าจะเป็นที่จะมีรถระบบห้ามล้อเสียมากกว่า 2 คัน

ก. 0.0023

ข. 0.0803

ค. 0.0846

ง. 0.1649

7. ฝ่ายสวัสดีการพนักงานในโรงงานใหญ่แห่งหนึ่ง ซึ่งมีพนักงานจำนวนมาก พบว่า โดยเฉลี่ยแล้วจะได้รับอุบัติเหตุจากเครื่องจักรปีละ 5 คน จงหาความน่าจะเป็นในปีหน้าจะมีพนักงานได้รับอุบัติเหตุ จำนวน 7 คน

ก. .1044

ข. .0653

ค. .0363

ง. 0.0181

8. ถ้าผู้ชายที่ไม่มีเชื้อเอดส์ มีเพศสัมพันธ์กับโสเภณีที่มีเชื้อเอดส์ โอกาสที่ผู้ชายจะได้รับเชื้อเอดส์ 1% ถ้ามีผู้ชายที่ไม่มีเชื้อเอดส์ 80 คน มีเพศสัมพันธ์กับโสเภณีที่มีเชื้อเอดส์ จงหาความน่าจะเป็นที่ผู้ชายไม่น้อยกว่า 1 คน ได้รับเชื้อเอดส์

ก. 0.4493

ข. 0.5000

ค. 0.5000

ง. 0.5507

9. โรงพยาบาลเอกชนแห่งหนึ่ง โดยเฉลี่ยแล้วผู้ป่วยคนหนึ่งจะนอนพักรักษาตัวในโรงพยาบาลเป็นจำนวน 3 วัน จงหาความน่าจะเป็นที่ผู้ป่วยคนหนึ่งจะเข้ามารักษาแล้วนอนพักในโรงพยาบาลเกิน 4 วัน

ก. 0.1008

ข. 0.1680

ค. 0.3528

ง. 0.5208

10. ในอำเภอแห่งหนึ่งมีการบันทึกจำนวนผู้ตาย พบว่ามีผู้ตายเฉลี่ยวันละ 8 คน จงหาความน่าจะเป็นในวันพรุ่งนี้จะมีคนตายในอำเภอนี้น้อยกว่า 5 คน

ก. 0.0573

ข. 0.0916

ค. 0.0930

ง. 0.0996

Table 1 Cumulative Standard Normal Distribution

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt$$

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

x	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417
$F(x)$	.90	.95	.975	.99	.995	.999	.9995	.99995	.999995
$2[1 - F(x)]$	.20	.10	.05	.02	.01	.002	.001	.0001	.00001

Table 2 Individual Binomial Distribution

n	x	.01	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
1	0	.9900	.9500	.9000	.8500	.8000	.7500	.7000	.6500	.6000	.5500	.5000
	1	.0100	.0500	.1000	.1500	.2000	.2500	.3000	.3500	.4000	.4500	.5000
2	0	.9801	.9025	.8100	.7225	.6400	.5625	.4900	.4225	.3600	.3025	.2500
	1	.0198	.0950	.1800	.2550	.3200	.3750	.4200	.4550	.4800	.4950	.5000
	2	.0001	.0025	.0100	.0225	.0400	.0625	.0900	.1225	.1600	.2025	.2500
3	0	.9703	.8574	.7290	.6141	.5120	.4219	.3430	.2746	.2160	.1664	.1250
	1	.0294	.1354	.2430	.3251	.3840	.4219	.4410	.4436	.4320	.4084	.3750
	2	.0003	.0071	.0270	.0574	.0960	.1406	.1890	.2389	.2880	.3341	.3750
	3	.0000	.0001	.0010	.0034	.0080	.0156	.0270	.0429	.0640	.0911	.1250
4	0	.9606	.8145	.6561	.5220	.4096	.3164	.2401	.1785	.1296	.0915	.0625
	1	.0388	.1715	.2916	.3685	.4096	.4219	.4116	.3845	.3456	.2995	.2500
	2	.0006	.0135	.0486	.0975	.1536	.2109	.2646	.3105	.3456	.3675	.3750
	3	.0000	.0005	.0036	.0115	.0256	.0469	.0756	.1115	.1536	.2005	.2500
	4	.0000	.0000	.0001	.0005	.0016	.0039	.0081	.0150	.0256	.0410	.0625
5	0	.9510	.7738	.5905	.4437	.3277	.2373	.1681	.1160	.0778	.0503	.0312
	1	.0480	.2036	.3280	.3915	.4096	.3955	.3602	.3124	.2592	.2059	.1562
	2	.0010	.0214	.0729	.1382	.2048	.2637	.3087	.3364	.3456	.3369	.3125
	3	.0000	.0011	.0081	.0244	.0512	.0879	.1323	.1811	.2304	.2757	.3125
	4	.0000	.0000	.0004	.0022	.0064	.0146	.0284	.0488	.0768	.1128	.1562
	5	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0024	.0053	.0102	.0185	.0312
6	0	.9415	.7351	.5314	.3771	.2621	.1780	.1176	.0754	.0467	.0277	.0156
	1	.0571	.2321	.3543	.3993	.3932	.3560	.3025	.2437	.1866	.1359	.0938
	2	.0014	.0305	.0984	.1762	.2458	.2966	.3241	.3280	.3110	.2780	.2344
	3	.0000	.0021	.0146	.0415	.0819	.1318	.1852	.2355	.2765	.3032	.3125
	4	.0000	.0001	.0012	.0055	.0154	.0330	.0595	.0951	.1382	.1861	.2344
	5	.0000	.0000	.0001	.0004	.0015	.0044	.0102	.0205	.0369	.0609	.0938
	6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0007	.0018	.0041	.0083	.0156
7	0	.9321	.6983	.4783	.3206	.2097	.1335	.0824	.0490	.0280	.0152	.0078
	1	.0659	.2573	.3720	.3960	.3670	.3115	.2471	.1848	.1306	.0872	.0547
	2	.0020	.0406	.1240	.2097	.2753	.3115	.3177	.2985	.2613	.2140	.1641
	3	.0000	.0036	.0230	.0617	.1147	.1730	.2269	.2679	.2903	.2918	.2734
	4	.0000	.0002	.0026	.0109	.0287	.0577	.0972	.1442	.1935	.2388	.2734
	5	.0000	.0000	.0002	.0012	.0043	.0115	.0250	.0466	.0774	.1172	.1641
	6	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0013	.0036	.0084	.0172	.0320	.0547
	7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0006	.0016	.0037	.0078
8	0	.9227	.6634	.4305	.2725	.1678	.1002	.0576	.0319	.0168	.0084	.0039
	1	.0746	.2793	.3826	.3847	.3355	.2670	.1977	.1373	.0896	.0548	.0312
	2	.0026	.0515	.1488	.2376	.2936	.3115	.2065	.2587	.2090	.1569	.1094
	3	.0001	.0054	.0331	.0839	.1468	.2076	.2541	.2786	.2787	.2568	.2188
	4	.0000	.0004	.0046	.0185	.0459	.0865	.1361	.1875	.2322	.2627	.2734

*Example: $P(X = 3 \mid n = 5, p = 0.30) = 0.1323$

Table 2 (Continued)

n	x	.01	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
							p					
8	5	.0000	.0000	.0004	.0026	.0092	.0231	.0467	.0808	.1239	.1719	.2188
	6	.0000	.0000	.0000	.0002	.0011	.0038	.0100	.0217	.0413	.0403	.1094
	7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0012	.0033	.0079	.0164	.0312
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0007	.0017	.0039
9	0	.9135	.6302	.3874	.2316	.1342	.0751	.0404	.0207	.0101	.0046	.0020
	1	.0830	.2985	.3874	.3679	.3020	.2253	.1556	.1004	.0605	.0339	.0176
	2	.0034	.0629	.1722	.2597	.3020	.3003	.2668	.2162	.1612	.1110	.0703
	3	.0001	.0077	.0446	.1069	.1762	.2336	.2668	.2716	.2508	.2119	.1641
	4	.0000	.0006	.0074	.0283	.0661	.1168	.1715	.2194	.2508	.2600	.2461
	5	.0000	.0000	.0008	.0050	.0165	.0389	.0735	.1181	.1672	.2128	.2461
	6	.0000	.0000	.0001	.0006	.0028	.0087	.0210	.0424	.0743	.1160	.1641
	7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0012	.0039	.0098	.0212	.0407	.0703
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0013	.0035	.0083	.0176
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0008	.0020
10	0	.9044	.5987	.3487	.1969	.1074	.0563	.0282	.0135	.0060	.0025	.0010
	1	.0914	.3151	.3874	.3474	.2684	.1877	.1211	.0725	.0403	.0207	.0098
	2	.0042	.0746	.1937	.2759	.3020	.2816	.2335	.1757	.1209	.0763	.0439
	3	.0001	.0105	.0574	.1298	.2013	.2503	.2668	.2522	.2150	.1665	.1172
	4	.0000	.0010	.0112	.0401	.0881	.1460	.2001	.2377	.2508	.2384	.2051
	5	.0000	.0001	.0015	.0085	.0264	.0584	.1029	.1536	.2007	.2340	.2461
	6	.0000	.0000	.0001	.0012	.0055	.0162	.0368	.0689	.1115	.1596	.2051
	7	.0000	.0000	.0000	.0001	.0008	.0031	.0090	.0212	.0425	.0746	.1172
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0014	.0043	.0106	.0229	.0439
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0016	.0042	.0098
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010
11	0	.8953	.5688	.3138	.1673	.0859	.0422	.0198	.0088	.0036	.0014	.0005
	1	.0995	.3293	.3835	.3248	.2362	.1549	.0932	.0518	.0266	.0125	.0054
	2	.0050	.0867	.2131	.2866	.2953	.2581	.1998	.1395	.0887	.0513	.0269
	3	.0002	.0137	.0710	.1517	.2215	.2581	.2568	.2254	.1774	.1259	.0806
	4	.0000	.0014	.0158	.0536	.1107	.1721	.2201	.2428	.2365	.2060	.1611
	5	.0000	.0001	.0025	.0132	.0388	.0803	.1321	.1830	.2207	.2360	.2256
	6	.0000	.0000	.0003	.0023	.0097	.0268	.0566	.0985	.1471	.1931	.2256
	7	.0000	.0000	.0000	.0003	.0017	.0064	.0173	.0379	.0701	.1128	.1611
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0011	.0037	.0102	.0234	.0462	.0806
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0018	.0052	.0126	.0269
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0007	.0021	.0054
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0005
12	0	.8864	.5404	.2824	.1422	.0687	.0317	.0138	.0057	.0022	.0008	.0002
	1	.1074	.3413	.3766	.3012	.2062	.1267	.0712	.0368	.0174	.0075	.0029
	2	.0060	.0988	.2301	.2924	.2835	.2323	.1678	.1088	.0639	.0339	.0161
	3	.0002	.0173	.0852	.1720	.2362	.2581	.2397	.1954	.1419	.0923	.0537
	4	0000	.0021	.0213	.0683	.1329	.1936	.2311	.2367	.2128	.1700	.1208
	5	.0000	.0002	.0038	.0193	.0532	.1032	.1585	.2039	.2270	.2225	.1934
	6	.0000	.0000	.0005	.0040	.0155	.0401	.0792	.1281	.1766	.2124	.2256

Table 2 (Continued)

n	*x*	*.01*	*.05*	*.10*	*.15*	*.20*	*.25*	*p* *.30*	*.35*	*.40*	*.45*	*.50*
12	7	.0000	.0000	.0000	.0006	.0033	.0115	.0291	.0591	.1009	.1489	.1934
	8	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0024	.0078	.0199	.0420	.0762	.1208
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0015	.0048	.0125	.0277	.0537
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0008	.0025	.0068	.0161
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0029
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002
13	0	.8775	.5133	.2542	.1209	.0550	.0238	.0097	.0037	.0013	.0004	.0001
	1	.1152	.3512	.3672	.2774	.1787	.1029	.0540	.0259	.0113	.0045	.0016
	2	.0070	.1109	.2448	.2937	.2680	.2059	.1388	.0836	.0453	.0220	.0095
	3	.0003	.0214	.0997	.1900	.2457	.2517	.2181	.1651	.1107	.0660	.0349
	4	.0000	.0028	.0277	.0838	.1535	.2097	.2337	.2222	.1845	.1350	.0873
	5	.0000	.0003	.0055	.0266	.0691	.1258	.1803	.2154	.2214	.1989	.1571
	6	.0000	.0000	.0008	.0063	.0230	.0559	.1030	.1546	.1968	.2169	.2095
	7	.0000	.0000	.0001	.0011	.0058	.0186	.0442	.0833	.1312	.1775	.2095
	8	.0000	.0000	.0001	.0001	.0011	.0047	.0142	.0336	.0656	.1089	.1571
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0009	.0034	.0101	.0243	.0495	.0873
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006	.0022	.0065	.0162	.0349
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0012	.0036	.0095
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0016
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
14	0	.8687	.4877	.2288	.1028	.0440	.0178	.0068	.0024	.0008	.0002	.0001
	1	.1229	.3593	.3559	.2539	.1539	.0832	.0407	.0181	.0073	.0027	.0009
	2	.0081	.1229	.2570	.2912	.2501	.1802	.1134	.0634	.0317	.0141	.0056
	3	.0003	.0259	.1142	.2056	.2501	.2402	.1943	.1366	.0845	.0462	.0222
	4	.0000	.0037	.0349	.0998	.1720	.2202	.2290	.2022	.1549	.1040	.0611
	5	.0000	.0004	.0078	.0352	.0860	.1468	.1963	.2178	.2066	.1701	.1222
	6	.0000	.0000	.0013	.0093	.0322	.0734	.1262	.1759	.2066	.2088	.1833
	7	.0000	.0000	.0002	.0019	.0092	.0280	.0618	.1082	.1574	.1952	.2095
	8	.0000	.0000	.0000	.0003	.0020	.0082	.0232	.0510	.0918	.1398	.1833
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0018	.0066	.0183	.0408	.0762	.1222
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0014	.0049	.0136	.0312	.0611
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0010	.0033	.0093	.0222
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0019	.0056
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0009
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
15	0	.8601	.4633	.2059	.0874	.0352	.0134	.0047	.0016	.0005	.0001	.0000
	1	.1303	.3658	.3432	.2312	.1319	.0668	.0305	.0126	.0047	.0016	.0005
	2	.0092	.1348	.2669	.2856	.2309	.1559	.0916	.0476	.0219	.0090	.0032
	3	.0004	.0307	.1285	.2184	.2501	.2252	.1700	.1110	.0634	.0318	.0139
	4	.0000	.0049	.0428	.1156	.1876	.2252	.2186	.1792	.1268	.0780	.0417

Table 2 (Continued)

n	x	.01	.05	.10	.15	.20	.25	p .30	.35	.40	.45	.50
15	5	.0000	.0006	.0105	.0449	.1032	.1651	.2061	.2123	.1859	.1404	.0916
	6	.0000	.0000	.0019	.0132	.0430	.0917	.1472	.1906	.2066	.1914	.1527
	7	.0000	.0000	.0003	.0030	.0138	.0393	.0811	.1319	.1771	.2013	.1964
	8	.0000	.0000	.0000	.0005	.0035	.0131	.0348	.0710	.1181	.1647	.1964
	9	.0000	.0000	.0000	.0001	.0007	.0034	.0116	.0298	.0612	.1048	.1527
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0007	.0030	.0096	.0245	.0515	.0916
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006	.0024	.0074	.0191	.0417
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0016	.0052	.0139
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0032
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
16	0	.8515	.4401	.1853	.0743	.0281	.0100	.0033	.0010	.0003	.0001	.0000
	1	.1376	.3706	.3294	.2097	.1126	.0535	.0228	.0087	.0030	.0009	.0002
	2	.0104	.1463	.2745	.2775	.2111	.1336	.0732	.0353	.0150	.0056	.0018
	3	.0005	.0359	.1423	.2285	.2463	.2079	.1465	.0888	.0468	.0215	.0085
	4	.0000	.0061	.0514	.1311	.2001	.2252	.2040	.1553	.1014	.0572	.0278
	5	.0000	.0008	.0137	.0555	.1201	.1802	.2099	.2008	.1623	.1123	.0667
	6	.0000	.0001	.0028	.0180	.0550	.1101	.1649	.1982	.1983	.1684	.1222
	7	.0000	.0000	.0004	.0045	.0197	.0524	.1010	.1524	.1889	.1969	.1746
	8	.0000	.0000	.0001	.0009	.0055	.0197	.0487	.0923	.1417	.1812	.1964
	9	.0000	.0000	.0000	.0001	.0012	.0058	.0185	.0442	.0840	.1318	.1746
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0014	.0056	.0167	.0392	.0755	.1222
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0013	.0049	.0142	.0337	.0667
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0011	.0040	.0115	.0278
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0008	.0029	.0085
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0018
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
17	0	.8429	.4181	.1668	.0631	.0225	.0075	.0023	.0007	.0002	.0000	.0000
	1	.1447	.3741	.3150	.1893	.0957	.0426	.0169	.0060	.0019	.0005	.0001
	2	.0117	.1575	.2800	.2673	.1914	.1136	.0581	.0260	.0102	.0035	.0010
	3	.0006	.0415	.1556	.2359	.2393	.1893	.1245	.0701	.0341	.0144	.0052
	4	.0000	.0076	.0605	.1457	.2093	.2209	.1868	.1320	.0796	.0411	.0182
	5	.0000	.0010	.0175	.0668	.1361	.1914	.2081	.1849	.1379	.0875	.0472
	6	.0000	.0001	.0039	.0236	.0680	.1276	.1784	.1991	.1839	.1432	.0944
	7	.0000	.0000	.0007	.0065	.0267	.0668	.1201	.1685	.1927	.1841	.1484
	8	.0000	.0000	.0001	.0014	.0084	.0279	.0644	.1134	.1606	.1883	.1855
	9	.0000	.0000	.0000	.0003	.0021	.0093	.0276	.0611	.1070	.1540	.1855
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0004	.0025	.0095	.0263	.0571	.1008	.1484
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0026	.0090	.0242	.0525	.0944
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006	.0024	.0081	.0215	.0472
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0021	.0068	.0182
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0016	.0052

Table 2 (Continued)

n	x	.01	.05	.10	.15	.20	.25	p .30	.35	.40	.45	.50
17	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
	17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
18	0	.8345	.3972	.1501	.0536	.0180	.0056	.0016	.0004	.0001	.0000	.0000
	1	.1517	.3763	.3002	.1704	.0811	.0338	.0126	.0042	.0012	.0003	.0001
	2	.0130	.1683	.2835	.2556	.1723	.0958	.0458	.0190	.0069	.0022	.0006
	3	.0007	.0473	.1680	.2406	.2297	.1704	.1046	.0547	.0246	.0095	.0031
	4	.0000	.0093	.0700	.1592	.2153	.2130	.1681	.1104	.0614	.0291	.0117
	5	.0000	.0014	.0218	.0787	.1507	.1988	.2017	.1664	.1146	.0666	.0327
	6	.0000	.0002	.0052	.0301	.0816	.1436	.1873	.1941	.1655	.1181	.0708
	7	.0000	.0000	.0010	.0091	.0350	.0820	.1376	.1792	.1892	.1657	.1214
	8	.0000	.0000	.0002	.0022	.0120	.0376	.0811	.1327	.1734	.1864	.1669
	9	.0000	.0000	.0000	.0004	.0033	.0139	.0386	.0794	.1284	.1694	.1855
	10	.0000	.0000	.0000	.0001	.0008	.0042	.0149	.0385	.0771	.1248	.1669
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0010	.0046	.0151	.0374	.0742	.1214
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0012	.0047	.0145	.0354	.0708
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0012	.0045	.0134	.0327
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0011	.0039	.0117
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0009	.0031
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006
	17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
	18	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
19	0	.8262	.3774	.1351	.0456	.0144	.0042	.0011	.0003	.0001	.0000	.0000
	1	.1586	.3774	.2852	.1529	.0685	.0268	.0093	.0029	.0008	.0002	.0000
	2	.0144	.1787	.2852	.2428	.1540	.0803	.0358	.0138	.0046	.0013	.0003
	3	.0008	.0533	.1796	.2428	.2182	.1517	.0869	.0422	.0175	.0062	.0018
	4	.0000	.0112	.0798	.1714	.2182	.2023	.1491	.0909	.0467	.0203	.0074
	5	.0000	.0018	.0266	.0907	.1636	.2023	.1916	.1468	.0933	.0497	.0222
	6	.0000	.0002	.0069	.0374	.0955	.1574	.1916	.1844	.1451	.0949	.0518
	7	.0000	.0000	.0014	.0122	.0443	.0974	.1525	.1844	.1797	.1443	.0961
	8	.0000	.0000	.0002	.0032	.0166	.0487	.0981	.1489	.1797	.1771	.1442
	9	.0000	.0000	.0000	.0007	.0051	.0198	.0514	.0980	.1464	.1771	.1762
	10	.0000	.0000	.0000	.0001	.0013	.0066	.0220	.0528	.0976	.1449	.1762
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0018	.0077	.0233	.0532	.0970	.1442
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0004	.0022	.0083	.0237	.0529	.0961
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0024	.0085	.0233	.0518
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006	.0024	.0082	.0222
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0022	.0074
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0018
	17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003

Table 2 (Continued)

n	x	.01	.05	.10	.15	.20	.25	p .30	.35	.40	.45	.50
	18	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	19	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
20	0	.8179	.3585	.1216	.0388	.0115	.0032	.0008	.0002	.0000	.0000	.0000
	1	.1652	.3774	.2702	.1368	.0576	.0211	.0068	.0020	.0005	.0001	.0000
	2	.0159	.1887	.2852	.2293	.1369	.0669	.0278	.0100	.0031	.0008	.0002
	3	.0010	.0596	.1901	.2428	.2054	.1339	.0716	.0323	.0123	.0040	.0011
	4	.0000	.0133	.0898	.1821	.2182	.1897	.1304	.0738	.0350	.0139	.0046
	5	.0000	.0022	.0319	.1028	.1746	.2023	.1789	.1272	.0746	.0365	.0148
	6	.0000	.0003	.0089	.0454	.1091	.1686	.1916	.1712	.1244	.0746	.0370
	7	.0000	.0000	.0020	.0160	.0545	.1124	.1643	.1844	.1659	.1221	.0739
	8	.0000	.0000	.0004	.0046	.0222	.0609	.1144	.1614	.1797	.1623	.1201
	9	.0000	.0000	.0001	.0011	.0074	.0271	.0654	.1158	.1597	.1771	.1602
	10	.0000	.0000	.0000	.0002	.0020	.0099	.0308	.0686	.1171	.1593	.1762
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0005	.0030	.0120	.0336	.0710	.1185	.1602
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0008	.0039	.0136	.0355	.0727	.1201
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0010	.0045	.0146	.0366	.0739
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0012	.0049	.0150	.0370
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0013	.0049	.0148
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0013	.0046
	17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0011
	18	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002
	19	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	20	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
25	0	.7778	.2774	.0716	.0172	.0038	.0008	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.1964	.3650	.1994	.0759	.0236	.0063	.0014	.0003	.0000	.0000	.0000
	2	.0238	.2305	.2659	.1607	.0708	.0251	.0074	.0018	.0004	.0001	.0000
	3	.0018	.0930	.2265	.2174	.1358	.0641	.0243	.0076	.0019	.0004	.0001
	4	.0001	.0269	.1384	.2110	.1867	.1175	.0572	.0224	.0071	.0018	.0004
	5	.0000	.0060	.0646	.1564	.1960	.1645	.1030	.0506	.0199	.0063	.0016
	6	.0000	.0010	.0239	.0920	.1633	.1828	.1472	.0908	.0442	.0172	.0053
	7	.0000	.0001	.0072	.0441	.1108	.1654	.1712	.1327	.0800	.0381	.0143
	8	.0000	.0000	.0018	.0175	.0623	.1241	.1651	.1607	.1200	.0701	.0322
	9	.0000	.0000	.0004	.0058	.0294	.0781	.1336	.1635	.1511	.1084	.0609
	10	.0000	.0000	.0000	.0016	.0118	.0417	.0916	.1409	.1612	.1419	.0974
	11	.0000	.0000	.0000	.0004	.0040	.0189	.0536	.1034	.1465	.1583	.1328
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0012	.0074	.0268	.0650	.1140	.1511	.1550
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0025	.0115	.0350	.0760	.1236	.1550
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0007	.0042	.0161	.0434	.0867	.1328
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0013	.0064	.0212	.0520	.0974
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0004	.0021	.0088	.0266	.0609
	17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006	.0031	.0115	.0322
	18	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0009	.0042	.0143
	19	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0013	.0053

Table 2 (Continued)

n	x	.01	.05	.10	.15	.20	.25	p .30	.35	.40	.45	.50
25	20	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0016
	21	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0004
	22	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
30	0	.7397	.2146	.0424	.0076	.0012	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.2242	.3389	.1413	.0404	.0093	.0018	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.0328	.2586	.2277	.1034	.0337	.0086	.0018	.0003	.0000	.0000	.0000
	3	.0031	.1270	.2361	.1703	.0785	.0269	.0072	.0015	.0003	.0000	.0000
	4	.0002	.0451	.1771	.2028	.1325	.0604	.0208	.0056	.0012	.0002	.0000
	5	.0000	.0124	.1023	.1861	.1723	.1047	.0464	.0157	.0041	.0008	.0001
	6	.0000	.0027	.0474	.1368	.1795	.1455	.0829	.0353	.0115	.0029	.0006
	7	.0000	.0005	.0180	.0828	.1538	.1662	.1219	.0652	.0263	.0081	.0019
	8	.0000	.0001	.0058	.0420	.1106	.1593	.1501	.1009	.0505	.0191	.0055
	9	.0000	.0000	.0016	.0181	.0676	.1298	.1573	.1328	.0823	.0382	.0133
	10	.0000	.0000	.0004	.0067	.0355	.0909	.1416	.1502	.1152	.0656	.0280
	11	.0000	.0000	.0001	.0022	.0161	.0551	.1103	.1471	.1396	.0976	.0509
	12	.0000	.0000	.0000	.0006	.0064	.0291	.0749	.1254	.1474	.1265	.0806
	13	.0000	.0000	.0000	.0001	.0022	.0134	.0444	.0935	.1360	.1433	.1115
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0007	.0054	.0231	.0611	.1101	.1424	.1354
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0019	.0106	.0351	.0783	.1242	.1445
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0006	.0042	.0177	.0489	.0953	.1354
	17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0015	.0079	.0269	.0642	.1115
	18	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0005	.0031	.0129	.0379	.0806
	19	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0010	.0054	.0196	.0509
	20	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0020	.0088	.0280
	21	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006	.0034	.0133
	22	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0012	.0055
	23	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0019
	24	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006
	25	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

Table 3 **Individual Poisson Distribution**

x	λ = 0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	.9048	.8187	.7408	.6703	.6065	.5488	.4966	.4493	.4066	.3679
1	.0905	.1637	.2222	.2681	.3033	.3293	.3476	.3595	.3659	.3679
2	.0045	.0164	.0333	.0536	.0758	.0988	.1217	.1438	.1647	.1839
3	.0002	.0011	.0033	.0072	.0126	.0198	.0284	.0383	.0494	.0613
4	.0000	.0001	.0002	.0007	.0016	.0030	.0050	.0077	.0111	.0153
5	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004	.0007	.0012	.0020	.0031
6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0003	.0005
7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

x	λ = 1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
0	.3329	.3012	.2725	.2466	.2231	.2019	.1827	.1653	.1496	.1353
1	.3662	.3614	.3543	.3452	.3347	.3230	.3106	.2975	.2842	.2707
2	.2014	.2169	.2303	.2417	.2510	.2584	.2640	.2678	.2700	.2707
3	.0738	.0867	.0998	.1128	.1255	.1378	.1496	.1607	.1710	.1804
4	.0203	.0260	.0324	.0395	.0471	.0551	.0636	.0723	.0812	.0902
5	.0045	.0062	.0084	.0111	.0141	.0176	.0216	.0260	.0309	.0361
6	.0008	.0012	.0018	.0026	.0035	.0047	.0061	.0078	.0098	.0120
7	.0001	.0002	.0003	.0005	.0008	.0011	.0015	.0020	.0027	.0034
8	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0003	.0005	.0006	.0009
9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002

x	λ = 2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
0	.1225	.1108	.1003	.0907	.0821	.0743	.0672	.0608	.0550	.0498
1	.2572	.2438	.2306	.2177	.2052	.1931	.1815	.1703	.1596	.1494
2	.2700	.2681	.2652	.2613	.2565	.2510	.2450	.2384	.2314	.2240
3	.1890	.1966	.2033	.2090	.2138	.2176	.2205	.2225	.2237	.2240
4	.0992	.1082	.1169	.1254	.1336	.1414	.1488	.1557	.1622	.1680
5	.0417	.0476	.0538	.0602	.0668	.0735	.0804	.0872	.0940	.1008
6	.0146	.0174	.0206	.0241	.0278	.0319	.0362	.0407	.0455	.0504
7	.0044	.0055	.0068	.0083	.0099	.0118	.0139	.0163	.0188	.0216
8	.0011	.0015	.0019	.0025	.0031	.0038	.0047	.0057	.0068	.0081
9	.0003	.0004	.0005	.0007	.0009	.0011	.0014	.0018	.0022	.0027
10	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0004	.0005	.0006	.0008
11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002
12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

† Reproduced by permission from *Handbook of Probability and Statistics with Tables*, by R. S. Burington and D. C. May, Jr. New York: McGraw-Hill Book Company, 1953.

Table 3 (Continued)

x	λ 3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0
0	.0450	.0408	.0369	.0334	.0302	.0273	.0247	.0224	.0202	.0183
1	.1397	.1304	.1217	.1135	.1057	.0984	.0915	.0850	.0789	.0733
2	.2165	.2087	.2008	.1929	.1850	.1771	.1692	.1615	.1539	.1465
3	.2237	.2226	.2209	.2186	.2158	.2125	.2087	.2046	.2001	.1954
4	.1734	.1781	.1823	.1858	.1888	.1912	.1931	.1944	.1951	.1954
5	.1075	.1140	.1203	.1264	.1322	.1377	.1429	.1477	.1522	.1563
6	.0555	.0608	.0662	.0716	.0771	.0826	.0881	.0936	.0989	.1042
7	.0246	.0278	.0312	.0348	.0385	.0425	.0466	.0508	.0551	.0595
8	.0095	.0111	.0129	.0148	.0169	.0191	.0215	.0241	.0269	.0298
9	.0033	.0040	.0047	.0056	.0066	.0076	.0089	.0102	.0116	.0132
10	.0010	.0013	.0016	.0019	.0023	.0028	.0033	.0039	.0045	.0053
11	.0003	.0004	.0005	.0006	.0007	.0009	.0011	.0013	.0016	.0019
12	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0005	.0006
13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002
14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

x	λ 4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	5.0
0	.0166	.0150	.0136	.0123	.0111	.0101	.0091	.0082	.0074	.0067
1	.0679	.0630	.0583	.0540	.0500	.0462	.0427	.0395	.0365	.0337
2	.1393	.1323	.1254	.1188	.1125	.1063	.1005	.0948	.0894	.0842
3	.1904	.1852	.1798	.1743	.1687	.1631	.1574	.1517	.1460	.1404
4	.1951	.1944	.1933	.1917	.1898	.1875	.1849	.1820	.1789	.1755
5	.1600	.1633	.1662	.1687	.1708	.1725	.1738	.1747	.1753	.1755
6	.1093	.1143	.1191	.1237	.1281	.1323	.1362	.1398	.1432	.1462
7	.0640	.0686	.0732	.0778	.0824	.0869	.0914	.0959	.1002	.1044
8	.0328	.0360	.0393	.0428	.0463	.0500	.0537	.0575	.0614	.0653
9	.0150	.0168	.0188	.0209	.0232	.0255	.0280	.0307	.0334	.0363
10	.0061	.0071	.0081	.0092	.0104	.0118	.0132	.0147	.0164	.0181
11	.0023	.0027	.0032	.0037	.0043	.0049	.0056	.0064	.0073	.0082
12	.0008	.0009	.0011	.0014	.0016	.0019	.0022	.0026	.0030	.0034
13	.0002	.0003	.0004	.0005	.0006	.0007	.0008	.0009	.0011	.0013
14	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0005
15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002

x	λ 5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6.0
0	.0061	.0055	.0050	.0045	.0041	.0037	.0033	.0030	.0027	.0025
1	.0311	.0287	.0265	.0244	.0225	.0207	.0191	.0176	.0162	.0149
2	.0793	.0746	.0701	.0659	.0618	.0580	.0544	.0509	.0477	.0446
3	.1348	.1293	.1239	.1185	.1133	.1082	.1033	.0985	.0938	.0892
4	.1719	.1681	.1641	.1600	.1558	.1515	.1472	.1428	.1383	.1339

Table 3 (Continued)

x	λ 5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6.0
5	.1753	.1748	.1740	.1728	.1714	.1697	.1678	.1656	.1632	.1606
6	.1490	.1515	.1537	.1555	.1571	.1584	.1594	.1601	.1605	.1606
7	.1086	.1125	.1163	.1200	.1234	.1267	.1298	.1326	.1353	.1377
8	.0692	.0731	.0771	.0810	.0849	.0887	.0925	.0962	.0998	.1033
9	.0392	.0423	.0454	.0486	.0519	.0552	.0586	.0620	.0654	.0688
10	.0200	.0220	.0241	.0262	.0285	.0309	.0334	.0359	.0386	.0413
11	.0093	.0104	.0116	.0129	.0143	.0157	.0173	.0190	.0207	.0225
12	.0039	.0045	.0051	.0058	.0065	.0073	.0082	.0092	.0102	.0113
13	.0015	.0018	.0021	.0024	.0028	.0032	.0036	.0041	.0046	.0052
14	.0006	.0007	.0008	.0009	.0011	.0013	.0015	.0017	.0019	.0022
15	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0005	.0006	.0007	.0008	.0009
16	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003
17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001

x	λ 6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7	6.8	6.9	7.0
0	.0022	.0020	.0018	.0017	.0015	.0014	.0012	.0011	.0010	.0009
1	.0137	.0126	.0116	.0106	.0098	.0090	.0082	.0076	.0070	.0064
2	.0417	.0390	.0364	.0340	.0318	.0296	.0276	.0258	.0240	.0223
3	.0848	.0806	.0765	.0726	.0688	.0652	.0617	.0584	.0552	.0521
4	.1294	.1249	.1205	.1162	.1118	.1076	.1034	.0992	.0952	.0912
5	.1579	.1549	.1519	.1487	.1454	.1420	.1385	.1349	.1314	.1277
6	.1605	.1601	.1595	.1586	.1575	.1562	.1546	.1529	.1511	.1490
7	.1399	.1418	.1435	.1450	.1462	.1472	.1480	.1486	.1489	.1490
8	.1066	.1099	.1130	.1160	.1188	.1215	.1240	.1263	.1284	.1304
9	.0723	.0757	.0791	.0825	.0858	.0891	.0923	.0954	.0985	.1014
10	.0441	.0469	.0498	.0528	.0558	.0588	.0618	.0649	.0679	.0710
11	.0245	.0265	.0285	.0307	.0330	.0353	.0377	.0401	.0426	.0452
12	.0124	.0137	.0150	.0164	.0179	.0194	.0210	.0227	.0245	.0264
13	.0058	.0065	.0073	.0081	.0089	.0098	.0108	.0119	.0130	.0142
14	.0025	.0029	.0033	.0037	.0041	.0046	.0052	.0058	.0064	.0071
15	.0010	.0012	.0014	.0016	.0018	.0020	.0023	.0026	.0029	.0033
16	.0004	.0005	.0005	.0006	.0007	.0008	.0010	.0011	.0013	.0014
17	.0001	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0004	.0005	.0006
18	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002
19	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001

x	λ 7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9	8.0
0	.0008	.0007	.0007	.0006	.0006	.0005	.0005	.0004	.0004	.0003
1	.0059	.0054	.0049	.0045	.0041	.0038	.0035	.0032	.0029	.0027
2	.0208	.0194	.0180	.0167	.0156	.0145	.0134	.0125	.0116	.0107
3	.0492	.0464	.0438	.0413	.0389	.0366	.0345	.0324	.0305	.0286
4	.0874	.0836	.0799	.0764	.0729	.0696	.0663	.0632	.0602	.0573
5	.1241	.1204	.1167	.1130	.1094	.1057	.1021	.0986	.0951	.0916
6	.1468	.1445	.1420	.1394	.1367	.1339	.1311	.1282	.1252	.1221
7	.1489	.1486	.1481	.1474	.1465	.1454	.1442	.1428	.1413	.1396
8	.1321	.1337	.1351	.1363	.1373	.1382	.1388	.1392	.1395	.1396
9	.1042	.1070	.1096	.1121	.1144	.1167	.1187	.1207	.1224	.1241

Table 3 (Continued)

x	λ 7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9	8.0
10	.0740	.0770	.0800	.0829	.0858	.0887	.0914	.0941	.0967	.0993
11	.0478	.0504	.0531	.0558	.0585	.0613	.0640	.0667	.0695	.0722
12	.0283	.0303	.0323	.0344	.0366	.0388	.0411	.0434	.0457	.0481
13	.0154	.0168	.0181	.0196	.0211	.0227	.0243	.0260	.0278	.0296
14	.0078	.0086	.0095	.0104	.0113	.0123	.0134	.0145	.0157	.0169
15	.0037	.0041	.0046	.0051	.0057	.0062	.0069	.0075	.0083	.0090
16	.0016	.0019	.0021	.0024	.0026	.0030	.0033	.0037	.0041	.0045
17	.0007	.0008	.0009	.0010	.0012	.0013	.0015	.0017	.0019	.0021
18	.0003	.0003	.0004	.0004	.0005	.0006	.0006	.0007	.0008	.0009
19	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003	.0003	.0004
20	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002
21	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001

x	λ 8.1	8.2	8.3	8.4	8.5	8.6	8.7	8.8	8.9	9.0
0	.0003	.0003	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0001	.0001
1	.0025	.0023	.0021	.0019	.0017	.0016	.0014	.0013	.0012	.0011
2	.0100	.0092	.0086	.0079	.0074	.0068	.0063	.0058	.0054	.0050
3	.0269	.0252	.0237	.0222	.0208	.0195	.0183	.0171	.0160	.0150
4	.0544	.0517	.0491	.0466	.0443	.0420	.0398	.0377	.0357	.0337
5	.0882	.0849	.0816	.0784	.0752	.0722	.0692	.0663	.0635	.0607
6	.1191	.1160	.1128	.1097	.1066	.1034	.1003	.0972	.0941	.0911
7	.1378	.1358	.1338	.1317	.1294	.1271	.1247	.1222	.1197	.1171
8	.1395	.1392	.1388	.1382	.1375	.1366	.1356	.1344	.1332	.1318
9	.1256	.1269	.1280	.1290	.1299	.1306	.1311	.1315	.1317	.1318
10	.1017	.1040	.1063	.1084	.1104	.1123	.1140	.1157	.1172	.1186
11	.0749	.0776	.0802	.0828	.0853	.0878	.0902	.0925	.0948	.0970
12	.0505	.0530	.0555	.0579	.0604	.0629	.0654	.0679	.0703	.0728
13	.0315	.0334	.0354	.0374	.0395	.0416	.0438	.0459	.0481	.0504
14	.0182	.0196	.0210	.0225	.0240	.0256	.0272	.0289	.0306	.0324
15	.0098	.0107	.0116	.0126	.0136	.0147	.0158	.0169	.0182	.0194
16	.0050	.0055	.0060	.0066	.0072	.0079	.0086	.0093	.0101	.0109
17	.0024	.0026	.0029	.0033	.0036	.0040	.0044	.0048	.0053	.0058
18	.0011	.0012	.0014	.0015	.0017	.0019	.0021	.0024	.0026	.0029
19	.0005	.0005	.0006	.0007	.0008	.0009	.0010	.0011	.0012	.0014
20	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0004	.0005	.0005	.0006
21	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0002	.0003
22	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001

x	λ 9.1	9.2	9.3	9.4	9.5	9.6	9.7	9.8	9.9	10
0	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0000
1	.0010	.0009	.0009	.0008	.0007	.0007	.0006	.0005	.0005	.0005
2	.0046	.0043	.0040	.0037	.0034	.0031	.0029	.0027	.0025	.0023
3	.0140	.0131	.0123	.0115	.0107	.0100	.0093	.0087	.0081	.0076
4	.0319	.0302	.0285	.0269	.0254	.0240	.0226	.0213	.0201	.0189

Table 3 (Continued)

x	λ = 9.1	9.2	9.3	9.4	9.5	9.6	9.7	9.8	9.9	10
5	.0581	.0555	.0530	.0506	.0483	.0460	.0439	.0418	.0398	.0378
6	.0881	.0851	.0822	.0793	.0764	.0736	.0709	.0682	.0656	.0631
7	.1145	.1118	.1091	.1064	.1037	.1010	.0982	.0955	.0928	.0901
8	.1302	.1286	.1269	.1251	.1232	.1212	.1191	.1170	.1148	.1126
9	.1317	.1315	.1311	.1306	.1300	.1293	.1284	.1274	.1263	.1251
10	.1198	.1210	.1219	.1228	.1235	.1241	.1245	.1249	.1250	.1251
11	.0991	.1012	.1031	.1049	.1067	.1083	.1098	.1112	.1125	.1137
12	.0752	.0776	.0799	.0822	.0844	.0866	.0888	.0908	.0928	.0948
13	.0526	.0549	.0572	.0594	.0617	.0640	.0662	.0685	.0707	.0729
14	.0342	.0361	.0380	.0399	.0419	.0439	.0459	.0479	.0500	.0521
15	.0208	.0221	.0235	.0250	.0265	.0281	.0297	.0313	.0330	.0347
16	.0118	.0127	.0137	.0147	.0157	.0168	.0180	.0192	.0204	.0217
17	.0063	.0069	.0075	.0081	.0088	.0095	.0103	.0111	.0119	.0128
18	.0032	.0035	.0039	.0042	.0046	.0051	.0055	.0060	.0065	.0071
19	.0015	.0017	.0019	.0021	.0023	.0026	.0028	.0031	.0034	.0037
20	.0007	.0008	.0009	.0010	.0011	.0012	.0014	.0015	.0017	.0019
21	.0003	.0003	.0004	.0004	.0005	.0006	.0006	.0007	.0008	.0009
22	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0004
23	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002
24	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001

x	λ = 11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
1	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
2	.0010	.0004	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
3	.0037	.0018	.0008	.0004	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
4	.0102	.0053	.0027	.0013	.0006	.0003	.0001	.0001	.0000	.0000
5	.0224	.0127	.0070	.0037	.0019	.0010	.0005	.0002	.0001	.0001
6	.0411	.0255	.0152	.0087	.0048	.0026	.0014	.0007	.0004	.0002
7	.0646	.0437	.0281	.0174	.0104	.0060	.0034	.0018	.0010	.0005
8	.0888	.0655	.0457	.0304	.0194	.0120	.0072	.0042	.0024	.0013
9	.1085	.0874	.0661	.0473	.0324	.0213	.0135	.0083	.0050	.0029
10	.1194	.1048	.0859	.0663	.0486	.0341	.0230	.0150	.0095	.0058
11	.1194	.1144	.1015	.0844	.0663	.0496	.0355	.0245	.0164	.0106
12	.1094	.1144	.1099	.0984	.0829	.0661	.0504	.0368	.0259	.0176
13	.0926	.1056	.1099	.1060	.0956	.0814	.0658	.0509	.0378	.0271
14	.0728	.0905	.1021	.1060	.1024	.0930	.0800	.0655	.0514	.0387
15	.0534	.0724	.0885	.0989	.1024	.0992	.0906	.0786	.0650	.0516
16	.0367	.0543	.0719	.0866	.0960	.0992	.0963	.0884	.0772	.0646
17	.0237	.0383	.0550	.0713	.0847	.0934	.0963	.0936	.0863	.0760
18	.0145	.0256	.0397	.0554	.0706	.0830	.0909	.0936	.0911	.0844
19	.0084	.0161	.0272	.0409	.0557	.0699	.0814	.0887	.0911	.0888
20	.0046	.0097	.0177	.0286	.0418	.0559	.0692	.0798	.0866	.0888
21	.0024	.0055	.0109	.0191	.0299	.0426	.0560	.0684	.0783	.0846
22	.0012	.0030	.0065	.0121	.0204	.0310	.0433	.0560	.0676	.0769
23	.0006	.0016	.0037	.0074	.0133	.0216	.0320	.0438	.0559	.0669
24	.0003	.0008	.0020	.0043	.0083	.0144	.0226	.0328	.0442	.0557

Table 3 (Continued)

	λ									
x	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
25	.0001	.0004	.0010	.0024	.0050	.0092	.0154	.0237	.0336	.0446
26	.0000	.0002	.0005	.0013	.0029	.0057	.0101	.0164	.0246	.0343
27	.0000	.0001	.0002	.0007	.0016	.0034	.0063	.0109	.0173	.0254
28	.0000	.0000	.0001	.0003	.0009	.0019	.0038	.0070	.0117	.0181
29	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004	.0011	.0023	.0044	.0077	.0125
30	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0006	.0013	.0026	.0049	.0083
31	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0007	.0015	.0030	.0054
32	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0004	.0009	.0018	.0034
33	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0005	.0010	.0020
34	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0006	.0012
35	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0007
36	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004
37	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002
38	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
39	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

ประวัติคณะผู้ดำเนินการวิจัย

หัวหน้าโครงการวิจัย

นางสุรีย์ ชูประทีป

Mrs. Suree CHOOPRATEEP

ตำแหน่งทางวิชาการ อาจารย์ ระดับ 7

ประวัติการศึกษา
- วท.บ. (สถิติ) มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ (2524)
- วท.ม. (สถิติประยุกต์) มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ (2534)

ประวัติการทำงาน
- เจ้าหน้าที่วิเคราะห์นโยบายและแผน ระดับ 6 คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ (2526)
- อาจารย์ประจำภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ (2536 - ปัจจุบัน)

ประสบการณ์ในงานวิจัยและความชำนาญเฉพาะด้าน
- งานวิจัยเชิงสำรวจ และวิเคราะห์ข้อมูลทางสถิติ

ผลงานวิจัยที่พิมพ์ออกเผยแพร่แล้ว
- ภาวะการหางานทำและอาชีพของบัณฑิต คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ รุ่นที่ 19-23
- กิจการวิจัยของคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ในช่วงแผนพัฒนาการศึกษา ระยะที่ 5 (2525 - 2529)
- สัมฤทธิ์ผลทางการศึกษาของนักศึกษาระดับปริญญาตรี คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
- ค่าใช้จ่ายต่อหัวนักศึกษาในช่วงแผนพัฒนาการศึกษาระยะที่ 6 (พ.ศ. 2520-2534) คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
- ทัศนคติของประชาชนในเขตภาคเหนือตอนบน ที่มีต่อสภาพเศษฐกิจ สังคมและขนบธรรมเนียม ประเพณี วัฒนธรรมภาคเหนือ
- ทัศนคติของข้าราชการมหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ในสาขาวิชาที่ขาดแคลนที่มีต่อระบบราชการ

ผู้ร่วมวิจัย

นายปรีชา ล่ามช้าง

Mr. Preecha LAMCHANG

ตำแหน่งทางวิชาการ รองศาสตราจารย์ระดับ 8

ประวัติการศึกษา
- วท.บ. (สถิติ) มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ (2524)
- สต.ม. จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย (2526)
- Cert. in Computer System Technology (Software) CICC, JAPAN. (2531)

ประวัติการทำงาน
- อาจารย์ประจำคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร กรุงเทพมหานคร (2526-2531)
- อาจารย์ประจำภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ (2531-2535)
- ผู้ช่วยศาสตราจารย์ประจำภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ (2535 - 2538)
- รองศาสตราจารย์ประจำภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ (2538 - ปัจจุบัน)

ประสบการณ์ในงานวิจัยและความชำนาญเฉพาะด้าน
- การวิเคราะห์ระบบ และ การใช้คอมพิวเตอร์สำหรับการวิเคราะห์ข้อมูล
- งานวิจัยเชิงสำรวจ

ผลงานวิจัยที่พิมพ์ออกเผยแพร่แล้ว
- การศึกษาปัญหาการใช้เครื่องมือเครื่องใช้ในการผลิตเครื่องปั้นดินเผา ในเขตชนบทภาคเหนือตอนบน (2532)
- การศึกษาปัญหาการใช้เครื่องมือเครื่องใช้ในการผลิตเครื่องปั้นดินเผา ในเขตชนบทภาคเหนือตอนล่าง (2533)
- โครงการจัดทำฐานข้อมูลแหล่งกิจการ และที่มาของเทคโนโลยีการผลิตเครื่องปั้นดินเผา ในเขตชนบทภาคเหนือ (2533)
- ศึกษาสภาพการเรียนการสอนความน่าจะเป็นและสถิติเบื้องต้นในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย เขตภาคเหนือ (2534)
- ทัศนคติของประชาชนในเขตภาคเหนือตอนบน ที่มีต่อสภาพเศษฐกิจ สังคมและขนบธรรมเนียม ประเพณี วัฒนธรรมภาคเหนือ
- ทัศนคติของข้าราชการมหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ในสาขาวิชาที่ขาดแคลนที่มีต่อระบบราชการ